سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الثاني عشر – من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 و Probability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالـة

السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم

-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة الثامنة: التوزيع الطبيعي

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءً عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ ، ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-٥ تجد مشتقة ضرب دالتَين، ومشتقة قسمة دالتَين مكوّناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن).

٢-٥ تحدّد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة د(س) = س^{ن} (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، وتحدد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، وتستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

إذا كانت $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^{ن}، فإن ص = $\frac{1}{\text{ن}+1}$ س$^{ن+1}$ + جـ، حيث جـ عدد ثابت، ن ≠ −١

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

العدد المركب
Complex number

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

١) أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل ممّا يأتي:

أ ص = $\frac{1}{3}$س^{3} − ٢

ب ص = $\frac{1}{6}$س^{6} + ٨

ج ص = $\frac{1}{15}$س^{15} + ١

د د(س) = −$\frac{1}{2}$س$^{-2}$ + ٣

هـ د(س) = −$\frac{1}{7}$س$^{-7}$ + ٠,٢

و د(س) = $\frac{2}{3}$س$^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{5}{8}$

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تجمع، وتطرح، وتضرب أزواجًا من العبارات الجبرية، وتبسطها.	١) بسّط كلًا مما يأتي: أ (أ + ب س) + (٢أ − ٣ب س). ب (أ + ب س)(٢أ − ٣ب س). ج ٥أ − ٣(٢ب س − ٦أ)
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تبسط العبارات التي تتضمن جذورًا.	٢) بسّط كلًا مما يأتي: أ √٣٢ − ٣√٨ ب (٢ − √٥)(٢ + √٥)

المفردات

العدد المركب
Complex number

العدد التخيلي
Imaginary number

مرافق العدد المركب
Conjugate of a complex number

مخطط أرجاند
Argand diagram

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثـال ١

إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = (٢س − ١)√(٤س + ٥)، فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحـلّ:

ص = (٢س − ١)(٤س + ٥)$^{\frac{1}{2}}$ .... أعد كتابة الجذر التربيعي بالصورة الأسّية.

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٢س − ١) × $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$((٤س + ٥)$^{\frac{1}{2}}$) + (٤س + ٥)$^{\frac{1}{2}}$ × $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$(٢س − ١)

الدالة الأولى — مشتقة الدالة الثانية — الدالة الثانية — مشتقة الدالة الأولى

= (٢س − ١)($\frac{1}{2}$(٤س + ٥)$^{-\frac{1}{2}}$(٤)) + (√(٤س + ٥))(٢) .... استخدم مشتقة ضرب دالتَين لتجد مشتقة الدالة.

= $\frac{٢(٢س − ١)}{\sqrt{٤س + ٥}}$ + ٢√(٤س + ٥) .... اكتب العبارة في صورة كسر واحد.

= $\frac{٢(٢س − ١) + ٢(٤س + ٥)}{\sqrt{٤س + ٥}}$ .... بسّط البسط.

= $\frac{١٢س + ٨}{\sqrt{٤س + ٥}}$

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

تذكر أن العدد هـ هو عدد أويلر (المعروف أيضًا بالعدد النيبيري)، وهو أساس اللوغاريتمات الطبيعية، وقيمته هـ = ٢,٧١٨٢٨ مقربة إلى أقرب ٥ منازل عشرية.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- إذا كانت القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) تأخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها، فإن (س) يعتبر متغيرًا عشوائيًا متصلًا.
- يصف س ~ ط(و، $ع^{٢}$) توزيعًا طبيعيًا لمتغير عشوائي متصل. ويقرأ س يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي و، وتباينه $ع^{٢}$.
- في المتغير الطبيعي المعياري (ز) يكون الوسط الحسابي و = ٠، والتباين $ع^{٢}$ = ١
  يُشار إلى المتغير الطبيعي المعياري بـ ز ~ ط (٠، ١).
- إذا كان المتغير (ز) يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا، فإن الجدول يعطي قيم د ($ز_{١}$) لكل قيمة من قيم $ز_{١}$، حيث $ز_{١}$ > ٠، حسب العلاقات الآتية:
  - ل(ز ⩽ $ز_{١}$) = د ($ز_{١}$)
  - ل(ز > $ز_{١}$) = ١- (ز < $ز_{١}$)
    = ١ - د ($ز_{١}$)

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) المتغير العشوائي المتصل س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٨، وانحرافه المعياري ع. إذا علمت أن ل(س > ٥) = ٠,٩٧٧٢، فأوجد:

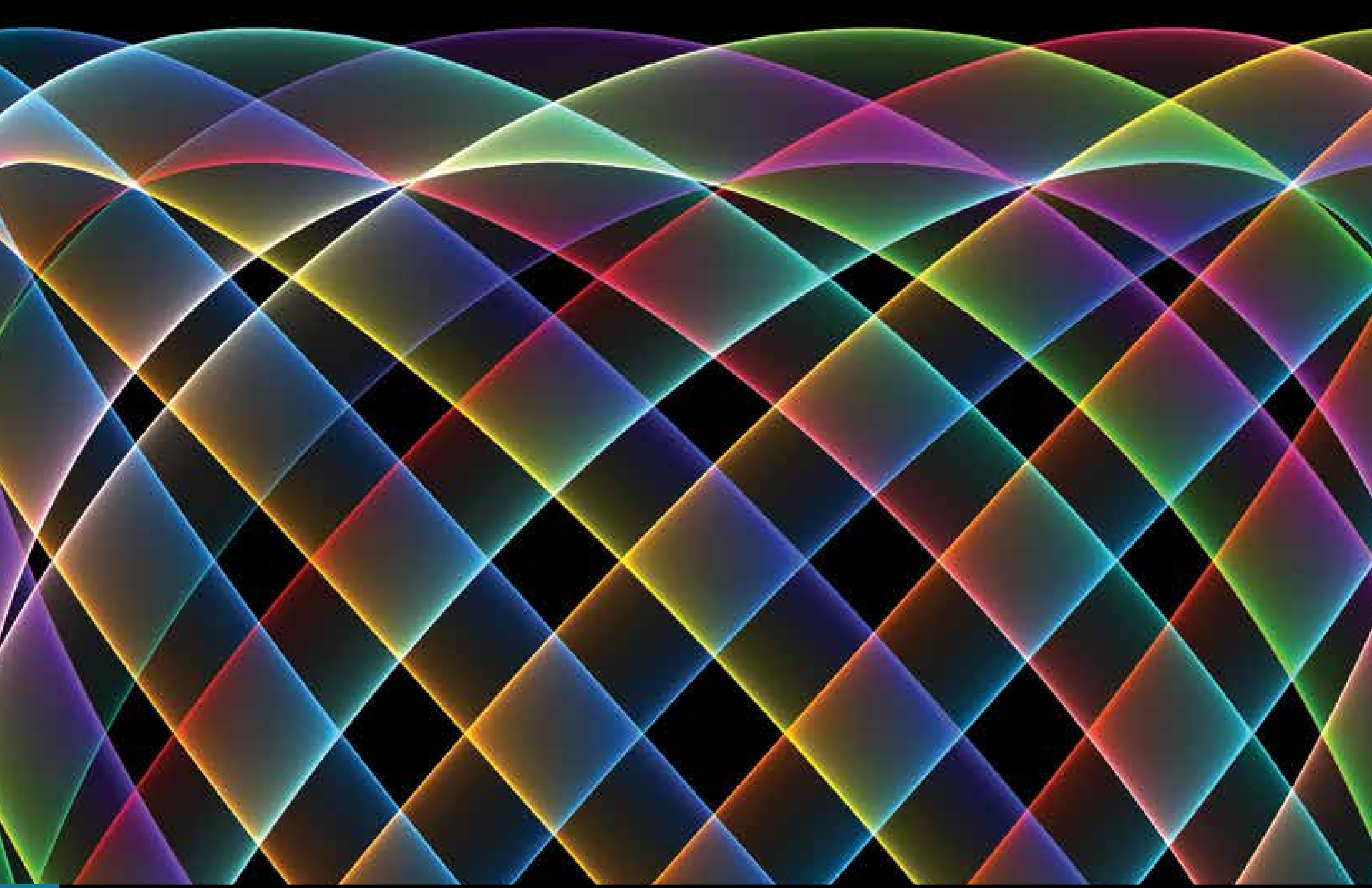
أ قيمة ع.

ب ل(س > ٩,٥)

٢) المتغيران العشوائيان المتصلان س، ص يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي. إذا علمت أن س ~ ط(١,٥، $٢^{٢}$)، ص ~ ط(٢، $٥^{٢}$)، فارسم على الشكل نفسه تمثيلَين بيانيَّين يبيّنان منحنيَين طبيعيَّين يمثلان التوزيع الاحتمالي للمتغيرَين (س) ، (ص)، وبيّن محور التماثل لكلّ منهما.

٣) وجدت محطة وقود أن مبيعاتها اليومية باللتر تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٤٥٢٠، وانحرافه المعياري ٥٦٠. أوجد:

أ عدد أيام السنة (٣٦٥ يومًا) التي يتجاوز المبيع اليومي المتوقع فيها ٣٩٠٠ لتر.



الوحدة الخامسة
المزيد من التفاضل
Further Differentiation

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تجد مشتقة ضرب دالتَين، ومشتقة قسمة دالتَين مكوّناتها مضروبة بالثوابت، والجمع والطرح للدوال في صيغة $د(س) = س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن).

٥-٢ تحدّد النقاط الحرجة لدوال في صورة ضرب أو قسمة دالتين في صيغة $د(س) = س^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، وتحدد طبيعة (نوع) النقطة الحرجة، وتستخدم معلومات عن النقطة الحرجة لرسم المنحنيات مستخدمًا المشتقة الأولى.

٥-٣ تجد مشتقات الدوال الأسية (أساسها هـ) والدوال اللوغاريتمية الطبيعية مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.

٥-٤ تجد مشتقات جاس، جتاس مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح، والضرب والقسمة للدوال والدوال المركبة.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثاني عشر، الوحدة الرابعة	تجد مشتقة دالة في الصيغة د(س) = $س^ن$ مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.	١) أوجد مشتقة كلٍّ مما يأتي بالنسبة إلى س: أ ص = ٥$س^٣$ − $\frac{٣}{س^٢}$ + ٢ $\sqrt{س}$ ب ص = $\frac{س^٨ - ٤س^٥ + س^٢}{٢س^٣}$
الصف الثاني عشر، الوحدة الرابعة	تشتق دوال مركبة مستخدمًا قاعدة السلسلة.	٢) أوجد مشتقة كلٍّ مما يأتي بالنسبة إلى س: أ ص = $(٣س - ٥)^٤$ ب ص = $\frac{٤}{\sqrt{١ - ٢س}}$
الصف الثاني عشر، الوحدة الرابعة	تجد معادلتَي المماس للمنحنى والعمودي عليه.	٣) أوجد معادلة العمودي على مماس المنحنى ص = $س^٣$ − ٥$س^٢$ + ٢س − ١ عند النقطة (١، −٣).
الصف الثاني عشر، الوحدة الرابعة	تجد النقاط الحرجة للمنحنيات، وتحدد نوعها.	٤) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة للمنحنى: ص = $س^٣$ − ٣$س^٢$ + ٢، وحدد نوع كل منها.

المفردات

مشتقة ضرب دالتين Derivative of the product of two functions

مشتقة قسمة دالتين Derivative of the quotient of two functions

مقلوبات الدوال المثلثية Reciprocals of trigonometric funtions

لماذا ندرس المزيد من التفاضل؟

درست كيف تجد مشتقة الدوال كثيرات الحدود، ودالة القوة بالنسبة إلى س، ولكن يوجد الكثير من الدوال التي نحتاج إلى أن نجد مشتقاتها، لذلك سنتعلم في هذه الوحدة كيف نجد مشتقة ضرب دالتَين وقسمتهما، وسنتعلم أيضًا كيف نجد مشتقة الدوال الأسيّة، واللوغارتمية، والمثلثيّة، ونستخدمها.

على الرغم من أن هذه المواضيع تبدو مجرد مسائل على الرياضيات البحتة، إلا أن التفاضل يُستخدم في المواضيع المتعلقة بالهندسة الميكانيكية، وفي مجال النظريات الفيزيائية.

١-٥ قاعدة مشتقة ضرب دالتَين

Rule of the derivative of the product of two functions

لتكن ص = (س + ١) (س − ٢) لإيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، فيمكننا أولًا فك الأقواس:

$\text{ص} = (\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢$،

ثم نجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢) = ٢\text{س} - ١$

ولكن إذا كانت $\text{ص} = (\text{س} + ١)^{٤}(٣\text{س} - ٢)^{٣}$، فمن الصعوبة فك الأقواس لإيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

للتغلب على هذه الصعوبة يمكنك استخدام قاعدة مشتقة ضرب دالتَين **derivative of the product of two functions** الموضحة في النتيجة الآتية:

نتيجة ١

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين:

إذا كانت ع، ل دالتَين بدلالة س، فإن: $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ع ل}) = \text{ع}\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} + \text{ل}\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

يمكن أن تتذكر قاعدة مشتقة ضرب دالتَين على النحو:

'الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى' .

وعليه فإننا نجد مشتقة $\text{ص} = (\text{س} + ١)^{٤}(٣\text{س} - ٢)^{٣}$ على النحو:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underbrace{(\text{س} + ١)^{٤}}_{\text{الدالة الأولى}} \times \underbrace{\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٣\text{س} - ٢)^{٣}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(٣\text{س} - ٢)^{٣}}_{\text{الدالة الثانية}} \times \underbrace{\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س} + ١)^{٤}}_{\text{مشتقة الدالة الأولى}}$$

$$= (\text{س} + ١)^{٤} \times ٣(٣\text{س} - ٢)^{٣-١} \times ٣ + (٣\text{س} - ٢)^{٣} \times ٤ \times (\text{س} + ١)^{٤-١} \times ١$$

$$= ٩(\text{س} + ١)^{٤}(٣\text{س} - ٢)^{٢} + ٤(٣\text{س} - ٢)^{٣}(\text{س} + ١)^{٣}$$ حلل إلى العوامل

$$= (\text{س} + ١)^{٣}(٣\text{س} - ٢)^{٢}\left(٩(\text{س} + ١) + ٤(٣\text{س} - ٢)\right)$$

$$= (\text{س} + ١)^{٣}(٣\text{س} - ٢)^{٢}(٩\text{س} + ٩ + ١٢\text{س} - ٨)$$

$$= (\text{س} + ١)^{٣}(٣\text{س} - ٢)^{٢}(٢١\text{س} + ١)$$

برهنة قاعدة مشتقة ضرب دالتين

لتكن الدالة ص = ع ل حيث ع، ل دالتين بدلالة س.

زيادة قليلة في س (Δ س) تؤدي إلى زيادة قليلة في ص، ع، ل (Δ ص، Δ ع، Δ ل) على الترتيب. أي أن:

$\text{ص} + \Delta\text{ص} = (\text{ع} + \Delta\text{ع})(\text{ل} + \Delta\text{ل})$ فكّ الأقواس واستبدل ص بـ ع ل

$\text{ع ل} + \Delta\text{ص} = \text{ع ل} + \text{ع}\,\Delta\text{ل} + \text{ل}\,\Delta\text{ع} + \Delta\text{ع}\,\Delta\text{ل}$ اطرح ع ل من الطرفَين

$\Delta\text{ص} = \text{ع}\,\Delta\text{ل} + \text{ل}\,\Delta\text{ع} + \Delta\text{ع}\,\Delta\text{ل}$ اقسم الطرفَين على $\Delta\text{س}$

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{ع}\,\frac{\Delta\text{ل}}{\Delta\text{س}} + \text{ل}\,\frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}} + \Delta\text{ع}\,\frac{\Delta\text{ل}}{\Delta\text{س}} \;\ldots\ldots\ldots\; (\text{١})$$

عندما $\Delta\text{س} \leftarrow \text{٠}$، فإن $\Delta\text{ص}$، $\Delta\text{ع}$ ، $\Delta\text{ل}$ أيضًا تؤول إلى الصفر.

$$\text{نها}_{\Delta\text{س} \leftarrow \text{٠}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \;,\; \text{نها}_{\Delta\text{س} \leftarrow \text{٠}} \frac{\Delta\text{ع}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{دع}}{\text{دس}} \;,\; \text{نها}_{\Delta\text{س} \leftarrow \text{٠}} \frac{\Delta\text{ل}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{دل}}{\text{دس}}$$

فتصبح المعادلة (١) على النحو:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ع}\,\frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل}\,\frac{\text{دع}}{\text{دس}} + \text{٠} \times \frac{\text{دل}}{\text{دس}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ع}\,\frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل}\,\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

مثال ١

إذا كانت معادلة منحنى الدالة $\text{ص} = (\text{٢س} - \text{١})\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}$، فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحلّ:

$\text{ص} = (\text{٢س} - \text{١})(\text{٤س} + \text{٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ .... أعد كتابة الجذر التربيعي بالصورة الأسيّة.

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underbrace{(\text{٢س} - \text{١})}_{\text{الدالة الأولى}} \times \underbrace{\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left((\text{٤س} + \text{٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right)}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(\text{٤س} + \text{٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}_{\text{الدالة الثانية}} \times \underbrace{\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{٢س} - \text{١})}_{\text{مشتقة الدالة الأولى}}$$

$= (\text{٢س} - \text{١})\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{٤س} + \text{٥})^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}(\text{٤})\right) + \left(\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}\right)(\text{٢})$ .... استخدم مشتقة ضرب دالتَين لتجد مشتقة الدالة.

$= \frac{\text{٢}(\text{٢س} - \text{١})}{\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}} + \text{٢}\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}$ .... اكتب العبارة في صورة كسر واحد.

$= \frac{\text{٢}(\text{٢س} - \text{١}) + \text{٢}(\text{٤س} + \text{٥})}{\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}}$ .... بسّط البسط.

$= \frac{\text{١٢س} + \text{٨}}{\sqrt{\text{٤س} + \text{٥}}}$

مثال ٢

أوجد الإحداثي السيني للنقاط الواقعة على المنحنى ص = $(٢س - ٣)^٢(س + ٥)^٣$ التي يكون ميل مماس المنحنى عندها يساوي صفرًا.

الحلّ:

ص = $(٢س - ٣)^٢ (س + ٥)^٣$ — أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ (أي ميل المماس لمنحنى الدالة)،

$$\frac{ءص}{ءس} = \underbrace{(٢س - ٣)^٢}_{\text{الدالة الأولى}} \times \underbrace{\frac{ء}{ءس}\left((س + ٥)^٣\right)}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(س + ٥)^٣}_{\text{الدالة الثانية}} \times \underbrace{\frac{ء}{ءس}\left((٢س - ٣)^٢\right)}_{\text{مشتقة الدالة الأولى}}$$

$$= (٢س - ٣)^٢ \left(٣(س + ٥)^٢(١)\right) + (س + ٥)^٣ \left(٢(٢س - ٣)^١(٢)\right)$$

$= ٣(٢س - ٣)^٢(س + ٥)^٢ + ٤(٢س - ٣)(س + ٥)^٣$ — حلل إلى العوامل.

$= (٢س - ٣)(س + ٥)^٢ \times \left(٣(٢س - ٣) + ٤(س + ٥)\right)$ — بسّط.

$$= (٢س - ٣)(س + ٥)^٢ (١٠س + ١١)$$

$(٢س - ٣)(س + ٥)^٢ (١٠س + ١١) = ٠$ — حل $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

فيكون إما ٢س − ٣ = ٠ أو $(س + ٥)^٢ = ٠$ أو ١٠س + ١١ = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أو س = −٥ أو س = −١,١

مثال ٣

دالة معادلتها ص = $(س + ٢)^٢(٢س - ١)$:

أ. أوجد قيمة الإحداثي السيني لكل نقطة من النقاط الحرجة.

ب. حدّد نوع كلّ نقطة حرجة.

ج. ارسم منحنى الدالة.

الحلّ:

أ. ص = $(س + ٢)^٢(٢س - ١)$ — استخدم قاعدة مشتقة ضرب دالتين.

$\frac{ءص}{ءس} = (س + ٢)^٢ \times ٢ + (٢س - ١) \times ٢(س + ٢)$ — حل $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$(س + ٢)^٢ \times ٢ + (٢س - ١) \times ٢(س + ٢) = ٠$ — حلل إلى العوامل.

$$٢(س + ٢)\left((س + ٢) + (٢س - ١)\right) = ٠$$

$$٢(س + ٢)(٣س + ١) = ٠$$

$$س = -٢ \text{ أو } س = -\frac{١}{٣}$$

ب $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢} = ٢(س + ٢)(٣) + ٢(٣س + ١)(١)$

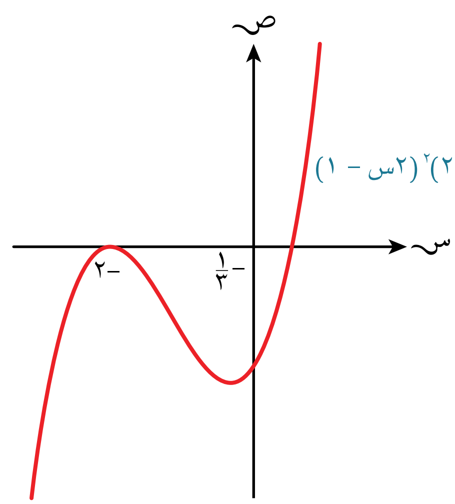
استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع النقاط الحرجة عند $س = -٢$، $س = -\frac{١}{٣}$

$$\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢} = ١٢س + ١٤$$

يكون المقدار سالبًا عند $س = -٢$، لذا تكون النقطة الحرجة عظمى.

يكون المقدار موجبًا عند $س = -\frac{١}{٣}$، لذا تكون النقطة الحرجة صغرى.

ج



تمارين ٥-١

١) استخدم قاعدة مشتقة ضرب دالتَين لتجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ $ص = س(س - ٢)^٥$

ب $ص = ٥س(٢س + ١)^٣$

ج $ص = س\sqrt{س + ٢}$

د $ص = (س - ١)\sqrt{س + ٥}$

هـ $ص = س^٣\sqrt{٢س - ١}$

و $ص = \sqrt{س}(س^٢ + ٢)^٣$

ز $ص = (س - ٣)^٢(س + ٢)^٥$

ح $ص = (٢س - ١)^٥(٣س + ٤)$

ط $ص = (٢س - ٥)(٣س^٢ + ١)^٢$

٢) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = س^٢\sqrt{س + ٤}$ عند النقطة $(-٣، ٩)$.

٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = (٢ − س)^{٣}(س + ١)^{٤} عند س = ١

٤) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (س + ٢)(س − ١)^{٢} عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور الصادات.

٥) أوجد الإحداثي السيني للنقاط الواقعة على منحنى الدالة ص = (٣ − س)^{٣}(س + ١)^{٢} حيث ميل مماس المنحنى يساوي صفرًا.

٦) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = (س + ٢) $\sqrt{١ - ٢س}$ حيث ميل مماس المنحنى يساوي صفرًا.

٧) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = (س − ١)^{٢}(٥ − ٢س) + ٣ نقطتين حرجتين ا، ب.

أ أوجد الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطتين ا، ب.

ب أوجد مساحة المثلث ل و ن، حيث و نقطة الأصل، والنقطتَين ل، ن نقطتَي تقاطع المستقيم ا ب مع المحورين.

ج حدد نوع كل من النقطتين الحرجتين ا، ب، واستخدم هذه المعلومات لترسم منحنى الدالة ص = (س − ١)^{٢}(٥ − ٢س) + ٣

٨) دالة معادلتها ص = (س − ٣)^{٢}(س + ٤):

أ أوجد قيمة الإحداثي السيني لكل نقطة حرجة.

ب حدد نوع كلّ نقطة حرجة.

ج ارسم منحنى الدالة.

٢-٥ قاعدة مشتقة قسمة دالتَين
Rule of the derivative of the quotient of two functions

يمكننا أن نجد مشتقة الدالة ص $= \frac{س^٢ - ٥}{٢س + ١}$ بأن نكتبها في صورة

ص $= (س^٢ - ٥)(٢س + ١)^{-١}$، ثم نطبق قاعدة مشتقة ضرب دالتَين.

عادة نعتبر ص $= \frac{س^٢ - ٥}{٢س + ١}$ في صورة قسمة دالتَين على النحو:

ص $= \frac{ع}{ل}$، حيث ع $=$ س^٢ $-$ ٥، ل $=$ ٢س $+$ ١

لتجد مشتقة قسمة دالتَين، يمكنك استخدام **قاعدة مشتقة قسمة دالتَين rule of the derivative of the quotient of two functions**. كما في النتيجة الآتية:

نتيجة ٢

قاعدة مشتقة قسمة دالتَين:

إذا كانت ع، ل دالتَين بدلالة س، فإن: $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{ع}{ل}\right) = \frac{ل \frac{ى ع}{ى س} - ع \frac{ى ل}{ى س}}{ل^٢}$، حيث ل $\neq$ ٠

يمكن أن تتذكّر قاعدة مشتقة القسمة على النحو:

$$\frac{\textbf{المقام} \times \textbf{مشتقة البسط} - \textbf{البسط} \times \textbf{مشتقة المقام}}{(\textbf{المقام})^٢}$$

برهنة قاعدة مشتقة قسمة دالتَين

لتكن الدالة ص $= \frac{ع}{ل}$، حيث ع، ل دوال بدلالة س، ل $\neq$ ٠

زيادة قليلة في س (Δ س) تؤدي إلى زيادة قليلة في ص، ع، ل (Δ ص، Δ ع، Δ ل) على الترتيب؛ أي أن:

ص $+ \Delta$ ص $= \frac{ع + \Delta ع}{ل + \Delta ل}$ — اطرح ص من الطرفَين

Δ ص $= \frac{ع + \Delta ع}{ل + \Delta ل} -$ ص — استبدل ص بـ $\frac{ع}{ل}$

Δ ص $= \frac{ع + \Delta ع}{ل + \Delta ل} - \frac{ع}{ل}$ — اكتب العبارة في صورة كسر واحد

Δ ص $= \frac{ل(ع + \Delta ع) - ع(ل + \Delta ل)}{ل(ل + \Delta ل)}$ — فكّ الأقواس وبسّط

Δ ص $= \frac{ل \Delta ع - ع \Delta ل}{ل^٢ + ل \Delta ل}$ — اقسم الطرفَين على Δ س

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ل \frac{\Delta ع}{\Delta س} - ع \frac{\Delta ل}{\Delta س}}{ل^٢ + ل \Delta ل} \quad \text{............................} \quad (١)$$

عندما Δ س ← ٠ فإن Δ ص، Δ ع، Δ ل أيضًا تؤول إلى الصفر.

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ءص}{ءس}، \quad \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ع}{\Delta س} = \frac{ءع}{ءس}، \quad \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ل}{\Delta س} = \frac{ءل}{ءس}$$

في المعادلة (١)، يقترب الحد ل Δ ل في المقام من الصفر كلما اقتربت Δ ل من الصفر،
وبالتالي تصبح المعادلة (١) كالآتي:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ع}{ل}\right) = \frac{ل \frac{ءع}{ءس} - ع \frac{ءل}{ءس}}{ل^٢}$$

مثال ٤

أوجد مشتقة الدالة ص = $\frac{س^٢ - ٥}{٢س + ١}$

الحل:

$$ص = \frac{س^٢ - ٥}{٢س + ١}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\underbrace{(٢س + ١)}_{\text{المقام}} \times \underbrace{\frac{ء}{ءس}(س^٢ - ٥)}_{\text{مشتقة البسط}} - \underbrace{(س^٢ - ٥)}_{\text{البسط}} \times \underbrace{\frac{ء}{ءس}(٢س + ١)}_{\text{مشتقة المقام}}}{\underbrace{(٢س + ١)^٢}_{\text{مربيع المقام}}}$$

$$= \frac{(٢س + ١)(٢س) - (س^٢ - ٥)(٢)}{(٢س + ١)^٢}$$

$$= \frac{٤س^٢ + ٢س - ٢س^٢ + ١٠}{(٢س + ١)^٢}$$

$$= \frac{٢(س^٢ + س + ٥)}{(٢س + ١)^٢}$$ .... عادة لا نفكّ الأقواس في المقام.

مثــال ٥

أوجد مشتقة الدالة $ص = \frac{(س + ٢)^{٣}}{\sqrt{س - ١}}$

الحــلّ:

$$ص = \frac{(س + ٢)^{٣}}{\sqrt{س - ١}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\underbrace{\sqrt{س - ١}}_{\text{المقام}} \times \underbrace{\frac{د}{دس}\left((س + ٢)^{٣}\right)}_{\text{مشتقة البسط}} - \underbrace{(س + ٢)^{٣}}_{\text{البسط}} \times \underbrace{\frac{د}{دس}\left(\sqrt{س - ١}\right)}_{\text{مشتقة المقام}}}{\underbrace{\left(\sqrt{س - ١}\right)^{٢}}_{\text{مربع المقام}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{س - ١}\right)\left(٣(س + ٢)^{٢}(١)\right) - (س + ٢)^{٣}\left(\frac{١}{٢}(س - ١)^{-\frac{١}{٢}}(١)\right)}{س - ١}$$

$$= \frac{٣(س + ٢)^{٢}\sqrt{س - ١} - \frac{(س + ٢)^{٣}}{٢\sqrt{س - ١}}}{س - ١}$$

اضرب كلًا من البسط والمقام في $٢\sqrt{س - ١}$

$$= \frac{٦(س + ٢)^{٢}(س - ١) - (س + ٢)^{٣}}{٢(س - ١)\sqrt{س - ١}}$$

حلل البسط إلى العوامل.

$$= \frac{(س + ٢)^{٢}\left(٦(س - ١) - (س + ٢)\right)}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{(س + ٢)^{٢}(٥س - ٨)}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

استكشف ١

في المثالَين ٤، ٥ وجدنا مشتقة الدالتَين $ص = \frac{س^{٢} - ٥}{٢س + ١}$، و $ص = \frac{(س + ٢)^{٣}}{\sqrt{س - ١}}$ باستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتَين. اكتب كلًا من الدالتَين في صورة ناتج ضرب دالتَين. مثل $ص = (س^{٢} - ٥)(٢س + ١)^{-١}$، ثم استخدم قاعدة مشتقة ضرب دالتَين لتجد مشتقة كل منهما.

هل حصلت على النتيجة نفسها؟

ناقش مع زملائك الطريقة التي تفضلها: قاعدة مشتقة قسمة دالتَين، أو قاعدة مشتقة ضرب دالتَين.

تمارين ٥-٢

١) استخدم قاعدة مشتقة قسمة دالتين لتجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ $\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ٤}$

ب $\text{ص} = \frac{٣\text{س} - ٥}{٢ - \text{س}}$

ج $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣}{٢\text{س} - ١}$

د $\text{ص} = \frac{٣\text{س} + ١}{٢ - ٥\text{س}}$

هـ $\text{ص} = \frac{١ - ٢\text{س}^{٢}}{(\text{س} + ٤)^{٢}}$

و $\text{ص} = \frac{٥\text{س}^{٤}}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}$

ز $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٢} - ٧\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥}$

ح $\text{ص} = \frac{(\text{س} + ٤)^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}}$

٢) أوجد ميل المماس للمنحنى $\text{ص} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} + ٤}$ عند النقطة $\left(٢، -\frac{١}{٢}\right)$.

٣) أوجد إحداثيات النقاط الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \frac{(\text{س} - ١)^{٢}}{٢\text{س} + ٥}$ التي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات.

٤) أوجد إحداثيات النقاط الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \frac{١ - ٢\text{س}}{\text{س} - ٥}$ التي عندها ميل مماس المنحنى يساوي ١

٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى $\text{ص} = \frac{\text{س} - ٤}{٢\text{س} + ١}$ عند النقطة التي يقطع فيها المنحنى محور الصادات.

٦) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ $\text{ص} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{٥\text{س} - ١}$

ب $\text{ص} = \frac{\text{س} - ١}{\sqrt{٢\text{س} + ٣}}$

ج $\text{ص} = \frac{٣ - \text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

د $\text{ص} = \frac{٥(\text{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$

٧) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ التي عندها ميل مماس المنحنى يساوي صفرًا.

٨) أوجد معادلة العمودي على مماس المنحنى $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$ عند النقطة (−١، ٢).

٣-٥ مشتقات الدوال الأسيّة
Derivatives of exponential functions

مشتقة هـ$^{\text{س}}$

مُساعَدة

تذكر أن العدد هـ هو عدد أويلر (المعروف أيضًا بالعدد النيبيري)، وهو أساس اللوغاريتمات الطبيعية، وقيمته هـ = ٢,٧١٨٢٨ مقربة إلى أقرب ٥ منازل عشرية.

