

## أدرب وأحل المسائل

### الاشتقاق الضمني

أجد  $dy/dx$  لكل ممّا يأتي:

$$(1) x^2 - 2y^2 = 4$$

$$2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

$$(2) x^2 + y^2 = 110$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2yx \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$(3) (x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$$

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2y \frac{dy}{dx}) = 50(2x - 2y \frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx} (yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$$

$$(4) e^x y = x e^y$$

$$(e^x) \frac{dy}{dx} + (y) (e^x) = (x) (e^y \frac{dy}{dx}) + (e^y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} (e^x - x e^y) = e^y - y e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$$

$$(5) 3^x = y - 2xy$$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} (1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$$

$$dydx = 2y + 3x \ln 31 - 2x$$

$$(6) x + y = 5$$

$$12x + dydx 2y = 0$$

$$dydx = -2y 2x = -yx$$

$$(7) x = \sec 1y$$

$$1 = -1y 2dydx \sec 1y \tan 1y$$

$$dydx = -y 2 \sec 1y \tan 1y = -y^2 \cos 1y \cot 1y$$

$$(8) (\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$$

$$2(\sin \pi x + \cos \pi y)^1 (\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y dydx) = 0$$

$$dydx (\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y) = (\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y)$$

$$dydx = (\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y) (\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y) = \cos \pi x \sin \pi y$$

$$(9) xy^2 + y^2x = 5$$

$$xy^2 + y^2x = 5 \rightarrow x^2 + y^4 = 5xy^2$$

$$\rightarrow 2x + 4y^3 dydx = 10xy dydx + 5y^2$$

$$\rightarrow dydx (4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$$

$$\rightarrow dydx = 5y^2 - 2x 4y^3 - 10xy =$$

$$(10) x + y = \cos (xy)$$

$$1 + dydx = - (x dydx + y) \sin xy$$

$$dydx (-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$$

$$dydx = -1 + y \sin xy x \sin xy + 1$$

$$(11) \quad x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$$

$$2x + 2y \, dydx = 2(x + y) (1 + dydx)(x + y)^2$$

$$x + y \, dydx = 1 + dydx \, x + y$$

$$dydx (xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$$

$$dydx = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$$

$$(12) \quad \sin x \cos y = x^2 - 5y$$

$$(\sin x) (-\sin y \, dydx) + (\cos y) (\cos x) = 2x - 5 \, dydx$$

$$dydx (\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x$$

$$dydx = \frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$$

أجد  $dydx$  لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

$$(13) \quad 2y^2 + 2xy - 1 = 0, \quad x = 12$$

أجد قيمة  $dydx$  عندما  $x = 12$ :

$$2y^2 + 2(12)y - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$\rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, y = -1$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى  $x$  ينتج أنّ:

$$4y \, dydx + 2x \, dydx + 2y = 0$$

$$dydx = \frac{-2y}{2x + 4y}$$

$$dydx(12, \frac{1}{2}) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 12 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{13}$$

$$dydx(12, -1) = \frac{-2 \cdot (-1)}{2 \cdot 12 + 4 \cdot (-1)} = -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10}$$

$$(14) \quad y^3 + 2x^2 = 11y, \quad y = 1$$

أجد قيمة عندما  $1y =$  :

$$1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm 5$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى  $x$  ينتج أن:

$$3y^2 dydx + 4x = 11dydx$$

$$dydx = 4x11 - 3y2$$

$$dydx (-5, 1) = -52$$

$$dydx (5, 1) = 52$$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

$$(15) x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$$

$$2x + 2y dydx = 0$$

$$2(3) + 2(-4) dydx = 0 \rightarrow dydx (3, -4) = 34$$

$$(16) x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$$

$$x^2 dydx + 2xy = -4 dydx$$

$$4 dydx + 2(2) (1) = -4 dydx \rightarrow dydx (2, 1) = -12$$

$$(17) e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, (\pi/2, \pi/2)$$

$$e^{\sin x} \cos x - e^{\cos y} \sin y dydx = 0$$

$$e \sin \pi/2 \cos \pi/2 - e \cos \pi/2 \sin \pi/2 dydx = 0 \rightarrow dydx (\pi/2, \pi/2) = 0$$

$$(18) x^{23} + y^{23} = 5, (8, 1)$$

$$x^{23} + y^{23} = 5$$

$$23 x^{-13} + 23 y^{-13} dydx = 0$$

$$23(12) + 23(1) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} (8, 1) = -12$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

$$(19) x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$$

$$2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8 - 4 \frac{dy}{dx} + 3 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

