إجابات تمارين ومسائل الدرس

المعدلات المرتبطة بالزمن

١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠٠١ سم/ث، جد معدل التغير في كلٍّ من حجمه ومساحته الكلية؛ عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم.

الحل

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٠,٠٠٠١$$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=١٠} = \ ، \ \frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=١٠} =$$

الحل:

$$\text{ع} = \text{س}^{٣} \leftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٣\text{س}^{٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=١٠} = ٣ \times (١٠)^{٢} \times (-٠,٠٠٠١) = -٠,٠٣$$

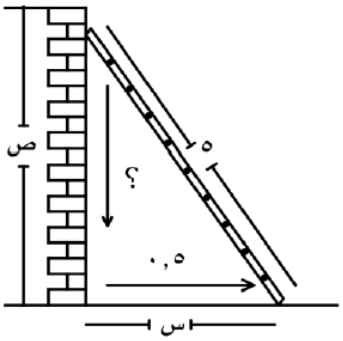
$$\text{م} = ٦\text{س}^{٢} \leftarrow \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ١٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=١٠} = ١٢ \times ١٠ \times (-٠,٠٠٠١) = -٠,٠١٢ \text{ سم}^{٢}/\text{ث}$$

---

٢) يرتكز سلم طوله ٥ أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم؛ عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م عن الحائط.

الحل



طول السلم $= ٥$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=٣} =$$

الحل:

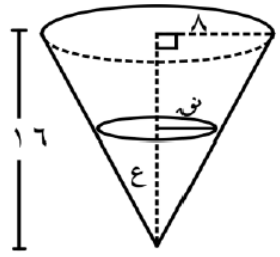
$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٥)^{٢}$$

$$\text{ص} = \sqrt{(٥)^{٢} - \text{س}^{٢}} \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{(٥)^{٢} - \text{س}^{٢}}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{س}=٣} = \frac{-٣ \times \frac{١}{٢}}{\sqrt{٢٥ - ٩}} = \frac{-٣}{٨} \text{ م/ث}$$

٣) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦سم، وطول نصف قطر قاعدته ٨سم، صُبَّ فيه سائل بمعدل ١٢سم^{٣}/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨سم.

الحل



ارتفاع القمع = ١٦

نق = ٨ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ن}} = ١٢$

مساحة سطح السائل = π نق^{٢}

المطلوب : $\frac{\text{م}}{\text{ن}}\Big|_{\text{ع}=٨}$ =

من خلال تشابه المثلثات $\frac{٨}{\text{نق}} = \frac{١٦}{\text{ع}} \leftarrow$ نق = $\frac{١}{٢} \times$ ع

$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\left(\frac{١}{٢}\text{ع}\right)^{٢} \times \text{ع} \leftarrow \text{ح} = \frac{\pi}{١٢}\text{ع}^{٣}$

$\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\Big|_{\text{ع}=٨} = \frac{\pi}{٤}\text{ع}^{٢} \times \frac{\text{ع}}{\text{ن}} \leftarrow ١٢ = \frac{\pi}{٤} \times ٦٤ \times \frac{\text{ع}}{\text{ن}}$

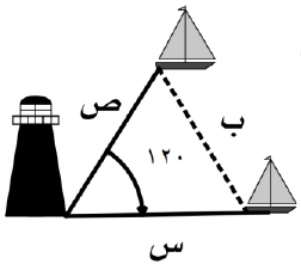
$\frac{\text{ع}}{\text{ن}} = \frac{٣}{\pi ٤}$

$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = ٢\pi\text{نق} \times \frac{\text{ع}}{\text{ن}} \leftarrow \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\pi}{٢} \times ٤ \times \frac{\text{ع}}{\text{ن}}$

$\frac{\text{م}}{\text{ن}}\Big|_{\text{ع}=٨} = \pi ٤ \times \frac{٣}{\pi ٤} = ٣$ سم^{٢}/ث

٤) انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما (١٢٠°)، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠كم/ساعة، وسرعة الثانية ٤٠كم/ساعة، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦كم، ٨كم على الترتيب.