للدالة د (س) = هـ$^{\text{س}}$ صفة خاصة. إذا استخدمنا برمجية الرسم لنرسم د (س) = هـ$^{\text{س}}$ مع بيان دالة ميل مماس المنحنى (د′(س))، فسنجد أن المنحنيَين متطابقان، وعليه نحصل على القاعدة الآتية:

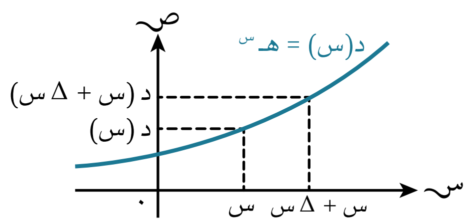
نتيجة ٣

$$\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$$

برهنة قاعدة مشتقة الدالة الأسّية للأساس هـ

لتوضيح كيفية الحصول على النتيجة أعلاه نتبع الآتي:

لتكن الدالة د (س) = هـ$^{\text{س}}$، ثم حدد نقطتَين إحداثيهما السيني س، س + Δس، حيث Δس زيادة قليلة في س.



$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{د (س} + \Delta\text{ س)} - \text{د (س)}}{\text{(س} + \Delta\text{ س)} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س} + \Delta\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\Delta\text{ س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\Delta\text{س}} - ١)}{\Delta\text{ س}}$$

الآن اعتمد $\frac{\text{هـ}^{\Delta\text{س}} - ١}{\Delta\text{ س}}$ لقيم قليلة لـ Δ س، كما في الجدول الآتي:

Δس	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١
$\frac{\text{هـ}^{\Delta\text{س}} - ١}{\Delta\text{س}}$	١,٠٥١٧٠٩	١,٠٠٥٠١٧	١,٠٠٠٥٠٠	١,٠٠٠٠٥٠

نلاحظ من الجدول أن: $\lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\Delta\text{س}} - ١}{\Delta\text{ س}} = ١$

$$\therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

مشتقة $هـ^{د(س)}$

لتكن الدالة $ص = هـ^{د(س)}$

افترض أن $ص = هـ^{ع}$ حيث $ع = د(س)$

$\frac{ءص}{ءع} = هـ^{ع}$ $\frac{ءع}{ءس} = د'(س)$

استخدم قاعدة السلسلة:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$$= هـ^{ع} \times د'(س)$$

$$= د'(س) \times هـ^{د(س)}$$

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ٤

إذا كانت $ص = هـ^{د(س)}$، فإن:

$\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{د(س)}\right) = د'(س) \times هـ^{د(س)}$،

وبصورة خاصة:

$\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{أس + ب}\right) = أهـ^{أس + ب}$

مثــال ٦

أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ $ص = هـ^{٢س}$

ب $ص = هـ^{(٢س^٢ - ١)}$

ج $ص = س هـ^{-٥س}$

د $ص = \frac{هـ^{٣س}}{س^٢}$

الحــلّ:

أ $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{٢س}\right) = \underbrace{٢}_{\text{مشتقة الأُسّ}} \times \underbrace{هـ^{٢س}}_{\text{الدالة الأصلية}} = ٢هـ^{٢س}$

ب $\frac{ء}{ءس}\left(هـ^{(٢س^٢ - ١)}\right) = \underbrace{٤س}_{\text{مشتقة الأُسّ}} \times \underbrace{هـ^{(٢س^٢ - ١)}}_{\text{الدالة الأصلية}} = ٤س هـ^{(٢س^٢ - ١)}$

ج $\frac{ء}{ءس}\left(س هـ^{-٥س}\right) = س \times \frac{ء}{ءس}\left(هـ^{-٥س}\right) + هـ^{-٥س} \times \frac{ء}{ءس}(س)$ قاعدة مشتقة ضرب دالتين.

$$= س \times \left(-٥هـ^{-٥س}\right) + هـ^{-٥س} \times (١)$$

$$= -٥س هـ^{-٥س} + هـ^{-٥س}$$

$$= هـ^{-٥س}(١ - ٥س)$$

د $\frac{د}{د س}\left(\frac{هـ^{٣س}}{س^٢}\right) = \frac{س^٢ \times \frac{د}{د س}(هـ^{٣س}) - هـ^{٣س} \times \frac{د}{د س}(س^٢)}{س^٤}$ قاعدة مشتقة قسمة دالتين.

$= \frac{س^٢ \times ٣هـ^{٣س} - هـ^{٣س} \times ٢س}{س^٤}$

$= \frac{س\, هـ^{٣س}\,(٣س - ٢)}{س^٤}$

$= \frac{هـ^{٣س}\,(٣س - ٢)}{س^٣}$

مثــال ٧

دالة معادلتها ص = $هـ^{٢س} - ٩هـ^{س} + ٧س$. أوجد الإحداثي السيني لكلّ نقطة حرجة، وحدد نوعها.

الحــلّ:

$ص = هـ^{٢س} - ٩هـ^{س} + ٧س$ أوجد مشتقة الدالة.

$\frac{د ص}{د س} = ٢هـ^{٢س} - ٩هـ^{س} + ٧$

لنجد النقاط الحرجة نضع $\frac{د ص}{د س} = ٠$

$٢هـ^{٢س} - ٩هـ^{س} + ٧ = ٠$ حلل إلى العوامل.

$(٢هـ^{س} - ٧)(هـ^{س} - ١) = ٠$

$(٢هـ^{س} - ٧) = ٠$ أو $(هـ^{س} - ١) = ٠$

$هـ^{س} = \frac{٧}{٢}$ أو $هـ^{س} = ١$ بأخذ لط للطرفين.

$س = لط\left(\frac{٧}{٢}\right)$ أو $س = ٠$

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد نوع النقاط الحرجة عند س = ٠، $س = لط\left(\frac{٧}{٢}\right)$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ٤هـ^{٢س} - ٩هـ^{س}$

عند س = ٠، فإن $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ سالبة ⇐ نقطة عظمى.

عند $س = لط\left(\frac{٧}{٢}\right)$، فإن $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ موجبة ⇐ نقطة صغرى.

تمارين ٥-٣

١) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ $ص = هـ^{٥س}$ ب $ص = هـ^{-٤س}$ ج $ص = ٢هـ^{٦س}$

د $ص = ٣هـ^{-٥س}$ هـ $ص = ٤هـ^{\frac{س}{٢}}$ و $ص = هـ^{٢س - ٧}$

ز $ص = هـ^{س^{٢} - ٣}$ ح $ص = ٢س + ٣هـ^{\sqrt{س}}$ ط $ص = ٥\sqrt{هـ^{س}} - \frac{١}{هـ^{٢س}}$

ي $ص = ٢(هـ^{٣س} - ١)$ ك $ص = \frac{٣هـ^{٢س} + هـ^{-٢س}}{٢}$ ل $ص = ٥(هـ^{س^{٢}} - ٢س)$

٢) لتكن الدالة $ص = ١ - هـ^{٢ - س}$. أوجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة ص = ٠

٣) مادة مشعة كتلتها م جرام، وبقيت ن سنة بعد زمن معيّن معرّفة بالصيغة

$م = ٣٠٠هـ^{-٠٫٠٠٠١٢ن}$

أوجد معدل تناقص الكتلة عندما ن = ٢٠٠٠

> **مُساعَدة**
>
> معدل تغيّر الكتلة
> هو $\frac{دم}{دن}$

٤) أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ $ص = س\,هـ^{س}$ ب $ص = س^{٢}هـ^{٣س}$ ج $ص = ٥س\,هـ^{-٢س}$

د $ص = ٢\sqrt{س}\,هـ^{س}$ هـ $ص = \frac{هـ^{٦س}}{س}$ و $ص = \frac{هـ^{-٢س}}{\sqrt{س}}$

ز $ص = \frac{هـ^{س} - ١}{هـ^{س} + ٢}$ ح $ص = س\,هـ^{٣س} + \frac{هـ^{٦س}}{٢}$ ط $ص = \frac{س^{٢}هـ^{س} - س}{هـ^{س} + ٢}$

٥) أوجد ميل المماس لمنحنى للدالة $ص = \frac{٨}{٥ + هـ^{٢س}}$ عند س = ٠

٦) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة على منحنى الدالة $ص = س\,هـ^{س}$.

٧) يقطع المنحنى $ص = ٢هـ^{٢س} + هـ^{-س}$ محور الصادات في النقطة ل. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند النقطة ل، وحدد إحداثيات النقطة التي يقطع عندها المماس محور السينات.

٨) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى $ص = (س - ٤)هـ^{س}$، وحدد نوعها.

٩) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى $ص = \frac{هـ^{٢س}}{س^{٢}}$، وحدد نوعها.

١٠) منحنى معادلته $ص = س^{٢}هـ^{-س}$:

أ أوجد الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة للمنحنى، وحدد نوع كل منها.

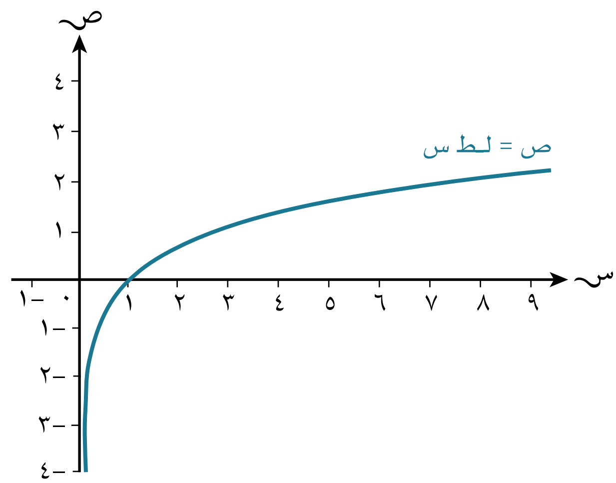
ب بيّن أن معادلة العمودي على مماس المنحنى عند س = ١ هي $هـ^{٢}س + هـ\,ص = ١ + هـ^{٢}$.

١١) أوجد قيم الإحداثيات السينية للنقاط الواقعة على المنحنى ص = $س^٢ هـ^{-٢س}$، حيث $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢} = ٠$

١٢) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى ص = $\frac{هـ^{٢س - ١}}{س}$.

٥-٤ مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية
Derivatives of natural logarithmic functions

استكشف ٢



الشكل المبيّن أعلاه هو التمثيل البياني للدالة ص = لـط س. هل يمكنك أن ترسم التمثيل البياني لمشتقته؟ ناقش رسمك مع زملائك في الصف.

ارسم الشكل باستخدام برمجية الرسم. هل يمكنك أن تقترح صيغة لمشتقة لـط س؟ (قد يساعدك النظر إلى إحداثيات بعض النقاط على التمثيل البياني للمشتقة).

رابط الكتروني

جيوجيبرا (GEOGEBRA) على الرابط:

https://www.geogebra.org/

رابط الكتروني

DESMOS على الرابط:

https://www.desmos.com/

مُساعَدة

يكون ميل مماس المنحنى قيمة موجبة كبيرة جدًا عند القيم الموجبة الصغيرة جدًا لـ س.

مع تزايد س، يتناقص ميل المماس، ولكنه يبقى موجبًا.

مشتقة لط س

إذا كان ص = لـط س، فإن هـ$^{\text{ص}}$ = س

تعلّمت في الدرس ٥-٣ أنه إذا كان ص = هـ$^{\text{س}}$، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـ$^{\text{س}}$

باستخدام هاتَين النتيجتَين نجد مشتقة لـط س:

ص = لـط س

هـ$^{\text{ص}}$ = س   أوجد مشتقة الطرفَين بالنسبة إلى ص

هـ$^{\text{ص}}$ = $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ أعد الترتيب

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ لكننا نعرف أن هـ$^{\text{ص}}$ = س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ٥

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$(لـط س) = $\frac{١}{\text{س}}$، حيث س > ٠

مشتقة لط د (س)

لتكن الدالة ص = لط د(س)

افترض أن ص = لط ع حيث ع = د(س)

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{1}{ع}$ $\frac{ءع}{ءس} = د'(س)$

استخدم قاعدة السلسلة: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{1}{ع} \times د'(س)$

$= \frac{د'(س)}{د(س)}$

ويمكنك استخدام صيغة الدالة:

ل (س) = لط د (س)، والتي يمكن كتابتها في صورة دالة مركبة ل (س) = هـ (د (س))، حيث هـ (س) = لط س

نعرف أن هـ'(س) = $\frac{1}{س}$ ، ومشتقة د (س) هي د'(س)، ومشتقة الدالة المركبة للدالة ل (س) = (هـ ○ د) (س) هي:

ل'(س) = (هـ' ○ د) (س) × د'(س)

وهذا يعطي ل'(س) = $\frac{1}{د(س)}$ × د'(س) = $\frac{د'(س)}{د(س)}$ كما توصلنا إليه باستخدام قاعدة السلسلة.

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ٦

$\frac{ء}{ءس}$ (لط د(س)) = $\frac{د'(س)}{د(س)}$

وبصورة خاصة:

$\frac{ء}{ءس}$ ((لط (أس + ب)) = $\frac{أ}{أس + ب}$

مثــال ٨

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = لط ٢س   ب ص = لط (٤س − ٣)   ج ص = لط $\sqrt{٥ - س}$

الحــلّ:

أ $\frac{ء}{ءس}$ (لط ٢س) = $\frac{2}{2س}$

$= \frac{1}{س}$

ب $\frac{ء}{ءس}$ ((لط (٤س − ٣)) = $\frac{4}{٤س - ٣}$

ج **الطريقة ١:**

$$\frac{د}{د س}\left(لط \sqrt{٥ - س}\right) = \frac{\frac{١}{٢}(٥ - س)^{-\frac{١}{٢}}(-١)}{\sqrt{٥ - س}}$$

$$= \frac{-١}{٢(٥ - س)}$$

الطريقة ٢: استخدام قوانين اللوغاريتمات قبل الاشتقاق.

$$\frac{د}{د س}\left(لط \sqrt{٥ - س}\right) = \frac{د}{د س}\left(لط (٥ - س)^{\frac{١}{٢}}\right)$$

استخدم لط $أ^م$ = م لط أ

$$= \frac{د}{د س}\left(\frac{١}{٢} لط (٥ - س)\right)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{د}{د س}\left(لط (٥ - س)\right)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٥ - س}$$

$$= - \frac{١}{٢(٥ - س)}$$

مثال ٩

أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = $٢س^٤$ لط ٥س

ب ص = $\frac{لط ٢س}{س^٣}$

الحل:

أ $\frac{د}{د س}\left(٢س^٤ لط ٥س\right) = ٢س^٤ \times \frac{د}{د س}(لط ٥س) + لط ٥س \times \frac{د}{د س}(٢س^٤)$

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين.

$$= ٢س^٤ \times \frac{٥}{٥س} + لط ٥س \times ٨ س^٣$$

$$= ٢س^٣ + ٨ س^٣ لط ٥س$$

ب $\frac{د}{د س}\left(\frac{لط ٢س}{س^٣}\right) = \frac{س^٣ \times \frac{د}{د س}(لط ٢س) - لط ٢س \times \frac{د}{د س}(س^٣)}{(س^٣)^٢}$

قاعدة مشتقة قسمة دالتَين.

$$= \frac{س^٣ \times \frac{٢}{٢س} - لط ٢س \times ٣س^٢}{س^٦}$$

$$= \frac{س^٢ - ٣س^٢ لط ٢س}{س^٦}$$

بالقسمة على $س^٢$ بسطًا ومقامًا

$$= \frac{١ - ٣ لط ٢س}{س^٤}$$

تمارين ٥-٤

١) أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = لطـ٣س
ب ص = لطـ٧س
ج ص = لطـ(٢س + ١)
د ص = ٥ + لطـ(س^{٢} + ١)
هـ ص = لطـ(٢س − ١)^{٢}
و ص = لطـ$\sqrt{\text{س} - ٣}$
ز ص = لطـ(س + ٣)^{٥}
ح ص = ٣س + لطـ$\left(\frac{٢}{\text{س}}\right)$
ط ص = ٥س + لطـ$\left(\frac{٢}{١ - ٢\text{س}}\right)$
ي ص = لطـ(لطـس)
ك ص = لطـ(٢ − $\sqrt{\text{س}}$)^{٢}
ل ص = لطـ(٥س + لطـس)

٢) ★ في التمرين ١ إجابة الجزئية (أ) هي إجابة الجزئية (ب) نفسها. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تبرر ذلك؟

٣) أوجد مشتقة كل مما يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = س لطـس
ب ص = ٢س^{٣} لطـس
ج ص = س لطـ(٢س + ١)
د ص = ٣س لطـ٢س
هـ ص = س لطـ(لطـس)
و ص = $\frac{\text{لطـ٥س}}{\text{س}}$
ز ص = $\frac{٢}{\text{لطـس}}$
ح ص = $\frac{\text{لطـ(٣س − ٢)}}{\text{س}}$
ط ص = $\frac{\text{لطـ(٢س + ١)}}{\text{٤س − ١}}$

٤) لتكن الدالة ص = لطـ (٢س − ٣). أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند س = ٥

٥) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = هـ$^{٢\text{س}}$ − ٥ لطـ (٢س + ١) عند س = ٠

٦) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = س^{٢} لط ٥ س، فأوجد قيمة كل من $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عند س = ٢

٧) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = س^{٢} لطـ س، فأوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى، وحدد ما إذا كانت نقطة عظمى أو صغرى.

٨) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = $\frac{\text{لطـس}}{\text{س}}$، فأوجد إحداثيات النقطة الحرجة على المنحنى، وحدد ما إذا كانت نقطة عظمى أو صغرى.

٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = لطـ (٥س − ٤) عند س = ١

١٠) استخدم قوانين اللوغاريتمات لتساعدك على إيجاد مشتقة كل ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) ص = لط $\sqrt{٥س - ١}$

ب) ص = لط $\left(\frac{١}{٣س + ٢}\right)$

ج) ص = لط $\left(س(س + ١)^{٥}\right)$

د) ص = لط $\left(\frac{٢س + ٣}{س - ١}\right)$

هـ) ص = لط $\left(\frac{١ - ٣س}{س^{٢}}\right)$

و) ص = لط $\left(\frac{س(س - ٢)}{س + ٤}\right)$

ز) ص = لط $\left(\frac{٣ - س}{(س + ٤)(س - ١)}\right)$

ح) ص = لط $\left(\frac{٨}{(س + ١)^{٢}(س - ٢)}\right)$

ط) ص = لط $\left(\frac{(س + ٢)(٢س - ١)}{س(س + ٥)}\right)$

١١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $هـ^{ص} = ٢س^{٢} - ١$

ب) $هـ^{ص} = ٣س^{٣} + ٢س$

ج) $هـ^{ص} = (س + ١)(س - ٥)$

مُساعَدة

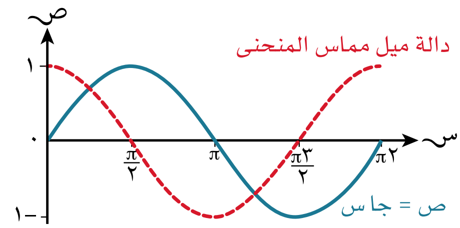
خذ اللوغاريتم الطبيعي (لط) لطرفَي المعادلة قبل أن تجري الاشتقاق.

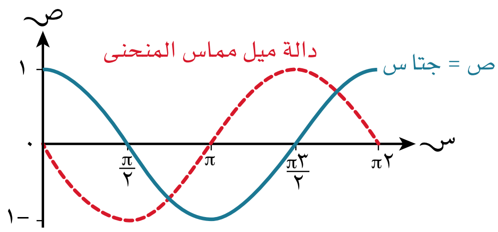
١٢) إذا كانت معادلة منحنى الدالة س = $\frac{١}{٥}\left(هـ^{ص(٢س - ٣)} + ٤\right)$، فأوجد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١

٥-٥ مشتقات الدوال المثلثية
Derivatives of trigonometric functions

استكشف ٣

استُخدمت برمجية الرسم لرسم الدوال ص = جا س، ص = جتا س على الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π ، مع دالة ميل مماس المنحنى (مشتقة) لكل منها .





ناقش مع زملائك سبب توقّعك أن يكون التمثيل البياني لدالة ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا س يأخذ هذا الشكل.

كرر ما قمت به بالنسبة إلى الدالة ص = جتا س.

هل يمكنك أن تقترح تكملة للصيغ الآتية؟

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جا س) = ... $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا س) = ...

مشتقة جا س، جتا س

من التمثيل البياني الأول المبيّن في استكشف ٣، نرى أن التمثيل البياني لدالة ميل المماس لمنحنى دالة الجيب هو في الواقع منحنى دالة جيب التمام.

من التمثيل البياني الثاني المبيّن في استكشف ٣، نرى أن التمثيل البياني لدالة ميل المماس لمنحنى دالة جيب التمام هو في الواقع انعكاس لمنحنى دالة الجيب حول المحور السيني.

وتتلخص هذه النتائج في الجدول الآتي وفي النتيجة ٧:

منحنى الدالة	منحنى دالة ميل المماس
ص = جا س	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جا س) = جتا س
ص = جتا س	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا س) = − جا س

نتيجة ٧

$\frac{د}{د س}$ (جا س) = جتا س

$\frac{د}{د س}$ (جتا س) = − جا س

بناءً على النتيجة ٧ وبمعلومية أن ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ يمكننا إيجاد مشتقة ظا س باستخدام قاعدة مشتقة قسمة دالتَين، والذي سيتم توضيحه لاحقًا.

مقلوبات كل من جا س، جتا س، ظا س

توجد ثلاث دوال مثلثية إضافية بحاجة إلى أن تعرفها، وهي مقلوب دالة الجيب، ومقلوب دالة جيب التمام، ومقلوب دالة الظل.

تُعرف دالة مقلوب الجيب بدالة **قاطع التمام** **cosecant** ويرمز إليها بـ قتا (csc)

تُعرف دالة مقلوب جيب التمام بدالة **القاطع** **secant** ويرمز إليها بـ قا (sec)

تُعرف دالة مقلوب الظل بدالة **قاطع الظل** **cotangent** ويرمز إليها بـ ظتا (cot)

- $\frac{١}{\text{جا س}}$ = **قتا س**
- $\frac{١}{\text{جتا س}}$ = **قا س**
- $\frac{١}{\text{ظا س}}$ = **ظتا س**

غالبًا ما يمكن التعبير عن الدوال المثلثية بطريقة أكثر ملاءمة إذا تم استخدام مقلوبات هذه الدوال كمتطابقات، إلى جانب المتطابقات الأخرى التي تعرفت عليها سابقًا:

- من المتطابقة جا^{٢}س + جتا^{٢}س ≡ ١، نعرف أن جتا^{٢}س ≡ ١ − جا^{٢}س، جا^{٢}س ≡ ١ − جتا^{٢}س
- من المتطابقة $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ≡ ظا س، نعرف أن $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ≡ $\frac{١}{\text{ظا س}}$ ≡ ظتا س

يمكن كتابة عبارة مثل: $\frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}$ بشكل مختلف، وغالبًا ما يكون أكثر ملاءمة باستخدام مجموعة من هذه المتطابقات:

أولًا، نستبدل المقام في $\frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}$ بالعبارة جا^{٢}س، ثم:

$\frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}$ ≡ $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^٢\text{س}}$ اكتب الطرف الأيسر في صورة ناتج ضرب كسرين.

≡ $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ × $\frac{١}{\text{جا س}}$ اكتب كل كسر في صورة مقلوبات الدوال المثلثية.

≡ ظتا س × قتا س

≡ ظتا س قتا س اكتب ناتج الضرب دون وجود إشارة الضرب.

استكشف ٤

١) طُلب إلى ثلاث طالبات إيجاد مشتقة دالة مثلثية ما، وتم تثبيت إجاباتهن على لوحة الفصل الدراسي.

وداد: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا س} + \text{س جا س}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$

فاطمة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا س} + \text{س جتا س}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$

مريم: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا س} + \text{س جتا س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$

تقول المعلمة إن الإجابة الصحيحة هي:

$$\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قتا س}\,(١ + \text{س ظتا س})}$$

أي من الطالبات الثلاث إجابتها صحيحة؟

٢) مشتقة دالة مثلثية هي: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$.

يمكن التعبير عن هذه المشتقة في صورة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د(س)}\,(\text{ع(س)} - \text{هـ(س)})$، حيث كل من د(س)، ع(س)، هـ(س) تمثل كل منها مقلوبات للدوال المثلثية قا س، قتا س، ظتا س.

اربط كلّ دالة من الدوال د(س)، ع(س)، هـ(س) بمقلوبات الدوال المثلثية الصحيحة.

مشتقة ظا س

نستطيع إيجاد مشتقة دالة الظل باستخدام النتائج الواردة في النتيجة ٧، وهي قاعدة مشتقة قسمة دالتين، إلى جانب المتطابقات $\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} \equiv ١$

$\text{ظا س} \equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$، $\frac{١}{\text{جتا س}} \equiv \text{قا س}$، على النحو الآتي:

يمكن أن نجد مشتقة ظا س باستخدام هاتَين النتيجتَين مع قاعدة مشتقة القسمة:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظا س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\right) \qquad \text{استخدم مشتقة قسمة دالتين}$$

$$= \frac{\text{جتا س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جا س}) - \text{جا س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتا س})}{(\text{جتا س})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times (-\text{جا س})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \qquad \text{استخدم } \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} = ١$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \qquad \text{استخدم } \frac{١}{\text{جتا س}} = \text{قا س}$$

$$= \text{قا}^{٢}\text{س}$$

نتيجة ٨

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظا س}) = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

مثـــال ١٠

أوجد مشتقة كل مما يأتي:

أ ص = جتا^{٣}س، واكتب الناتج بدلالة جا س.

ب ع(س) = (١ + جاس)^{٤}

الحـــلّ:

أ ص = جتا^{٣}س

طبّق قاعدة السلسلة

لتكن ع = جتاس ∴ $\frac{ى ع}{ى س}$ = −جاس

ص = ع^{٣} ∴ $\frac{ى ص}{ى ع}$ = ٣ع^{٢}

$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ى ص}{ى ع} \times \frac{ى ع}{ى س}$

= ٣ع^{٢} × − جاس

= ٣جتا^{٢}س × − جاس

جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س

= −٣(١ − جا^{٢}س) جاس

= ٣جاس (جا^{٢}س − ١)

ب إذا كانت ع(س) = (د ○ هـ)(س)،

طبّق قاعدة السلسلة

لتكن ع (س) = (د ○ هـ)(س)، حيث

د(س) = س^{٤}

∴ د$'$(س) = ٤س^{٣}

هـ(س) = ١ + جاس

∴ هـ$'$(س) = جتاس

فإن ع$'$(س) = د$'$ (هـ (س)) × هـ$'$ (س)

= ٤(هـ(س))^{٣} × هـ$'$ (س)

= ٤(١ + جاس)^{٣} × جتا س

مثـــال ١١

أوجد مشتقة كلٍّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = ٢جا س

ب ص = س جتا س

ج ص = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢}}$

د ص = (٣ + ٢جا س)^{٥}

الحـــلّ:

أ $\frac{ى}{ى س}$ (٢جا س) = ٢ $\frac{ى}{ى س}$ (جا س)

= ٢جتا س

ب $\frac{ى}{ى س}$ (س جتا س) = س × $\frac{ى}{ى س}$ (جتا س) + جتا س × $\frac{ى}{ى س}$ (س)

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين.

= −س جا س + جتا س

ج $\frac{د}{د س}\left(\frac{ظا س}{س^{٢}}\right) = \frac{س^{٢} \times \frac{د}{د س}(ظا س) - ظا س \times \frac{د}{د س}(س^{٢})}{س^{٤}}$ قاعدة مشتقة قسمة دالتَين.

$= \frac{س^{٢} \times قا^{٢} س - ظا س \times ٢س}{س^{٤}}$

$= \frac{س قا^{٢} س - ٢ظا س}{س^{٣}}$

د $\frac{د}{د س}\left((٣ + ٢جا س)^{٥}\right) = ٥(٣ + ٢جا س)^{٤} \times ٢جتا س$

$= ١٠جتا س (٣ + ٢جا س)^{٤}$

مشتقة كلّ من جا (أس + ب)، جتا (أس + ب)، ظا (أس + ب)

لتكن الدالة ص = جا (أس + ب)، س مقيسة بالراديان. لإيجاد مشتقة الدالة ص، يمكننا استخدام قاعدة السلسلة كالآتي:

افترض أن ص = جاع حيث ع = أس + ب

$\frac{د ص}{د ع} = جتا ع$ $\frac{د ع}{د س} = أ$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= جتا ع \times أ$

$= أجتا (أس + ب)$

أو باستخدام صيغة الدالة:

ل (س) = جا (أس + ب)، حيث ل (س) = (د ○ هـ) (س)، حيث د (س) = جا س،

هـ (س) = أس + ب.

استخدم بعدها الاشتقاق لنحصل على: د′(س) = جتا س، هـ′(س) = أ

كما نعرف أن مشتقة الدالة المركبة

ل (س) = (د ○ هـ) (س) هي ل′ (س) = (د′ ○ هـ) (س) × هـ′(س).

ويعني ذلك أن: ل′(س) = جتا (أس + ب) × أ

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها باستخدام قاعدة السلسلة أعلاه.

نتيجة ٩

$\frac{د}{د س}\left(جا (أس + ب)\right) = أ جتا (أس + ب)$

وبالمثل، يمكن تبيان أن:

$\frac{د}{د س}\left(جتا (أس + ب)\right) = -أ جا (أس + ب)$

$\frac{د}{د س}\left(ظا (أس + ب)\right) = \frac{أ}{جتا^{٢} (أ س + ب)} = أ قا^{٢} (أس + ب)$

مُساعَدة

من المهم أن تتذكر أنه في حساب التفاضل والتكامل، تُقاس جميع الزوايا بالراديان ما لم يُطلب في التمارين خلاف ذلك.

مثـــال ١٢

أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ ص = ٢جا٣س

ب ص = ٤س ظا٢س

ج ص = $\frac{\text{جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س}^٢}$

د ص = $(٣ - ٢\text{جتا}٥\text{س})^٤$

الحـــلّ:

أ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٢\text{جا}٣\text{س}) = ٢\,\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{جا}٣\text{س})$

$= ٢ \times \text{جتا}٣\text{س} \times (٣)$

$= ٦\text{جتا}٣\text{س}$

ب $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٤\text{س ظا}٢\text{س}) = ٤\text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{ظا}٢\text{س}) + \text{ظا}٢\text{س} \times \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٤\text{س})$

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين.

$= ٤\text{س} \times \text{قا}^٢ ٢\text{س} \times (٢) + \text{ظا}\, ٢\text{س} \times (٤)$

$= ٨\text{س قا}^٢ ٢\text{س} + ٤\text{ظا}\, ٢\text{س}$

ج $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س}^٢}\right)$

$= \frac{\text{س}^٢ \times \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)\right) - \text{جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) \times \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^٢)}{(\text{س}^٢)^٢}$

قاعدة مشتقة قسمة دالتَين.

$= \frac{-٢\text{س}^٢\,\text{جا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) - ٢\text{س جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س}^٤}$

$= \frac{-٢\text{س جا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right) - ٢\text{جتا}\left(٢\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\text{س}^٣}$

د $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left((٣ - ٢\text{جتا}\,٥\text{س})^٤\right) = ٤(٣ - ٢\text{جتا}\,٥\text{س})^٣ \times (١٠\text{جا}\,٥\text{س})$

$= ٤٠\text{جا}\,٥\text{س}\,(٣ - ٢\text{جتا}\,٥\text{س})^٣$

تمارين ٥-٥

١) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $\text{ص} = \text{٢} + \text{جا س}$

ب) $\text{ص} = \text{٢جا س} + \text{٣جتا س}$

ج) $\text{ص} = \text{٢جتا س} - \text{ظا س}$

د) $\text{ص} = \text{٣جا ٢س}$

هـ) $\text{ص} = \text{٤ظا ٥س}$

و) $\text{ص} = \text{٢جتا ٣س} - \text{جا٢س}$

ز) $\text{ص} = \text{ظا}\left(\text{٣س} + \text{٢}\right)$

ح) $\text{ص} = \text{جا}\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{\text{٣}}\right)$

ط) $\text{ص} = \text{٢جتا}\left(\text{٣س} - \frac{\pi}{\text{٦}}\right)$

٢) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $\text{ص} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$

ب) $\text{ص} = \text{٥جتا}^{\text{٢}}\text{٣س}$

ج) $\text{ص} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢جتا س}$

د) $\text{ص} = \left(\text{٣} - \text{جتا س}\right)^{\text{٤}}$

هـ) $\text{ص} = \text{٢جا}^{\text{٣}}\left(\text{٢س} + \frac{\pi}{\text{٦}}\right)$

و) $\text{ص} = \text{٣جتا}^{\text{٤}}\text{س} + \text{٢ ظا}^{\text{٢}}\left(\text{٢س} - \frac{\pi}{\text{٤}}\right)$

٣) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $\text{ص} = \text{س جا س}$

ب) $\text{ص} = \text{٥س جتا ٣س}$

ج) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}}\text{ ظا س}$

د) $\text{ص} = \text{س جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}$

هـ) $\text{ص} = \frac{\text{٥}}{\text{جتا ٣س}}$

و) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

ز) $\text{ص} = \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

ح) $\text{ص} = \frac{\text{جا س}}{\text{٢} + \text{جتا س}}$

ط) $\text{ص} = \frac{\text{جا س}}{\text{٣س} - \text{١}}$

ي) $\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٢س}}$

ك) $\text{ص} = \frac{\text{٣س}}{\text{جا ٢س}}$

ل) $\text{ص} = \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$

٤) أوجد مشتقة كلّ ممّا يأتي بالنسبة إلى س:

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}}$

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتا٢س}}$

ج) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظا٣س}}$

د) $\text{ص} = \text{هـ}^{(\text{جاس} - \text{جتاس})}$

هـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا س}$

و) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{جا ٢س}$

ز) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{٢ جتا س} - \text{جا س}\right)$

ح) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}}\text{هـ}^{\text{جتاس}}$

ط) $\text{ص} = \text{لـط}\left(\text{جتا س}\right)$

ي) $\text{ص} = \text{س لـط}\left(\text{جا س}\right)$

ك) $\text{ص} = \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س} + \text{١}}}$

ل) $\text{ص} = \frac{\text{س جا ٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$

٥) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٣جا٢س − ٥ظا س عند س = ٠

٦) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٢جا ٣س − ٤جتا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٣}\text{، }-٢\right)$.

