إجابات تمارين ومسائل الدرس

تطبيقات هندسية

١) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}+٦س−٥ عند النقطة (١ ، ٢).

الحل

س$_{١}$ = ١ ص$_{١}$ = ٢ م = ٨

ق$'$(س) = ٢س + ٦ ← م = ٨

معادلة المماس :

ص − ٢ = ٨(س − ١) ← ص = ٨س − ٦

٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − س − ٦ = ٠

الحل

س$_{١}$ = ٢ ص$_{١}$ = ٨ م = ١٢

ق$'$(س) = ص ← س^{٣} = س + ٦

س^{٣} − س − ٦ = ٠ ← س = ٢

ق$'$(س) = ٣س^{٢} ← م = ١٢

معادلة المماس :

ص − ٨ = ١٢(س − ٢)

---

٣) جد النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٣س + ٣ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

ق$'$(س) = ظا$\frac{٣\pi}{٤}$ ⇐ ٢س − ٣ = −١ ← س = ١

النقطة : (١، ١)

---

٤) جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة (ص−٤)^{٢} = س+٢ التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم الذي معادلته: ٣س + ٦ص + ٢ = ٠

الحل

س$_{١}$ = ٢ ، ص$_{١}$ = ٨

$$ص = \frac{-٢ - ٣س}{٦}$$

$$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٤)} \times ١ \leftarrow ٢(ص - ٤) = ١$$

$$م_{١} \leftarrow ص' = \frac{١}{٢(ص - ٤)}$$

$$م_{٢} \leftarrow ص' = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$$

بما أن المماس يوازي المستقيم

$$م_{٢} = م_{١} \leftarrow \frac{-١}{٢} = \frac{١}{٢(ص - ٤)}$$

$$٢ = -٢(ص - ٤) \leftarrow ص = ٣$$

$$(٤ - ٣)^{٢} = س + ٢ \leftarrow ١ = س + ٢ \leftarrow س = -١$$

---

٥) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}−٤س+٣ بحيث يكون المماس عموديًّا على المستقيم الذي معادلته: ٦ص − ٣س− ٥ = ٠

الحل

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ٠ ، م = −٢

$$ق'(س) = س^{٢} - ٤س + ٣ \leftarrow ق'(س) = ٢س - ٤$$

المماس عامودي على ص = $\frac{٣س + ٥}{٦}$ ← $ص' = \frac{١}{٢}$

$$\leftarrow ق'(س) \times ص' = -١$$

$$\leftarrow ٢س - ٤ \times \frac{١}{٢} = -١ \leftarrow س = ١$$

$$ق(١) = ١ - ٤ + ٣ = ٠$$

$$ص - ٠ = -٢(س - ١) \leftarrow ص = ١ - ٢س$$

٦) جد معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)

الحل

س$_{١}$ = ١ ص$_{١}$ = ٢ م = −٢ ، ل = $\frac{١}{٢}$

هـ(س) = $\frac{٢}{س}$ ← قَ(س) = $\frac{-٢}{س^{٢}}$

قَ(١) = −٢ = م

معادلة المماس :

ص − ٢ = −٢ (س − ١)

ل = $\frac{-١}{م}$ = $\frac{١}{٢}$

معادلة العامودي على المماس

ص − ٢ = $\frac{١}{٢}$ (س − ١)

---

٧) جد قيمة كلٍّ من الثابتين ب، جـ اللّتين تجعلان المستقيم الذي معادلته: ص − س − ٢ = ٠ مماسًا لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٢).

الحل

ص = س + ٢ ← صَ = ١

هـ(س) = س^{٢} + بس + جـ ← قَ(س) = ٢س + ب

بما أن الأقتران ص يمس هـ(س) عند النقطة (٠،٢)

← ص = هـ(٠)	صَ = قَ(٠)
٠ + ٢ = ٠ + ب × ٠ + جـ	١ = ٢ × ٠ + ب
← ٢ = جـ	← ب = ١

---

٨) إذا كان المستقيم ٢س− ص+ جـ = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٢}{س}$ عند النقطة (س١،ص١) فجد قيم الثابت جـ.

الحل

ص = ٢س+جـ ← صَ = ٢

قَ(س) = $\frac{-٢}{س}$ ← قَ(س) = $\frac{٢}{س^{٢}}$

بما أن الأقتران ص يمس قَ(س) عند النقطة (س١،ص١)

← ص = قَ(س١)	صَ = قَ(س١)
← ٢س١+جـ = $\frac{-٢}{س_{١}}$	٢ = $\frac{٢}{س_{١}^{٢}}$ ← س١ = ±١

٢ × ١+جـ = $\frac{-٢}{١}$ ← جـ = −٤

٢ × (−١)+جـ = $\frac{-٢}{-١}$ ← جـ = ٤

---

٩) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س= ص^{٢} −٤ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات.

