إجابات تدريبات الدرس

المشتقة الأولى

تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، فجد $\text{قَ}(-١)$.

٢) إذا كان $\text{قَ}(٠) = ٦$، فجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٥\text{هـ})}{٣\text{هـ}}$

الحل

١) $\text{قَ}(-١) = \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س} - -١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ((-١)^{٣} + ٢ \times -١)}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - (-١ - ٢)}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١} + \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} + ٢}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} + ١)}(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} + ١}} + \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{\text{س} + ١}}$

$= (١ + ١ + ١) + ٢ = ٥$

٢) بفرض أنَّ $\text{م} = ٥\text{هـ} \Leftarrow \text{هـ} = \dfrac{\text{م}}{٥}$

عندما هـ ← ٠ فإنَّ م ← ٠.

$\underset{\text{م} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(\text{م})}{٣ \times \frac{\text{م}}{٥}} = \dfrac{٥}{٣} \times -\underset{\text{م} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(٠)}{\text{م}}$

$= \dfrac{٥}{٣} \times \text{قَ}(٠) = \dfrac{٥}{٣} \times -٦ = -١٠$

تدريب ٢

إذا كان ص $=$ ق(س) $= \frac{س}{س+١}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س $= ٢$

الحل

$$ق'(٢) = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{\frac{س}{س+١} - \frac{٢}{٣}}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{\frac{٣س - ٢(س+١)}{٣(س+١)}}{س-٢} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{٣س - ٢س - ٢}{٣(س+١)} \times \frac{١}{س-٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{\cancel{س - ٢}}{٣(س+١)} \times \frac{١}{\cancel{س-٢}} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{١}{٣(س+١)}$$

$$= \frac{١}{٣(٢+١)} = \frac{١}{٣ \times ٣} = \frac{١}{٩}$$

تدريب ٣

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} ٤س + ١ & ، \quad -٣ \leq س < ١ \\ ٢س + ٣ & ، \quad ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

جد ق'(−١) ، ق'(١) إن وجدت.

الحل

$$ق'(-١) = \lim_{س \leftarrow -١} \frac{ق(س) - ق(-١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ١ - (٤ \times -١ + ١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ١ + ٣}{س + ١} = \lim_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ٤}{س + ١}$$

$$= \frac{٤\cancel{(س + ١)}}{\cancel{س + ١}} = ٤$$

عند س = ١ نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$$ق'(١)^{+} = \underset{س \to ١^{+}}{نها} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$$

$$= \underset{س \to ١^{+}}{نها} \frac{٢س + ٣ - ٥}{س - ١} = \underset{س \to ١^{+}}{نها} \frac{٢س - ٢}{س - ١} = \underset{س \to ١^{+}}{نها} \frac{٢\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}} = ٢$$

$$ق'(١)^{-} = \underset{س \to ١^{-}}{نها} \frac{٤س + ١ - ٥}{س - ١}$$

$$= \underset{س \to ١^{-}}{نها} \frac{٤س - ٤}{س - ١} = \underset{س \to ١^{-}}{نها} \frac{٤\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}} = ٤$$

ق'(١) غير موجودة لأن

$ق'(١)^{+} \neq ق'(١)^{-}$.

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{نها} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نها} \frac{\frac{ع}{ع^{٢} + ٨} - \frac{س}{س^{٢} + ٨}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ع(س^{٢} + ٨) - س(ع^{٢} + ٨)}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(ع - س)}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ع س^{٢} + ٨ع - ع^{٢} س - ٨س}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(ع - س)}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ع س^{٢} - ع^{٢} س + ٨ع - ٨س}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع س}\,\cancel{(\text{س} - \text{ع})}^{\,-1}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \frac{8\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} \times \frac{1}{(\text{ع}^2 + 8)(\text{س}^2 + 8)}$$

$$= \left(\lim_{\text{ع} \to \text{س}} (-\text{ع س}) + 8\right) \times \frac{1}{(\text{س}^2 + 8)^2}$$

$$= (-\text{س}^2 + 8) \times \frac{1}{(\text{س}^2 + 8)^2}$$

$$= \frac{-\text{س}^2 + 8}{(\text{س}^2 + 8)^2}$$

تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

الحل

المساحة $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^2$

المطلوب $\text{م}'(٢٠)$.

$$\text{م}'(٢٠) = \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{\text{م}(\text{س}) - \text{م}(٢٠)}{\text{س} - ٢٠} = \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{\text{س}^2 - (٢٠)^2}{\text{س} - ٢٠}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{(\text{س} + ٢٠)\cancel{(\text{س} - ٢٠)}}{\cancel{\text{س} - ٢٠}} = \lim_{\text{س} \to ٢٠} (\text{س} + ٢٠)$$

$$= ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$$