٧) بيّن أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٥}{٢ - \text{ظا س}}$ موجب دائمًا.

٨) أوجد كلًا من: $\frac{ى}{ى\,س}$(قا س)، $\frac{ى}{ى\,س}$(ظتا س)

٩) بيّن أن العمودي على مماس منحنى الدالة ص = س جا س عند النقطة ل $\left(\frac{\pi}{٢}\text{، }\frac{\pi}{٢}\right)$ يقطع محور السينات في النقطة (π، ٠).

١٠) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = ٥جا ٣س − ٢جتا س، فأوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٣}\text{، }-١\right)$، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ، مقربًا م، جـ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

١١) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = ٣جتا ٢س + ٤جا ٢س + ١، حيث ٠ ⩽ س ⩽ π، فأوجد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة على المنحنى، مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

١٢) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = هـ^س^ جتا س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{٢}$، فأوجد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة على المنحنى، وحدد نوعها.

١٣) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$، حيث ٠ ⩽ س ⩽ $\frac{\pi}{٢}$، فأوجد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة على المنحنى.

١٤) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{جا ٣س}}$، حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$، فأوجد الإحداثي السيني للنقطة الحرجة على المنحنى، وحدد نوعها.

★ **١٥)** إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = جا (٢س) − س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π ، فأوجد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة على المنحنى، وحدد نوعها.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

قاعدة مشتقة ضرب دالتين

- $\frac{ى}{ى س}(ع\ ل) = ع\ \frac{ى ل}{ى س} + ل\ \frac{ى ع}{ى س}$

قاعدة مشتقة قسمة دالتين

- $\frac{ى}{ى س}\left(\frac{ع}{ل}\right) = \frac{ل\ \frac{ى ع}{ى س} - ع\ \frac{ى ل}{ى س}}{ل^{٢}}$، $ل \neq ٠$

مشتقات الدوال الأسيّة (أساسها هـ)

- $\frac{ى}{ى س}(هـ^{س}) = هـ^{س}$

  $\frac{ى}{ى س}\left(هـ^{د(س)}\right) = د'(س) \times هـ^{د(س)}$

  $\frac{ى}{ى س}\left(هـ^{أس + ب}\right) = أهـ^{أس + ب}$

مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية

- $\frac{ى}{ى س}(لط\ س) = \frac{١}{س}$

  $\frac{ى}{ى س}\left(لط\ د(س)\right) = \frac{د'(س)}{د(س)}$

  $\frac{ى}{ى س}\left(لط\ (أس + ب)\right) = \frac{أ}{أس + ب}$

مشتقات الدوال المثلثيّة

- $\frac{ى}{ى س}(جا\ س) = جتا\ س$ $\frac{ى}{ى س}\left(جا\ (أس + ب)\right) = أ\ جتا\ (أس + ب)$
- $\frac{ى}{ى س}(جتا\ س) = -\ جا\ س$ $\frac{ى}{ى س}\left(جتا\ (أس + ب)\right) = -\ أ\ جا\ (أس + ب)$
- $\frac{ى}{ى س}(ظا\ س) = \frac{١}{جتا^{٢}\ س} = قا^{٢}\ س$ $\frac{ى}{ى س}\left(ظا\ (أس + ب)\right) = \frac{أ}{جتا^{٢}(أس + ب)} = أ\ قا^{٢}(أس + ب)$

مقلوبات الدوال المثلثية

- $\frac{١}{جا\ س} = قتا\ س$
- $\frac{١}{جتا\ س} = قا\ س$
- $\frac{١}{ظا\ س} = ظتا\ س$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) أوجد قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س= ٤ لكلّ دالة من الدوال الآتية:

أ ص = س لـط (س − ٣)

ب ص = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$

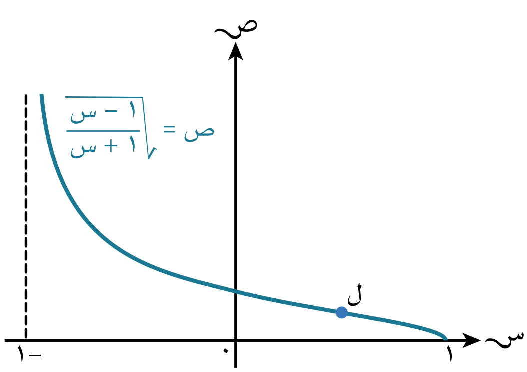
٢) أوجد ميل المماس لكلّ من المنحنيات الآتية عند س = ٠:

أ ص = ٣جا س + ظا ٢س

ب ص = $\frac{٦}{١ + \text{هـ}^{٢\text{س}}}$

٣) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = ٦جا س − ٢جتا ٢س، فأوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٦}، ٢\right)$، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ، مقربًا م، جـ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٤) يبيّن الشكل أدناه معادلة منحنى الدالة ص = $\sqrt{\frac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}}$



أ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، ثم بيّن أن دالة ميل العمودي على مماس المنحنى عند النقطة (س، ص) الواقعة على المنحنى تساوي (١ + س) $\sqrt{١ - \text{س}^٢}$.

ب دالة ميل العمودي على مماس المنحنى له قيمة عظمى عند النقطة ل المبيّنة على الشكل.
استخدم الاشتقاق لتجد الإحداثي السيني للنقطة ل.

٥) أوجد أقل قيمة موجبة لـ س عندما يكون ميل المماس للدالة:

أ ص = س + جاس يساوي $\frac{١}{٢}$

ب ص = $\sqrt{٣}$ جاس − ٢جتاس يساوي صفرًا .

٦) أوجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل كل دالة من الدوال الآتية صفرًا:

أ ص = س − لطـ س

ب ص = لطـ (س^{٢}) − س^{٢}

٧) إذا علمت أن ص = $\frac{١ + س}{١ - س^{٢}}$، فأوجد قيمة $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ عند س = −١

٨) لتكن الدالة ص = هـ^{٢س} جا $\left(\frac{س}{٢}\right)$:

أ أوجد ميل مماس منحنى الدالة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

ب يمر المماس على المنحنى بالنقطة (π، ل). استخدم الناتج في الجزئية (أ) لتجد قيمة ل مقربًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

٩) إذا علمت أن د(س) = لطـ (جا٢س)، فأوجد حلول المعادلة ٥ د′(س) + ٢ = ٠ في المجال ٠ ⩽ س ⩽ π ، مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أعداد معنوية.

١٠) أوجد معادلة العمودي على مماس المنحنى ص = ١ − جا^{٢}س عند س = $\frac{\pi}{٤}$، واكتب الناتج في صورة ص = م س + جـ.

الوحدة السادسة
التكامل
Integration

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦–١ تفهم التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل (الاشتقاق)، وتجد تكامل دوال في الصيغة $أس^{ن}$ (لأي عدد نسبي ن، ما عدا –١) مع الضرب بالثوابت، والجمع والطرح للدوال.

٦–٢ تحسب ثابت التكامل.

٦–٣ تحسب التكامل المحدود.

٦–٤ تستخدم التكامل المحدود لإيجاد مساحة لمنطقة محصورة بين منحنى ومستقيمات متوازية مع المحورَين، أو بين منحنى ومستقيم، أو بين منحنيَين.

٦–٥ تستخدم التكامل المحدود لإيجاد حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنى، وأحد المحورَين.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة السابعة	تعوّض قيم س، ص في معادلة في صورة ص = م س + جـ، وتحلها لتجد قيمة جـ.	١) أ إذا علمت أن المستقيم ص= ٥س + جـ يمرّ بالنقطة (٣، −٤)، فأوجد قيمة جـ. ب إذا علمت أن المنحنى ص = س^{٢} − ٢س + جـ يمرّ بالنقطة (−١، ٢)، فأوجد قيمة جـ.
الصف العاشر، الوحدة التاسعة	تجد الإحداثيات السينيّة للنقاط التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور السينات .	٢) أوجد الإحداثيات السينيّة للنقاط التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور السينات في كل مما يأتي: أ ص = ٣س^{٢} − ١٣س − ١٠ ب ص = ٣$\sqrt{\text{س}}$ − س
الصف الثاني عشر، الوحدة الرابعة	تجد مشتقة الدوال مع الضرب بثابت، والجمع والطرح لدوال تتضمن حدودًا في صيغة أس^{ن} (لأي عدد نسبي ن).	٣) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي: أ ص = ٣س^{٨} − ١٣س − ١٠ ب ص = ٥س^{٢} − ٤س + ١٠$\sqrt{\text{س}}$

المفردات

التكامل
Integration

التكامل غير المحدود
Indefinite integral

التكامل المحدود
Definite integral

الجسم الدوراني
Solid of revolution

لماذا ندرس التكامل؟

درست الاشتقاق في الوحدتَين الرابعة والخامسة، وهو الأداة الأساسية الأولى في التفاضل والتكامل. في هذه الوحدة ستتعلم التكامل، وهو الأداة الأساسية الثانية في التفاضل والتكامل. غالبًا ما نشير إلى التكامل على أنه العملية العكسية للتفاضل. توجد عدة تطبيقات حياتية للتكامل، على سبيل المثال: يستخدم التكامل في تخطيط مسارات الطائرات، أو في الألعاب الإلكترونية عند تمثيلها لمواضيع من الحياة اليومية.

لقد صاغ كل من إسحق نيوتن (Isaac Newton)، وجوتفرايد ليبنز (Gottfried Leibniz) مبادئ التكامل بصورة مستقلة في القرن السابع عشر، بالتفكير في التكامل على أنه مجموع لانهائي من المستطيلات، عَرْض كل منها متناهٍ في الصِّغَر.

رابط الكتروني

استكشف محطة التفاضل والتكامل يقابل الدوال Calculus meets functions على الموقع https://undergroundmathematics.org/calculus-meets-functions

٦-١ التكامل كعملية عكسيّة للتفاضل
Integration as the reverse of differentiation

درست في الوحدة الرابعة كيف تحسب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة ص. نسمي هذه العملية التفاضل (الاشتقاق).

ودرست قاعدة اشتقاق دالة القوة التي تنصّ على أنه:

إذا كانت ص = س$^{\text{ن}}$، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن س$^{\text{ن}-١}$

بتطبيق هذه القاعدة على الدوال في صورة ص = س^{٣} + جـ، نحصل على:

ص = س^{٣} − ٧

ص = س^{٣} + ٤

ص = س^{٣} − ٥٩

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢}

ص = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$

ص = س^{٣} − ٠,١

ص = س^{٣}

يبيّن المخطط أعلاه وجود عدد لانهائي من الدوال، مشتقة كل منها ٣س^{٢}، وجميعها في الصيغة ص = س^{٣} + جـ، حيث جـ عدد ثابت.

ستتعلم في هذه الوحدة العملية العكسيّة للحصول على الدالة ص إذا علمت $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

نسمي عملية الحصول على هذه الدالة **بالعملية العكسية للتفاضل**، وهو ما يُعرف **بالتكامل** **integration**.

توجد نظرية لكل من نيوتن وليبنز تنصّ على أن 'التكامل في الأساس هو عكس التفاضل'، وتعرف هذه النظرية **بالنظرية الأساسيّة في التفاضل والتكامل**.

اعتمادًا على هذه النظرية، لا نحتاج إلى استخدام المصطلح عكس التفاضل، وإنما سنستخدم مصطلح التكامل فقط بدلًا منها.

التكامل غير المحدود

استكشف ١

١) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل ممّا يأتي:

أ ص = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − ٢

ب ص = $\frac{١}{٦}$س^{٦} + ٨

ج ص = $\frac{١}{١٥}$س^{١٥} + ١

د د(س) = −$\frac{١}{٢}$س$^{-٢}$ + ٣

هـ د(س) = −$\frac{١}{٧}$س$^{-٧}$ + ٠,٢

و د(س) = $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{٥}{٨}$

٢) ناقش النتائج التي حصلت عليها مع زملائك، وحاول أن تجد قاعدة للحصول على ص إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{\text{ن}}$.

٣) صِف القاعدة التي حصلت عليها بالكلمات.

٤) ناقش مع زملائك صحّة هذه القاعدة لإيجاد ص عندما $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$.

يمكن أن نستنتج من استكشف ١ النتيجة الآتية:

نتيجة ١

إذا كانت $\frac{ى ص}{ى س} = س^{ن}$، فإن $ص = \frac{١}{ن + ١} س^{ن + ١} + جـ$، حيث جـ عدد ثابت، $ن \neq -١$

قد تجد من الأسهل تذكر هذه النتيجة عند وصفها بالكلمات الآتية:

"أضِف ١ إلى القوة ن، ثم اقسم على القوة الجديدة، وأضف الثابت جـ".

مثــال ١

أوجد ص بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{ى ص}{ى س} = س^{٢}$ ب $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{١}{س^{٢}}$ ج $\frac{ى ص}{ى س} = س\sqrt{س}$

الحــلّ:

أ $\frac{ى ص}{ى س} = س^{٢}$

$ص = \frac{١}{٢ + ١} س^{٢ + ١} + جـ$

$ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$

ب $\frac{ى ص}{ى س} = س^{-٢}$

$ص = \frac{١}{-٢ + ١} س^{-٢ + ١} + جـ$

$ص = -س^{-١} + جـ$

$ص = -\frac{١}{س} + جـ$

ج $\frac{ى ص}{ى س} = س^{\frac{٣}{٢}}$

$ص = \frac{١}{\frac{٣}{٢} + ١} س^{\frac{٣}{٢} + ١} + جـ$

$ص = \frac{١}{\frac{٥}{٢}} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$ص = \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

يمكن أن نكتب هذه القاعدة باستخدام رموز الدالة على النحو الآتي:

إذا كانت د$'$(س) = س$^{\text{ن}}$، فإن د(س) = $\frac{1}{\text{ن} + 1}$ س$^{\text{ن}+1}$ + جـ، حيث جـ عدد ثابت، ن $\neq$ -1

مثـــال ٢

أوجد د (س) بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ) د$'$(س) = ٤س^{3} − $\frac{2}{\text{س}^{2}}$ + ٤

ب) د$'$(س) = ٨ س^{2} − $\frac{1}{2\text{س}^{4}}$ + ٢س

جـ) د$'$(س) = $\frac{(\text{س} + 3)(\text{س} - 1)}{\sqrt{\text{س}}}$

الحـــلّ:

أ) د$'$(س) = ٤س^{3} − ٢س$^{-2}$ + ٤س^{0}

اكتب في الصورة الأُسيّة لإجراء العملية العكسية للتفاضل.

د (س) = $\frac{4}{4}$ س^{4} − $\frac{2}{(-1)}$ س$^{-1}$ + $\frac{4}{1}$ س^{1} + جـ

= س^{4} + ٢س$^{-1}$ + ٤س + جـ

= س^{4} + $\frac{2}{\text{س}}$ + ٤س + جـ

ب) د$'$(س) = ٨ س^{2} − $\frac{1}{2}$ س$^{-4}$ + ٢س^{1}

اكتب في الصورة الأُسيّة لإجراء العملية العكسية للتفاضل.

د (س) = $\frac{8}{3}$ س^{3} − $\frac{1}{2(-3)}$ س$^{-3}$ + $\frac{2}{2}$ س^{2} + جـ

= $\frac{8}{3}$ س^{3} + $\frac{1}{6}$ س$^{-3}$ + س^{2} + جـ

= $\frac{8}{3}$ س^{3} + $\frac{1}{6\text{س}^{3}}$ + س^{2} + جـ

جـ) د$'$(س) = $\frac{\text{س}^{2} + 2\text{س} - 3}{\sqrt{\text{س}}}$

اكتب في الصورة الأُسيّة لإجراء العملية العكسية للتفاضل.

د$'$(س) = س$^{\frac{3}{2}}$ + ٢س$^{\frac{1}{2}}$ − ٣س$^{-\frac{1}{2}}$

د (س) = $\frac{1}{\frac{5}{2}}$ س$^{\frac{5}{2}}$ + $\frac{2}{\frac{3}{2}}$ س$^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{3}{\frac{1}{2}}$ س$^{\frac{1}{2}}$ + جـ

= $\frac{2}{5}$ س$^{\frac{5}{2}}$ + $\frac{4}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ − ٦$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

يستخدم الرمز $\int$ ليدلّ على التكامل.

على سبيل المثال، لنجد تكامل س^{٣}، نكتب:

$$\int س^{٣}\ ءس = \frac{١}{٤}س^{٤} + جـ$$

نسمي $\int س^{٣}$ ءس **بالتكامل غير المحدود indefinite integral** لـ س^{٣} بالنسبة إلى س.

وسُمي بالتكامل غير المحدود لأن له عددًا لانهائيًا من الحلول.

باستخدام رمز التكامل، نكتب قاعدة تكامل القوة على النحو الآتي:

نتيجة ٢

$\int س^{ن}\ ءس = \frac{١}{ن + ١}س^{ن+١} + جـ$، حيث جـ ثابت، ن $\neq -١$

نكتب قاعدة تكامل ضرب الدالة في عدد ثابت على النحو الآتي:

نتيجة ٣

$\int ك د(س)\ ءس = ك \int د(س)\ ءس$، حيث ك عدد ثابت.

نكتب قاعدة تكامل جمع دالتَين أو الفرق بينهما على النحو الآتي:

نتيجة ٤

$\int (د(س) \pm هـ(س))\ ءس = \int د(س)\ ءس \pm \int هـ(س)\ ءس$.

مثــال ٣

أوجد:

أ $\int س(٢س - ١)(٢س + ٣)\ ءس$

ب $\int \frac{٤س^{٢} - ٣\sqrt{س}}{س}\ ءس$

ج $\int ٧\ ءس$

الحــلّ:

أ $\int س(٢س - ١)(٢س + ٣)\ ءس = \int (٤س^{٣} + ٤س^{٢} - ٣س)\ ءس$

$$= \frac{٤س^{٤}}{٤} + \frac{٤س^{٣}}{٣} - \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$$

$$= س^{٤} + \frac{٤س^{٣}}{٣} - \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$$

ب $\int \frac{4س^2 - 3\sqrt{س}}{س} ء س = \int (4س - 3س^{-\frac{1}{2}}) ء س$

$= \frac{4}{2} س^2 - \frac{3}{\frac{1}{2}} س^{\frac{1}{2}} + جـ$

$= 2س^2 - 6س^{\frac{1}{2}} + جـ$

$= 2س^2 - 6\sqrt{س} + جـ$

ج $\int 7 ء س = \int 7س^0 ء س$

$= \frac{7س^1}{1} + جـ$

$= 7س + جـ$

ملاحظة هامة: لأي عدد ثابت ك، $\int$ ك ءس = ك س + جـ.

تمارين ٦-١

١) أوجد ص بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{ءص}{ءس} = 15س^2$

ب $\frac{ءص}{ءس} = 14س^6$

ج $\frac{ءص}{ءس} = 12س^3$

د $\frac{ءص}{ءس} = \frac{3}{س^2}$

هـ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2س^3}$

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{4}{\sqrt{س}}$

٢) أوجد د (س) بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $د'(س) = 5س^4 - 2س^3 + 2$

ب $د'(س) = 3س^5 + س^2 - 2س$

ج $د'(س) = \frac{2}{س^3} + \frac{8}{س^2} + 6س$

د $د'(س) = \frac{9}{س^7} - \frac{3}{س^2} - 4$

٣) أوجد ص بدلالة س لكلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{ءص}{ءس} = س(س + 5)$

ب $\frac{ءص}{ءس} = 2س^2(3س + 1)$

ج $\frac{ءص}{ءس} = س(س + 2)(س - 8)$

د $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س^4 - 2س + 5}{2س^3}$

هـ $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س}(س - 3)^2$

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{5س^2 + 3س + 1}{\sqrt{س}}$

٤) أوجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\int ١٢س^{٥} \, ءس$

ب $\int ٢٠س^{٣} \, ءس$

ج $\int ٣س^{-٢} \, ءس$

د $\int \frac{٤}{س^{٣}} \, ءس$

هـ $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}} \, ءس$

و $\int \frac{٥}{س\sqrt{س}} \, ءس$

٥) أوجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\int (س + ١)(س + ٤) \, ءس$

ب $\int (س - ٣)^{٢} \, ءس$

ج $\int (٢\sqrt{س} - ١)^{٢} \, ءس$

د $\int \sqrt[٣]{س}\,(س^{٢} + ١) \, ءس$

هـ $\int \frac{س^{٢} - ١}{٢س^{٢}} \, ءس$

و $\int \frac{س^{٣} + ٦}{٢س^{٣}} \, ءس$

ز $\int \frac{س^{٢} + ٢\sqrt{س}}{٣س} \, ءس$

ح $\int \frac{س^{٤} - ١٠}{س\sqrt{س}} \, ءس$

ط $\int \left(٢\sqrt{س} - \frac{٣}{س^{٢}\sqrt{س}}\right)^{٢} \, ءس$

٦-٢ تكامل عبارات في صورة (أ س + ب)^{ن}
Integration of expressions of the form $(ax + b)^n$

درست سابقًا أن:

$$\frac{ى}{ى\,س}\left(\frac{١}{٣ \times ٧}(٣س - ١)^{٧}\right) = (٣س - ١)^{٦}$$

وعليه يكون:

$$\int (٣س - ١)^{٦}\, ى\,س = \frac{١}{٣ \times ٧}(٣س - ١)^{٧} + جـ$$

يؤدي ذلك إلى القاعدة العامة الآتية:

نتيجة ٥

$\int (أس + ب)^{ن}\, ى\,س = \frac{١}{أ(ن + ١)}(أس + ب)^{ن + ١} + جـ$، حيث جـ عدد ثابت، ن $\neq$ −١، أ $\neq$ ٠

من المهم ملاحظة أن القاعدة تصلح لقوى الدوال الخطيّة فقط.

فمثلًا: $\int (أس^{٢} + ب)^{٦}\, ى\,س$ لا يساوي $\frac{١}{أ٧}(أس^{٢} + ب)^{٧} + جـ$ (حاول أن تجد مشتقة العبارة الأخيرة لتتحقق من عدم المساواة).

مثــال ٤

أوجد كلًا مما يأتي:

أ) $\int (٢س - ٣)^{٤}\, ى\,س$ ب) $\int \frac{٢٠}{(١ - ٤س)^{٦}}\, ى\,س$ ج) $\int \frac{٥}{\sqrt{٢س + ٧}}\, ى\,س$

الحـلّ:

أ) $\int (٢س - ٣)^{٤}\, ى\,س = \frac{١}{٢(٤ + ١)}(٢س - ٣)^{٤ + ١} + جـ$

$= \frac{١}{١٠}(٢س - ٣)^{٥} + جـ$

ب) $\int \frac{٢٠}{(١ - ٤س)^{٦}}\, ى\,س = ٢٠\int (١ - ٤س)^{-٦}\, ى\,س$

$= \frac{٢٠}{(-٤)(-٦ + ١)}(١ - ٤س)^{-٦ + ١} + جـ$

$= (١ - ٤س)^{-٥} + جـ$

$= \frac{١}{(١ - ٤س)^{٥}} + جـ$

ج $\int \frac{٥}{\sqrt{٢س + ٧}}\, ءس = ٥\int (٢س + ٧)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{٥}{٢(-\frac{١}{٢} + ١)} (٢س + ٧)^{-\frac{١}{٢} + ١} + جـ$

$= ٥\sqrt{٢س + ٧} + جـ$

تمارين ٦-٢

١) أوجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\int (٢س - ٧)^{٨}\, ءس$

ب $\int (٣س + ١)^{٥}\, ءس$

ج $\int ٢(٥س - ٢)^{٨}\, ءس$

د $\int ٣(١ - ٢س)^{٥}\, ءس$

هـ $\int \sqrt[٣]{٥ - ٤س}\, ءس$

و $\int \sqrt{(٢س + ١)^{٣}}\, ءس$

ز $\int \frac{٢}{\sqrt{٣س - ٢}}\, ءس$

ح $\int \left(\frac{٢}{٢س + ١}\right)^{٣} ءس$

ط $\int \frac{٥}{٤(٧ - ٢س)^{٥}}\, ءس$

٦-٣ المزيد من التكامل غير المحدود Further indefinite integration

نستخدم في هذا الدرس مفهوم أن التكامل هو العملية العكسيّة للتفاضل لتساعدنا في إيجاد تكامل المزيد من العبارات الجبرية.

نتيجة ٦

إذا كانت $\frac{د}{د س}$ (ق(س)) = د(س)، فإن $\int$ د(س) د س = ق(س) + جـ

مثـــال ٥

أ بيّن أن $\frac{د}{د س}\left((٣س^٢ - ٤)^٨\right)$ = ٤٨س$(٣س^٢ - ٤)^٧$

ب أوجد $\int$ ٦س$(٣س^٢ - ٤)^٧$ د س

الحـــلّ:

أ لتكن ص = $(٣س^٢ - ٤)^٨$ .... استخدم قاعدة السلسلة.

$\frac{د ص}{د س}$ = ٨ × $(٣س^٢ - ٤)^{٨-١}$ × ٦س

= ٤٨س$(٣س^٢ - ٤)^٧$

ب $\int$ ٦س$(٣س^٢ - ٤)^٧$ د س = $\frac{١}{٨}\int$ ٤٨س$(٣س^٢ - ٤)^٧$ د س

= $\frac{١}{٨}(٣س^٢ - ٤)^٨$ + جـ

تمارين ٦-٣

١) أ أوجد مشتقة $(س^٢ + ٢)^٤$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int$ س$(س^٢ + ٢)^٣$ د س

٢) أ أوجد مشتقة $(٢س^٢ - ١)^٥$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int$ س$(٢س^٢ - ١)^٤$ د س

٣) أ إذا علمت أن $ص = \frac{١}{س^٢ - ٥}$، فبيّن أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ك س}{(س^٢ - ٥)^٢}$، وأوجد قيمة ك.

ب أوجد $\int \frac{٤س}{(س^٢ - ٥)^٢} ء س$

٤) أ أوجد مشتقة $\frac{١}{٤ - ٣س^٢}$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int \frac{٣س}{(٤ - ٣س^٢)^٢} ء س$

٥) أ أوجد مشتقة $(س^٢ - ٣س + ٥)^٦$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int ٢(٢س - ٣)(س^٢ - ٣س + ٥)^٥ ء س$

٦) أ أوجد مشتقة $(\sqrt{س} + ٣)^٨$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int \frac{(\sqrt{س} + ٣)^٧}{\sqrt{س}} ء س$

٧) أ أوجد مشتقة $(٢س\sqrt{س} - ١)^٥$ بالنسبة إلى س.

ب أوجد $\int ٣\sqrt{س}(٢س\sqrt{س} - ١)^٤ ء س$

٦-٤ إيجاد ثابت التكامل Finding the constant of integration

تبيّن الأمثلة الثلاثة الآتية كيفية إيجاد معادلة المنحنى بمعلومية دالة ميل المماس للمنحنى، وإحداثيات نقطة واقعة على المنحنى.

مثـــال ٦

إذا كانت دالة الميل لمماس المنحنى ص هي $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{٦س^{٥} - ١٨}{س^{٣}}$، والنقطة (١، ٦) واقعة على المنحنى، فأوجد معادلة المنحنى.

الحـــلّ:

$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{٦س^{٥} - ١٨}{س^{٣}}$ اكتب في الصورة الأُسيّة لإجراء التكامل.

$= ٦س^{٢} - ١٨س^{-٣}$

$ص = \int (٦س^{٢} - ١٨س^{-٣}) ى س$

$ص = ٢س^{٣} + ٩س^{-٢} + جـ$

$= ٢س^{٣} + \frac{٩}{س^{٢}} + جـ$

عندما س = ١، ص = ٦

$٦ = ٢(١)^{٣} + \frac{٩}{١^{٢}} + جـ$

$٦ = ٢ + ٩ + جـ$

$جـ = -٥$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $ص = ٢س^{٣} + \frac{٩}{س^{٢}} - ٥$

مثـــال ٧

إذا كانت $د'(س) = ١٥س^{٤} - ٦س$، $د(-١) = ١$، فأوجد د (س).

الحـــلّ:

$د'(س) = ١٥س^{٤} - ٦س$

$د(س) = \int (١٥س^{٤} - ٦س) ى س$

$د(س) = ٣س^{٥} - ٣س^{٢} + جـ$

استخدم د (−١) = ١ لتجد أن:

$١ = ٣(-١)^{٥} - ٣(-١)^{٢} + جـ$

$١ = -٣ - ٣ + جـ$

$جـ = ٧$

$\therefore د(س) = ٣س^{٥} - ٣س^{٢} + ٧$

مثــال ٨

إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس} = ٦س + ك$، حيث ك عدد ثابت، وميل العمودي على مماس المنحنى عند النقطة (١، −٣) يساوي $\frac{١}{٢}$، فأوجد معادلة المنحنى.

الحــلّ:

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س + ك$ .... أوجد التكامل.

$ص = \int (٦س + ك) ءس$

$ص = ٣س^٢ + ك س + جـ$

عند س = ١، ص = −٣

$−٣ = ٣(١)^٢ + ك (١) + جـ$

جـ + ك = −٦ .... (١) .... يمكنك حل المثال عن طريق إيجاد قيمة ك أولًا، ثم جـ.

عند س = ١: $\frac{ءص}{ءس} = ٦(١) + ك = ٦ + ك$

∵ ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل المماس = −٢

٦ + ك = −٢

ك = −٨

عوّض بدل ك في المعادلة (١) لتحصل على جـ = ٢

فتصبح معادلة المنحنى ص = $٣س^٢ − ٨س + ٢$

تمارين ٦-٤

١) أوجد معادلة المنحنى بمعلومية $\frac{ءص}{ءس}$، والنقطة ل الواقعة على المنحنى:

أ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ + ١$ ، ل(١، ٤)

ب $\frac{ءص}{ءس} = ٢س(٣س − ١)$ ، ل(−١، ٢)

ج $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{س^٢}$ ، ل(٤، ٩)

د $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س^٣ − ٦}{س^٢}$ ، ل(٣، ٧)

هـ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{\sqrt{س}} − ١$ ، ل(٤، ٦)

و $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(١ − \sqrt{س})^٢}{\sqrt{س}}$ ، ل(٩، ٥)

٢) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس} = −\frac{ك}{س^٢}$، حيث ك عدد ثابت، والمنحنى يمر بالنقطتَين (٦، ٢٫٥)، (−٣، ١)، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٣) إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٥$، حيث ك عدد ثابت، والمنحنى يمر بالنقطتَين (١، −٣)، (٣، ١١)، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٤) إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك س}^{٢} - \frac{٦}{\text{س}^{٣}}$، حيث ك عدد ثابت، والمنحنى يمر بالنقطة ل(١، ٦)، وميل المماس عند النقطة ل يساوي ٩، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٥) إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}\sqrt{\text{س}} + ٢$، والمنحنى يمر بالنقطة (١، ٣)، فأوجد:

أ) معادلة منحنى الدالة.

ب) معادلة المماس عند س = ٤

٦) إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك س} + ٣$، حيث ك عدد ثابت، وميل العمودي على مماس المنحنى عند النقطة (١، −٢) يساوي $-\frac{١}{٧}$، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٧) إذا علمت أن الدالة ص = د (س)، $\text{د}'(\text{س}) = ٨ - ٢\text{س}$، والقيمة العظمى للدالة هي ٢٠، فأوجد د (س).

