أتدرب وأحل المسائل

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(1) f(x)=x32x−1

f(x)=x32x−1f′(x)=(2x−1)(3x2)−(x3)(2)(2x−1)2=4x3−3x2(2x−1)2

(2) f(x)=x3sec x

f(x)=x3secxf′(x)=(x3)(secx tanx)+(secx)(3x2)=x3secx tanx+3x2sec x

(3) f(x)=x+1cos x

f(x)=x+1cosxf′(x)=(cosx)(1)−(x+1)(−sinx)(cosx)2=cosx+xsinx+sin xcos2x

(4) f(x)=ex(tan x−x)

f(x)=ex(tanx−x)f′(x)=(ex)(sec2x−1)+(tanx−x)(ex)=extan2x+extanx −xex

(5) f(x)=sin x+cos xex

f(x)=sinx+cosxexf′(x)=(ex)(cosx−sinx)−(sinx+cosx)(ex)(ex)2=−2si nxex

(6) f(x)=x3sin x+x2cos x

f(x)=x3sin x+x2cos xf′(x)=(x3)(cos x)+(sin x)(3x2)+(x2)(−sin x)+(c os x)(2x)=x3cos x+2x2sin x+2xcos x

(7) f(x)=x3(x+3)

f(x)=x3(x+3)=x56+3x13f′(x)=56x−16+x−23=566+1x23

(8) f(x)=1+sec x1−sec x

$f(x)=1+\sec x1-\sec xf'(x)=(1-\sec x)(\sec x\tan x)-(1+\sec x)(-\sec x\tan x)(1-\sec x)2=2\sec x\tan x(1-\sec x)2$

(9) $f(x)=2-1xx-3$

$f(x)=2-1xx-3=2x-1x2-3xf'(x)=(x2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)(x2-3x)2=-2x2+2x-3(x2-3x)2$

(10) $f(x)=(x3-x)(x2+2)(x2+x+1)$

$f(x)=(x3-x)(x2+2)(x2+x+1)f'(x)=(x3-x)((x2+2)(2x+1)+(x2+x+1)(2x))+(x2+2)(x2+x+1)(3x2-1)=(x3-x)(x2+2)(2x+1)+(x3-x)(x2+x+1)(2x)+(x2+2)(x2+x+1)(3x2-1)$

(11) $f(x)=(\csc x+\cot x)-1$

$f(x)=(\csc x+\cot x)-1=1\csc x+\cot xf'(x)=-1(-\csc x\cot x-\csc2 x)(\csc x+\cot x)2=\csc x\cot x+\csc2 x(\csc x+\cot x)2=\csc x(\cot x+\csc x)(\csc x+\cot x)2=\csc x\cot x+\csc x$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ، وكان:

$f(0)=5,\ f'(0)=-3,\ g(0)=-1,\ g'(0)=2$ فأجد كلاً ممّا يأتي:

(12) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)=5\times2-1\times-3=13$

(13) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0)=g(0)f'(0)-f(0)g'(0)g2(0)=-1\times-3-5\times2(-1)2=-7$

(14) $(7f-2fg)'(0)$

$(7f-2fg)'(0)=7f'(0)-2(fg)'(0)=7(-3)-2(13)=-47$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

(15) $f(x)=x2-4x2+4\ ,\ x=-2$

$f(x)=x2-4x2+4f'(x)=(x2+4)(2x)-(x2-4)(2x)(x2+4)2=16x(x2+4)2f''(x)=(x2+4)2(16)-(16x)(2)(x2+4)1(2x)(x2+4)4=(16)(x2+4)-(16x)(2)(2x)(x2+4)3f''(-2)=(16)(8)-(-32)(2)(-4)(8)3=-14$

(16) $f(x)=1+x1+x3\ ,\ x=8$

$f(x)=1+x1+x3=(1+x3)(1-x3+x23)1+x3=1-x3+x23f'(x)=-13x-23+23x-13f''(x)=29x-53-29x-43=29x53-29x43f''(8)=29853-29843=29(132-116)=-1144$

(17) $f(x)=11+x\ ,\ x=4$

$f(x)=11+xf'(x)=-(12x)(1+x)2=-12x(1+x)2f''(x)=2x(2)(1+x)1(12x)+(1+x)2(1x)4x(1+x)4=2+1+xx4x(1+x)3f''(4)=2+1+2216(1+2)3=7864$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(18) $f(x)=1+x1+ex\ ,\ (0,12)$

$f(x)=1+x1+exf'(x)=(1+ex)(1)-(1+x)(ex)(1+ex)2=1-xex(1+ex)2$

ميل المماس عند النقطة (0, 12) هو: $f'(0) = (14$

معادلة المماس هي:

