إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$ ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢}س\right)^{٤}$

الحل

أ) $ق'(س) = صفر$

ب) $ص' = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ (ثابت)

$ص' = صفر$.

د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢}س\right)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$.

٢) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^{٢} + ٣س − ٤

ب) ص = $\frac{١}{٤}$ (س^{٢}+٨)

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣}

د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س

الحل

أ) ص = س^{٢} + ٣س − ٤

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س + ٣ .

ب) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢س + صفر = $\frac{١}{٢}$ س

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{٤}{\cancel{٣}}$ π × $\cancel{٣}$ س^{٢} = ٤π س^{٢} .

د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س .

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٤س^{٣} + $\frac{١}{٣}$ × ٣س^{٢} − ١

= س^{٣} + س^{٢} − ١

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$ ، س = −١

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ ، س = ٣

جـ) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س + ٥] - ٤س^{٢}$ ، س = ٢,٤

د) $ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] - |س|$ ، س = −١

الحل

أ) $ق(س) = \frac{1}{2} س^{4}$

$ق'(س) = \frac{1}{2} \times 4 س^{3} = 2 س^{3}$

$ق'(-1) = 2(-1)^{3} = 2 \times -1 = -2$

ب) $ق(س) = س^{2} + |3س - 6|$ ، س = 3

$|3س - 6| = 3س - 6$ عندما س = 3

$ق(س) = س^{2} + 3س - 6$

$ق'(س) = 2س + 3$

$ق'(3) = 6 + 3 = 9$.

جـ) $[\frac{1}{2} س + 5]$ $\qquad ل = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$[\frac{1}{2} س + 5] = 6$ ، $2 \le س < 4$.

$ق(س) = 6 - 4 س^{2}$.

$ق'(س) = -8س$.

$ق'(2,4) = -8 \times 2,4 = -19,2$

د) $[س + 0,1] = -1$ حول س = −1

$ق(س) = 3س - 1 + س$

$ق(س) = 4س - 1$

$ق'(س) = 4$

$ق'(-1) = 4$.

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

الحل

أ) ق(س) = ٦ل(س) − ٢هـ(س)

قَ(س) = ٦ لَ(س) − ٢هـَ(س)

قَ(−٢) = ٦لَ(−٢) − ٢هـَ(−٢)

= ٦×٤ − ٢×−٣

= ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س^{٢} .

قَ(−٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ(−٢) + هـَ(−٢) + ٣(−٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ + −٣ + ١٢

= ٢ − ٣ + ١٢ = ١١

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب س &، س \leq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س &، س > ١ \end{cases}$

وكانت قَ(١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

الحل

قَ(١) موجودة $\Leftarrow$ ق متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$٤ - ب + أ = أ + ب$

$+ب - أ \qquad +ب - أ$

$\frac{٤}{٢} = \frac{٢ب}{٢} \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

$قَ(١)^{+} = قَ(١)^{-}$

$قَ(س) = \begin{cases} ٢أ س + ب &، س < ١ \\ -٢ب س + أ &، س > ١ \end{cases}$

$٢أ + ب = -٢ب + أ$

$٢أ + ٢ = -٤ + أ$

$-أ \qquad -أ$

$أ + ٢ = -٤ \Leftarrow \boxed{أ = -٦}$

---

٦) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ل(س) &، س \leq جـ \\ لَ(جـ)\,(س - جـ) &، س > جـ \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س = جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.

فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

الحل

ق متصل عند س = ٢

$قَ(س) = \begin{cases} لَ(س) &، س < جـ \\ لَ(جـ) \times ١ &، س > جـ \end{cases}$

$قَ(جـ)^{+} = لَ(جـ)$

$قَ(جـ)^{-} = لَ(جـ)$

$\therefore$ قَ(جـ) موجودة = لَ(جـ) .