٨) إذا علمت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٠$، ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٢، −٧)، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٩) إذا علمت أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢\text{س} + ١٢$، وميل المماس للمنحنى عند النقطة (٠، ٤) يساوي ١٠:

أ) اكتب ص بدلالة س.

ب) بيّن أن الميل أكبر من أو يساوي ٤

١٠) إذا علمت أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٦\text{س} - ٤$، والنقطة الصغرى للمنحنى هي (−٢، −٦)، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

١١) لتكن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ك} + \text{س}$، حيث ك عدد ثابت، وعلمت أن:

أ) مماسَي المنحنى متعامدان عند النقطتَين اللتين إحداثيهما السيني ٥، ٧، فأوجد قيمة ك.

ب) المنحنى يمر بالنقطة (١٠، −٨)، فأوجد معادلته.

١٢) إذا علمت أن للمنحنى ص = د (س) نقطة حرجة عند (١، −١)، $\text{د}''(\text{س}) = ٢ + \frac{٤}{\text{س}^{٣}}$، فأوجد $\text{د}'(\text{س})$، د (س).

١٣) إذا علمت أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{س} + ٨$، وللمنحنى نقطة صغرى (٣، −٤٩)، فأوجد إحداثيات النقطة العظمى.

١٤) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ − ٢س، وتقع النقطة (١، ١١) على منحنى الدالة، فأوجد معادلة المنحنى.

١٥) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣$\sqrt{س}$ − ٦، وتقع النقطة ل(١، ٦) على منحنى الدالة، فأوجد معادلة المنحنى.

١٦) إذا علمت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ − $\frac{١٢}{س^{٣}}$، ولمنحنى الدالة نقطة حرجة ل عند س = ١، والمنحنى يمر بالنقطة (٢، ٥)، فأوجد إحداثيات النقطة ل، وحدد نوعها.

١٧) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س − ٥، وتقع النقطة ل (٣، −٤) على منحنى الدالة، وكان العمودي على مماس المنحنى

عند النقطة ل يقطع المنحنى مرة أخرى عند النقطة ى، فأوجد:

أ معادلة المنحنى.

ب معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة ل.

ج إحداثيات النقطة ى.

١٨) أوجد معادلة المنحنى بمعلومية $\frac{ءص}{ءس}$، والنقطة ل الواقعة على المنحنى لكلّ ممّا يأتي:

أ $\frac{ءص}{ءس}$ = (٢س − ١)^{٢} ، ل$\left(\frac{٣}{٢}، ٤\right)$

ب $\frac{ءص}{ءس}$ = $\sqrt{٢س + ٥}$ ، ل(٢، ٢)

ج $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{\sqrt{س} - ٢}$ ، ل(٣، ٧)

د $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤}{(٣ - ٢س)^{٢}}$ ، ل(٢، ٤)

١٩) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ك(س − ٥)^{٣}، حيث ك عدد ثابت، وميل العمودي على المنحنى عند النقطة (٤، ٢) يساوي $\frac{١}{١٢}$، فأوجد معادلة المنحنى.

٢٠) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٥}{\sqrt{٢س - ٣}}$، والمنحنى يمر بالنقطة ل(٢، ١)، فأوجد:

أ معادلة العمودي على المنحنى عند ل.

ب معادلة المنحنى.

٢١) لتكن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١٢}{\sqrt{٣س + ١}}$ − ٤س − ٢:

أ بيّن أن لمنحنى الدالة نقطة حرجة عند س = ١، وحدد طبيعتها (نوعها).

ب إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٠، ١٣)، فأوجد معادلته.

٢٢) إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٢س + ك}}$، حيث ك عدد ثابت، والنقطة ل(٣، ٢) تقع على المنحنى، ومعادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة ل هي س + ٤ص = ١١، فأوجد معادلة منحنى الدالة.

٦-٥ التكامل المحدود The definite integration

ستتعلم في الدروس المتبقية من هذه الوحدة كيف تجد مساحة وحجوم أشكال مختلفة. للقيام بذلك، سوف تستخدم التكامل المحدود، وهو توسعة للتكامل غير المحدود الذي درسته سابقًا.

تذكّر أن:

$$\int س^{٣} ى س = \frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$$، حيث جـ عدد ثابت،

ويسمى بالتكامل غير المحدود لـ $س^{٣}$ بالنسبة إلى س.

يمكننا أن نجد تكامل دالة بين قيمتَين محددتَين، فمثلًا:

نكتب تكامل الدالة $س^{٣}$ بالنسبة إلى س بين القيمتَين س = ٢، س = ٤ على النحو:

$$\int_{٢}^{٤} س^{٣} ى س$$

ويتم حساب هذا التكامل كالآتي:

$$\int_{٢}^{٤} س^{٣} ى س = \left[\frac{١}{٤} س^{٤} + جـ\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١}{٤} \times ٤^{٤} + جـ\right) - \left(\frac{١}{٤} \times ٢^{٤} + جـ\right)$$

$$= ٦٠$$

يُسمى $\int_{٢}^{٤} س^{٣} ى س$ **التكامل المحدود definite integration** لـ $س^{٣}$ بالنسبة إلى س بين القيمتَين ٢، ٤

وعليه، نكتب قيمة التكامل المحدود كما هو مبيّن في النتيجة ٧ أدناه:

مُساعَدة

يمكن كتابة حدَّي التكامل أ، ب في إحدى الصورتين:

$\int_{أ}^{ب}$ د(س)ى س، أو

$\int\limits_{أ}^{ب}$ د(س)ى س،

ولكن لا يمكن أن تكتب أبدًا في صورة

$\int^{ب}_{أ}$ د(س)ى س

نتيجة ٧

$$\int_{أ}^{ب} د(س) ى س = \left[ق(س)\right]_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$$

يمكن أيضًا استخدام الخواص الآتية لحساب التكامل المحدود:

نتيجة ٨

$\int_{أ}^{ب} ك\, د(س) ى س = ك \int_{أ}^{ب} د(س) ى س$، حيث ك عدد ثابت.

$$\int_{أ}^{ب} \left(د(س) \pm ل(س)\right) ى س = \int_{أ}^{ب} د(س) ى س \pm \int_{أ}^{ب} ل(س) ى س$$

$$\int_{أ}^{ب} د(س) ى س = - \int_{ب}^{أ} د(س) ى س$$

نتيجة ٩

$$\int_{أ}^{ب} د(س) ى س + \int_{ب}^{جـ} د(س) ى س = \int_{أ}^{جـ} د(س) ى س$$

في حالة تساوي حدَّي التكامل لدالة ما يكون الناتج صفرًا.

نتيجة ١٠

$$\int_{ك}^{ك} د(س) ءس = ٠$$

مثــال ٩

أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} \frac{٦س^{٤} - ١}{س^{٢}} ءس$ **ب** $\int_{٠}^{٣} \sqrt{٥س + ١} ءس$

ج $\int_{-٢}^{١} \frac{٨}{(٥ - ٢س)^{٢}} ءس$ **د** $\int_{٢}^{٢} (١٢س^{٣} - ١٥س^{٢}) ءس$

الحــلّ:

أ $\int_{١}^{٢} \frac{٦س^{٤} - ١}{س^{٢}} ءس = \int_{١}^{٢} (٦س^{٢} - س^{-٢}) ءس$

$$= \left[٢س^{٣} + س^{-١}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(٢(٢)^{٣} + (٢)^{-١}\right) - \left(٢(١)^{٣} + (١)^{-١}\right)$$

$$= \left(١٦ + \frac{١}{٢}\right) - (٢ + ١)$$

$$= ١٣\frac{١}{٢}$$

ب $\int_{٠}^{٣} \sqrt{٥س + ١} ءس = \int_{٠}^{٣} (٥س + ١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$$= \left[\frac{١}{(٥)\left(\frac{٣}{٢}\right)} (٥س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left[\frac{٢}{١٥} (٥س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left(\frac{٢}{١٥} \times ١٦^{\frac{٣}{٢}}\right) - \left(\frac{٢}{١٥} \times ١^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

$$= \frac{١٢٨}{١٥} - \frac{٢}{١٥}$$

$$= ٨\frac{٢}{٥}$$

ج $\int_{-٢}^{١} \frac{٨}{(٥ - ٢\text{س})^{٢}}\, \text{ءس} = \int_{-٢}^{١} ٨(٥ - ٢\text{س})^{-٢}\, \text{ءس}$

$= \left[\frac{٨}{(-٢)(-١)}(٥ - ٢\text{س})^{-١}\right]_{-٢}^{١}$

$= \left[\frac{٤}{٥ - ٢\text{س}}\right]_{-٢}^{١}$

$= \frac{٤}{٣} - \frac{٤}{٩}$

$= \frac{٨}{٩}$

د $\int_{٢}^{٢} (١٢\text{س}^{٣} - ١٥\text{س}^{٢})\, \text{ءس} = \left[\frac{١٢\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{١٥\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{٢}^{٢}$

$= \left[٣\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٣}\right]_{٢}^{٢}$

$= \left[٣ \times ٢^{٤} - ٥ \times ٢^{٣}\right] - \left[٣ \times ٢^{٤} - ٥ \times ٢^{٣}\right]$

$= \left[٤٨ - ٤٠\right] - \left[٤٨ - ٤٠\right]$

$= ٨ - ٨$

$= ٠$

مُساعَدة

يمكنك استخدام النتيجة ١٠ لإيجاد التكامل مباشرة.

تمارين ٦-٥

١) أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} ٣\text{س}^{٢}\, \text{ءس}$

ب $\int_{١}^{٢} \frac{٤}{\text{س}^{٣}}\, \text{ءس}$

ج $\int_{-١}^{١} (٢\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$

د $\int_{٠}^{٣} (١٠ - \text{س}^{٢})\, \text{ءس}$

هـ $\int_{-١}^{٢} (٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\, \text{ءس}$

و $\int_{٢}^{٤} \left(٢ - \frac{٦}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

٢) أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} \left(٣\text{س}^{٢} - ٢ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

ب $\int_{-٢}^{-١} \left(\frac{٨ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

ج $\int_{١}^{٢} (\text{س} + ٣)(٧ - ٢\text{س})\, \text{ءس}$

د $\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}}\,(١ - \text{س})\, \text{ءس}$

هـ $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ٨)(\text{س} - ٣)}{\text{س}^{٤}}\, \text{ءس}$

و $\int_{١}^{٤} \left(٣\sqrt{\text{س}} + \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

٣) أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\int_{-١}^{٠} (٢س + ٣)^{٣} \, ءس$

ب $\int_{٠}^{٤} \sqrt{٢س + ١} \, ءس$

ج $\int_{١}^{٢} \sqrt{(س - ١)^{٣}} \, ءس$

د $\int_{-١}^{١} \frac{٦}{(س - ٢)^{٢}} \, ءس$

هـ $\int_{٢}^{٣} \frac{٩}{(٢س - ٣)^{٢}} \, ءس$

و $\int_{-٢}^{٢} \frac{٤}{\sqrt{٥ - ٢س}} \, ءس$

٤) **أ** إذا علمت أن ص = $\frac{٢}{س^{٢} + ٥}$ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

ب أوجد قيمة $\int_{٠}^{٢} \frac{٢س}{(س^{٢} + ٥)^{٢}} \, ءس$

٥) **أ** إذا علمت أن ص = $(س^{٣} - ٢)^{٥}$، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

ب أوجد قيمة $\int_{٠}^{١} س^{٢}(س^{٣} - ٢)^{٤} \, ءس$

٦) **أ** إذا علمت أن ص = $\frac{(\sqrt{س} + ١)^{٥}}{١٠}$، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

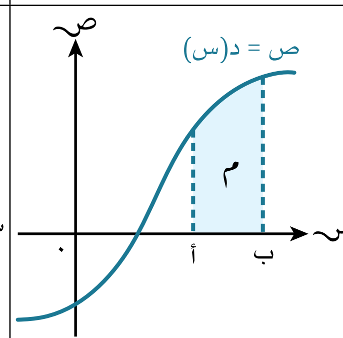
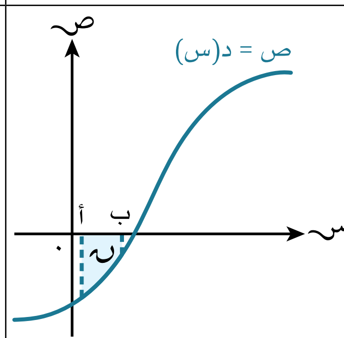
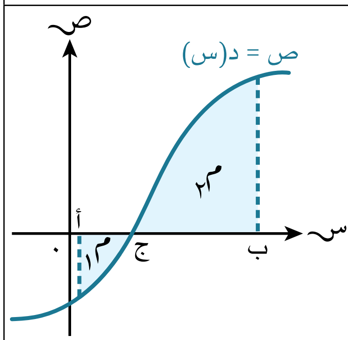
ب أوجد قيمة $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} + ١)^{٤}}{\sqrt{س}} \, ءس$

٦-٦ المساحة تحت منحنى الدالة Area under a curve

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات

يجب مراعاة ثلاث حالات عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) ومحور السينات على الفترة المغلقة [أ، ب].

> **مُساعَدة**
> [أ، ب] تعني:
> أ ⩽ س ⩽ ب

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
د (س) ⩾ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب]	د (س) ⩽ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب]	تتغير إشارة الدالة د(س) عند س = ج: د(س) ⩽ ٠ على الفترة المغلقة [أ، ج] د(س) ⩾ ٠ على الفترة المغلقة [ج، ب]

تجب ملاحظة النقاط الآتية عند استخدام التكامل لحساب المساحة:

- **من الأفضل إيجاد قيمة (قيم) س التي تكون عندها قيمة الدالة تساوي صفرًا، حتى لو تم إعطاء الحدود.**
- **إذا كانت د(س) متصلة، وكانت هناك قيمتان، على سبيل المثال: ن، ل تقعان في الفترة [أ، ب] حيث تختلف إشارة د(ل) عن إشارة د (ن)، فإن إشارة د(س) تتغير في الفترة [أ، ب].**
- **في الحالة الثالثة نجد مساحة المنطقة الواقعة أسفل المحور السيني، والمنطقة الواقعة فوق المحور السيني بشكل منفصل، ثم نجمع هاتين القيمتين المطلقتين للحصول على المساحة الإجمالية.**

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ١١

- إذا كانت د (س) متصلة، وكانت د (س) $\geqslant$ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

  $م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

- إذا كانت د (س) متصلة، وكانت د (س) $\leqslant$ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

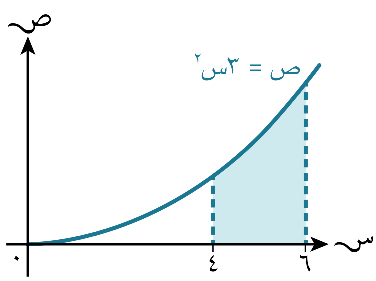
  $ن = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$؛ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

- إذا تغيرت إشارة الدالة د(س) عند س = ج على الفترة [أ، ب]، فإن المساحة الإجمالية م تُعطى بالعلاقة:

  $م = م_١ + م_٢ = \left| \int_{أ}^{ج} د(س)\, ءس \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(س)\, ءس \right|$

مثــال ١٠

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



الحــلّ:

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{٤}^{٦} ٣س^٢\, ءس$

يمكن استخدام رمز المطلق، ولكنه غير ضروري هنا.

$= \left[\frac{٣}{٣} س^٣ \right]_{٤}^{٦}$

$= ٢١٦ - ٦٤$

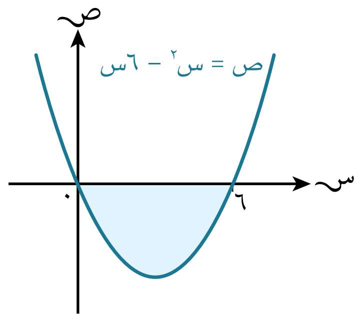
= ١٥٢ وحدة مربعة.

في المثال ١٠ تقع المساحة المطلوبة فوق محور السينات، لذلك لم يكن من الضروري إدراج رمز المطلق؛ لأن قيمة التكامل المحدد موجبة.

إذا وقعت المساحة المطلوبة تحت محور السينات، فإن قيمة $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ تكون سالبة؛ وذلك لأن التكامل هو مجموع قيم ص، وهي جميعها سالبة.

مثـــال ١١

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



الحــلّ:

تقع المنطقة المظللة تحت المحور السيني، أي أن مساحتها تساوي القيمة المطلقة للتكامل.

مساحة المنطقة المظللة = $\left|\int_{٠}^{٦} (\text{س}^{٢} - ٦\text{س})\ \text{ء س}\right|$ استخدام رمز المطلق ضروري هنا.

$= \left|\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٦}\right|$

$= \left|\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٣\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٦}\right|$

$= \left|\left(\frac{٦^{٣}}{٣} - ٣ \times ٦^{٢}\right) - \left(\frac{٠^{٣}}{٣} - ٣ \times ٠^{٢}\right)\right|$

$= |٧٢ - ١٠٨ - ٠|$

$= |-٣٦|$

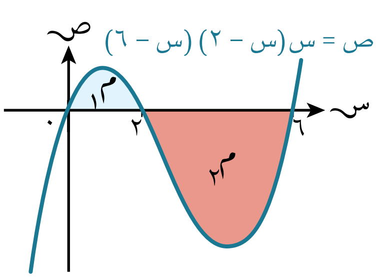
∴ مساحة المنطقة المظللة = ٣٦ وحدة مربعة.

قد تتكوّن المساحة المطلوبة من جزأَين، أحدهما فوق محور السينات والآخر تحته.

في هذه الحالة نجد مساحة كل جزء على حدة، كما في المثال ١٢

مثـــال ١٢

أوجد المساحة الكلّية للمنطقتَين المظللتَين في الشكل المجاور:



الحــلّ:

تقع المنطقة $\text{م}_{١}$ فوق المحور السيني، حيث لا توجد قيم سالبة لـ ص،
لذا فإن مساحتها تساوي قيمة التكامل.

مساحة $\text{م}_{١}$ = $\int_{٠}^{٢} \text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٦)\ \text{ء س} = \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} - ٨\text{س}^{٢} + ١٢\text{س})\ \text{ء س}$

$= \left[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٨}{٣}\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٤}(٢)^{٤} - \frac{٨}{٣}(٢)^{٣} + ٦(٢)^{٢}\right) - \left(\frac{١}{٤}(٠)^{٤} - \frac{٨}{٣}(٠)^{٣} + ٦(٠)^{٢}\right)$

$= \frac{٢}{٣}٦ - ٠$

$= \frac{٢}{٣}٦$ وحدة مربعة.

تقع المنطقة المظللة م$_٢$ تحت المحور السيني، حيث قيم ص سالبة؛ أي أن مساحتها تساوي القيمة المطلقة للتكامل.

مساحة م$_٢$ $= \left| \int_{٢}^{٦} س(س - ٢)(س - ٦)\, ءس \right|$

$= \left| \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{٨س^٣}{٣} + ٦س^٢ \right]_{٢}^{٦} \right|$

$= \left| \left(\frac{٦^٤}{٤} - \frac{٨ \times ٦^٣}{٣} + ٦ \times ٦^٢ \right) - \left(\frac{٢^٤}{٤} - \frac{٨ \times ٢^٣}{٣} + ٦ \times ٢^٢ \right) \right|$

$= \left| -٣٦ - \frac{٢}{٣}٦ \right|$

$= \left| -\frac{٢}{٣}٤٢ \right|$

$= \frac{٢}{٣}٤٢$ وحدة مربعة.

∴ المساحة الكلية للمنطقتين المظللتين = م$_١$ + م$_٢$ = $\frac{٢}{٣}٦ + \frac{٢}{٣}٤٢ = \frac{١}{٣}٤٩$ وحدة مربعة.

مثـــال ١٣

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س(س − ٤) (س + ٢) ومحور السينات.

الحـــلّ:

ص = ٠ ...... أوجد قيم س (حدود التكامل) بحل المعادلة ص = ٠

س(س − ٤)(س + ٢) = ٠

قيم س هي: س = ٠، س = ٤، س = −٢

ص = س(س − ٤)(س + ٢) ...... اكتب الدالة في صورة كثيرة حدود.

= س(س^٢ − ٢س − ٨)

= س^٣ − ٢س^٢ − ٨س

بالترتيب التصاعدي، يتقاطع المنحنى، والمحور السيني عند س = −٢، س = ٠، س = ٤

وبالتالي فإن المساحة تتكون من منطقتين:

المنطقة م$_١$ تقع بين س = −٢، س = ٠

المنطقة م$_٢$ تقع بين س = ٠، س = ٤

بما أننا لا نعرف ما إذا كانت المنطقتان م١، م٢ تقعان أعلى أو أسفل المحور السيني، فيجب علينا استخدام رمز المطلق لكليهما، بحيث يعطي التكامل مساحات موجبة.

مساحة م١ $= \left| \int_{-٢}^{\cdot} (\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٨\text{س})\, \text{ءس} \right|$

$= \left| \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}^{٢} \right]_{-٢}^{\cdot} \right|$

$= \left| \left(\frac{\cdot^{٤}}{٤} - \frac{٢(\cdot)^{٣}}{٣} - ٤(\cdot)^{٢} \right) - \left(\frac{(-٢)^{٤}}{٤} - \frac{٢(-٢)^{٣}}{٣} - ٤(-٢)^{٢} \right) \right|$

$= \left| \cdot - \left(-٦\frac{٢}{٣} \right) \right|$

$= \left| ٦\frac{٢}{٣} \right|$

$= ٦\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مساحة م٢ $= \left| \int_{\cdot}^{٤} (\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٨\text{س})\, \text{ءس} \right|$

$= \left| \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}^{٢} \right|_{\cdot}^{٤}$

$= \left| \left(\frac{٤^{٤}}{٤} - \frac{٢(٤^{٣})}{٣} - ٤(٤)^{٢} \right) - \left(\frac{\cdot^{٤}}{٤} - \frac{٢(\cdot^{٣})}{٣} - ٤(\cdot)^{٢} \right) \right|$

$= \left| ٦٤ - \frac{١٢٨}{٣} - ٦٤ - \cdot \right|$

$= \left| -٤٢\frac{٢}{٣} \right|$

$= ٤٢\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

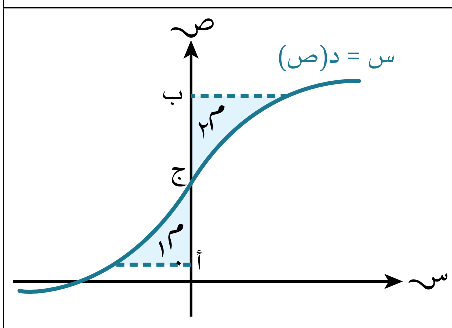
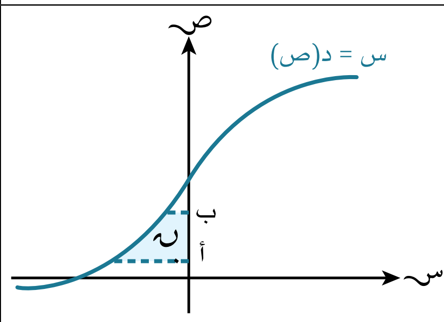
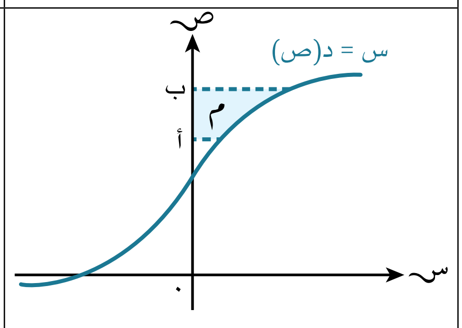
∴ المساحة المطلوبة = م١ + م٢ $= ٦\frac{٢}{٣} + ٤٢\frac{٢}{٣} = ٤٩\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة.

المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور الصادات

يجب مراعاة ثلاث حالات عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى د (ص)، والمحور الصادي في الفترة المغلقة [أ، ب].

مُساعَدة

[أ، ب] تعني:
أ ≤ ص ≤ ب

الحالة الثالثة	الحالة الثانية	الحالة الأولى
		
تتغير إشارة الدالة د (ص) عند ص = ج: د (ص) ≥ ٠ على الفترة المغلقة [أ، ج]. د (ص) ≤ ٠ على الفترة المغلقة [ج، ب].	د (ص) ≥ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب].	د (ص) ≤ ٠ لا تتغير إشارة الدالة على الفترة المغلقة [أ، ب].

تجب ملاحظة النقاط الآتية عند استخدام التكامل لحساب المساحة:

- **من الأفضل إيجاد قيمة (قيم) ص التي تكون عندها قيم د (ص) تساوي صفرًا، حتى لو تم إعطاء الحدود.**
- **إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت هناك قيمتان، على سبيل المثال: ن، ل تقعان في الفترة [أ، ب] حيث تختلف إشارة د(ل) عن إشارة د(ن)، فإن إشارة د (ص) تتغير في الفترة [أ، ب].**
- **في الحالة الثالثة، نجد مساحة المنطقة الواقعة يسار المحور الصادي، والمنطقة الواقعة يمين المحور الصادي بشكل منفصل، ثم نجمع هاتين القيمتين المطلقتين للحصول على المساحة الإجمالية.**

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ١٢

- إذا كانت د(ص) متصلة، وكانت د (ص) $\geqslant$ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ ، ص = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة:

  م = $\left| \int_{أ}^{ب} د(ص) \, ء ص \right|$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

- إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت د (ص) $\leqslant$ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ، ص = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة:

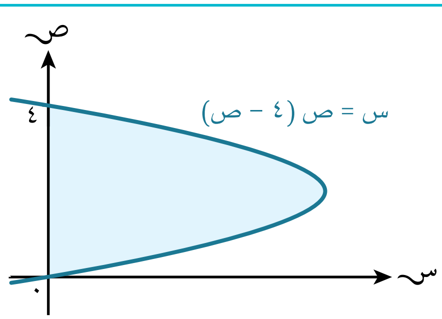
  ن = $\left| \int_{أ}^{ب} د(ص) \, ء ص \right|$ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.

- إذا تغيرت إشارة د(ص) عند ص = ج على الفترة [أ، ب]، فإن المساحة الإجمالية تُعطى بالعلاقة:

  م = م$_1$ + م$_2$ = $\left| \int_{أ}^{ج} د(ص) \, ء ص \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(ص) \, ء ص \right|$

مثــال ١٤

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



الحــلّ:

تقع المنطقة على يمين المحور الصادي حيث لا توجد قيم سالبة لـ س، وبالتالي فإن قيمة التكامل ستكون موجبة وتساوي المساحة.

مساحة المنطقة المظللة = $\int_{٠}^{٤} س \, ء ص$

يمكن استخدام رمز المطلق، ولكنه غير ضروري هنا.

$= \int_{٠}^{٤} (٤ص - ص^٢) \, ء ص$

$= \left[٤ \times \frac{١}{٢} ص^٢ - \frac{١}{٣} ص^٣ \right]_{٠}^{٤}$

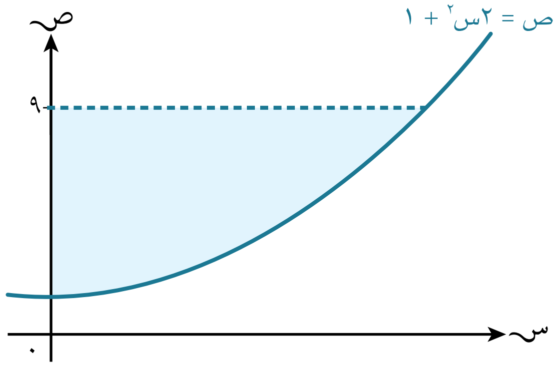
$= \left(٢(٤)^٢ - \frac{١}{٣}(٤)^٣ \right) - \left(٢(٠)^٢ - \frac{١}{٣}(٠)^٣ \right)$

$= ١٠ \frac{٢}{٣}$

∴ مساحة المنطقة المظللة = $١٠ \frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مثــال ١٥

في الشكل المجاور، أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = ٢س^٢ + ١$، والمستقيم $ص = ٩$، ومحور الصادات.



الحــلّ:

تقع المنطقة المظللة إلى يمين المحور الصادي، حيث لا يوجد قيم سالبة لـ س، لذا قيمة التكامل ستكون موجبة، ومساوية للمساحة المظللة.

$ص = ٢س^٢ + ١$ .... عوض $س = ٠$ لتجد المقطع مع المحور الصادي أو الحد الأول للتكامل.

$= ٢(٠)^٢ + ١$

$= ١$

$ص = ٢س^٢ + ١$ .... اكتب س بدلالة ص.

$٢س^٢ = ص - ١$

$س = \left(\frac{ص}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$ .... استخدم الجذر التربيعي الموجب.

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{١}^{٩} س \, ءص$ .... يمكن استخدام رمز المطلق، ولكنه غير ضروري هنا.

$$= \int_{١}^{٩} \left(\frac{ص}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} ءص$$

$$= \left[\frac{١}{\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}} \left(\frac{ص}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٩}$$

$$= \left[\frac{٤}{٣} \left(\frac{ص}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٩}$$

$$= \frac{٤}{٣} \left[\left(\frac{ص}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٩}$$

$$= \frac{٤}{٣} \left(\left(\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

$$= \frac{٤}{٣} \left(٤^{\frac{٣}{٢}} - ٠\right)$$

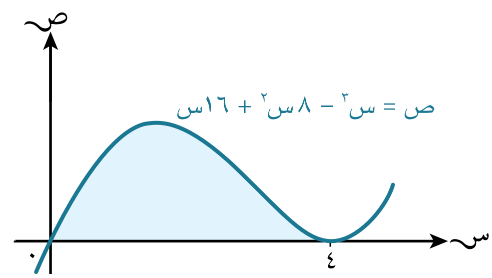
$$= \frac{٤}{٣} \times ٨$$

$= ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

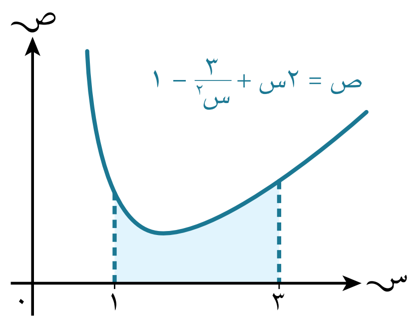
تمارين ٦-٦

١) أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل ممّا يأتي:

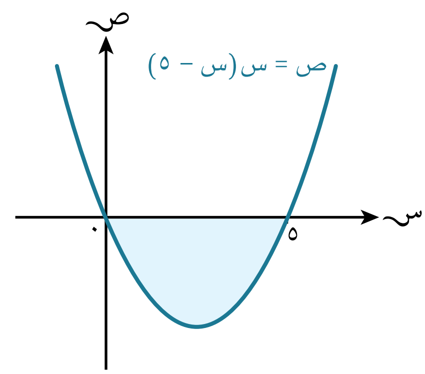
أ



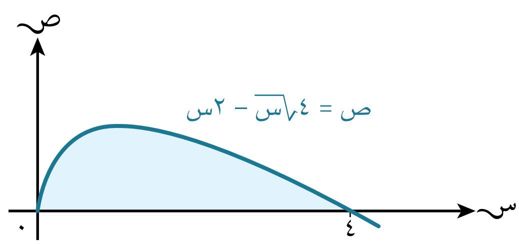
ب



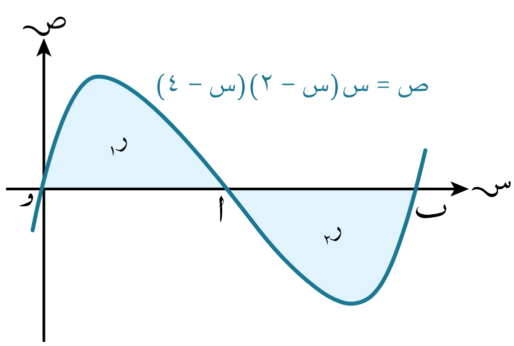
ج



د



٢) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة
ص = س(س − ٢)(س − ٤)
الذي يقطع محور السينات في النقاط و(٠، ٠)،
أ(٢، ٠)، ب(٤، ٠).
بيّن، مستخدمًا التكامل، أن مساحة المنطقة ر$_{١}$ تساوي
مساحة المنطقة ر$_{٢}$.



٣) أوجد المساحة المحصورة بين كل من المنحنيات الآتية، ومحور السينات:

أ ص = س (س − ٣) (س + ١)

ب ص = س (س^{٢} − ٩)

ج ص = س (٢س − ١) (س + ٢)

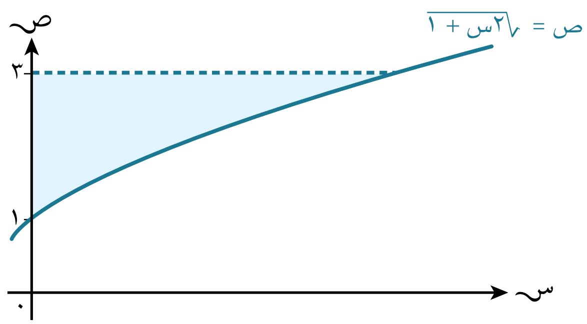
د ص = (س − ١)(س + ١)(س − ٤)

٤) أوجد المساحة المحصورة بين كل ممّا يأتي:

أ المنحنى ص = س^{٣}، ومحور الصادات، والمستقيمَين ص = ٨، ص = ٢٧

ب المنحنى س = ص^{٢} + ١، ومحور الصادات، والمستقيمَين ص = −١، ص = ٢

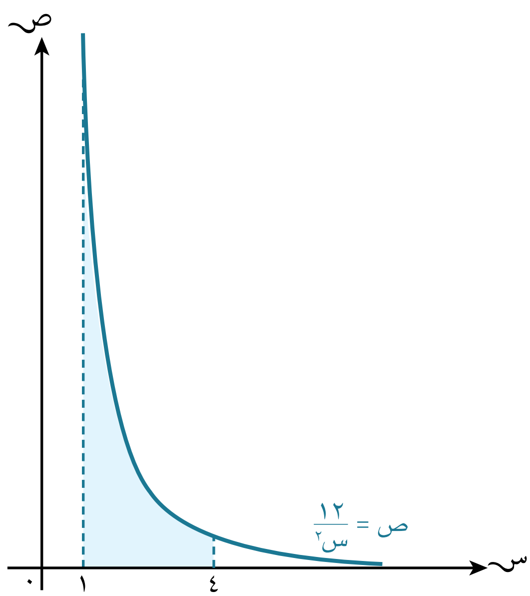
٥) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\sqrt{\text{٢س + ١}}$.
إذا كانت المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيم ص = ٣، فأوجد مساحة المنطقة المظللة.



٦) في الشكل المجاور:

أ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = $\frac{\text{١٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، ومحور السينات، والمستقيمَين س = ١، س = ٤

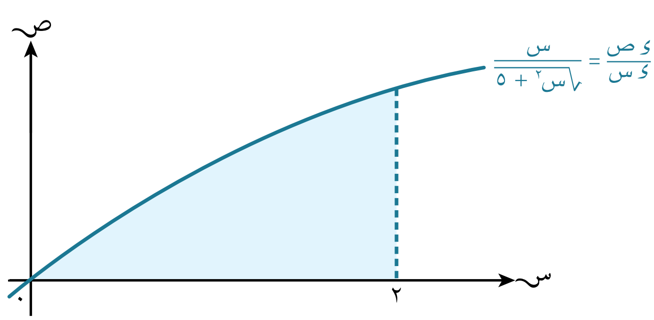
ب إذا علمت أن المستقيم س = ل يقسم المنطقة في الجزئية (أ) إلى قسمَين متساويَين، فأوجد قيمة ل.



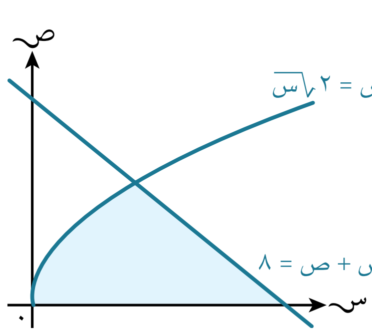
٧) في الشكل المجاور:

أ بيّن أن $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٥}}\right) = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٥}}}$

ب استخدم نتيجة الجزئية (أ) لتجد مساحة المنطقة المظللة.



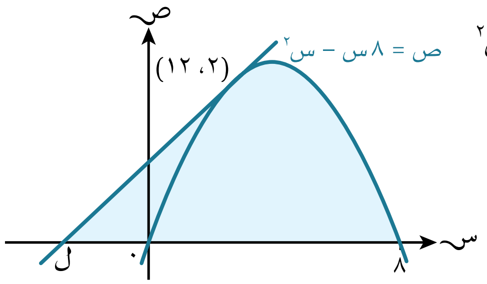
٨) في الشكل المجاور: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٢ $\sqrt{\text{س}}$، والمستقيم س + ص = ٨، ومحور السينات.



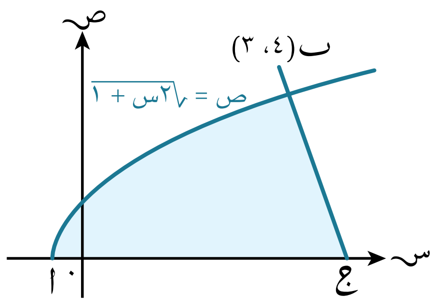
٩) في الشكل المجاور: إذا كان مماس منحنى الدالة ص = ٨س − س^{٢} عند النقطة (٢، ١٢) يقطع محور السينات في النقطة ل، فأوجد:

أ إحداثيات النقطة ل.

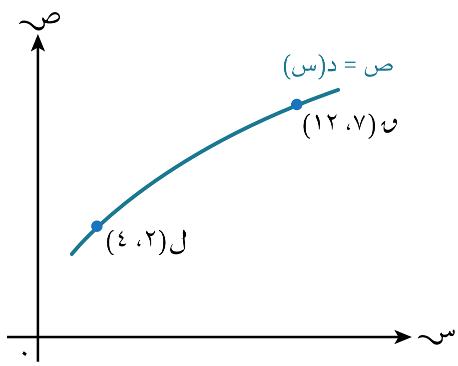
ب مساحة المنطقة المظللة.



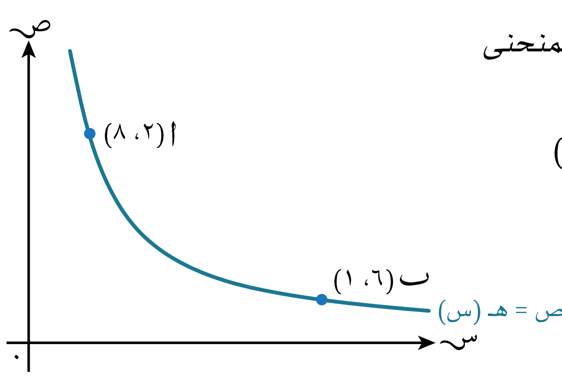
١٠) يبيّن الشكل المجاور أن المنحنى ص = $\sqrt{٢\text{س} + ١}$ يقطع محور السينات في النقطة أ. العمودي على مماس المنحنى عند النقطة ب (٤، ٣) يتقاطع مع محور السينات في النقطة ع.
أوجد مساحة المنطقة المظللة.



★ **١١)** يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = د (س).
تقع النقطتان ل(٢، ٤)، ن (٧، ١٢) على المنحنى.
إذا علمت أن $\int_{٢}^{٧}$ ص ءس = ٤٢، فأوجد قيمة $\int_{٤}^{١٢}$ س ءص.



★ **١٢)** يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى
ص = هـ (س).
تقع النقطتان أ(٢، ٨)، ب(٦، ١)
على المنحنى.
إذا علمت أن $\int_{٢}^{٦}$ ص ءس = ١٦،
فأوجد قيمة $\int_{١}^{٨}$ س ءص.



رابط الكتروني

حاول استخدام المصدرَين على الموقع Underground Mathematics

- https://underground mathematics.org/ calculus-meets-functions /what-else-do-you-know

- https://underground mathematics.org/chain-rule/slippery-areas

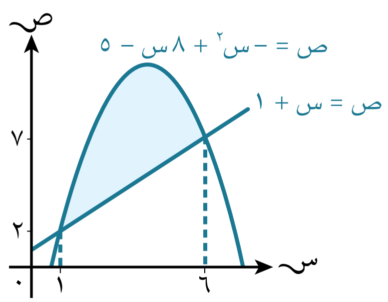
٦-٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين

Area bounded by a curve and a line or by two curves

يبيّن المثال الآتي طريقة لإيجاد المساحة الممكنة للمنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم.

مثــال ١٦

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة ص = −س^{٢} + ٨س − ٥ الذي يتقاطع مع المستقيم ص = س + ١ في النقطتَين (١، ٢)، (٦، ٧) . أوجد مساحة المنطقة المظللة.



الحــلّ:

تقع المنطقة فوق المحور السيني، حيث لا توجد قيم سالبة لـ ص، لذا فإن مساحتها هي الفرق بين قيمة التكامل ومساحة شبه المنحرف.

مساحة المنطقة المظللة = (المساحة تحت المنحنى المحصورة بين س = ١، س = ٦) − مساحة شبه المنحرف.

$$= \int_{١}^{٦} (-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٥)\, \text{ءس} - \frac{١}{٢} \times (٢ + ٧) \times ٥$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ٥\text{س}\right]_{١}^{٦} - ٢٢\frac{١}{٢}$$

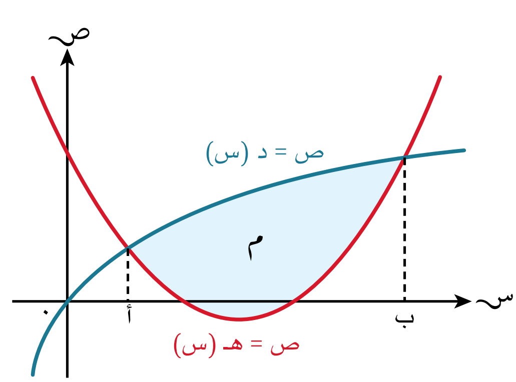
$$= \left(-\frac{١}{٣}(٦)^{٣} + ٤(٦)^{٢} - ٥(٦)\right) - \left(-\frac{١}{٣}(١)^{٣} + ٤(١)^{٢} - ٥(١)\right) - ٢٢\frac{١}{٢}$$

$$= ٤٢ - \left(-\frac{٤}{٣}\right) - ٢٢\frac{١}{٢}$$

$$= ٢٠\frac{٥}{٦} \text{ وحدة مربعة.}$$

هل توجد طريقة بديلة لإيجاد مساحة المنطقة المظللة في مثال ١٦؟

من خلال الشكل الآتي:

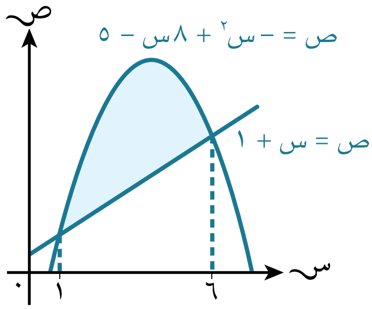


إذا تقاطع منحنيا دالتين عند س = أ، س = ب، فإن المساحة م المحصورة بين المنحنيَين تعطى كما يأتي:

نتيجة ١٣

$$\text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ى س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ى س} \right| \quad \text{أو} \quad \text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{د}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ى س} \right|$$

وعليه، فإن مساحة المنطقة المظللة في مثال ١٦ تُحسب كالآتي:



باستخدام د (س) = −س^{٢} + ٨س − ٥، هـ (س) = س + ١ نحصل على:

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \left| \int_{١}^{٦} \text{د}(\text{س})\,\text{ى س} - \int_{١}^{٦} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ى س} \right|$$

$$= \left| \int_{١}^{٦} (-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٥)\,\text{ى س} - \int_{١}^{٦} (\text{س} + ١)\,\text{ى س} \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٨\text{س}^{٢}}{٢} - ٥\text{س}\right]_{١}^{٦} - \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\right]_{١}^{٦} \right|$$

$$= \left| \left(\left(-\frac{٦^{٣}}{٣} + \frac{٨ \times ٦^{٢}}{٢} - ٥ \times ٦\right) - \left(-\frac{١^{٣}}{٣} + \frac{٨ \times ١^{٢}}{٢} - ٥ \times ١\right)\right) - \left(\left(\frac{٦^{٢}}{٢} + ٦\right) - \left(\frac{١^{٢}}{٢} + ١\right)\right) \right|$$

$$= \left| \left(٤٢ - \left(-\frac{٤}{٣}\right)\right) - \left(٢٤ - \frac{٣}{٢}\right) \right|$$

$$= \left| ٤٣\frac{١}{٣} - ٢٢\frac{١}{٢} \right|$$

$$= ٢٠\frac{٥}{٦} \text{ وحدة مربعة.}$$

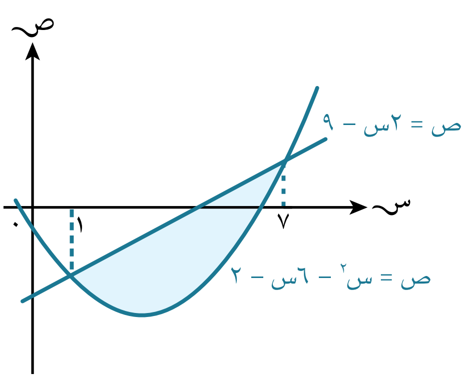
مُساعَدة

يمكن إيجاد المساحة باستخدام صيغة المساحة الأخرى في النتيجة ١٣

مثـــال ١٧

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة ص = س^{٢} − ٦س − ٢، والمستقيم ص = ٢س − ٩، حيث يتقاطعان عند س = ١، س = ٧

أوجد مساحة المنطقة المظللة.



الحــلّ:

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \left| \int_{١}^{٧} \left((٢\text{س} - ٩) - (\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٢)\right)\text{ى س} \right|$$

$$= \left| \int_{١}^{٧} (-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٧)\,\text{ى س} \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٨\text{س}^{٢}}{٢} - ٧\text{س}\right]_{١}^{٧} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{٧^{٣}}{٣} + \frac{٨ \times ٧^{٢}}{٢} - ٧ \times ٧\right) - \left(-\frac{١^{٣}}{٣} + \frac{٨ \times ١^{٢}}{٢} - ٧ \times ١\right) \right|$$

$$= \left| ٣٢\frac{٢}{٣} - \left(-٣\frac{١}{٣}\right) \right|$$

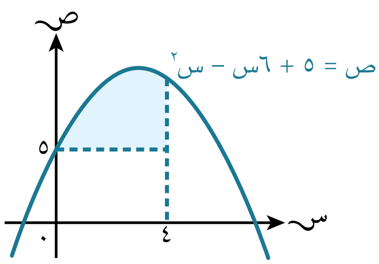
$$= |٣٦|$$

$$= ٣٦ \text{ وحدة مربعة.}$$

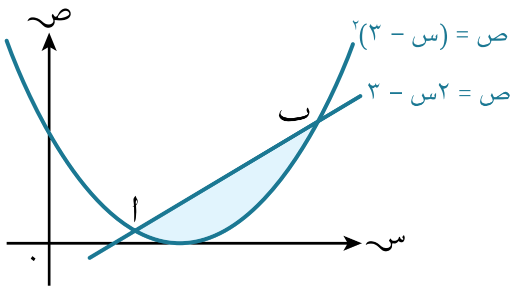
يمكنك إيجاد المساحة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيين بدون استخدام المطلق من خلال تكامل (الدالة الأعلى – الدالة الأسفل) أو باستخدام المطلق بدون ترتيب الدالتين.

تمارين ٦-٧

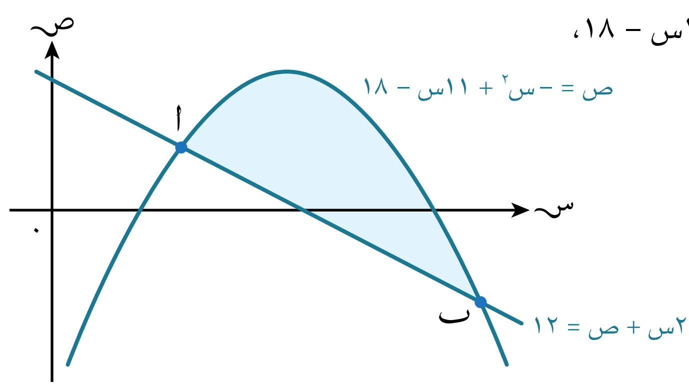
١) في الشكل المجاور: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = ٥ + ٦س – $س^٢$، والمستقيمَين س = ٤، ص = ٥



٢) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $(س – ٣)^٢$، والمستقيم ص = ٢س – ٣ اللذَين يتقاطعان في النقطتَين أ، ب. أوجد مساحة المنطقة المظللة.



٣) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = –$س^٢$ + ١١س – ١٨، والمستقيم ٢س + ص = ١٢ اللذين يتقاطعان في النقطتَين أ، ب.
أوجد مساحة المنطقة المظللة.



٤) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى والمستقيم في كل ممّا يأتي:

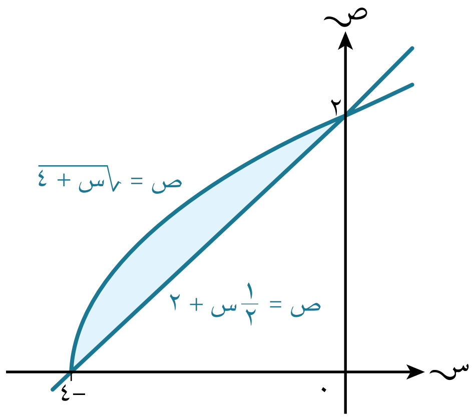
أ ص = $س^٢$ – ٣، ص = ٦

ب ص = –$س^٢$ + ١٢س – ٢٠، ص = ٢س + ١

ج ص = $س^٢$ – ٤س + ٤، ٢س + ص = ١٢

٥) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = $س^٢$، ص = س(٢ – س).

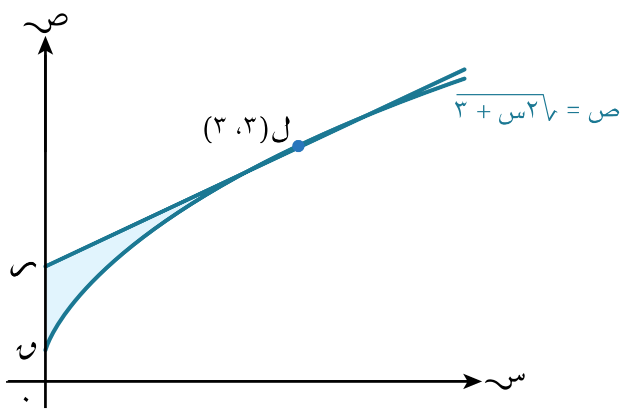
٦) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = $\sqrt{\text{س} + ٤}$،
والمستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ حيث يتقاطعان في
النقطتَين (−٤، ٠)، (٠، ٢).
أوجد مساحة المنطقة المظللة.



٧) في الشكل المجاور: المنحنى ص = $\sqrt{٢\text{س} + ٣}$،
والمماس له عند النقطة ل(٣، ٣) يتقاطعان
مع محور الصادات في النقطتَين ى، ر
على الترتيب. أوجد:

أ معادلة مماس المنحنى عند النقطة ل.

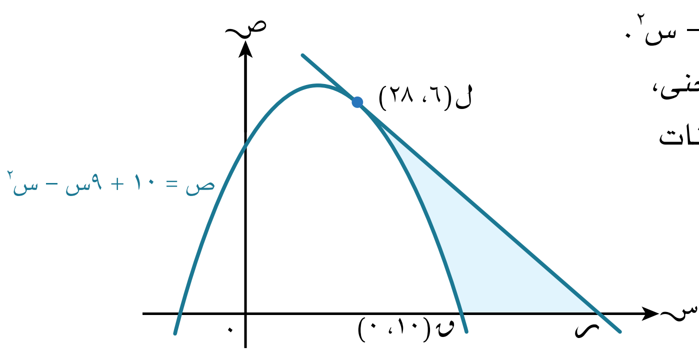
ب مساحة المنطقة المظللة ل ى ر.



٨) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص= ١٠ + ٩س − س^{٢}.
تقع النقطتان ل(٦، ٢٨)، ى(١٠، ٠) على المنحنى،
ويتقاطع مماس المنحنى عند ل مع محور السينات
في النقطة ر. أوجد:

أ معادلة مماس المنحنى عند النقطة ل.

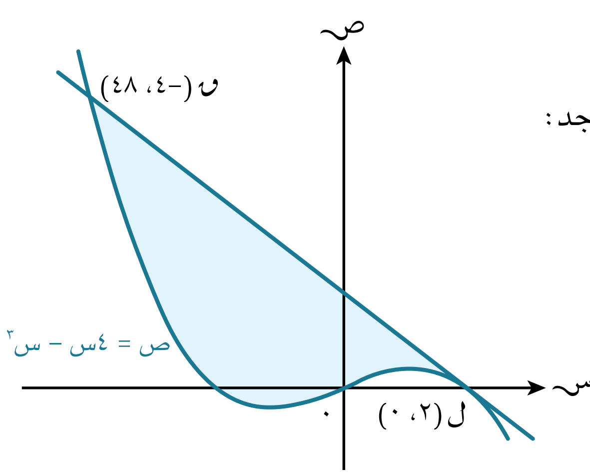
ب مساحة المنطقة المظللة.



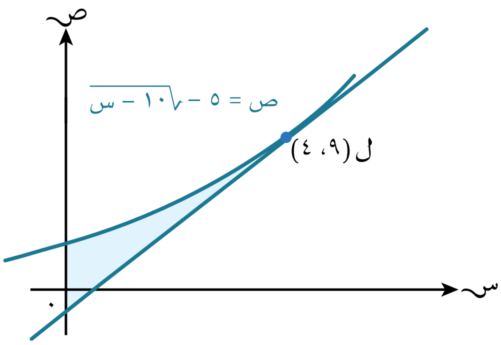
٩) يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = ٤س − س^{٣}،
وتقع النقطتان ل (٢، ٠)، ى (−٤، ٤٨) على المنحنى، أوجد:

أ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ل.

ب مساحة المنطقة المظللة.



١٠) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = ٥ − $\sqrt{١٠ − س}$،
ومستقيمًا يمس المنحنى عند النقطة ل (٩، ٤). أوجد:

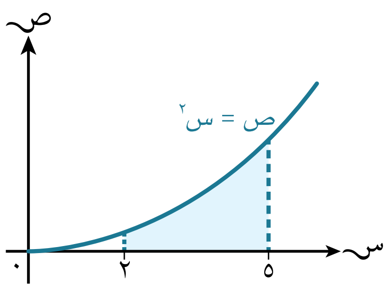


أ معادلة مماس المنحنى عند النقطة ل.

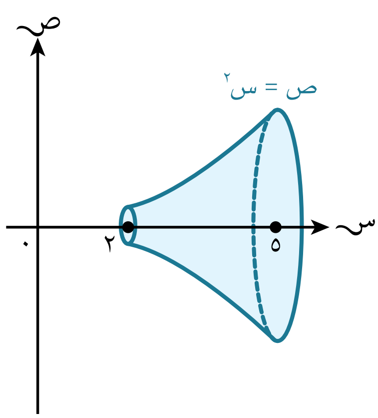
ب مساحة المنطقة المظللة مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٨-٦ حجوم الأجسام الدورانية Volumes of revolution

تبيّن المنطقة المظللة في الشكل المجاور مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = س^{٢}$، ومحور السينات، والمستقيمَين $س = ٢$، $س = ٥$



عندما تدور هذه المنطقة حول محور السينات ٣٦٠° يتكوّن **جسم دوراني solid of revolution**. يُسمى حجم هذا الجسم **بحجم الجسم الدوراني volume of revolution**.



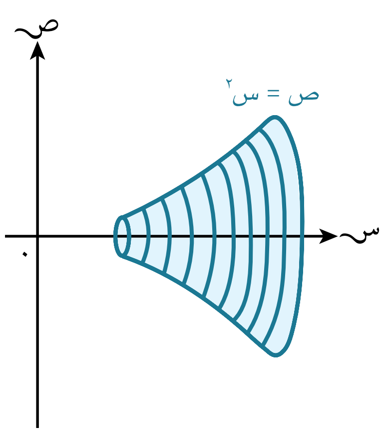
يمكن إيجاد الحجم التقريبي (ع) لهذا الجسم بمجموع حجوم سلسلة من الأقراص الدائرية سماكة كل منها Δس (تمثّل زيادة قليلة في مقدار س)، ونصف قطرها ص (يمثّل ارتفاع الدالة).

فيكون حجم كل قرص دائري هو $\pi ص^{٢} \Delta س$.

ويكون الحجم (ع) التقريبي هو المجموع $\sum \pi ص^{٢} \Delta س$، والذي يمثّل مجموع حجوم الأقراص الدائرية بين $س = ٢$ ، $س = ٥$

فإذا قمنا بتقليل سماكة هذه الأقراص أصغر فأصغر، فسنحصل على النتيجة الآتية:

$$ع = \underset{\Delta س \to ٠}{\text{نهـا}} \sum \pi ص^{٢} \Delta س = \int_{٢}^{٥} \pi ص^{٢} \, ى س$$



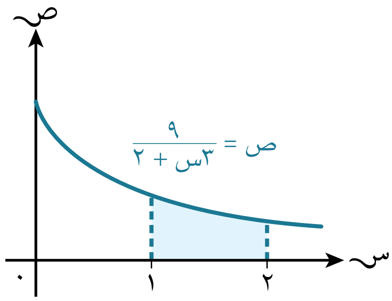
يقودنا ذلك إلى النتيجة الآتية:

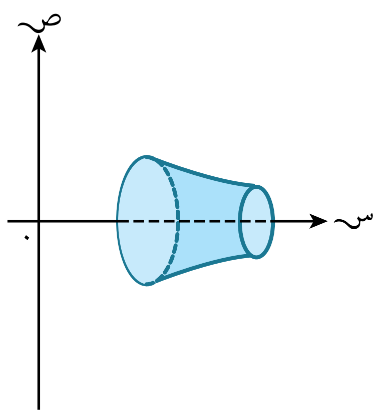
نتيجة ١٤

حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة ص = د (س) حول محور السينات دورة كاملة ٣٦٠° بين القيمتَين $س = أ$، $س = ب$ يعطى بالعلاقة: $ع = \int_{أ}^{ب} \pi ص^{٢} \, ى س$.

مثــال ١٨

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول محور السينات بمقدار ٣٦٠°.





الحــلّ:

الحجم $= \pi \int_{١}^{٢} ص^{٢} \, ء س = \pi \int_{١}^{٢} \left(\frac{٩}{٣س + ٢}\right)^{٢} ء س$

$= \pi \int_{١}^{٢} ٨١ \, (٣س + ٢)^{-٢} \, ء س$

$= \pi \left[\frac{٨١}{٣(-١)} (٣س + ٢)^{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= \pi \left[\frac{-٢٧}{٣س + ٢}\right]_{١}^{٢}$

$= \pi \left(\left(\frac{-٢٧}{٨}\right) - \left(\frac{-٢٧}{٥}\right)\right)$

$= \frac{٨١\pi}{٤٠}$ وحدة مكعبة.

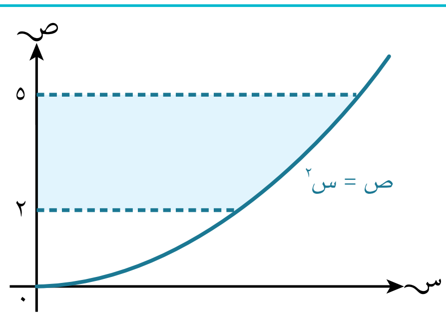
أحيانًا تدور المنحنيات حول محور الصادات، وفي هذه الحالة نحصل على النتيجة الآتية:

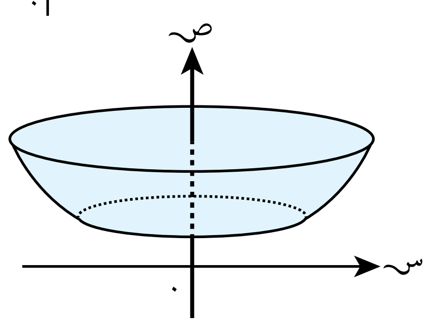
نتيجة ١٥

حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة س = د (ص) حول محور الصادات دورة كاملة ٣٦٠° بين القيمتَين ص= أ، ص = ب يعطى بالعلاقة: ع $= \int_{أ}^{ب} \pi \, س^{٢} \, ء ص$.

مثــال ١٩

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور الصادات.





الحــلّ:

الحجم $= \pi \int_{٢}^{٥} س^{٢} \, ء ص = \pi \int_{٢}^{٥} ص \, ء ص$ ... استخدم ص = $س^{٢}$

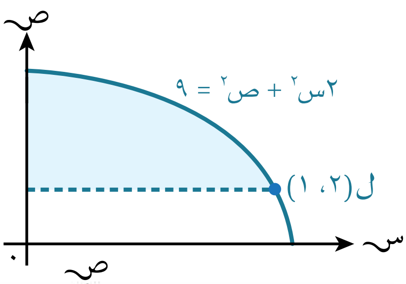
$= \pi \left[\frac{ص^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٥}$

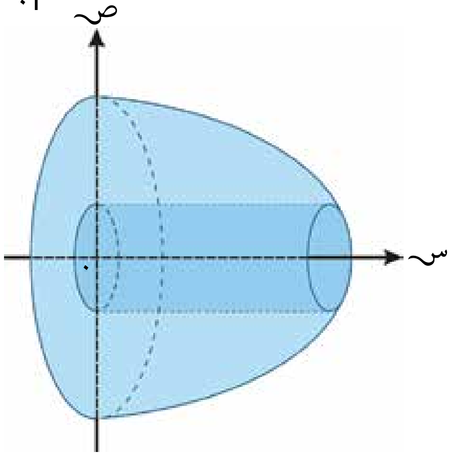
$= \pi \left(\left(\frac{٢٥}{٢}\right) - \left(\frac{٤}{٢}\right)\right)$

$= \frac{٢١\pi}{٢}$ وحدة مكعبة.

مثـــال ٢٠

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات.





الحــلّ:

عندما تدور المنطقة المظللة حول محور السينات دورة كاملة يتكوّن جسم بداخله تجويف (فراغ) أسطواني الشكل.
نصف قطر الأسطوانة وحدة واحدة، وارتفاعها وحدتان.

$$\text{حجم الجسم الناتج} = \pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢}\, \text{ء س} - \text{حجم الأسطوانة}$$

$$= \pi \int_{٠}^{٢} (٩ - ٢\text{س}^{٢})\, \text{ء س} - \pi \times \text{نق}^{٢} \times \text{ع}$$

$$= \pi \left[٩\text{س} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٢} - \pi \times ١^{٢} \times ٢$$

$$= \pi \left(\left(١٨ - \frac{١٦}{٣}\right) - (٠ - ٠) \right) - ٢\pi$$

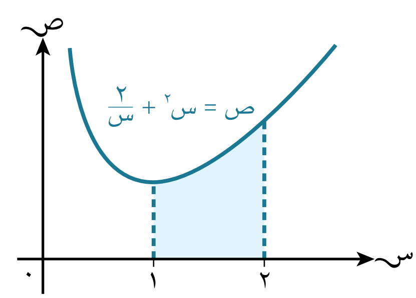
$= \frac{٣٢\pi}{٣}$ وحدة مكعبة.

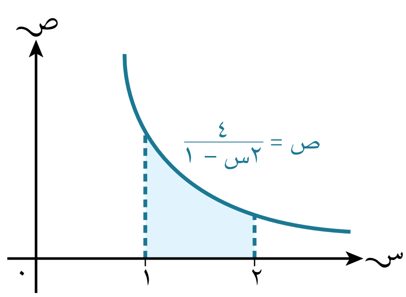
مُساعَدة

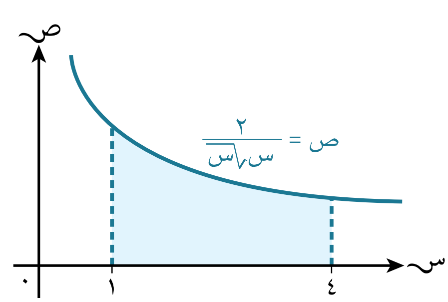
يمكنك إيجاد حجم الأسطوانة من خلال إيجاد حجم الجسم الناتج من دوران المستقيم ص = ١ حول محور السينات، والمستقيمين س = ٠، س = ٢

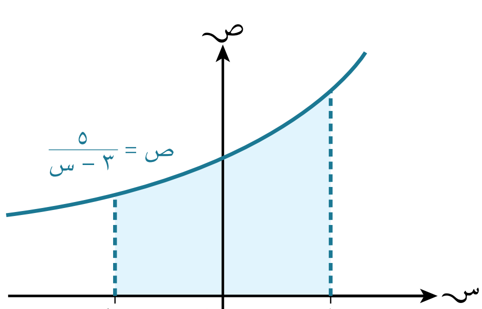
تمارين ٦-٨

١) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور السينات في كل ممّا يأتي:

أ


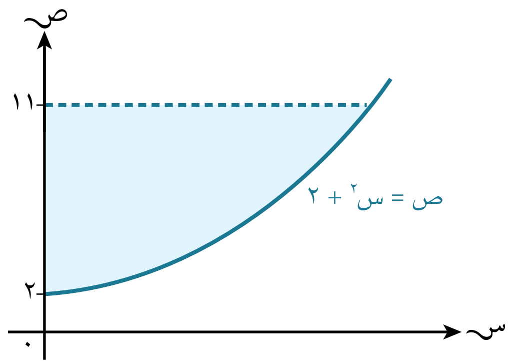
ب


ج


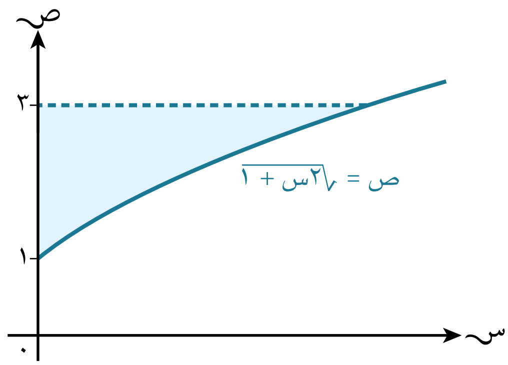
د


٢) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة $°٣٦٠$ حول محور الصادات في كل ممّا يأتي:

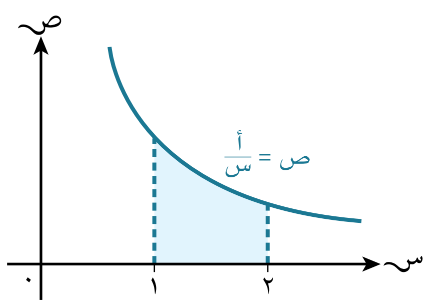
أ



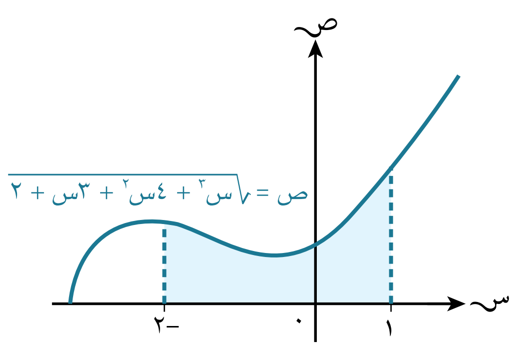
ب



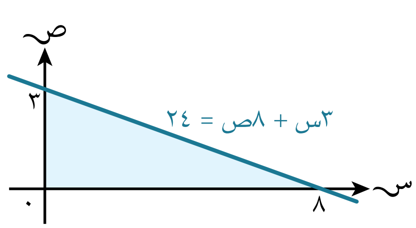
٣) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى ص = $\frac{أ}{س}$، أ $>$ ٠
إذا علمت أن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة $°٣٦٠$ حول محور السينات يساوي ١٨π، فأوجد قيمة أ.



٤) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى
ص = $\sqrt{س^٣ + ٤س^٢ + ٣س + ٢}$
أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة $°٣٦٠$ حول محور السينات.



٥) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المستقيم ٣س + ٨ ص = ٢٤
إذا دارت المنطقة المظللة $°٣٦٠$ حول محور السينات، فسينتج مخروط نصف قطر قاعدته ٣ وحدات، وارتفاعه ٨ وحدات.
أوجد حجم المخروط باستخدام:

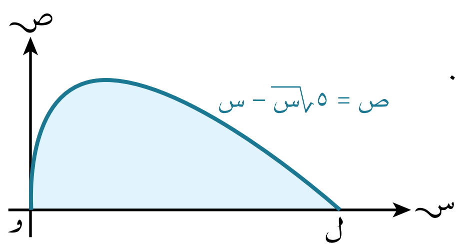


أ) التكامل.

ب) صيغة حجم المخروط.

٦) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = $(س - ٢)^٢$، والمحورين السيني، والصادي دورة كاملة حول محور السينات.

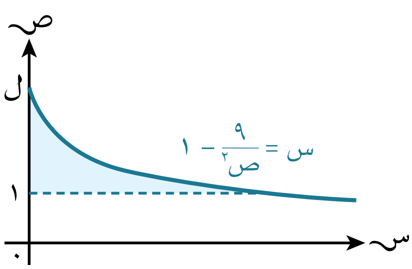
٧) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى $ص = ٥\sqrt{س} - س$.
يتقاطع المنحنى مع محور السينات في نقطة الأصل و، والنقطة ل.
أوجد:



أ إحداثيات النقطة ل.

ب الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة $٣٦٠°$ حول محور السينات.

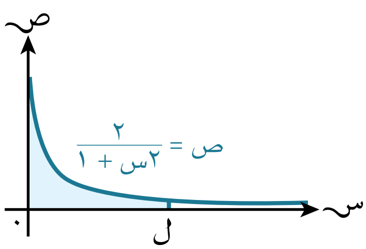
٨) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى $س = \frac{٩}{ص^٢} - ١$ الذي يقطع محور الصادات في النقطة ل. إذا كانت المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيم $ص = ١$، فأوجد:



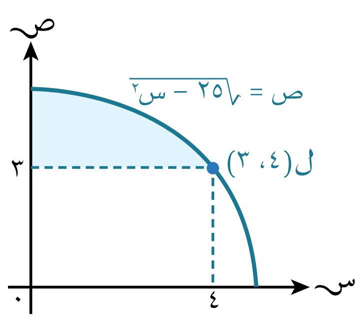
أ إحداثيات النقطة ل.

ب الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة $٣٦٠°$ حول محور الصادات.

٩) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى $ص = \frac{٢}{٢س + ١}$. دارت المنطقة المظللة $٣٦٠°$ حول محور السينات بين المستقيمَين $س = ٠$، $س = ل$. بيّن أنه عندما $ل \leftarrow \infty$، فإن الحجم الناتج من الدوران يؤول إلى ٢π.



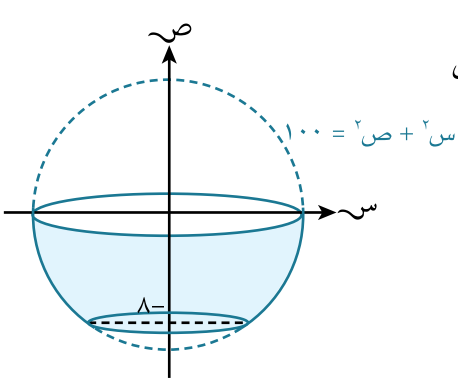
١٠) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى $ص = \sqrt{٢٥ - س^٢}$، حيث تقع النقطة (٤، ٣) على المنحنى. أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة $٣٦٠°$ حول:



أ محور الصادات.

ب محور السينات.

١١) يبيّن الشكل المجاور النموذج الرياضي لإناء ناتج من دوران المنحنى $س^٢ + ص^٢ = ١٠٠$ حول محور الصادات دورة كاملة $٣٦٠°$ بين $ص = -٨$، $ص = ٠$:



أ أوجد حجم الإناء.

ب إذا علمت أن الإناء امتلأ بالماء إلى ارتفاع ٣ سم، فأوجد حجم الماء بداخله.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

التكامل عملية عكسيّة للتفاضل

- إذا كان $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}\left(\text{ق}(\text{س})\right) = \text{د}(\text{س})$، فإن $\int \text{د}(\text{س})\ \text{ى س} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$.

قواعد التكامل

- $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ى س} = \frac{1}{\text{ن} + 1}\text{س}^{\text{ن}+1} + \text{جـ}$، حيث جـ عدد ثابت، $\text{ن} \neq -1$
- $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ى س} = \frac{1}{\text{أ}(\text{ن} + 1)}(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1} + \text{جـ}$، حيث جـ عدد ثابت، $\text{ن} \neq -1$، $\text{أ} \neq 0$

قواعد التكامل غير المحدود

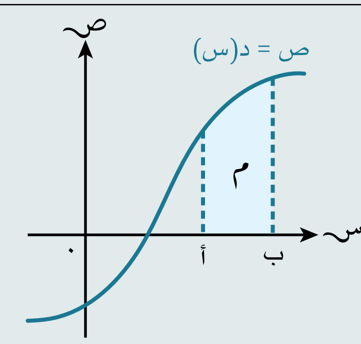
- $\int \text{ك د}(\text{س})\ \text{ى س} = \text{ك} \int \text{د}(\text{س})\ \text{ى س}$، حيث ك عدد ثابت.
- $\int \left(\text{د}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right) \text{ى س} = \int \text{د}(\text{س})\ \text{ى س} \pm \int \text{هـ}(\text{س})\ \text{ى س}$

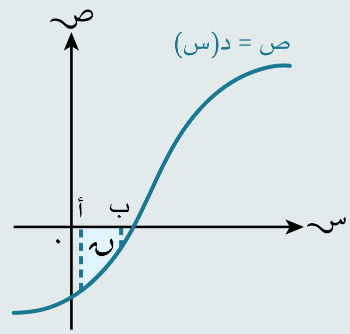
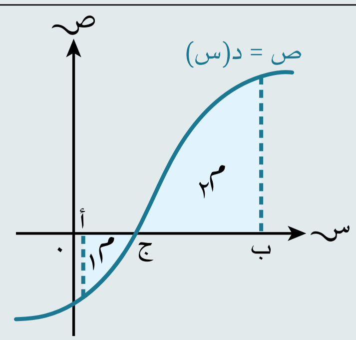
قواعد التكامل المحدود

- إذا كان $\int \text{د}(\text{س})\text{ى س} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$، فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\text{ى س} = \left[\text{ق}(\text{س})\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د}(\text{س})\text{ى س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\text{ى س}$، حيث ك عدد ثابت.
- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left[\text{د}(\text{س}) \pm \text{ل}(\text{س})\right] \text{ى س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\text{ى س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل}(\text{س})\text{ى س}$
- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\text{ى س} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\text{ى س}$
- $\int_{\text{ك}}^{\text{ك}} \text{د}(\text{س})\text{ى س} = 0$

المساحة تحت منحنى الدالة (المحصورة بين المنحنى والمحور السيني)

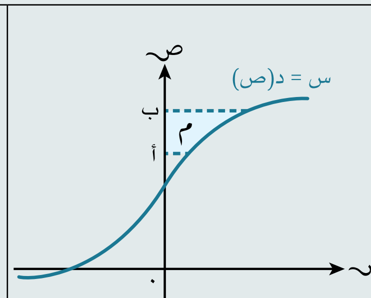
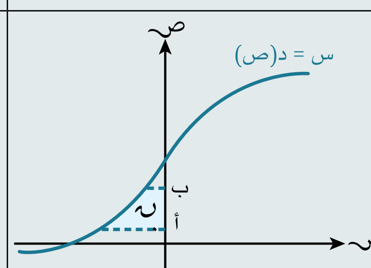
المساحة المحصورة بين المنحنى ص = د(س)، والمحور السيني، والمستقيمين س = أ، س = ب معطاة في الحالات الثلاثة الآتية:

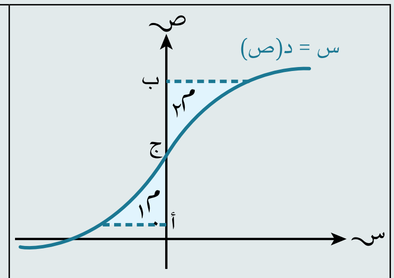
	إذا كانت د(س) متصلة، وكانت $\text{د}(\text{س}) \geqslant 0$ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة: $\text{م} = \left\lvert \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\text{ى س} \right\rvert$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.

	إذا كانت د (س) متصلة، وكانت د (س) $\leqslant$ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة، والمحور السيني، والمستقيمان س = أ، س = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة: ن = $\left\|\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,ء\,س\right\|$؛ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.
	إذا تغيرت إشارة الدالة د(س) عند س = ج على الفترة [أ، ب]، فإن: المساحة الإجمالية = $م_١ + م_٢ = \left\|\int_{أ}^{ج} د\,(س)\,ء\,س\right\| + \left\|\int_{ج}^{ب} د\,(س)\,ء\,س\right\|$

المساحة تحت منحنى الدالة (المحصورة بين المنحنى والمحور الصادي)

المساحة المحصورة بين المنحنى س = د(ص)، والمحور الصادي، والمستقيمين ص = أ، ص = ب معطاة في الحالات الثلاثة الآتية:

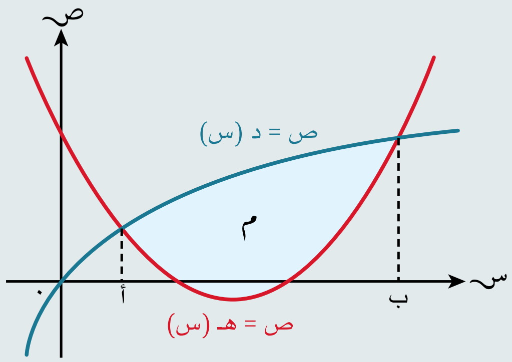
	إذا كانت د(ص) متصلة، وكانت د (ص) $\geqslant$ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ، ص = ب، فإن المساحة م تُعطى بالعلاقة: م = $\int_{أ}^{ب} د\,(ص)\,ء\,ص$، ويمكن الاستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطي قيمة موجبة.
	إذا كانت د (ص) متصلة، وكانت د (ص) $\leqslant$ ٠ لجميع قيم ص على الفترة [أ، ب]، وكانت ن تمثل مساحة المنطقة التي يحدها المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمان ص = أ، ص = ب، فإن المساحة ن تُعطى بالعلاقة: ن = $\left\|\int_{أ}^{ب} د\,(ص)\,ء\,ص\right\|$؛ لأن التكامل يعطي قيمة سالبة.



إذا تغيرت إشارة د(ص) عند ص = ج على الفترة [أ، ب]، فإن:

المساحة الإجمالية = $\text{م}_{1} + \text{م}_{2} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{د (ص) ى ص}\right| + \left|\int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{د (ص) ى ص}\right|$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيَين



- مساحة المنطقة م المحصورة بين المنحنيَين ص = د (س)، ص = هـ (س) تعطى بالصيغة:

$$\text{م} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س) ى س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ (س) ى س}\right|$$

أو $$\text{م} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{د (س)} - \text{هـ (س)}\right) \text{ى س}\right|$$

حيث أ، ب الإحداثي السيني لنقطتَي تقاطع الدالتَين د، هـ

الحجم الدوراني

- حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة ص = د (س) بمقدار ٣٦٠° حول محور السينات بين القيمتَين س = أ، س = ب يعطى بالعلاقة: $\text{ع} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi \, \text{ص}^{2} \, \text{ى س}$.
- حجم الجسم ع الناتج من دوران الدالة س = د (ص) بمقدار ٣٦٠° حول محور الصادات بين القيمتَين ص = أ، ص = ب يعطى بالعلاقة: $\text{ع} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi \, \text{س}^{2} \, \text{ى ص}$.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) إذا علمت أن الدالة د (س) معرّفة حيث د′(س) = ١٢س^{٣} + ١٠س، د (−١) = ١، فأوجد د (س).

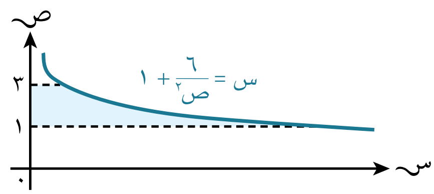
٢) أوجد $\int \left(٥س - \frac{٢}{س}\right)^{٢}$ ى س.

٣) إذا علمت أن $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{٦}{س^{٢}}$ − ٥س، وتقع النقطة (٣، ٥٫٥) على منحناها، فأوجد معادلة المنحنى.

٤) منحنى معادلته ص = د (س). إذا علمت أن د′(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س + ٢}} - \frac{٨}{س^{٣}}$، د (٢) = ٣، فأوجد د (س).

٥) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى س = $\frac{٦}{ص^{٢}}$ + ١

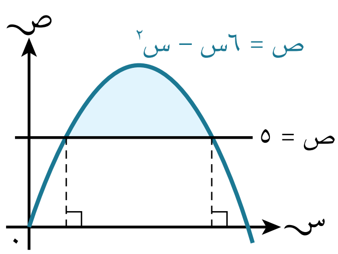
المنطقة المظللة محصورة بين المنحنى، ومحور الصادات، والمستقيمَين ص = ١، ص = ٣. أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة بمقدار ٣٦٠° حول محور الصادات بدلالة π.



٦) إذا كانت الدالة د (س) معرّفة على ع بحيث د′(س) = ٦س − ٦، حيث د (س) ⩽ ٥، فأوجد:

أ قيمة س التي يكون عندها للدالة د (س) نقطة حرجة.

ب د (س) بدلالة س.



٧) ★ يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص = ٦س − س^{٢}،

والمستقيم ص = ٥

أوجد مساحة المنطقة المظللة.

٨) إذا دارت المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = (س − ٣)^{٢} + ٢، والمحورين السيني، والصادي، والمستقيم س = ٣ بمقدار ٣٦٠° حول محور السينات، فأوجد حجم الجسم الناتج بدلالة π.

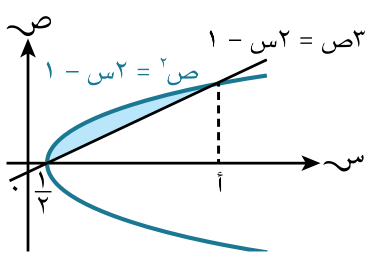
٩) ★ يبيّن الشكل المجاور المنحنى ص^{٢} = ٢س − ١،

والمستقيم ٣ص = ٢س − ١ اللذين يتقاطعان عند س = $\frac{١}{٢}$، س = أ

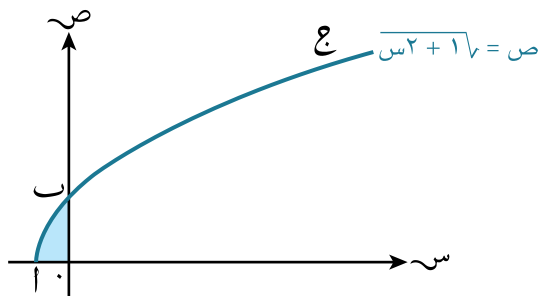
حيث أ عدد ثابت.

أ بيّن أن أ = ٥

ب أوجد مساحة المنطقة المظللة.



١٠) يبيّن الشكل المجاور المنحنى $ص = \sqrt{١ + ٢س}$.
يتقاطع المنحنى مع المحور السيني في النقطة أ،
ومع المحور الصادي في النقطة ب، والإحداثي
الصادي للنقطة ع الواقعة على المنحنى يساوي ٣. أوجد:

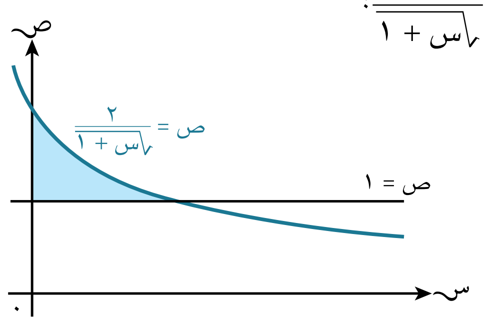


أ إحداثيات النقطتَين ب، ع.

ب معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة ع.

ج حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور الصادات.

١١) يبيّن الشكل المجاور المستقيم ص = ١، وجزءًا من المنحنى $ص = \frac{٢}{\sqrt{س} + ١}$:



أ بيّن أن $ص = \frac{٢}{\sqrt{س} + ١}$ يمكن أن تكتب في صورة $س = \frac{٤}{ص^٢} - ١$

ب أوجد $\int_١^٢ \left(\frac{٤}{ص^٢} - ١\right) ءص$، ثم أوجد مساحة المنطقة المظللة.

ج إذا دارت المنطقة المظللة ٣٦٠° حول محور الصادات، فأوجد حجم الجسم الناتج.

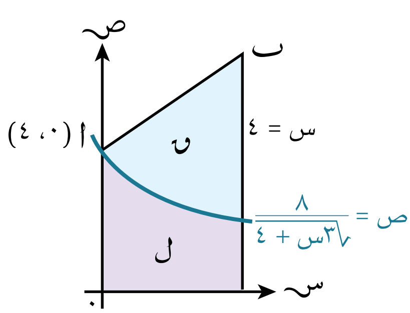
١٢) لتكن $د'(س) = ٣س^{\frac{١}{٢}} + ٣س^{-\frac{١}{٢}} - ١٠$:

أ استخدم $ع = س^{\frac{١}{٢}}$ لتجد قيم س التي توجد عندها نقاط حرجة للمنحنى ص = د (س).

ب أوجد د″(س)، وحدد طبيعة كلّ نقطة من النقاط الحرجة.

ج إذا علمت أن المنحنى ص = د (س) يمر بالنقطة (٤، −٧)، فأوجد د (س).

١٣) يبيّن الشكل المجاور جزءًا من المنحنى $ص = \frac{٨}{\sqrt{٣س + ٤}}$

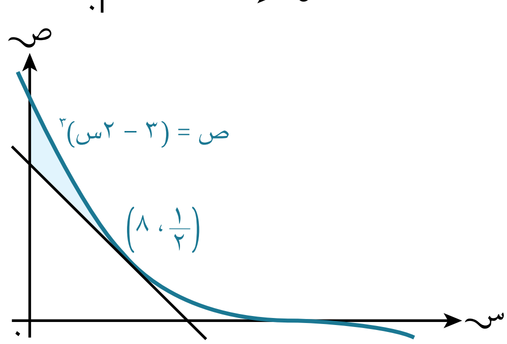


إذا كان المنحنى يقطع محور الصادات عند النقطة أ (٠، ٤)،
والعمودي على مماس المنحنى عند النقطة أ يقطع المستقيم س = ٤
عند النقطة ب:

أ أوجد إحداثيات النقطة ب.

ب بيّن أن المنطقتَين ل، ن لهما المساحة نفسها.

١٤) يبيّن الشكل المجاور المنحنى $ص = (٣ - ٢س)^٣$،
ومماس المنحنى عند النقطة $\left(\frac{١}{٢}، ٨\right)$. أوجد:



أ معادلة المماس في صورة ص = م س + جـ.

ب مساحة المنطقة المظللة.

الوحدة السابعة
الأعداد المركبة
Complex numbers

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧-١ تتعرف على مفهوم الأعداد المركبة، ومعنى المفردات: الجزء الحقيقي والجزء التخيلي، ومرافق ومقياس وسعة العدد المركب.

٧-٢ تستخدم حقيقة أن عددَين مركبَين يتساويان فقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان والجزآن التخيليان.

٧-٣ تجري عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة لعددَين مركبَين في صورة أ + ت ب.

٧-٤ تمثل الأعداد المركبة بيانيًا باستخدام مخطط أرجاند (Argand).

٧-٥ تحول الأعداد المركبة من صيغة إلى أخرى (ديكارتية، قطبية، أسية).

٧-٦ تنفذ عمليات الضرب والقسمة لعددَين مركبَين مكتوبَين في الصورة القطبية ر (جتا أ + ت جا أ) = $ر\,هـ^{ت\,أ}$.

٧-٧ تستخدم النتيجة أن كل جذر غير حقيقي في المعادلة كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية، مرافقة بعضها لبعض.

٧-٨ تجد الجذور التربيعية لعدد مركب والجذور التكعيبية للواحد.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تجمع، وتطرح، وتضرب أزواجًا من العبارات الجبرية، وتبسطها.	١) بسّط كلًا مما يأتي: أ (أ + ب س) + (٢أ − ٣ب س) ب (أ + ب س)(٢أ − ٣ب س) ج ٥أ − ٣(٢ب س − ٦أ)
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تبسط العبارات التي تتضمن جذورًا.	٢) بسّط كلًا مما يأتي: أ $\sqrt{٣٢} - ٣\sqrt{٨}$ ب $(٢ - \sqrt{٥})(٢ + \sqrt{٥})$ ج $\frac{٤ - \sqrt{٣}}{٥ + \sqrt{٣}}$
الصف الثاني عشر، الوحدة الثانية	تفهم الرابط بين الزوايا الموجبة والزوايا السالبة، وتستخدم المثلثات لتجد قياس الزاوية غير الحادة.	٣) أ حل المعادلة ظا س = −١، حيث $-\pi <$ س $< \pi$ ب أوجد قيمة: $\pi -$ جا$^{-1}\left(\frac{٣}{٤}\right)$.
الصف العاشر، الوحدة الرابعة عشرة	تجد طول المتجه، واتجاهه. تعرف وتستخدم العلاقة $\overleftarrow{أب}$ = ب − أ، حيث المتجه الموضعي للنقطة ا هو أ، والمتجه الموضعي للنقطة ب هو ب.	٤) المتجه الموضعي للنقطة ا هو أ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$، والمتجه الموضعي للنقطة ب هو ب = $\begin{pmatrix} ٥ \\ -٧ \end{pmatrix}$. أوجد: أ $\lvert\overleftarrow{أ}\rvert$. ب قياس الزاوية بين المتجه الموضعي أ، والمحور السيني. ج $\overleftarrow{ب أ}$.

المفردات

العدد المركب
Complex number

العدد التخيلي
Imaginary number

مرافق العدد المركب
Conjugate of a complex number

مخطط أرجاند
Argand diagram

الصورة القطبية
Polar form

الصورة الديكارتية
Cartesian form

المستوى المركب
Complex plane

مقياس العدد المركب
Modulus of a complex number

سعة العدد المركب
Argument of a complex number

لماذا ندرس الأعداد المركبة؟

لكي نفهم بنية الأعداد المركبة **complex number**، يجب أن نتعرف إلى مجموعة جديدة من الأعداد، وهي مجموعة الأعداد التخيلية **imaginary numbers**.

تطوّر النظام العددي المستخدم حاليًا مع الزمن بسبب الحاجة إلى مجموعات جديدة من الأعداد، وذلك لتمثيل مواقف جديدة. فالرياضيون الأوائل استخدموا الأعداد الطبيعية في العدّ، ثم تم قبول الأعداد السالبة والصفر لتكوّن الأعداد الصحيحة، وفي فترة فيثاغورث فهم الرياضيون أن الأعداد النسبية موجودة، وهي قيم موجودة بين الأعداد الصحيحة، واعتقدوا أنه يمكن كتابة جميع الأعداد في صورة أعداد نسبية. وقد تفاجأ هؤلاء الرياضيون أنفسهم عند اكتشاف الأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{٢}$، ولم يقبلوها كقيم في ذلك الوقت.

حتى في القرنين السابع عشر والثامن عشر بقي بعض كبار الرياضيين يشككون في استخدام الأعداد السالبة، ويعتقدون أن عملية الطرح من اللاشيء مستحيلة!

سنبدأ ببعض الحقائق البسيطة:

- في مجموعة الأعداد الطبيعية (ط)، لا يوجد صفر ولا أعداد سالبة.
- في مجموعة الأعداد الصحيحة (ص)، لا توجد كسور.
- في مجموعة الأعداد النسبيّة (ن)، لا توجد أعداد غير نسبية مثل π.
- في مجموعة الأعداد الحقيقية (ع)، لا توجد أعداد مربعاتها قيم سالبة.

حتى الآن، ومن خلال ما سبق، نلاحظ أن الأعداد التي نتعامل معها هي **الأعداد الحقيقية** **real numbers**، أي الأعداد التي تتضمن الأعداد النسبية وغير النسبية، والتي يمكن تمثيلها على خط الأعداد.

في القرن السابع عشر قُبلت مجموعة الأعداد التخيلية (تَ) كإحدى مجموعات الأعداد الرياضية.

قبل ذلك الوقت، وصف رينيه ديكارت (René Descartes) مجموعات الأعداد المقبولة والصالحة، وأسماها الأعداد الحقيقية، كما وصف المجموعة الجديدة بمجموعة الأعداد التخيلية. لقد أعطاها هذا الاسم لاعتقاده بأنها غير ذات فائدة كبيرة، وأيّده في ذلك عدد كبير من الرياضيين الذين كانوا مخطئين في وصفهم. وغالبًا ما كان هذا الاسم يربك الطلبة الذين يبدأون بدراسة هذا الموضوع، إلا أن مفهوم الأعداد التخيلية انتشر على نطاق واسع بعد أعمال ليونارد أويلر (Leonhard Euler) في القرن الثامن عشر، وأوغسطين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy)، وكارل فريديريك غاوس (Carl Friedrich Gauss) في بداية القرن التاسع عشر.

ما الأعداد التخيلية؟ وما علاقتها بالأعداد المركبة؟

في المجموعة الجديدة من الأعداد التخيلية، توجد أعداد مربعاتها قيم سالبة.

مجموعة الأعداد المركبة تضم الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية، ويمكن تمثيلها في نظام أعداد ذي بُعدَين بدلًا من بُعد واحد. وصف ديكارت الأعداد في مجموعة الأعداد المركبة على أنها مجموع لجزء حقيقي وجزء تخيلي، تُمثّل الأعداد المركبة بنقاط في المستوى الإحداثي بدلًا من نقاط على خط الأعداد لطبيعتها ثنائية الأبعاد.

من الواضح أن الرياضيين رفضوا قبول مجموعات جديدة من الأعداد بسهولة، وربما لا تتقبّل هذه الفكرة الجديدة مع وجود تطبيقات من واقع الحياة اليومية لمجموعة الأعداد الحقيقية والتخيلية والمركبة. فبدون الأعداد التخيلية، وبالتالي الأعداد المركبة، لن يكون هناك هواتف نقّالة، حيث تستخدم لإيجاد الإشارات السمعيّة. لقد تم توظيف الأعداد المركبة لإنتاج الأشكال الهندسية التي تتكرر فيها أنماط متشابهة بمقاييس تصغر تدريجيًا، وتُسمى الهندسة الفركتالية التي تستخدم في دراسة أنظمة الطقس والهزّات الأرضية، واعتُمدت أيضًا في الحواسيب لإنتاج الصور في الأفلام، وفيما يأتي ثلاثة أمثلة على هندسة الفركتال:

١-٧ الأعداد التخيلية Imaginary numbers

في مجموعة الأعداد التخيلية، نقدم عددًا جديدًا (نرمز إليه بالحرف ت) حيث **ت**^{٢} = −١،

أي أن: **ت** = $\sqrt{-١}$

لاحظ أن ت تُوصف كحرف أكثر منه كرقم، كما ورد سابقًا في بعض الأعداد المهمة.

لتكن المعادلة س^{٢} + ١ = ٠:

كم حلًا يوجد للمعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية؟

س^{٢} + ١ = ٠

س^{٢} = −١

س = ±$\sqrt{-١}$ $\notin$ ع

لا حلول للمعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

كم حلًا يوجد للمعادلة في مجموعة الأعداد التخيلية؟

س^{٢} + ١ = ٠

س^{٢} = −١

س = ±$\sqrt{-١}$ = ± ت

يوجد حلّان في مجموعة الأعداد التخيلية.

يمكن استخدام قوانين الجذور للتوسع في استخدام ت لإيجاد أعداد تخيلية أخرى.

مثـــال ١

اكتب الأعداد الآتية في أبسط صورة:

أ $\sqrt{-٩}$ ب $\sqrt{-٥}$ ج $\sqrt{-١٨}$

الحـــلّ:

أ $\sqrt{-٩}$ = $\sqrt{٩ \times (-١)}$

= $\sqrt{٩} \times \sqrt{-١}$ = ٣ت

عند حل المعادلة س^{٢} + ١ = ٠ نحتاج إلى ± في الحل، لماذا لا نحتاج إليها هنا؟

ب $\sqrt{-٥}$ = $\sqrt{٥ \times (-١)}$

= $\sqrt{٥} \times \sqrt{-١}$ = ت $\sqrt{٥}$

عندما يكون معامل ت جذرًا تربيعيًا، يُفضل كتابة ت قبل الجذر التربيعي لتجنّب التداخل مع $\sqrt{٥ت}$، أو يمكن كتابة ت $\sqrt{٥}$ بالصورة ($\sqrt{٥}$)ت.

ج $\sqrt{-١٨}$ = $\sqrt{٢ \times ٩ \times (-١)}$

= $\sqrt{٢} \times \sqrt{٩} \times \sqrt{-١}$

= $\sqrt{٢} \times ٣ \times$ ت = (٣$\sqrt{٢}$)ت

مُساعَدة

أبسط صورة للعدد التخيلي تعني استخدام أبسط صورة للجذر مع ت.

ملاحظة: في مجموعة الأعداد الحقيقية يُشترط لتوزيع الجذور في حالة ضرب عددين أن يكون العددان موجبين، ولكن هذا لا يُشترط في مجموعة الأعداد التخيلية.

يسمّى العدد التخيلي ت بـ (الوحدة التخيلية)؛ لأن معامله ١

جميع الأعداد التخيلية الأخرى هي أعداد مضروبة في ت، أي في صورة ب ت، أو ت ب، حيث ب عدد حقيقي، مثل: ٢ت، $\frac{٢}{٣}$ت، −٥ت ، $\frac{-٤}{٣}$ت، ت $\sqrt{٢}$، π ت، ...

نجري الحسابات على الأعداد التخيلية كما نجريها على الأعداد الحقيقية.

مثـــال ٢

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

أ) $٣ت^{٢} + (٣ت)^{٢}$

ب) $-٨ت + (-٤ت)^{٣}$

ج) $\sqrt{\frac{٩ت + ١٦ت}{٤ت}}$

د) $ت^{-٦}$

الحـــلّ:

أ) $٣ت^{٢} + (٣ت)^{٢} = ٣ت^{٢} + ٩ت^{٢} = ١٢ت^{٢} = -١٢$

ب) $-٨ت + (-٤ت)^{٣} = -٨ت + ٦٤ت = ٥٦ت$

$(-٤ت)^{٣} = -٤ت \times -٤ت \times -٤ت$

$= (-٤)^{٣} \times ت^{٢} \times ت$

$= -٦٤ \times -١ \times ت$

$= ٦٤ت$

ج) $\sqrt{\frac{٩ت + ١٦ت}{٤ت}} = \sqrt{\frac{٢٥ت}{٤ت}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{٥}{٢}$

د) $ت^{-٦} = \frac{١}{ت^{٦}} = \frac{١}{(ت^{٢})^{٣}} = \frac{١}{(-١)^{٣}} = -١$

استكشف ١

أوجد قيمة $ت^{٢٠٠}$

تمارين ٧-١

١) اكتب كلًا مما يأتي في أبسط صورة:

أ) $\sqrt{-١٤٤}$ ب) $\sqrt{-\frac{٣٦}{٨١}}$ ج) $\sqrt{-٩٠}$ د) $\sqrt{-١٦} + \sqrt{-٨١}$

٢) بسّط كلًا مما يأتي:

أ) $-٥ت^{٢} + ٣ت^{٨}$ ب) $٩ت - (ت\sqrt{٢})^{٣}$ ج) $\sqrt{\frac{١٠٠ت^{٤} - ١٦ت^{٢}}{٤}}$ د) $\frac{-٥}{٦ت^{٢}}$

٢-٧ الأعداد المركبة Complex numbers

يعرّف العدد المركب ع على أنه عدد في صورة س + ص ت، حيث س، ص عددان حقيقيان، أمّا ت فهو الوحدة التخيلية.

يعبّر عن العدد المركب عادة بالرمز ع، حيث ع = س + ص ت:

- العدد الحقيقي س يُسمى الجزء الحقيقي لـ ع.
- العدد الحقيقي ص يُسمى الجزء التخيلي لـ ع.

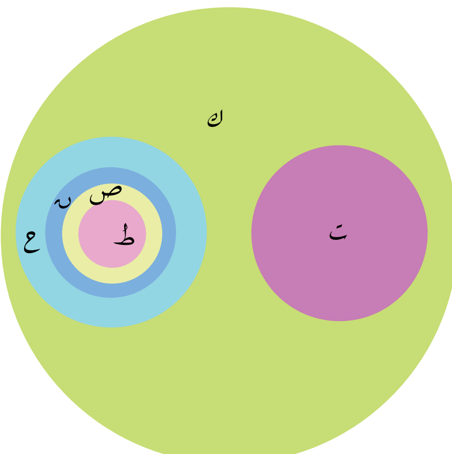
عندما س = ٠، فإن ع = ت ص، ويكون ع عددًا تخيليًّا.

عندما ص = ٠، فإن ع = س، ويكون ع عددًا حقيقيًّا.

مُساعَدة

عندما يكون معامل ت جذرًا تربيعيًا، تُكتب ت قبل الجذر التربيعي مثل ١ + ت $\sqrt{٢}$. حيث نلاحظ أن العدد ٢ يقع تحت علامة الجذر التربيعي بينما ت ليست كذلك.

يمكن تمثيل العلاقة بين مجموعة الأعداد المركبة (ك) ومجموعات الأعداد الأخرى كما في الشكل المجاور، حيث نرى أن جميع الأعداد بجميع أنواعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة: وتشمل الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، والأعداد الحقيقية، والأعداد التخيلية.



إذًا، هل الأعداد ١ ، ٢ هي أعداد حقيقية مركبة؟ الإجابة هي نعم؛ لأن: ١ = ١ + ٠ت، ٢ = ٢ + ٠ت كلاهما عددان مركبان، حيث إن الجزء التخيلي في كل منهما يساوي صفرًا.

تساوي الأعداد المركبة

يتساوى عددان مركبان إذا–وفقط إذا– تساوى الجزءان الحقيقيان، وكذلك تساوى الجزءان التخيليان.

وعليه، عندما ع$_{١}$ = س + ص ت، ع$_{٢}$ = أ + ب ت، فإن ع$_{١}$ = ع$_{٢}$ تعني أن س = أ، ص = ب.

مثـــال ٣

إذا علمت أن (٢س + ص) + ت(ص − ٥) = ٠، فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحـــلّ:

(٢س + ص) + ت(ص − ٥) = ٠ + ٠ت

فيكون:

٢س + ص = ٠ .... (١)

ص − ٥ = ٠ .... (٢)

من المعادلة (٢): ص = ٥

عوّض في المعادلة (١): ٢س + ٥ = ٠، س = $-\frac{٥}{٢}$

∴ س = $-\frac{٥}{٢}$ ، ص = ٥

العدد المرافق للعدد المركب

يعرّف **العدد المرافق** **conjugate of a complex number** للعدد المركب ع = س + ت ص على أنه ع* = س − ت ص.

فمثلًا:

مرافق العدد ع = ١ − ٥ت هو ع* = ١ + ٥ت

مرافق العدد ع = −٤ + ٧ت هو ع* = −٤ − ٧ت

مرافق العدد ع = −٣ت هو ع* = ٣ت

مُساعَدة

يكتب العدد ع* أحيانًا في صورة $\bar{ع}$.

مثـــال ٤

حل المعادلة ٥ع^{٢} + ١٤ع + ١٣ = ٠

الحـــلّ:

استخدم الصيغة التربيعية، حيث أ = ٥، ب = ١٤، جـ = ١٣

$$ع = \frac{-١٤ \pm \sqrt{١٤^{٢} - ٤(٥)(١٣)}}{٢ \times ٥}$$

$$ع = \frac{-١٤ \pm \sqrt{-٦٤}}{١٠}$$

$$ع = \frac{-١٤ \pm \sqrt{٦٤ \times (-١)}}{١٠}$$

$$ع = \frac{-١٤ \pm ٨ت}{١٠}$$

$$ع = -\frac{٧}{٥} + \frac{٤ت}{٥} \quad \text{أو} \quad ع = -\frac{٧}{٥} - \frac{٤ت}{٥}$$

لاحظ أن الجذرَين عددان مركبان، وأحدهما مرافق للآخر.

مُساعَدة

لإيجاد حل المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ (أ ≠ ٠) نستخدم الصيغة التربيعية:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

تمارين ٧-٢

١) حل كلًا مما يأتي:

أ) س^{٢} + $\frac{٦٤}{٢٥}$ = ٠　　ب) ٤س^{٢} + ٧ = ٠　　ج) ١٢س^{٢} + ٣ = ٠

٢) في العدد المركب ع = ٤ − ٣ت، ما الجزء الحقيقي؟ وما الجزء التخيلي؟

٣) إذا علمت أن ع$_{١}$ = ٥ + ب ت، ع$_{٢}$ = −٢ت + أ، ع$_{١}$ = ع$_{٢}$، فما قيمة كلّ من أ، ب؟

٤) أوجد قيمتَي س، ص في كلّ مما يأتي:

أ) (س + ٢ص) + ت (٣س − ص) = ١ + ١٠ت

ب) (س + ص − ٤) + ٢س ت = (٥ − ص) ت

ج) (س − ص) + (٢س − ص) ت = −١

٥) حل كلًا مما يأتي:

أ $ع^2 + ٢ع + ١٣ = ٠$

ب $ع^2 + ٤ع + ٥ = ٠$

ج $٢ع^2 - ٢ع + ٥ = ٠$

د $ع^2 - ٦ع + ١٥ = ٠$

هـ $٣ع^2 + ٨ع + ١٠ = ٠$

و $٢ع^2 + ٥ع + ٤ = ٠$

٧-٣ العمليات على الأعداد المركبة
Operations on complex numbers

نحتاج إلى استخدام العمليات نفسها التي استخدمناها مع العبارات الجذرية التي تتضمن الجذور.

مثلًا، $ع_١ = ٢ + ٣ت$ ، $ع_٢ = ٨ - ت$ يكون:

الجمع $ع_١ + ع_٢ = ٢ + ٣ت + ٨ - ت$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= ١٠ + ٢ت$

$ع_١ + ع_١^* = (٢ + ٣ت) + (٢ - ٣ت)$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= ٤ + ٠$

$= ٤$

الطرح $ع_١ - ع_٢ = ٢ + ٣ت - (٨ - ت)$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= -٦ + ٤ ت$

الضرب $ع_١ ع_٢ = (٢ + ٣ت) (٨ - ت)$ فك الأقواس، وبسّط.

$= ١٦ - ٢ت + ٢٤ت - ٣ت^٢$ ضع $ت^٢ = -١$

$= ١٦ + ٢٢ت + ٣$

$= ١٩ + ٢٢ ت$

$ع_١ ع_١^* = (٢ + ٣ ت) (٢ - ٣ت)$ فك الأقواس، وبسّط.

$= ٤ - ٦ت + ٦ت - ٩ت^٢$ ضع $ت^٢ = -١$

$= ٤ + ٩$

$= ١٣$

القسمة $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٨ - ت}{٢ + ٣ت}$ اضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب $ع_١$.

$= \frac{(٨ - ت) (٢ - ٣ت)}{(٢ + ٣ت) (٢ - ٣ت)}$ فك الأقواس، وبسّط.

$= \frac{١٦ - ٢٤ت - ٢ت + ٣ت^٢}{١٣}$ ضع $ت^٢ = -١$

$= \frac{١٦ - ٢٤ت - ٢ت - ٣}{١٣}$

$= \frac{١٣ - ٢٦ت}{١٣} = ١ - ٢ت$

نتيجة ١

العمليات الحسابية على $ع_١ = أ + ب ت$، $ع_٢ = ج + د ت$:

- الجمع: $ع_١ + ع_٢ = (أ + ج) + (ب + د) ت$
- الطرح: $ع_١ - ع_٢ = (أ - ج) + (ب - د) ت$
- الضرب: $ع_١ ع_٢ = (أ ج - ب د) + (أ د + ب ج) ت$
- القسمة: $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{(أج + ب د) + (ب ج - أد) ت}{ج^٢ + د^٢} = \frac{(أج + ب د)}{ج^٢ + د^٢} + \frac{(ب ج - أد)}{ج^٢ + د^٢} ت$

نتيجة ٢

عند ضرب عدد مركب في مرافقه تكون النتيجة دائمًا عددًا حقيقيًا، لأنه إذا كان $ع = س + ت ص$، $ع^* = س - ت ص$ فإن $ع ع^* = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^٢ + ص^٢$.
وبما أن س، ص عددان حقيقيان، فإن $س^٢ + ص^٢$ عدد حقيقي.
كذلك عند جمع العدد المركب ع مع مرافقه $ع^*$ تكون النتيجة دائمًا عددًا حقيقيًا، وتساوي ٢س.

فمثلًا: إذا كان $ع = ٣ + ٥ت$، $ع^* = ٣ - ٥ت$ ، فإن:

$ع ع^* = (٣)^٢ + (٥)^٢ = ٩ + ٢٥ = ٣٤$

$ع + ع^* = ٢ × ٣ = ٦$

مثـــال ٥

إذا علمت أن $ع_١ = ٤ + ٣ت$، $ع_٢ = ٥ - ٢ت$، فأوجد:

أ $(ع_١)^٢$ **ب** $\frac{ع_٢}{ع_١}$ **ج** $\frac{ع_١ + ع_٢}{ع_١ - ع_٢}$

الحـــلّ:

أ $(ع_١)^٢ = (٤ + ٣ت)(٤ + ٣ت)$ فك الأقواس.

$= ٤(٤ + ٣ت) + ٣ت(٤ + ٣ت)$

$= ١٦ + ١٢ت + ١٢ت + ٩ت^٢$

$= ١٦ + ٢٤ت - ٩$

$= ٧ + ٢٤ت$

ب $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٥ - ٢ت}{٤ + ٣ت}$ اضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب (٤ + ٣ت).

$= \frac{٥ - ٢ت}{٤ + ٣ت} × \frac{٤ - ٣ت}{٤ - ٣ت}$ فك كلًا من البسط والمقام.

$= \frac{٥(٤ - ٣ت) - ٢ت(٤ - ٣ت)}{٤^٢ + ٣^٢}$ المقام هو حاصل ضرب عدد مركب في مرافقه.

$$= \frac{٢٠ - ١٥ت - ٨ت + ٦ت^٢}{١٦ + ٩}$$

$$= \frac{٢٠ - ٢٣ت - ٦}{٢٥}$$

$$= \frac{١٤ - ٢٣ت}{٢٥}$$

$$= \frac{١٤}{٢٥} - \frac{٢٣}{٢٥}ت$$

ج $\frac{ع_١ + ع_٢}{ع_١ - ع_٢} = \frac{٤ + ٣ت + ٥ - ٢ت}{٤ + ٣ت - (٥ - ٢ت)}$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= \frac{٩ + ت}{-١ + ٥ت}$ اضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب (-١ + ٥ت).

$= \frac{٩ + ت}{-١ + ٥ت} \times \frac{-١ - ٥ت}{-١ - ٥ت}$ فك كلًا من البسط والمقام.

$= \frac{٩(-١ - ٥ت) + ت(-١ - ٥ت)}{(-١)^٢ + ٥^٢}$ المقام هو حاصل ضرب عدد مركب في مرافقه.

$= \frac{-٩ - ٤٥ت - ت - ٥ت^٢}{١ + ٢٥}$ بسّط.

$= \frac{-٩ - ٤٦ت + ٥}{٢٦}$

$= \frac{-٤ - ٤٦ت}{٢٦}$ اكتب في أبسط صورة باستخدام التحليل إلى العوامل.

$= -\frac{٢}{١٣} - \frac{٢٣}{١٣}ت$

تمارين ٧-٣

١) اكتب كلًا مما يأتي في صورة س + ص ت، حيث س، ص عددان حقيقيان:

أ $(١ + ٣ت)(٢ - ت)$ ب $(٤ - ٥ت)(٤ + ٥ت)$

ج $(٧ - ٣ت)^٢$ د $(٣ - ت)^٤$

هـ $\frac{١٧ - ت}{٣ + ت}$ و $\frac{-١ + ١١ت}{٦ - ٥ت}$

ز $\frac{١٣(١ + ت)}{٢ + ٣ت}$ ح $\frac{(٣ - ٢ت)^٢}{٥ + ت}$

٢) إذا علمت أن $ع_١$ = ٥ − ٣ت، $ع_٢$ = ١ + ٢ت، فاكتب كلًا مما يأتي في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان:

أ $ع_١ + ع_٢^*$ ب $ع_١^* - ع_٢$ ج $ع_١ ع_٢$ د $\frac{ع_١}{ع_٢}$

٣) أوجد المعادلة التربيعية التي جذريها $ع_١$، $ع_٢$ في كل مما يأتي:

أ $ع_١$ = −٧ت، $ع_٢$ = ٧ت

ب $ع_١$ = ١ + ٥ت، $ع_٢$ = ١ − ٥ت

ج $ع_١$ = ٢ − ٣ت، $ع_٢$ = ٢ + ٣ت

د $ع_١ = -\frac{٥}{٢} - \frac{\sqrt{٣١}}{٢}$ت، $ع_٢ = -\frac{٥}{٢} + \frac{\sqrt{٣١}}{٢}$ت

مُساعَدة

$(ع - ع_١)(ع - ع_٢) = ٠$

$ع^٢ - (ع_١ + ع_٢)ع + ع_١ع_٢ = ٠$

٤) أوجد العدد المركب ع الذي يحقق المعادلة ع + ٤ = ٣ ت $ع^*$.
أعطِ إجابتك في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

٥) إذا علمت أن م(٣ − ٥ت) = ١٣ + ت، فأوجد العدد المركب م.

٦) أوجد المعادلة التربيعية إذا علمت أن ع = ٥ + ت $\sqrt{٣}$ جذر لها.

٧) في دائرة كهربائية يرتبط فرق الجهد (فولت)، وشدة التيّار (أمبير)، والمقاومة (أوم) بالمعادلة:
فرق الجهد = شدة التيّار × المقاومة.
إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية ٢٤٠ فولت، والمقاومة (٤٨ + ٣٦ت) أوم، فأوجد شدة التيّار في صورة س + ص ت.

٧-٤ المستوى المركب The complex plane

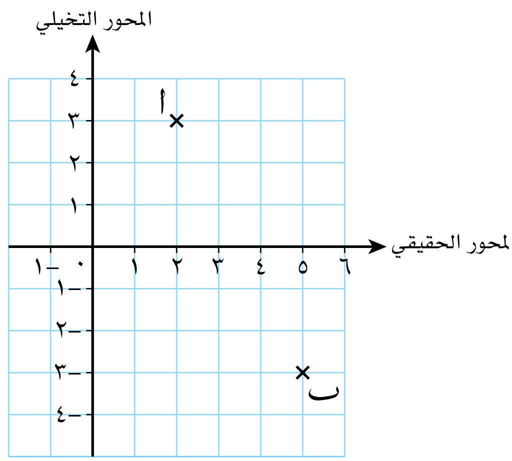
للأعداد المركبة بُعدان أحدهما حقيقي والآخر تخيلي، لذا يجب أن يتضمن التمثيل البياني بُعدَين، وهذا يعني أنه يجب أن يُمثل في مستوى وليس على خط. يعود الفضل للعالم جان روبرت أرجاند (Jean-Robert Argand) (١٧٦٨ – ١٨٢٢م) في اكتشاف المخطط الذي يستخدم في تمثيل الأعداد المركبة.

مخطط أرجاند

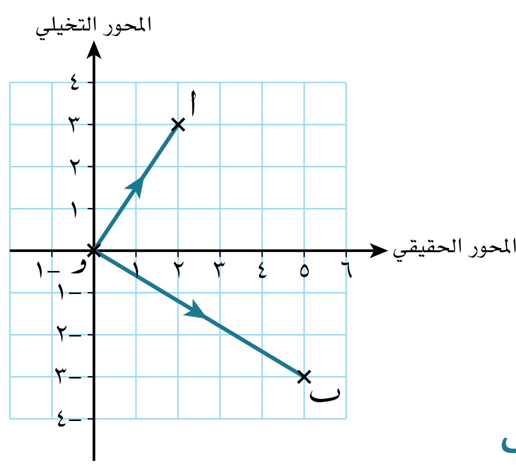
يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ت ص بالإحداثيات الديكارتية (س، ص) على مخطط أرجاند.

يُسمى المحور الأفقي بالمحور الحقيقي، والمحور الرأسي بالمحور التخيلي.

فمثلًا: يمكن أن يُمثل العددان المركبان $ع_{١}$ = ٢ + ٣ ت، $ع_{٢}$ = ٥ – ٣ت بالنقطتَين أ (٢، ٣)، ب (٥، –٣) على الترتيب في مخطط أرجاند.



كما يمكن أن يُمثل العددان $ع_{١}$ = ٢ + ٣ ت، $ع_{٢}$ = ٥ – ٣ت بمتجهي الموضع $\overrightarrow{\text{وأ}} = \begin{pmatrix}٢\\٣\end{pmatrix}$، $\overrightarrow{\text{وب}} = \begin{pmatrix}٥\\٣-\end{pmatrix}$



المقياس والسعة للعدد المركب

عندما يُكتب العدد المركب في صورة **س + ص ت**، حيث س، ص عددان حقيقيان، نقول إنه مكتوب **بالصورة الديكارتية Cartesian form**. كما توجد صور أخرى لكتابة الأعداد المركبة.

يساعدنا تمثيل المتجه للعدد المركب على مخطط أرجاند على فهم تمثيل مختلف يُسمى **بالصورة القطبية Polar form**.

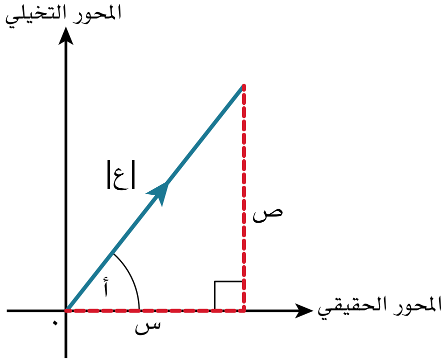
وقبل القيام بذلك، علينا تعريف **المقياس والسعة** للعدد المركب.

هل تعلم؟

يمكن ترتيب الأعداد الحقيقية على خط الأعداد، ولكن لا يمكن ترتيب الأعداد المركبة على خط الأعداد، حيث إنها تُمثل بنقطة في المستوى الإحداثي.

مُساعَدة

عند رسم مخطط أرجاند، تأكد من اختيار مقاييس رسم متساوية للمحورَين الحقيقي والتخيلي. سيعطيك ذلك صورة جيدة دون أي تمدد للشكل الذي ترسمه.



المقياس للعدد المركب modulus of a complex number ع = س + ص ت هي: طول المتجه الموضعي $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$، أي القيمة المطلقة.

من خلال الشكل المجاور نجد أن: المقياس للعدد المركب (س + ص ت) يساوي $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

يرمز إلى مقياس العدد المركب ع = س + ص ت بالرمز |ع|.

تُعرَّف **السعة للعدد المركب argument of a complex number** ع = س + ص ت بأنها زاوية المتجه الموضعي $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$، وهي الزاوية المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والمتجه الموضعي ويرمز إليها بالرمز أ، حيث $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$، وتقاس عادة بالراديان.

يمكننا استخدام حساب المثلثات لنجد السعة؛ مثلًا: إذا كانت أ زاوية حادة، فإن ظا أ = $\frac{ص}{س}$.

يُفضل أن يُرسم الشكل أولًا للتحقق من موقع العدد المركب.

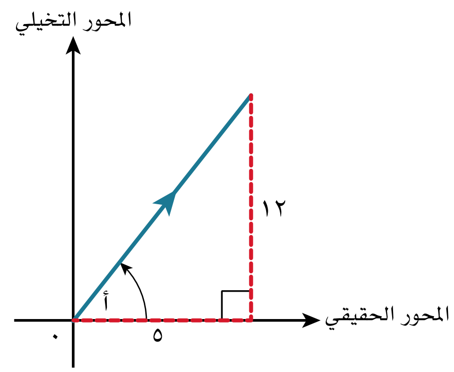
مثـــال ٦

أوجد المقياس، والسعة لكلّ من الأعداد المركبة الآتية: (مقربًا السعة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

أ ٥ + ١٢ت **ب** −٣ + ٤ت **ج** ١٢ − ٥ت **د** −٤ − ٣ت

الحــلّ:

أ المقياس للعدد المركب (٥ + ١٢ت) = |٥ + ١٢ت| = $\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ ⋯ باستخدام تعريف المقياس.



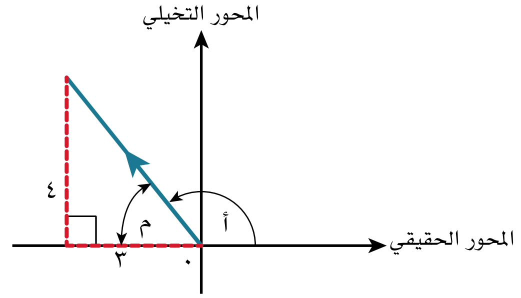
يبيّن الشكل أن الزاوية أ تقع في الربع الأول؛ لأن الجزء الحقيقي موجب، والجزء التخيلي أيضًا موجب أي أنها زاوية حادة.

السعة للعدد المركب (٥ + ١٢ت) = ظا$^{-١}\left(\frac{١٢}{٥}\right)$ ⋯ باستخدام تعريف السعة.

= ١,١٨ ء

ب المقياس للعدد المركب (-٣ + ٤ت) = |-٣ + ٤ت| = $\sqrt{(-٣)^{٢} + ٤^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

باستخدام تعريف المقياس.



يبيّن الشكل أن الزاوية أ تقع في الربع الثاني، أي أنها زاوية منفرجة وموجبة. نحسب قياس الزاوية أ بطرح الزاوية الحادة م من π. تذكّر أن الزاوية أ تقع في الفترة $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$.

أ = π − م

م = ظا$^{-١}\left(\frac{٤}{٣}\right)$

يتم إيجاد قيمة م من خلال المثلث القائم الزاوية.

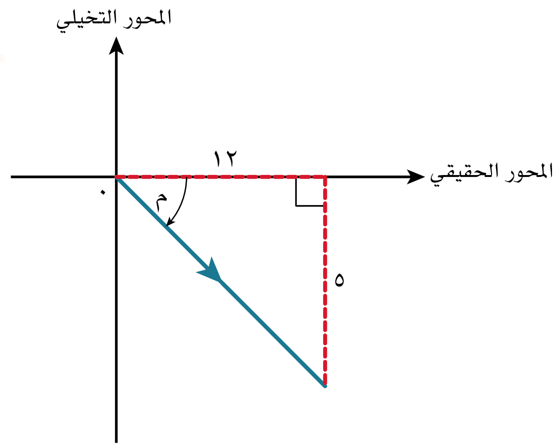
السعة للعدد المركب (-٣ + ٤ت) = π − ظا$^{-١}\left(\frac{٤}{٣}\right)$

= ٢,٢١ ؟

باستخدام تعريف السعة.

ج المقياس للعدد المركب (١٢ − ٥ت) = |١٢ − ٥ت| = $\sqrt{١٢^{٢} + (-٥)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

باستخدام تعريف المقياس.



يبيّن الشكل أن الزاوية أ تقع في الربع الرابع؛ لأن الجزء الحقيقي للعدد المركب موجب والجزء التخيلي سالب، أي أنها زاوية حادة وسالبة. تذكّر أن الزاوية أ تقع في الفترة $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$.

أ = −م

م = ظا$^{-١}\left(\frac{٥}{١٢}\right)$

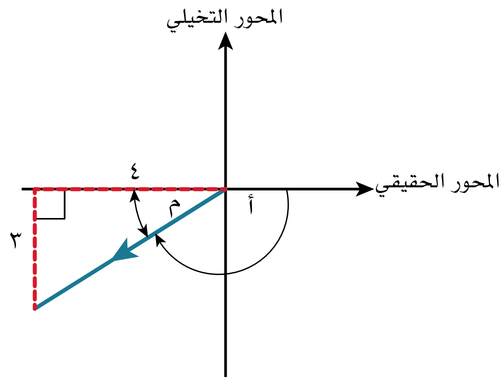
يتم إيجاد قيمة م من خلال المثلث القائم الزاوية.

السعة للعدد المركب (١٢ − ٥ت) = − ظا$^{-١}\left(\frac{٥}{١٢}\right)$

= −٠,٣٩٥ ؟

باستخدام تعريف السعة.

د المقياس للعدد المركب $(-٤ - ٣ت) = |-٤ - ٣ت| = \sqrt{(-٤)^{٢} + (-٣)^{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$ ········ باستخدام تعريف المقياس.



يبيّن الشكل أن الزاوية أ تقع في الربع الثالث، أي أنها منفرجة وسالبة. تذكّر أن الزاوية أ تقع في الفترة $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$.

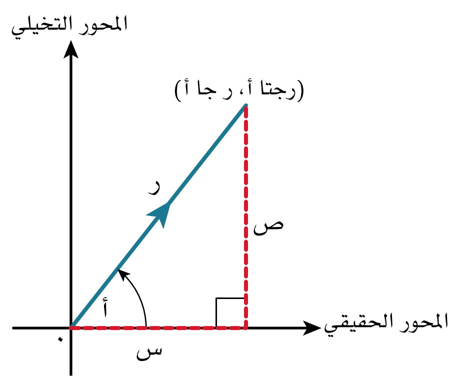
أ $= -\pi +$ م

م $=$ ظا$^{-١}\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ········ يتم إيجاد قيمة م من خلال المثلث القائم الزاوية.

السعة للعدد المركب $(-٤ - ٣ت) = -\pi +$ ظا$^{-١}\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ········ باستخدام تعريف السعة.

$= -٢,٥٠$ ^ء^

الصورة القطبية للعدد المركب



يمكن كتابة العدد المركب في الصورة القطبية باستخدام حساب المثلثات.

من خلال الشكل المجاور: جتا أ $= \frac{س}{ر}$، جا أ $= \frac{ص}{ر}$،

وعليه س = ر جتا أ، ص = ر جا أ.

بالتعويض في الصورة الديكارتية للعدد المركب نحصل على:

ع = س + ت ص

ع = ر جتا أ + ت (ر جا أ)

ع = ر (جتا أ + ت جا أ)، حيث ر = |ع|، أ السعة، وتعرف هذه الصيغة بالصورة القطبية للعدد المركب.

مثـــال ٧

لتكن ل = ٦ − ٣ت، ك = −٧ + ٥ت

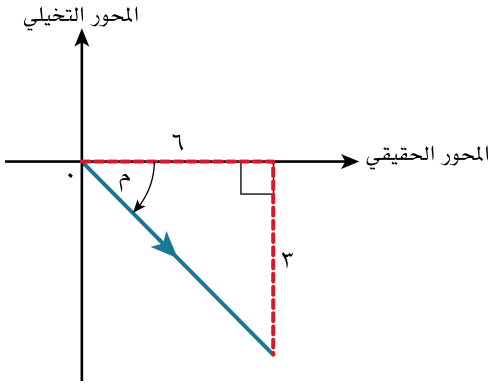
اكتب العددَين المركَّبَين ل، ك في الصورة القطبية.

الحـــلّ:

ل = ٦ − ٣ت

ر = |ل| $= \sqrt{٦^{٢} + (-٣)^{٢}}$ ········ باستخدام تعريف المقياس.

$= \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$



يبيّن الشكل أن الزاوية حادة وسالبة.

أ = −م

السعة للعدد المركب (٦ − ٣ت) = − ظا$^{-1}\left(\frac{٣}{٦}\right)$ باستخدام تعريف السعة.

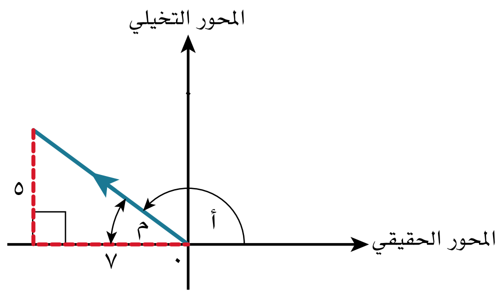
= −٤٦٤,٠ ء مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

∴ الصورة القطبية للعدد المركب ل هي: ل = ٣$\sqrt{٥}$ (جتا (−٤٦٤,٠) + ت جا(−٤٦٤,٠))

ك = −٧ + ٥ت

ر = |ك| = $\sqrt{(-٧)^{٢} + ٥^{٢}}$ باستخدام تعريف المقياس.

= $\sqrt{٧٤}$



أ = π − م

السعة للعدد المركب (−٧ + ٥ت) = π − ظا$^{-1}\left(\frac{٥}{٧}\right)$ باستخدام تعريف السعة.

= ٢,٥٢ ء مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

∴ الصورة القطبية للعدد المركب ك هي: ك = $\sqrt{٧٤}$ (جتا (٢,٥٢) + ت جا(٢,٥٢))

الصورة الأسيّة للعدد المركب

اكتشف الرياضي ليونارد أويلر (Leonhard Euler) (١٧٠٧ − ١٧٨٣م) العلاقة الرياضية

جتا أ + ت جا أ = هـ$^{\text{تأ}}$

تُعدّ هذه العلاقة الأساس لصورة أخرى للعدد المركب.

ع = ر(جتا أ + ت جا أ)

ع = **ر هـ$^{\text{تأ}}$، حيث ر هي |ع|، أ هي السعة للعدد ع.**

وتعرف هذه الصيغة بالصورة الأسية exponential form للعدد المركب.

مُساعَدة

عدد أويلر
هـ = ٢,٧١٨٢٨ مقربًا إلى أقرب ٥ منازل عشرية.

مثــال ٨

إذا علمت أن $ع_١ = ١ + ت$ ، $ع_٢ = ٥ هـ^{\frac{ت\pi}{٣}}$ ، $ع_٣ = ٢\left(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}\right)$، فاكتب:

أ $ع_١$ في:

- الصورة القطبية.
- الصورة الأسّية.

ب $ع_٢$ في:

- الصورة القطبية.
- الصورة الديكارتية.

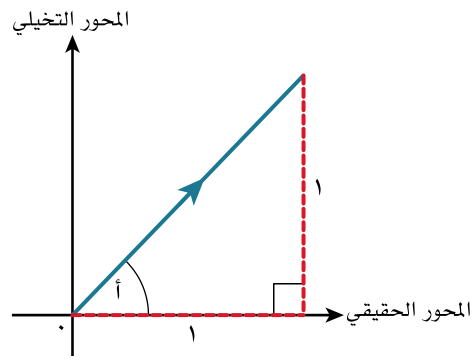
ج $ع_٣$ في:

- الصورة الأسّية.
- الصورة الديكارتية.