الحل

س١ = ٠	ص١ = ٠	م = −٢
س٢ = ٠	ص٢ = ٤	م = −٢

س = ص^{٢} − ٤ص يتقاطع مع محور ص ← س = ٠

٠ = ص^{٢} − ٤ص ← ص = ٠، ٤

في التعويض في المعادلة :

ص = ٠ ← س = (٠)^{٢} − ٤ × ٠ ← س = ٠

ص = ٤ ← س = (٤)^{٢} − ٤ × ٤ ← س = ٠

١ = ٢ص صَ − ٤ صَ ← صَ = $\frac{١}{٢ص - ٤}$

(٠،٠) ← م = $\frac{١}{٢ \times ٠ - ٤}$ = $\frac{١}{-٤}$

معادلة المماس : ص − ٠ = −$\frac{١}{٤}$(س − ٠)

(٤،٠) ← م = $\frac{١}{٢ \times ٤ - ٤}$ = $\frac{١}{٤}$

معادلة المماس : ص − ٠ = $\frac{١}{٤}$(س − ٠)

١٠) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة: ص^{٢} + س^{٢} + ٦ص − ٢س + ٢ = ٠ عند النقطة (٣ ، −١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

ص^{٢} + س^{٢} + ٦ص − ٢س + ٢ = ٠

← ٢ص صَ + ٢س + ٦ صَ − ٢ = ٠

← صَ = $\frac{٢ - ٢س}{(٦ + ٢ص)}$

(٣، −١) ← صَ = $\frac{٣ \times ٢ - ٢}{(٦ + (-١) \times ٢)}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

صَ = ظاهـ ← ظاهـ = −١ ← هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ ظتا س + قا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$.

الحل

س$_{١}$ = $\frac{\pi}{٤}$ ص$_{١}$ = ٥ م = −٢ ، ل = $\frac{١}{٢}$

ق (س) = ٣ظتاس + قا^{٢} س ← ق ($\frac{\pi}{٤}$) = ٣ + ٢ = ٥

← قَ (س) = −٣قتا^{٢} س + ٢قا^{٢} س ظاس

← قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = −٣ × ٢ + ٢ × ١ × ٢ = −٢

معادلة المماس :

ص − ٥ = −٢ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

معادلة العامودي على المماس :

ص − ٥ = $\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{\pi}{٤}$)

١٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران هـ(س) = $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$.

الحل

$س_{١} = ١$ $ص_{١} = ١$ $م = \frac{١}{٢}$

$ه(س) = \sqrt{س} \leftarrow ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$هـ(س) = س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$

$\leftarrow هـ'(س) = ٢س - \frac{٣}{٢}$

بما أن $ه(س)$ يمس $هـ(س)$

$ه(س_{١}) = هـ(س_{١})$

$\sqrt{س_{١}} = س_{١}^{٢} - \frac{٣}{٢}س_{١} + \frac{٣}{٢} \leftarrow$ بالتجريب $\boxed{س_{١} = ١}$

$ق'(س_{١}) = هـ'(س_{١})$

$\frac{١}{٢\sqrt{س}} = ٢س - \frac{٣}{٢} \leftarrow ٤س\sqrt{س} - ٣\sqrt{س} = ٠$

$\leftarrow$ بالتجريب $\boxed{س_{١} = ١}$

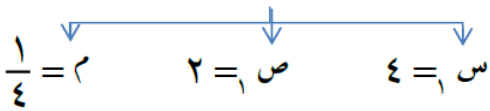
$ه(١) = \sqrt{١} = ١$

$ق'(١) = \frac{١}{٢\sqrt{١}} = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

١٣) جد مساحة المثلث القائم الزاوية، المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص=√س، س> ٠
عند النقطة (٤، ٢) ومحور السينات والمستقيم س=٤.

الحل



$$هـ(س) = \sqrt{س} \leftarrow قـ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

$$قـ(٤) = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤} \leftarrow م = \frac{١}{٤}$$

معادلة المماس :

$$ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$$

محور السينات : ص = ٠

المستقيم : س = ٤

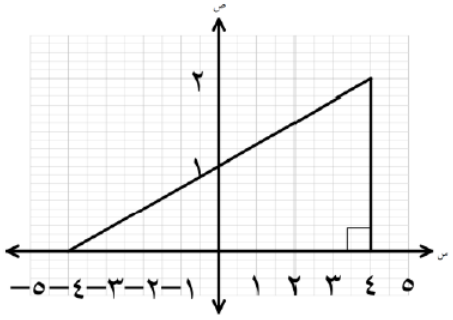
المماس = محور السينات : $٠ - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$$-٢ = \frac{١}{٤}س - ١ \leftarrow س = -٤ \leftarrow (-٤، ٠)$$

المماس = المستقيم : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(٤ - ٤)$

$$ص - ٢ = ٠ \leftarrow ص = ٢ \leftarrow (٢، ٠)$$

محور السينات = المستقيم $\leftarrow (٢، ٤)$



م المثلث

$$= \frac{١}{٢}(٤ - (-٤)) \times (٠ - ٢)$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٢$$

١٤) حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

الحل

$س_١ = ١$ $ص_١ = ٢$ $م = ٢$ ، $ل = \frac{-١}{٢}$

$ق(س) = س^٢ + ١ \leftarrow ق'(س) = ٢س$

$ق'(١) = ٢ \leftarrow ٢ = م$

معادلة المماس :

$ص - ٢ = ٢(س - ١)$

معادلة العامودي على المماس :

$ص - ٢ = \frac{-١}{٢}(س - ١)$

محور السينات : $ص = ٠$

المماس = محور السينات

$٠ - ٢ = ٢(س - ١) \leftarrow س = ٠ \leftarrow (٠،٠)$

العامودي على المماس = محور السينات

$٠ - ٢ = \frac{-١}{٢}(س - ١) \leftarrow س = ٥ \leftarrow (٠،٥)$

العامودي = المماس : عند نقطة التماس دائمًا $(٢،١)$

مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢}(٥ - ٠) \times (٠ - ٢) = ٥$