ميل المماس هو:

$$\frac{dy}{dx} (-4, 3) = 52$$

معادلة المماس هي:

$$y - 3 = 52(x + 4) \rightarrow y = 52x + 13$$

$$(20) x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} \quad x^2 + y^2$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} (1, 0) = 1$$

معادلة المماس هي:

$$y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

أجد  $d^2y/dx^2$  لكل ممّا يأتي:

$$(21) x + y = \sin y$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 1 + \cos y$$

$$d^2y/dx^2 = \sin y \frac{dy}{dx} (-1 + \cos y)^2 = \sin y (1 - 1 + \cos y) (-1 + \cos y)^2 = \sin y (-1 + \cos y)^3$$

$$(22) 4y^3 = 6x^2 + 1$$

$$12y^2 dydx = 12x$$

$$dydx = xy^2$$

$$d^2ydx^2 = y^2 - 2xy dydxy^4 = y - 2x (xy^2)y^3 = y^3 - 2x^2 y^5$$

$$(23) xy + e^y = e$$

$$x dydx + y + e^y dydx = 0$$

$$dydx = -yx + ey$$

$$d^2ydx^2 = (x + ey) (-dydx) + y (1 + ey dydx)(x + ey)^2$$

$$= (x + ey) (yx + ey) + y (1 + ey -yx + ey)(x + ey)^2$$

$$= (x + ey) (y) + y (x + ey - yey)(x + ey)^3$$

$$= 2xy + 2yey - y^2ey (x + ey)^3$$

(24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة:  $(x - 6)(y + 4)$  عند النقطة  $(7, -2)$ .

$$(x-6)(y+4)=2(x-6)dydx+(y+4)=0(7-6)dydx+(-2+4)=0 \rightarrow dydx|(7, -2)=-2$$

إذن ميل العمودي على المماس هو: 12

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y+2=12(x-7) \rightarrow y=12x-112$$

(25) أثبت أن لمنحنى العلاقة:  $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$  مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 66x + 2x \frac{dy}{dx} + 2y + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3x - yx + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow -3x - yx + y = 0 \rightarrow -3x - y = 0 \rightarrow y = -3x$$

$$3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x = \pm 1$$

(-3, 1) ، (إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين (-1, 3).

(26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى:  $x + y^2 = 1$  بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم:  $x + 2y = 0$ .

$$x + y^2 = 1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

ميل المستقيم:

$$-12y = -12 \rightarrow y = 1 \rightarrow x + (1)^2 = 1 \rightarrow x = 0$$

النقطة المطلوبة هي (0, 1)

(27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى:  $y^3 = x^2$  بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم:  $y + 3x = 0$ .

$$y^3 = x^2 \Rightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}, y \neq 0$$

$0 = 3x - 5 + y$  ميل العمودي عليه يساوي: 13

$$2x \frac{dy}{dx} = 13 \rightarrow 2x = y^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} y^2 \Rightarrow y^3 = \left(\frac{1}{2} y^2\right)^2 \Rightarrow y^3 = \frac{1}{4} y^4 \rightarrow 1 = \frac{1}{4} y \rightarrow y = 4 \rightarrow x = \frac{1}{2} (4)^2 = 8$$

النقطة المطلوبة هي (8, 4)

(28) إذا كان:  $xy + yx = 10$  ، حيث:  $x \neq 0, y \neq 0$  ، فأثبت أن  $\frac{dy}{dx} = yx$ .

$$xy + yx = 10, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow y - x \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} - yx^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y - x \frac{dy}{dx} + x^2 y \frac{dy}{dx} - x^3 y x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow (y - x \frac{dy}{dx})(x^2 y x) = (y - x \frac{dy}{dx})(y^2 x y) \Rightarrow x^2 y y x - x^3 y x \frac{dy}{dx} = y^3 x y - x^2 y y x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^3 x y - x^2 y y x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^3 x y - x^2 y y x = y(y^2 x y - x^2 y x) = yx$$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام؛ لأنه لا يساوي صفرًا إلا إذا كان  $x = y$  وهذا لا يستق مع العلاقة الأصلية.