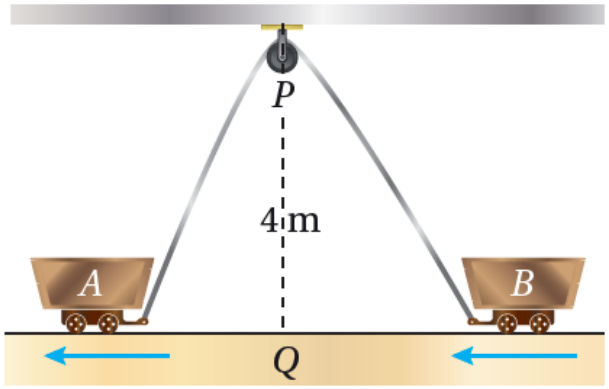
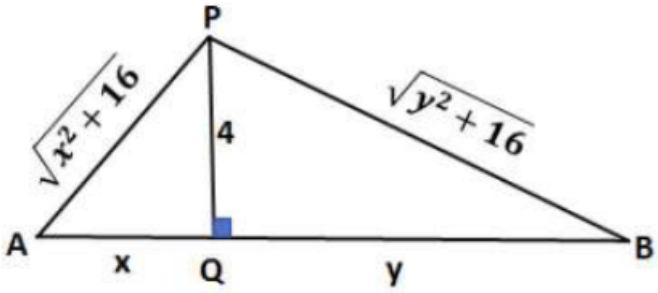
مهارات التفكير العليا

المعدلات المرتبطة



(28) تبرير: رُبطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m ، وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3 m من النقطة Q ، مبرراً إجابتي.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى:

$\frac{dx}{dt} = 0.5 m/s$

المطلوب:

$\frac{dy}{dt}|_{x=3}$

طول الحبل:

$AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$

عندما $x = 3$ فإن:

$\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \rightarrow y = 33\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12x\frac{dx}{dt}\sqrt{x^2+16} + y\frac{dy}{dt}\sqrt{y^2+16} = 0\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2+16}{x^2+16}}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}|_{x=3} = -\frac{3}{3}\sqrt{\frac{3^2+16}{3^2+16}}\frac{3}{25}\times 0.$

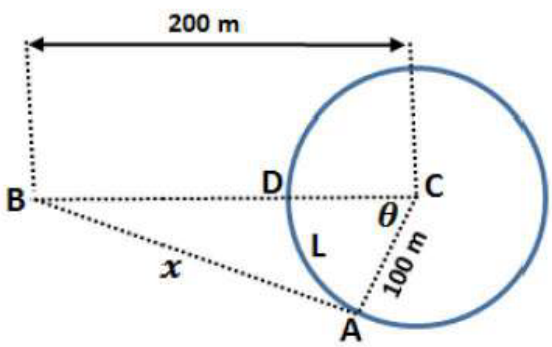
$5=-211033m/s$

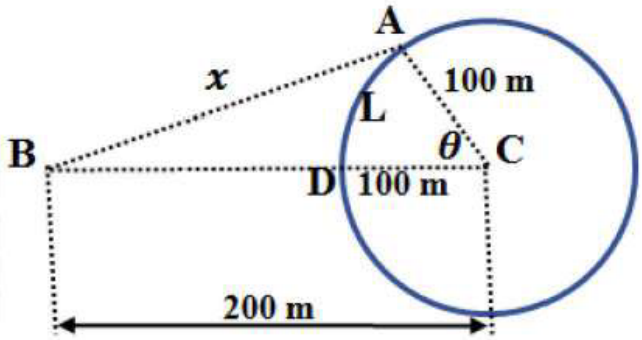
إذن، تقترب العربة من النقطة Q بسرعة مقدارها $211033m/s$ B

(29) تبرير: يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100 m ، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s ، ويقف عداء آخر على بعد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m .

تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.

ليكن العداء الأول A والعداء الثاني B والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD . توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسم الآتي:





الحالة الأولى: العداء A إلى يمين B

Lالمعطى: (لتكن متناقصة)، ويكون:

$dLdt=-7m/s$

المطلوب:

$dxdt|x=200m$

$L=r\theta=100\theta\rightarrow dLdt=100d\theta dt\rightarrow d\theta dt=-0.07rad/sx2=(200)2+(100)2-2(200)(100)cos\theta x2=50000-40000cos\theta 2xdxdt=40000sin\theta d\theta dtdxdt=20000sin\theta xd\theta dtcos\theta=50000-x240000$

عندما $x = 200$ فإن:

$cos\theta=50000-4000040000=14$

ومنه:

$$\sin\theta=154\frac{dx}{dt}|_{x=200}=\frac{20000}{154200}\times-0.07=-7154m/s$$

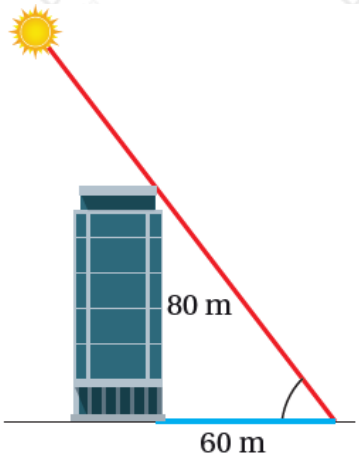
الحالة الثانية: العداء A إلى يسار B

عندئذ يتزايد طول القوس L ، ويكون $\frac{dL}{dt}=7$، ويكون $\frac{d\theta}{dt}=0.07rad/s$ ، وعليه فإن:

$$\frac{dx}{dt}|_{x=200}=\frac{20000}{154200}\times0.07=7154m/s$$

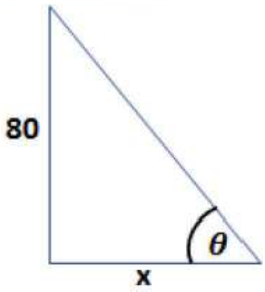
إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها 7154m/s

(30) تحدّ: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m ، فكان طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علماً بأنّ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً.



إرشاد: تُكمل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

ليكن x طول ظل المبنى ، وزاوية ارتفاع الشمس θ .



الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً، يعني أن الزاوية θ متزايدة.

المعطى:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi rad}{24h}=\frac{\pi}{12}\frac{rad}{h}=\frac{\pi rad}{12\times60min}=\frac{\pi}{720}rad/min$$

المطلوب:

$$\frac{dx}{dt}|_{x=60}$$

العلاقة التي تربط المتغيرين هي:

$$\tan\theta=\frac{80}{x}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{80}{x^2}\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}=-x^2\sec^2\theta80\times\frac{d\theta}{dt}$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي:

$$100=80^2+60^2$$

ومنه: $\theta=\frac{60}{100}=53sec$

إذن:

$$\frac{dx}{dt}|_{x=60}=-\frac{60^2}{80}(\frac{25}{9})\times\frac{\pi}{720}=-\frac{25\pi}{144}m/min$$

لتحويل الوحدة إلى cm/min نضرب السرعة في 100 ، فتكون:

$$\frac{dx}{dt}|_{x=60}=-2500\frac{\pi}{144}cm/min$$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 تقريباً cm/min.