إجابات أسئلة الدرس

المشتقة الأولى

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = س^{٣} + س^{٢} ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د) ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ < س \geq ٣ \\ ٥س - ٩ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = |س^{٢} − ٤| ، س = ١ ، س = ٢

و) ص = $\frac{٢س}{س + ٣}$ ، س = −١

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

$$ق'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٥(٣ + هـ) - (٨ - ٥ \times ٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ - ٨ + ١٥}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$$

ب) م(س) = س^{٣} + س^{٢} ، س = −١

$$م'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{م(س) - م(-١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ((-١)^{٣} + (-١)^{٢})}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + س^{٢}}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{س^{٢}(س + ١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} س^{٢} = (-١)^{٢} = ١$$

جـ) ل(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، حيث س $\geq$ ١ ، س = ٥

ل$'$(٥) = $\lim_{س \to ٥} \frac{ل(س) - ل(٥)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤}$

د) ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ < س \geq ٣ \\ ٥س - ٩ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

ع(٠) ، ع(٦) غير معرفة $\Rightarrow$ ع$'$(٠) ، ع$'$(٦) غير موجودة

ع$'$(٣)$^{+}$ = $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{ع(س) - ع(٣)}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{٥س - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$

ع$'$(٣)$^{-}$ = $\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س - ٣}$

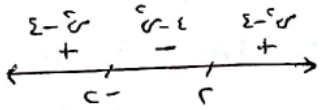
$= \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{(س + ٢)(س - ٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^{-}} س + ٢ = ٥$

ع$'$(٣)$^{+}$ = ع$'$(٣)$^{-}$

ع$'$(٣) = ٥

هـ) $ك(س) = |س^٢ - ٤|$ ، $س = ١$ ، $س = ٢$

$س^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$



$|س^٢ - ٤| = \begin{cases} س^٢ - ٤ & ، س < -٢ \text{ أو } س > ٢ \\ ٤ - س^٢ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

$ك'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ك(س) - ك(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{١ - س^٢}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(١-س)(١+س)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} -(١+س) = -٢$

$ك'(٢)^+ = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٢)(س+٢)}{س-٢} = ٢+٢ = ٤$

$ك'(٢)^- = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢-س)(٢+س)}{٢-س} = -(٢+٢) = -٤$

$ك'(٢)^+ \neq ك'(٢)^-$

$\Leftarrow ك'(٢)$ غير موجودة

و) $ص = \frac{٢س}{س + ٣}$ ، $س = -١$

$هـ'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{س+٣} - \frac{-٢}{٣}}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{س+٣} + ١}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٣ + ٣س + ٢س}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٣ + ٥س}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٣(س+١)}{٣ + س} \times \frac{١}{س + ١} = \frac{٣}{٢}$

٢) جد $\frac{ص}{س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ) $ص = س^{٢} - \frac{٤}{س}$ ، $س \neq ٠$

ب) $ص = \sqrt{٢س - ٦}$ ، $س > ٣$

جـ) $ص = س^{٣}$

د) $ص = \sqrt[٣]{س}$

أ)
$$\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - \frac{٤}{ع} - س^{٢} + \frac{٤}{س}}{ع - س}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{س} - \frac{٤}{ع}}{ع - س}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤ع - ٤س}{س ع} \times \frac{١}{ع - س}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} (ع + س) + \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{س ع} \times \frac{١}{ع - س}$$
$$= (س + س) + \frac{٤}{س \times س} = ٢س + \frac{٤}{س^{٢}}$$

ب)
$$\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٦} - \sqrt{٢س - ٦}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦}}{\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦}}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٢ع - ٦ - ٢س + ٦}{(ع - س)(\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦})}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{(ع - س)(\sqrt{٢ع - ٦} + \sqrt{٢س - ٦})} = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٦}}$$

جـ)
$$\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$$
$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + س ع + س^{٢})}{ع - س}$$
$$= س^{٢} + س^{٢} + س^{٢} = ٣س^{٢}$$

د) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{\text{ع}} - \sqrt[3]{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt[3]{\text{ع}^2} + \sqrt[3]{\text{ع}} \times \sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}^2}}{\sqrt[3]{\text{ع}^2} + \sqrt[3]{\text{ع}} \times \sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}^2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}{(\cancel{\text{ع} - \text{س}})(\sqrt[3]{\text{ع}^2} + \sqrt[3]{\text{ع}} \times \sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}^2})}$

$= \frac{1}{3(\sqrt[3]{\text{س}})^2}$.