$y-12=14(x-0)\rightarrow y=14x+12$

(19) $f(x)=ex\cos x+\sin x,(0,1)$

$f(x)=ex\cos x+\sin xf'(x)=(ex)(-\sin x)+(\cos x)(ex)+\cos x$

ميل المماس عند النقطة (0, 1) هو:

$f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$

معادلة المماس هي:

$y-1=2(x-0)\rightarrow y=2x+1$

أثبت صحّة كلّ ممّا يأتي معتمداً أنّ $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$:

(20) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}(\frac{\cos x}{\sin x})=\frac{(\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$

(21) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$

$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos x})=\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$

(22) $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

$\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sin x})=\frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=-\csc x\cot x$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كلّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

(23) $f''(x)=2-2x, f'''(x)$

$f''(x)=2-2x\quad f'''(x)=2x^2$

(24) $f'''(x)=2x, f^{(4)}(x)$

$f'''(x)=2x\quad f^{(4)}(x)=1x$

(25) $f^{(4)}(x)=2x+1, f^{(6)}(x)$

$f^{(4)}(x)=2x+1\quad f^{(5)}(x)=2\quad f^{(6)}(x)=0$

(26) نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنّه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة هجينة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = 3t24+t2$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدّل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

h(t)=3t24+t2h′(t)=(4+t2)(6t)−(3t2)(2t)(4+t2)2=24t(4+t2)2

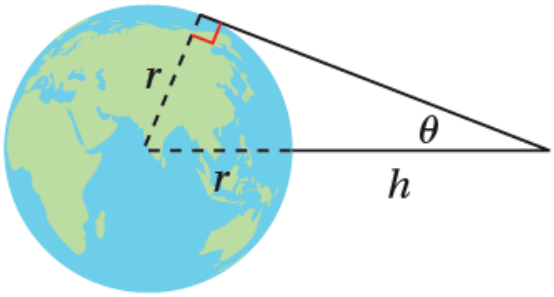
إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(27) أجد dydx ، و d2ydx2 .

dydx=(ex)(cos x)+(sin x)(ex)=ex(cos x+sin x)d2ydx2=ex(−sin x+cos x)+ex(cos x+sin x)=2excos x

(28) أثبت أنّ d2ydx2=2dydx−2y

2dydx−2y=2ex(cos x+sin x)−2ex sin x=2excos x=d2ydx2



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعرات لقياس الزاوية Θ (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومترات، و r يُمثل نصف قطر الأرض بالكيلومترات، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(29) أثبت أنّ $h = r(\csc \Theta - 1)$.

cscθ=r+hr→r+h=rcscθ→h=r(cscθ−1)

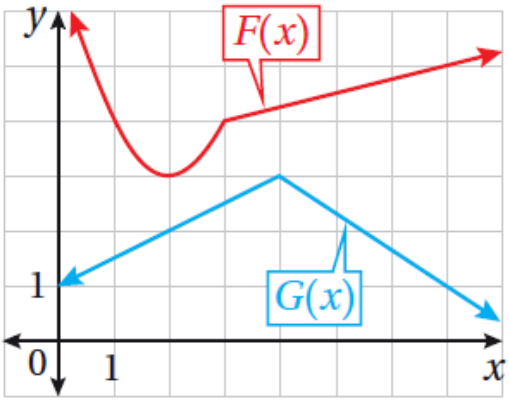
(30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى Θ عندما θ=π6rad (أفترض أن $r = 6371$ km).

dhdθ=r(−cscθ cotθ)dhdθ|θ=π6=6371(−cscπ6 cotπ6)=6371(−2×3)≈−22070km/rad

(31) إذا كان: f(x)=9lnx+12x2 ، فأثبت أنّ f′(x)=(3x−1)(3x+1)x3 .

f(x)=9lnx+12x2f′(x)=9(1x)+−1(4x)4x4=9x−1x3=9x2−1x3=(3x−1)(3x+1)x3

$F(x)$يبين الشكل المجاور منحنيي الاقتراني: ، و $G(x)$.



$P(x) = F(x)G(x)$إذا كان: ، وكان: F(x)G(x)$Q(x)$ = ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(32) $P'(2)$

P′(2)=F(2)G′(2)+G(2)F′(2)

G' (2) ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2, 2) و (4, 3) ويساوي

F' (2) ميل المماس الأفقي، ويساوي صفراً.

P′(2)=3×12+2×0=32

(33) $Q'(7)$

Q′(7)=G(7)F′(7)−F(7)G′(7)G2(7)=1×14−5×−231=4312