

## إجابات أسئلة الدرس

### التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$  (ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

(ج)  $\int (2s-2s^3) \sqrt{(s-2)^2} ds$  (د)  $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

### الحل

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص =  $s-2 \Rightarrow ds = 1 ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2(s-2)) (s-2)^4 ds$

$= \int (1-2s+4) (s-2)^4 ds = \int (5-2s) (s-2)^4 ds$

(ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

ص =  $2-2s \Rightarrow ds = -1 ds$

$\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds = \int 6s^2 (2-2s) ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{2-3x} =$$

(ج)  $\int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$$ص = 2 - 3x \Rightarrow \frac{ص}{3} = 2 - 3x$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$\frac{ص}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int -\frac{ص}{3} (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -\frac{ص}{3} (2-3x)^{\frac{1}{2}}$$

(د)  $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$\Leftrightarrow 6 - x^2 = \frac{ص}{3} \Leftrightarrow 6 - x^2 = \frac{ص}{3}$$

$$\cdot \frac{ص}{3} = \frac{ص}{3}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$$

$$= \frac{ص}{3} \times \frac{ص}{3} \times \frac{(3-x)^2}{(x^2-6)^2}$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{2}{\sqrt{u}} = p + \frac{2}{\sqrt{2-3x}}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$   
 (ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$   
 (ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds$   
 (د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

**الحل**

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{s^2}{2} + C$

(ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+s^4-2s^5+s^5) ds = \int (1-s-2s^3) ds = s - \frac{s^2}{2} - \frac{2s^4}{4} + C = s - \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{2} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{\frac{1}{2}} ds = 2 \left[ -\frac{2}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} \right] + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{\frac{1}{2}} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[ 2u^{\frac{1}{2}} \right] + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{\frac{1}{2}} ds = 2 \left[ -\frac{2}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} \right] + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{\frac{1}{2}} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[ 2u^{\frac{1}{2}} \right] + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{\frac{1}{2}} ds = 2 \left[ -\frac{2}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} \right] + C = -\frac{4}{3} (2-s)^{\frac{3}{2}} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{\frac{1}{2}} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[ 2u^{\frac{1}{2}} \right] + C = \sqrt{1+s^4} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ)  $\int \sqrt{4s + 1} ds$

ب)  $\int \frac{3s^2(1-s)^2}{s^2} ds$

ج)  $\int \frac{2s^2}{\sqrt{s^2 - 1}} ds$

د)  $\int \frac{s^2 - 3}{s^2(s^2 - 3)} ds$

**الحل**

أ)  $\int \sqrt{4s + 1} ds = \int \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} ds$

$$\int \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} ds = \int \frac{1 + \frac{1}{4}}{4 \times (1 + \frac{1}{4})} ds$$

$$\int \frac{\sqrt{4(s + \frac{1}{4})}}{4} ds$$

$$\frac{1}{4} \left[ \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} - \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} \right]$$

$$\frac{1}{4} (16s - 4s)$$

$$\frac{1}{x} (1 - 2x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1 - x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\frac{2\pi}{3} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right) \Big|_{-1}^1$$

$$\left( \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left( -1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{u^2 - 2}{(u^3 - 6)^2} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$v = \frac{u^2 - 2}{u^3 - 6} \Rightarrow 3 - u^3 = \frac{2v}{u} \Rightarrow u^3 - 3 = \frac{2v}{u}$$

$$= \frac{2v}{u} - 3 = \frac{2v - 3u}{u} \Rightarrow \int \frac{2v - 3u}{u} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$\int \left[ \frac{2v}{u} - 3 \right] \cdot \frac{1}{3} du = \int \left[ \frac{2v}{u} - 3 \right] \cdot \frac{1}{3} du$$

$$\frac{1}{3} \left[ \frac{2v}{u} - 3 \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{2v}{u} - 3 \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{2v}{u} - 3 \right]$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-2}^3 3^x \cdot \ln(3) dx$

**الحل**

$$v = 3^x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3^x \ln(3) \Rightarrow dx = \frac{dv}{3^x \ln(3)}$$

$$\int_{-2}^3 3^x \cdot \ln(3) dx = \int_{-2}^3 \frac{3^x \cdot \ln(3)}{3^x \cdot \ln(3)} dx = \int_{-2}^3 1 dx = 3 - (-2) = 5$$

(٥) إذا علمت أن  $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

**الحل**

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = ١ \Rightarrow ٥س - ١ = ٤ \Rightarrow س = ١$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow ٥س - ١ = ٩ \Rightarrow س = ٢$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس = \int_4^9 ٨ \sqrt{٥س - ١} دس = ٣ - ٨ \times ٣ = ١٢ -$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس$$

**الحل**

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + ٤س٢ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٨س}$$

$$\Leftrightarrow دس = \frac{٥}{٨}$$

$$\int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) دس = \int_0^2 ٨س ق(٩ + ٤س٢) \cdot \frac{٥}{٨س} دس = \int_0^2 ٥ ق(٩ + ٤س٢) دس$$

$$= \int_0^2 ٥ \sqrt{٩ + ٤س٢} دس$$

$$= \left( \sqrt[٣]{٩ + ٤س٢} - \sqrt[٣]{٩ + ٤} \right) \frac{٥}{٣}$$

$$= \frac{٥}{٣} ( \sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{١٥} ) = \frac{٥}{٣} ( ٣ - ٥ ) = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف