إجابات تمارين ومسائل الدرس

المشتقة الأولى - إجابات دليل المعلم

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = س^{٣} + س^{٢} ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د) ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ \geq س \geq ٣ \\ ٥س - ٩ & ، ٣ < س \geq ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = |س^{٢} − ٤| ، س = ١ ، س = ٢

و) ص = $\frac{٢س}{س + ٣}$ ، س = −١

الحل

أ) − ٥ ب) ١ جـ) $\frac{١}{٤}$

د) قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٦) غير موجودة ، قَ(٣) = ٥

هـ) كَ(١) = −٢ ، كَ(٢) غير موجودة و) قَ(− ١) = $\frac{٣}{٢}$

---

٢)جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ) ص = س^{٢} − $\frac{٤}{س}$ ، س ≠ ٠ ب) ص = $\sqrt{٢س - ٦}$ ، س > ٣

جـ) ص = س^{٣} د) ص = $\sqrt[٣]{س}$

الحل

أ) $\frac{٢س^{٣} + ٤}{س^{٢}}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٢س - ٦}}$ جـ) ٣ س^{٢} د) $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

---

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

أ) $\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{هـ} = ٢ قَ(س)$

ب) $\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع\ ق(س) - س\ ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س\ قَ(س)$

جـ) $\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٣ ع\ ق(ع) - ٣ س ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣س\ قَ(س)$

الحل

أ) إضافة وطرح ق(س) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين .

ب) إضافة وطرح ع ق(ع) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين .

جـ) إخراج ٣ عاملًا مشتركًا من البسط ثم إضافة وطرح ع ق(س) من البسط، ثم فصل الكسر إلى جزأين.

---

٤) إذا كان قَ(٥) = ٦ فجد $\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(٥ - ٢هـ) - ق(٥ + ٤هـ)}{هـ}$

الحل

إضافة وطرح ق(٥) في البسط ثم فصل الكسر إلى جزأين، ثم فرض ٤هـ = م ،− ٢ هـ = ل أو أية رموز أخرى.

---

٥) إذا كان ق(س) = (س− أ) ل(س) ، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، أ ثابت، فبيِّنْ باستخدام تعريف المشتقة أن قَ(أ) = ل(أ) .

الحل

تطبيق الصيغة الثانية من تعريف المشتقة عند نقطة.

---

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظًا على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

الحل

ع = نق + ٢ ، م(نق) = ٢ π نق (نق + ٢) ، مَ(٦)= ٢٨ πسم

٧) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي
(٦ س^{٢}هـ + ٦س هـ^{٢}+ ٢هـ^{٣})، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد قَ (−٢).

الحل

٢٤

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظًا على شكله، جد معدّل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتَيْ طولٍ.

الحل

ح (ل) = لّ ، حَ (٢) = ١٢ وحدة مربعة (باستخدام التعريف).

٩) أثبت أنَّ معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

الحل

اشتق حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف القطر باستخدام التعريف.