الحل



$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٤٠$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣٠$

$\frac{\text{د ب}}{\text{د ن}} = \left|_{\text{ص}=٨ ، \text{س}=٦}\right.$

$\text{ب}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص جتا}\, ١٢٠°$

$\text{ب}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{س ص}$

$٢\text{ب}\frac{\text{د ب}}{\text{د ن}} = ٢\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{س}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

لاكن ب عندما ص = ٨ ، س = ٦

$\text{ب}^{٢} = ٣٦ + ٦٤ + ٦ \times ٨ = ١٤٨ \leftarrow \text{ب} = \sqrt{١٤٨}$

$\frac{\text{د ب}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times ٦ \times ٣٠ + ٢ \times ٨ \times ٤٠ + ٦ \times ٤٠ + ٨ \times ٣٠}{٢ \times \sqrt{١٤٨}}$

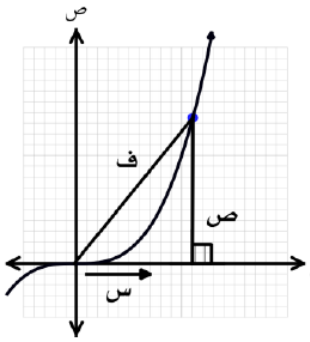
$\frac{\text{د ب}}{\text{د ن}} = \frac{١٤٨٠}{٢ \times \sqrt{١٤٨}}$ كم/ث

٥) بدأت النقطتان أ، ب الحركة معًا من نقطة الأصل (م)؛ بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث، وتتحرك النقطة أ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣}، بحيث تبقى $\overline{أب}$ دائمًا عموديّة على محور السينات الموجب، جد:

أ) معدل التغير في مساحة المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

الحل



$$\frac{ وس}{ ون} = ٢ \leftarrow س = ٢ن$$

$$ص = ق(س) = س^{٣}$$

$$ص = ٨ن^{٣}$$

المطلوب

$$\frac{ وم}{ ون}|_{ن=١} \text{ ، } \frac{ وف}{ ون}|_{ن=١} =$$

$$م = \frac{١}{٢} \times س \times س^{٣} \leftarrow م = ٨ن^{٤}$$

$$\frac{ وم}{ ون} = ٣٢ن^{٣} \leftarrow \frac{ وم}{ ون}|_{ن=١} = ٣٢ \text{ سم}^{٢}/\text{ث}$$

$$ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} \leftarrow ف = \sqrt{٤ن^{٢} + ٦٤ن^{٦}}$$

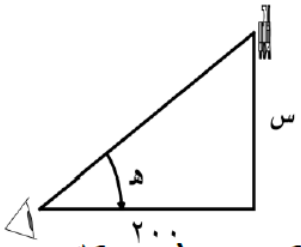
$$\frac{ وف}{ ون} = \frac{٨ن + ٣٨٤ن^{٥}}{٢\sqrt{٤ن^{٢} + ٦٤ن^{٦}}}$$

$$\frac{ وف}{ ون}|_{ن=١} = \frac{٨ + ٣٨٤}{٢\sqrt{٤ + ٦٤}} = \frac{١٩٦}{٦٨\sqrt{}} \text{ سم/ث}$$

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أطلق صاروخ عموديًّا لأعلى بسرعة ١٠٠ م/ث، وعلى بعد ٢٠٠ متر من نقطة انطلاق الصاروخ، كان مشاهد جالسًا على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.

الحل



$\frac{ود س}{ود ن} = ١٠٠$

$\frac{ود هـ}{ود ن}\Big|_{س=٤٠٠} =$

الحل :

ظاهـ $= \frac{س}{٢٠٠} \leftarrow$ قا^{٢} هـ $\times \frac{ود هـ}{ود ن} = \frac{١}{٢٠٠} \times \frac{ود س}{ود ن}$

قا^{٢} هـ $= ١ +$ ظا^{٢} هـ

لاكن ظاهـ $\Big|_{س=٤٠٠} = \frac{٤٠٠}{٢٠٠} = ٢$

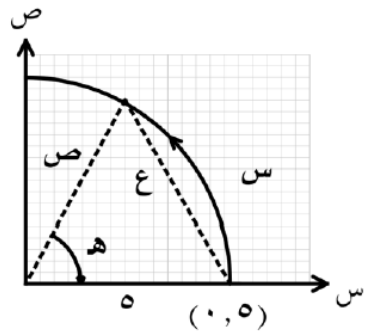
قا^{٢} هـ $= ١ + ٤ = ٥$

$٥ \times \frac{ود هـ}{ود ن} = \frac{١}{٢٠٠} \times ١٠٠ \leftarrow \frac{ود هـ}{ود ن} = \frac{١}{١٠}$

---

٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (٥، ٠) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠ سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥، ٠)؛ عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$ راد .

