

إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

(1) جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية :

أ) $y = \sqrt{3x}$

ب) $y = 4x^{10}$

ج) $y = 4\pi x^2$

د) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

الحل

أ) $y' = \frac{1}{2\sqrt{3x}}$

ب) $y' = 40x^9$

ج) $y' = 8\pi x$ (ثابت)

$y' = \frac{1}{3}$

د) $y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$y' = \frac{1}{16} x^{-3}$

$y' = \frac{1}{16} x^{-4} = \frac{1}{16} x^{-4}$

$y' = \frac{1}{4} x^{-3}$

(٢) جد $\frac{d}{ds}$ لكل من الاقتارات الآتية :

(أ) $v = 2s^3 + 3s - 4$ (ب) $v = \frac{1}{4}(s^2 + 8)$
 (ج) $v = \frac{4}{3}\pi s^2$ (د) $v = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{3}s^2 - s$

الحل

(أ) $v = 2s^3 + 3s - 4$

$\frac{dv}{ds} = 6s^2 + 3$

(ب) $v = \frac{1}{4}(s^2 + 8)$

$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}s$

(ج) $v = \frac{4}{3}\pi s^2$

$\frac{dv}{ds} = \frac{8}{3}\pi s$

(د) $v = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{3}s^2 - s$

$\frac{dv}{ds} = s^3 + \frac{2}{3}s - 1$

$= s^3 + \frac{2}{3}s - 1$

٣) جد ق(س) لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كل منها :

أ) ق(س) = $\frac{1}{4}س$ ، س = 1

ب) ق(س) = $|س - 6| + 2س$ ، س = 3

ج) ق(س) = $\frac{1}{4}س + 5 - 2س$ ، س = 2, 4

د) ق(س) = $3س + [س + 1, 0] - |س|$ ، س = 1

الحل

١) ق(س) = $\frac{1}{4}س$

ق(1) = $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

ق(1) = $(1-1) + 2 = 1$

٢) ق(س) = $|س - 6| + 2س$

ق(3) = $|3 - 6| + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$

ق(س) = $\frac{1}{4}س + 5 - 2س$

ق(2) = $\frac{1}{4} \times 2 + 5 - 2 \times 2 = \frac{1}{2} + 5 - 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

ق(4) = $\frac{1}{4} \times 4 + 5 - 2 \times 4 = 1 + 5 - 8 = -2$

٣) ج) ق(س) = $\frac{1}{4}س + 5$ ، ل = $\frac{1}{4}$ ، س = 2

ق(2) = $\frac{1}{4} \times 2 + 5 = \frac{1}{2} + 5 = 5\frac{1}{2}$

ق(س) = $6 - 2س$

ق(س) = $8 - 2س$

ق(2) = $8 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4$

د) ق(س) = $3س + [س + 1, 0] - |س|$

ق(س) = $3س - 1 - 3س + 1 = 0$

ق(س) = $4س - 1$

ق(س) = 4

ق(1) = 4

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل = (٢ -) هـ، هـ = (٢ -) هـ، هـ = ٣ -، فجد ق (٢ -) في كل مما يأتي:

أ) ق (س) = ٦ ل (س) - ٢ هـ (س)

ب) ق (س) = $\frac{1}{٢}$ ل (س) + هـ (س) + س^٢

الحل

٤) هـ (س) = ٦ ل (س) - ٢ هـ (س)

هـ' (س) = ٦ ل' (س) - ٢ هـ' (س)

هـ' (٢ -) = ٦ ل' (٢ -) - ٢ هـ' (٢ -)

$٣ - ٨٢ = ٦ - ٤ \times ٦ =$

$٣٠ = ٦ + ٢٤ =$

ب) هـ (س) = $\frac{1}{٢}$ ل (س) + هـ (س) + س^٢

هـ' (س) = $\frac{1}{٢}$ ل' (س) + هـ' (س) + ٢ س

هـ' (٢ -) = $\frac{1}{٢}$ ل' (٢ -) + هـ' (٢ -) + ٢(٢ -)

$١٢ + ٣ - + ٤ \times \frac{1}{٢} =$

$١١ = ١٢ + ٣ - ٢ =$

(٥) إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} أس^2 + ب س ، \quad س \geq 1 \\ -٤ - ب س^2 + أس ، \quad س < 1 \end{array} \right\}$ وكانت ق(١) موجودة ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب.

الحل

ق(١) موجودة \Leftrightarrow حد متصل عند $س = 1$
 $\left. \begin{array}{l} \text{هنا } (١) = (١) \\ -١٤٧ \quad +١٤٧ \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{l} ب + ١ = ١ + ١ - ٤ \\ ب - ١ + \quad \quad ١ - ١ + \end{array}$$

$$\boxed{ب = ٤} \Leftrightarrow \frac{ب}{٤} = \frac{٤}{٤}$$

$$\text{ق(١)}^- = \text{ق(١)}^+$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق(١)}^- = (١) \quad \left\{ \begin{array}{l} ب + ١ = ١ + ١ - ٤ \\ ١ < ١ \end{array} \right. \\ \text{ق(١)}^+ = (١) \quad \left\{ \begin{array}{l} ١ - ١ + ب = ١ - ١ + ١ \\ ١ > ١ \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$١ - ١ + ب = ١ - ١ + ١$$

$$\begin{array}{l} ١ - ١ + ب = ١ - ١ + ١ \\ ١ - ١ + \quad \quad ١ - ١ + \end{array}$$

$$\boxed{١ - ١ = ١} \Leftrightarrow ١ - ١ = ١ + ١$$

(٦) إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ل(س) ، \quad س \geq ج \\ ل(ج) - (س - ج) ، \quad س < ج \end{array} \right\}$

وكان ق(س) اقتراناً متصلًا عند $س = ج$ ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند $س = ج$.

فأثبت أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند $س = ج$ ، ثم جد ق(ج).

الحل

حد متصل عند $س = ج$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق(ج)} = \text{ق(ج)}^+ \\ \text{ق(ج)} = \text{ق(ج)}^- \end{array} \right\}$$

$$\text{ق(ج)}^+ = \text{ق(ج)}^+$$

$$\text{ق(ج)}^- = \text{ق(ج)}^-$$

$$\therefore \text{ق(ج)} = \text{ق(ج)} = \text{ق(ج)}$$