الحل



$\frac{ود س}{ود ن} = ١٠$

ص $= ٥$ لأنها نصف الدائرة

المطلوب:

$\frac{ود ع}{ود ن}\Big|_{هـ=\frac{\pi}{٣}} =$

الحل:

ع^{٢} $= (٥)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ٥ \times ٥ \times$ جتاهـ

ع^{٢} $= ٥٠ - ٥٠$ جتاهـ

$٢ع \times \frac{ود ع}{ود ن} = ٥٠$ جاهـ $\times \frac{ود هـ}{ود ن}$

$$ع\left|_{هـ=\frac{\pi}{٣}}\right. = \sqrt{٠٥٠ - ٠٥جتا\frac{\pi}{٣}} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

لإجاد $\frac{ده}{دن}$

تذكر : طول القوس

$$س = نوه \times هـ = ٥ \times هـ \leftarrow \frac{دس}{دن} = ٥ \times \frac{ده}{دن}$$

$$١٠ = ٥ \times \frac{ده}{دن} \leftarrow ٢ = \frac{ده}{دن}$$

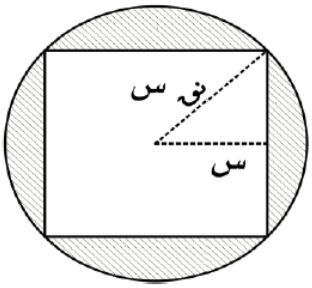
$$٢٠ \times \frac{دع}{دن}\left|_{هـ=\frac{\pi}{٣}}\right. = ٠٥جتا\frac{\pi}{٣} \times ٢ \leftarrow \frac{دع}{دن}\left|_{هـ=\frac{\pi}{٣}}\right. = ٥\sqrt{٣}\ سم/ث$$

---

٨) تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤سم/ث، رُسمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه، وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع، عندما يكون طول ضلع المربع ١٠سم.

الحل

$$\frac{دس}{دن} = ٤$$



المطلوب :

$م_١$ = مساحة المربع

$م_٢$ = مساحة الدائرة

$م$ = المساحة المنطقة المحصورة

$$\frac{دم}{دن}\left|_{س=١٠}\right. = \frac{دم_١}{دن}\left|_{س=١٠}\right. - \frac{دم_٢}{دن}\left|_{س=١٠}\right.$$

$$م = \pi نوه^٢ - س^٢$$

ولاكن :

$$نوه^٢ = (\frac{١}{٢}س)^٢ + (\frac{١}{٢}س)^٢ \leftarrow نوه^٢ = \frac{١}{٢}س^٢$$

$$م = \frac{\pi}{٢}س^٢ - س^٢$$

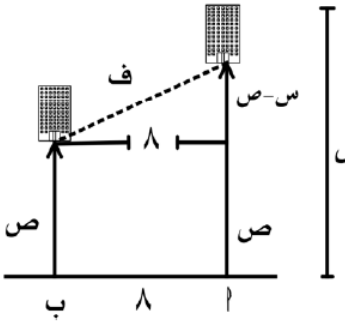
$$\frac{دم}{دن} = ٢ \times \frac{\pi}{٢}س \times \frac{دس}{دن} - ٢س \times \frac{دس}{دن}$$

$$\frac{دم}{دن}\left|_{س=١٠}\right. = ٢ \times \frac{\pi}{٢} \times ١٠ \times ٤ - ٢ \times ١٠ \times ٤$$

$$= ٤٠\pi - ٨٠\ م^٢/ث$$

٩) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي، المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢ م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١م/ث .
جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني.

الحل



$\frac{ود س}{ود ن} = ٢$ م/ث

$\leftarrow$ س $= ٢ (٢ + ن)$ س

$= ٢ن + ٤$

$\frac{ود ص}{ود ن} = ١$ م/ث

$\leftarrow$ ص $= ن$

المطلوب : $\left. \frac{ود ف}{ود ن} \right|_{ن=٢} =$

ف $= \sqrt{(س - ص)^٢ + ٦٤}$

ف $= \sqrt{(٢ن + ٤ - ن)^٢ + ٦٤}$

$\leftarrow$ ف $= \sqrt{(٤ + ن)^٢ + ٦٤}$

$\frac{ود ف}{ود ن} = \frac{٢ (٤ + ن)}{٢ \sqrt{(٤ + ن)^٢ + ٦٤}}$

$\left. \frac{ود ف}{ود ن} \right|_{ن=٢} = \frac{٦}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$ م/ث