الحــلّ:

أ $ر = |ع_١| = \sqrt{١^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢}$ .... باستخدام تعريف المقياس.

.... يبيّن الشكل أن الزاوية أ حادة وموجبة.



$أ$ = السعة للعدد المركب $(١ + ت) = ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$ .... باستخدام تعريف السعة.

الصورة القطبية هي:

$$ع_١ = \sqrt{٢}\left(جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤}\right)$$

الصورة الأسّية هي:

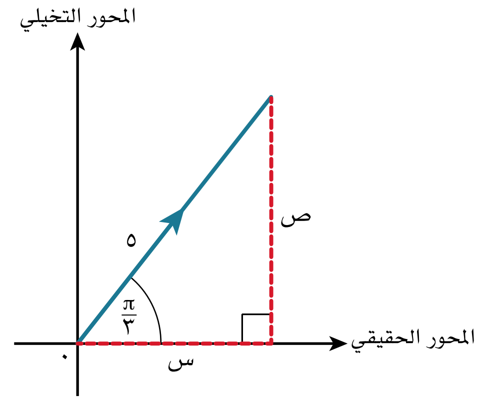
$$ع_١ = \sqrt{٢} هـ^{\frac{ت\pi}{٤}}$$

ب ر = $|ع_٢|$ = ٥ ، أ = $\frac{\pi}{٣}$

الصورة القطبية هي:

$ع_٢ = ٥\left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت\ جا \frac{\pi}{٣}\right)$

قارن الصورة القطبية مع س + ت ص.



س = ٥ جتا $\frac{\pi}{٣}$ ، ص = ٥ جا $\frac{\pi}{٣}$

أوجد القيمتَين.

س = $\frac{٥}{٢}$ ، ص = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$

اكتب في الصورة الديكارتية س + ت ص،
أو س + ص ت.

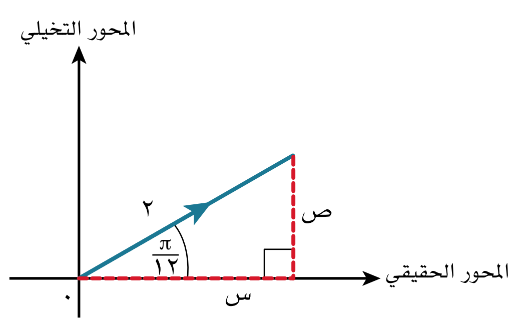
الصورة الديكارتية هي:

$ع_٢ = \frac{٥}{٢} + ت\left(\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}\right)$

ج ر = $|ع_٢|$ = ٢ ، أ = $\frac{\pi}{١٢}$

الصورة الأسيّة هي: $ع_٢ = ٢هـ^{\frac{\pi ت}{١٢}}$

قارن الصورة القطبية مع س + ص ت.



س = ٢جتا $\frac{\pi}{١٢}$ ، ص = ٢جا $\frac{\pi}{١٢}$

أوجد القيمتَين.

س = $\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}$

اكتب بالصورة الديكارتية س + ت ص.

الصورة الديكارتية هي: $ع_٢ = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٢} + ت\left(\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}\right)$

مثــال ٩

لتكن ل = ٥هـ$^{\text{٢ت}}$ ، ق = ١٠هـ$^{\text{−٣ت}}$:

أ أوجد المقياس والسعة لكلّ مما يأتي:

١) ل ق.　　　　٢) $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$.

ب مثّل ل، ق، ل ق، $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ بمتجهات الموضع على مخطط أرجاند نفسه.

الحـلّ:

أ ١) ل ق = ٥ × هـ$^{\text{٢ت}}$ × ١٠ × هـ$^{\text{−٣ت}}$ .... استخدم قوانين الأسس.

ل ق = ٥٠ × هـ$^{\text{٢ت − ٣ت}}$

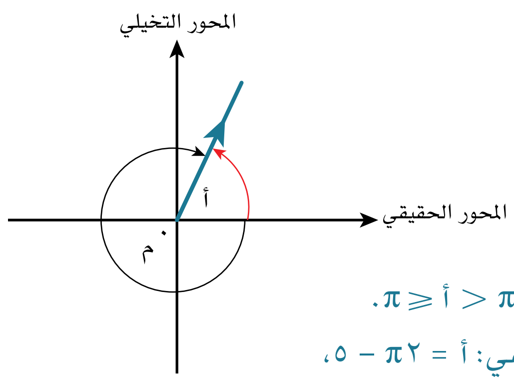
ل ق = ٥٠ هـ$^{\text{−ت}}$

∴ مقياس ل ق = ٥٠، السعة للعدد المركب (ل ق) = −١$^{\text{ء}}$

٢) $\frac{\text{ق}}{\text{ل}} = \frac{\text{١٠ × هـ}^{\text{−٣ت}}}{\text{٥ × هـ}^{\text{٢ت}}}$ .... استخدم قوانين الأسس.

$\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢ × هـ$^{\text{−٣ت − ٢ت}}$

$\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢هـ$^{\text{−٥ت}}$



لذلك فإن مقياس $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢

والسعة أ = −٥

ولأن أ لا تقع في الفترة بين $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$.

لذا فإن الزاوية المكافئة لها هي: أ = ٢π − ٥،

وعليه يكون $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢هـ$^{\text{(٢}\pi\text{ − ٥)ت}}$

∴ مقياس $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢، السعة للعدد المركب $\left(\frac{\text{ق}}{\text{ل}}\right)$ = ٢π − ٥

ب ل = ٥(جتا ٢ + ت جا ٢) = −٢,٠٨ + ٤,٥٥ت،

ق = ١٠(جتا(−٣) + ت جا(−٣)) = −٩,٩٠ − ١,٤١ت،

ل ق = ٥٠(جتا(−١) + ت جا(−١)) = ٢٧,٠ − ٤٢,١ت،

$\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ = ٢(جتا(٢π − ٥) + ت جا(٢π − ٥)) = ٠,٥٦٧ + ١,٩٢ت،

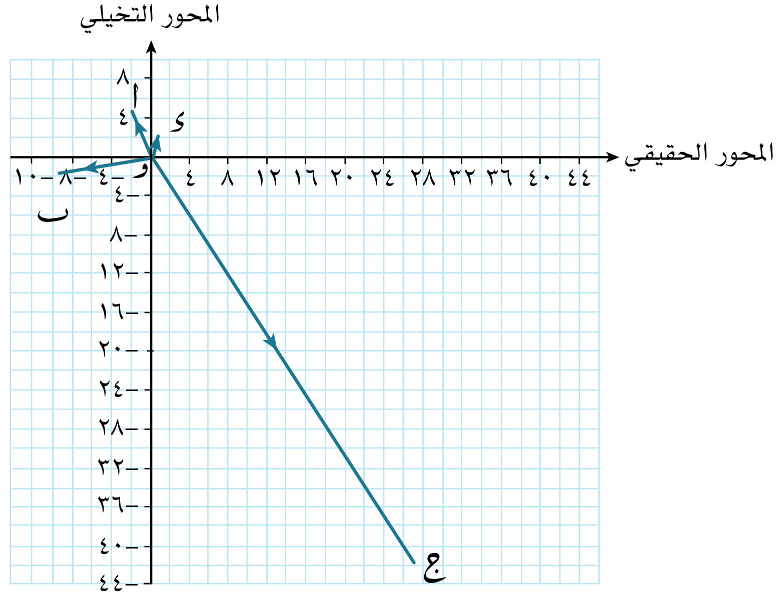
مُساعَدة

إن الصورة الأسّية للعدد المركب مفيدة جدًا، خصوصًا عند ضرب أو قسمة الأعداد المركبة.

تمثل الأعداد المركبة الأربعة بالمتجهات الموضعية للنقاط:

أ(−١,٢، ٦,٤) ، ب(−٩,٩، −٤,١)

ع(٢٧، −٤٢) ، ى(٥٧,٠، ٩,١)



مُساعَدة

إن إيجاد الصورة الديكارتية ليس ضروريًا، لكن إيجادها قد يساعد في تعيين النقاط في الربع الصحيح بطريقة أسهل.

مُساعَدة

تم تقريب إحداثيات النقاط لتسهيل تحديدها وتمثيلها في المستوى المركب.

يساعد استخدام قوانين الأسس، والصورة الأسّية للعدد المركب في التوصل إلى بعض النتائج المهمة والمفيدة.

ليكن العدد المركب $ع_١$، حيث $ر_١$ هي $|ع_١|$، $أ_١$ هي السعة،

وليكن العدد المركب $ع_٢$، حيث $ر_٢$ هي $|ع_٢|$، $أ_٢$ هي السعة، فيكون:

$ع_١ = ر_١هـ^{ت أ_١}$ ، $ع_٢ = ر_٢هـ^{ت أ_٢}$ ، $ع_١ ع_٢ = ر_١هـ^{ت أ_١} \times ر_٢هـ^{ت أ_٢} = ر_١ ر_٢هـ^{(أ_١ + أ_٢)ت}$ ،

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ر_١هـ^{ت أ_١}}{ر_٢هـ^{ت أ_٢}} = \frac{ر_١}{ر_٢}هـ^{(أ_١ - أ_٢)ت}$$

نتيجة ٣

بالنسبة إلى العدد المركب $ع_١ ع_٢$ يكون:

المقياس للعدد المركب $(ع_١ ع_٢) = |ع_١ ع_٢| = ر_١ \times ر_٢ = |ع_١||ع_٢|$

السعة للعدد المركب $(ع_١ ع_٢) = أ_١ + أ_٢$ = السعة للعدد المركب $ع_١$ + السعة للعدد المركب $ع_٢$

وكذلك بالنسبة إلى العدد المركب $\frac{ع_١}{ع_٢}$ يكون:

المقياس للعدد المركب $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = \left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{ر_١}{ر_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$

السعة للعدد المركب $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = أ_١ - أ_٢$ = السعة للعدد المركب $ع_١$ − السعة للعدد المركب $ع_٢$

يُبسط ما ورد في نتيجة ٣ ضرب وقسمة الأعداد المركبة كثيرًا.

نلاحظ عند التعامل مع الصورة الأسّية أنه:

- **عند ضرب عددَين مركبين، نضرب المقياسين، ونجمع السعتين.**
- **عند قسمة عددَين مركبَين، نقسم المقياسين، ونطرح السعتين.**

مثال ١٠

إذا علمت أن العددَين المركبَين ل = ٩ + ١٢ت، ق = −٥ − ٣ت، فأوجد المقياس والسعة لكل مما يأتي:

أ ل ق.

ب $\frac{ل}{ق}$.

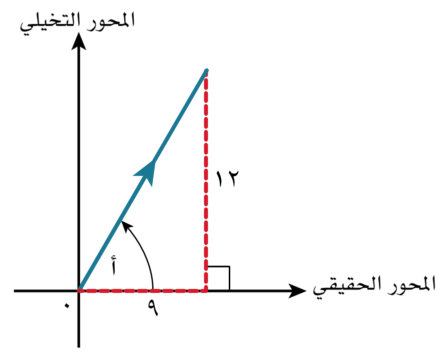
الحـلّ:

أولاً: نوجد المقياس للعددين المركبين ل، ق على الترتيب.

$|ل| = \sqrt{٩^٢ + ١٢^٢} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ باستخدام تعريف المقياس لـ ل، ق.

$|ق| = \sqrt{(-٥)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٣٤}$

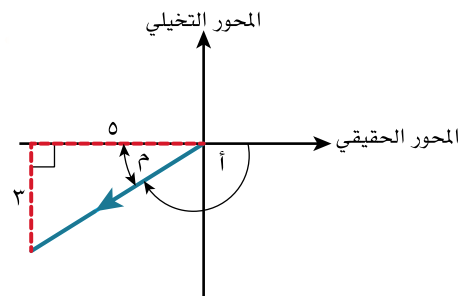
ثانيًا: نوجد السعة للعددين المركبين ل، ق على الترتيب.



يبيّن الشكل أن زاوية ل حادة وموجبة.

السعة للعدد المركب لـ ل = ظا$^{-١}\left(\frac{١٢}{٩}\right)$

= ٠,٩٢٧^{ء} مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.



من الشكل زاوية ق منفرجة وسالبة.

أ = $-\pi$ + م

السعة للعدد المركب ق = $-\pi$ + ظا$^{-١}\left(\frac{٣}{٥}\right)$

= −٢,٦٠^{ء} مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

أ $|ل ق| = |ل||ق| = ١٥\sqrt{٣٤}$ .... باستخدام $|ع_١ع_٢| = ر_١ر_٢ = |ع_١||ع_٢|$

السعة للعدد المركب (ل ق) = السعة للعدد المركب ل + السعة للعدد المركب ق ... باستخدام السعة للعدد المركب $(ع_١ع_٢) = أ_١ + أ_٢$

$= ٠,٩٢٧ + (-٢,٦٠)$

$= -١,٦٧^{ء}$ مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

ب $\left|\frac{ل}{ق}\right| = \frac{|ل|}{|ق|} = \frac{١٥}{\sqrt{٣٤}} = \frac{١٥\sqrt{٣٤}}{٣٤}$ .... باستخدام $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{ر_١}{ر_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$

السعة للعدد المركب $\frac{ل}{ق}$ = السعة للعدد المركب ل − السعة للعدد المركب ق

$= ٠,٩٢٧ - (-٢,٦٠)$ .... باستخدام السعة للعدد المركب $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = أ_١ - أ_٢$

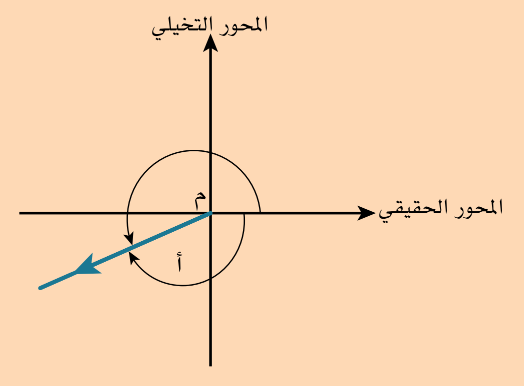
$= ٣,٥٣^{ء}$ مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

$\because ٣,٥٣ > \pi$، $\therefore$ لا تقع الزاوية في المجال $-\pi < أ \leqslant \pi$،

وتكون الزاوية المكافئة لها هي: ....

$أ = -(٢\pi - ٣,٥٣)$

$= -٢,٧٥^{ء}$ مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.



تمارين ٧-٤

١) ليكن العدد المركب ل = ٥ − ٢ت:

أ عيّن مواقع النقاط ا، ب، ج على مخطط أرجاند، والتي تمثل الأعداد المركبة ل، ل*، − ل على الترتيب.

ب تشكّل النقاط ا، ب، ج، ء مستطيلًا. اكتب العدد المركب الذي يمثل النقطة ء.

٢) ليكن العددان المركبان $ع_١ = ١ + ٥ت$، $ع_٢ = -٧ - ت$:

أ على مخطط أرجاند عيّن النقطتَين ل، ك اللتَين تمثلان العددَين المركبَين $ع_١$، $ع_٢$ على الترتيب.

ب اكتب العدد المركب الذي يمثّل النقطة م، حيث م منتصف القطعة المستقيمة ل ك.

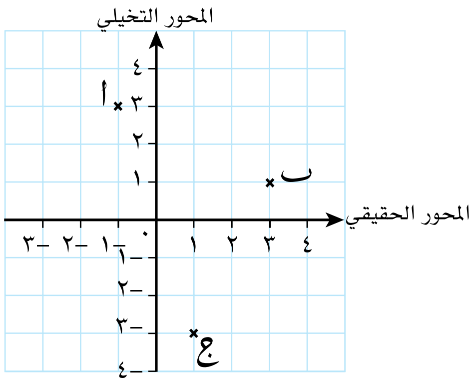
٣) أوجد المقياس والسعة لكلّ مما يأتي:

أ −١٢ + ٥ت   ب ٥ت   ج ٨ + ١٥ت

د ٦٠ − ١١ت   هـ −٩ − ٤٠ت   و −١ − ت $\sqrt{٣}$

ز $\sqrt{٥}$ + ٢ت   ح −٢٤ − ٧ت   ط ك(١ − ت)، ك < ٠

٤) على مخطط أرجاند الموضح في الشكل المجاور:



أ اكتب كلّ عدد مركب مبيّن على المخطط في الصورة القطبية.

ب بيّن أن ا ب ج مثلث قائم الزاوية.

٥) اكتب كلًا مما يأتي في الصورة الديكارتية:

أ $٣\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٣}\right)$ ب $٥\left(\text{جتا}\,\frac{٣\pi}{٨} + \text{ت جا}\,\frac{٣\pi}{٨}\right)$

ج $\text{هـ}^{\frac{\pi\text{ت}}{٢}}$ د $٣\text{هـ}^{-\frac{\pi\text{ت}}{٤}}$

٦) ليكن ق = $٥\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٦}\right)$، ع = $\frac{٣ - ٧\text{ت}}{٥ - ٢\text{ت}}$:

أ اكتب ق في الصورة الأسّية.

ب اكتب ع في الصورة الأسّية.

ج أوجد $\frac{\text{ع}}{\text{ق}}$، ثم بسّطها.

★ **٧)** ليكن ع = أ + ب ت، وكان |ع| = ٥، وسعة ع = $\frac{\pi}{٦}$، فأوجد قيمة كل من أ، ب.

٨) إذا علمت أن ع = ر(جتا أ + ت جا أ)، فأوجد كلًا مما يأتي في أبسط صورة:

أ ع ع*   ب $\frac{\text{ع}}{\text{ع}^*}$

٧-٥ حلّ المعادلات Solving equations

تعرفت في الدرس ٧-٢ على وجود جذور غير حقيقية للمعادلة التربيعية ضمن مجموعة جديدة من الأعداد تسمى بالأعداد المركبة.

كما تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية حل المعادلات التربيعية لإيجاد الجذور الحقيقية، كما هو موضح في الجدول الآتي:

ب٢ - ٤أجـ	طبيعة الجذور	الجذور
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان.	م، ل
= ٠	جذران حقيقيان متساويان.	م = ل
< ٠	لا توجد جذور حقيقية.	

مُساعَدة

يدل ب٢ - ٤ أ جـ على مميز المعادلة التربيعية أس٢ + ب س + جـ = ٠

ويمكن تحديث هذا الجدول لحلّ المعادلات التربيعية التي تتضمن حلولها أعدادًا مركبة:

ب٢ - ٤أجـ	طبيعة الجذور	الجذور
> ٠	جذران حقيقيان مختلفان.	م، ل
= ٠	جذران حقيقيان متساويان.	م = ل
< ٠	جذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (عددان مركبان أحدهما مرافق للآخر).	م، م*

عند استخدام مجموعة الأعداد المركبة لإيجاد الحلول، هناك دائمًا جذران للمعادلة التربيعية.

معادلات كثيرة الحدود من الدرجات العليا

تنص النظرية الأساسية في الجبر على أنه: لكل دالة كثيرة الحدود من الدرجة ن (ن ≥ ١)، يوجد لها ن جذرًا مركبًا.

مُساعَدة

تنتمي جميع الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد المركبة، ولكنّ أجزاءها التخيلية تكون مساوية للصفر. لذلك، د(س) = ٢س - ٦ هي دالة كثيرة الحدود درجتها ١، لها جذر مركب واحد هو س = ٣ + ٠ ت

مثال ١١

أ إذا علمت أن د (ع) = ع^{٣} − ٤ع^{٢} + ع − ٤، فبيّن أن د (ع) لها ٣ عوامل هي: ع − ٤، ع + ت، ع − ت

ب اكتب جذور د (ع).

الحـلّ:

أ (ع − ٤)(ع + ت)(ع − ت) = (ع − ٤)(ع^{٢} − ت ع + ت ع − ت^{٢})

يجب أن يكون حاصل ضرب العوامل مساويًا لـ د (ع).

= (ع − ٤)(ع^{٢} + ١)

= ع^{٣} + ع − ٤ع^{٢} − ٤

= ع^{٣} − ٤ع^{٢} + ع − ٤

= د (ع).

ب د (ع) = ٠

جذور د (ع) هي حلول المعادلة د (ع) = ٠

ع^{٣} − ٤ع^{٢} + ع − ٤ = ٠

(ع − ٤)(ع + ت)(ع − ت) = ٠

إما ع − ٤ = ٠، ومنها ع = ٤

لتجد الجذور، اجعل كل عامل مساويًا للصفر.

أو ع + ت = ٠، ومنها ع = − ت

أو ع − ت = ٠، ومنها ع = ت

∴ جذور د(ع) هي: ٤، − ت، ت

بعض النتائج الإضافية من النظرية الأساسية في الجبر هي:

نوع الدالة	طبيعة الجذور	الجذور
التكعيبية: د (س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د	٣ جذور حقيقية.	م، ل، ن
	جذر حقيقي واحد وجذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوج من الأعداد المركبة المترافقة).	م، ل، ل*

مُساعَدة

لتفهم طبيعة الجذور، فكّر في شكل منحنى الدالة التكعيبية.

نوع الدالة	طبيعة الجذور	الجذور
من الدرجة الرابعة: د (س) = أس^{٤} + ب س^{٣} + جـ س^{٢} + د س + هـ	٤ جذور حقيقية.	م، ل، ن، ك
	جذران حقيقيان وجذران مركبان في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوج من الأعداد المركبة المترافقة).	م، ل، ن، ن*
	٤ جذور مركبة في صورة س ± ص ت، حيث ص ≠ ٠ (زوجان من الأعداد المركبة المترافقة).	م، م*، ل، ل*

مُساعَدة

لا يمكن أبدًا أن يوجد للدالة من الدرجة الرابعة جذر حقيقي واحد، وثلاثة جذور مركبة.

نتيجة ٤

عندما تحتوي دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد حقيقية على جذر مركب س + ص ت حيث ص ≠ ٠، يكون الجذر الآخر س − ص ت، حيث ص ≠ ٠
تكون الجذور أزواجًا من الأعداد المترافقة في صورة س ± ص ت.

نظرية العوامل

لقد درسنا سابقًا كيفية حل المعادلات التربيعية والمعادلات التكعيبية في مجموعة الأعداد الحقيقية، وفيما بعد سنحل المعادلات التكعيبية والمعادلات ذات الدرجات العليا في مجموعة الأعداد المركبة باستخدام النظرية الأساسية في الجبر، ونظرية العوامل.

نظرية العوامل هي أداة رياضية مهمة ومفيدة جدًا؛ لأنها تربط بين عوامل الدوال، وجذور الدوال، وحلول المعادلات.

تنص نظرية العوامل على ما يأتي:

نتيجة ٥

لأي دالة معطاة د (س):

- إذا كان (س − أ) عاملًا للدالة د (س)، فإن د (أ) = ٠
- إذا كانت د (أ) = ٠، فإن (س − أ) عامل للدالة د (س).
- إذا كان (أس + ب) عاملًا للدالة د (س)، فإن د $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ = ٠
- إذا كانت د $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ = ٠، فإن (أس + ب) عامل للدالة د (س).

يبيّن المخطط أدناه ملخصًا لنظرية العوامل.

إذا كان أي من العناصر الأربعة صحيحًا، فإن العناصر الثلاثة الأخرى تكون صحيحة تلقائيًا.

د (أ) = ٠

س = أ
جذر للدالة د (س)

س − أ
عامل للدالة د (س)

س = أ
حل للمعادلة
د (س) = ٠

لتكن الدالة التكعيبية د (س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢

لتجد ما إذا كان (س − ٣) عاملًا للدالة د (س) أم لا، عوّض حل المعادلة س − ٣ = ٠ في الدالة د (س).

بتعويض س = ٣، نجد أن د (٣) = ٢٧ − ٤٥ + ٣٠ − ١٢ = ٠، أي (س − ٣) عامل للدالة د(س).

بالمثل، يمكن أن نعوض س = −١ لنجد ما إذا كان (س + ١) عاملًا أم لا: د (−١) = −٢٨، أي (س + ١) ليس عاملًا للدالة د (س).

في الوقت الذي نعرف عاملًا خطيًا واحدًا للدالة التكعيبية، هناك طرق متعددة يمكننا استخدامها لإيجاد عامل آخر، والذي سيكون في البداية عاملًا تربيعيًا (عامل خطي × عامل تربيعي = دالة تكعيبية).

أولًا، نكتب العامل التربيعي في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ.

∴ س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢ = (س − ٣)(أ س^{٢} + ب س + جـ).

غالبًا ما يمكننا إيجاد قيم أ، جـ بالملاحظة:

الحد المحاط بالمستطيل على اليمين يساوي حاصل ضرب الحدين المحاطين بالمستطيل على اليسار في كل من الحالتين الآتيتين:

$\boxed{\text{س}^{٣}}$ − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢ = ($\boxed{\text{س}}$ − ٣)($\boxed{\text{أ س}^{٢}}$ + ب س + جـ)، أي أ = ١

س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س $\boxed{-\ ١٢}$ = (س $\boxed{-\ ٣}$)(أ س^{٢} + ب س $\boxed{+\ \text{جـ}}$)، أي جـ = ٤

∴ س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢ = (س − ٣)(س^{٢} + ب س + ٤)

∴ لإيجاد قيمة ب، نفك الجانب الأيسر، ونجمّع الحدود المتشابهة، ثم نساوي بين المعاملات:

س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢ = (س − ٣)(س^{٢} + ب س + ٤)

= س^{٣} + ب س^{٢} + ٤س − ٣س^{٢} − ٣ب س − ١٢

= س^{٣} + (ب − ٣)س^{٢} + (٤ − ٣ب)س − ١٢

لدينا خياران لإيجاد ب: −٥ = ب − ٣ تعطي ب = −٢ أو ١٠ = ٤ − ٣ب تعطي ب = −٢

∴ س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ١٢ = (س − ٣)(س^{٢} − ٢س + ٤).

يمكننا الآن القيام بخطوة إضافية عن طريق تحليل العامل التربيعي إلى العوامل.

في هذه الحالة، نحل المعادلة س^{٢} − ٢س + ٤ = ٠، حيث أ = ١، ب = −٢، جـ = ٤ لإيجاد عواملها:

س^{٢} − ٢س + ٤ = ٠

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤(١)(٤)}}{٢(١)}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$$

$$= ١ \pm ت\sqrt{٣}$$

عاملا س^{٢} − ٢س + ٤ هما زوج العددين المركبين المترافقين:

س − $\left(١ + ت\sqrt{٣}\right)$ = س − ١ − ت$\sqrt{٣}$، س − $\left(١ - ت\sqrt{٣}\right)$ = س − ١ + ت$\sqrt{٣}$

أخيرًا، س^{٣} − ٥س^{٢} + ١٠س − ٣٠ = (س − ٣)$\left(س - ١ - ت\sqrt{٣}\right)\left(س - ١ + ت\sqrt{٣}\right)$

مثـــال ١٢

إذا علمت أن د(ع) = ٦ع^{٣} − ٥ع^{٢} − ١٧ع + ٦، د(٢) = ٠، فأوجد جذور د(ع).

الحــلّ:

(ع − ٢) عامل للدالة د(ع) لأن د(٢) = ٠	باستخدام نظرية العوامل.
د(ع) = ٦ع^{٣} − ٥ع^{٢} − ١٧ع + ٦	العامل الآخر هو تربيعي، لذا ليكن أع^{٢} + ب ع + جـ.
= (ع − ٢)(أع^{٢} + ب ع + جـ)	
د(ع) = (ع − ٢)(٦ع^{٢} + ب ع − ٣)	بالملاحظة: أ = ٦، جـ = −٣
= ٦ع^{٣} + ب ع^{٢} − ٣ع − ١٢ع^{٢} − ٢ب ع + ٦	
= ٦ع^{٣} + (ب − ١٢)ع^{٢} + (−٣ − ٢ب)ع + ٦	
−٥ = ب − ١٢ تعطي ب = ٧	ساوِ بين معاملات ع^{٢} أو ع لتجد ب.
د(ع) = (ع − ٢)(٦ع^{٢} + ٧ع − ٣)	يمكن تحليل العامل التربيعي إلى عوامل.
= (ع − ٢)(٣ع − ١)(٢ع + ٣)	
د(ع) = ٠	توجد جذور د(ع) عندما د(ع) = ٠
(ع − ٢)(٣ع − ١)(٢ع + ٣) = ٠	
ع = ٢	
٣ع − ١ = ٠، ومنها ع = $\frac{١}{٣}$	
٢ع + ٣ = ٠، ومنها ع = −$\frac{٣}{٢}$	
∴ جذور د(ع) هي: ٢ ، $\frac{١}{٣}$ ، −$\frac{٣}{٢}$	

مثــال ١٣

لتكن د (ع) = ع^{٣} − ٣ع^{٢} + ٤ع − ٢، د (١) = ٠:

أ حلّل د (ع) إلى العوامل بالكامل.

ب صِف جذور د (ع) من حيث نوع كل منها.

الحــلّ:

أ باستخدام نظرية العوامل: (ع − ١) عامل للدالة د(ع).

د (ع) = ع^{٣} − ٣ع^{٢} + ٤ع − ٢ .... العامل الآخر تربيعي، ليكن أ ع^{٢} + ب ع + جـ.

= (ع − ١)(أ ع^{٢} + ب ع + جـ)

د (ع) = (ع − ١)(ع)^{٢} + ب ع + ٢) .... بالملاحظة: أ = ١، جـ = ٢

= ع^{٣} + بع^{٢} + ٢ع − ع^{٢} − بع − ٢

= ع^{٣} + (ب − ١)ع^{٢} + (٢ − ب)ع − ٢

−٣ = ب − ١ يعطي ب = −٢ .... ساوِ بين معاملات ع^{٢} أو ع لتجد ب.

د (ع) = (ع − ١)(ع)^{٢} − ٢ع + ٢) .... د (ع) هي حاصل ضرب العامل الخطي والعامل التربيعي.

ع^{٢} − ٢ع + ٢ = ٠ .... حلّل إلى العوامل ع^{٢} − ٢ع + ٢ باستخدام الصيغة التربيعية، حيث أ = ١، ب = −٢، جـ = ٢ لتجد الجذور.

$$ع = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤(١)(٢)}}{٢(١)}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

$$= \frac{٢ \pm ٢ت}{٢}$$

= ١ ± ت

∵ ع = ١ + ت جذر ∴ (ع − ١ − ت) عامل لـ د (ع).

∵ ع = ١ − ت جذر ∴ (ع − ١ + ت) عامل لـ د (ع).

∵ ع = ١ جذر ∴ (ع − ١) عامل لـ د (ع).

د (ع) = ع^{٣} − ٣ع^{٢} + ٤ع − ٢

= (ع − ١)(ع − ١ − ت)(ع − ١ + ت)

ب ع = ١ عدد حقيقي.

$\left.\begin{array}{l} ع = ١ + ت \\ ع = ١ - ت \end{array}\right\}$ زوج من الأعداد المركبة المترافقة.

مثـــال ١٤

إذا علمت أن $هـ(ع) = ع^{٣} - (٣ + ٤ت)ع^{٢} - (٢ - ١٢ت)ع + ٦$، فأوجد:

أ $هـ(٣)$.

ب $ع_{١}، ع_{٢}، ع_{٣}$ جذور $هـ(ع)$.

ج $|ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣}|$.

الحـــلّ:

أ $هـ(٣) = ٣^{٣} - (٣ + ٤ت)(٣)^{٢} - (٢ - ١٢ت)(٣) + ٦$

$= ٢٧ - ٢٧ - ٣٦ت - ٦ + ٣٦ت + ٦$

$= ٠$

> $هـ(٣) = ٠$ تدل على أن $(ع - ٣)$ عامل لـ $هـ(ع)$.

ب ∵ $(ع - ٣)$ عامل لـ $هـ(ع)$ ∴ العامل الآخر تربيعي.

> ليكن العامل التربيعي $أع^{٢} + ب ع + جـ$.

$ع^{٣} - (٣ + ٤ت)ع^{٢} - (٢ - ١٢ت)ع + ٦ = (ع - ٣)(أع^{٢} + ب ع + جـ)$

> بالملاحظة: $أ = ١$، $جـ = -٢$

$= (ع - ٣)(ع^{٢} + ب ع - ٢)$

$= ع^{٣} + ب ع^{٢} - ٢ع - ٣ع^{٢} - ٣ب ع + ٦$

$= ع^{٣} + (ب - ٣)ع^{٢} + (-٢ - ٣ب)ع + ٦$

$-(٣ + ٤ت) = ب - ٣$ يعطي $ب = -٤ت$

> ساوِ بين معاملات $ع^{٢}$ أو ع لتجد ب.

$ع^{٣} - (٣ + ٤ت)ع^{٢} - ٢(١ + ٦ت)ع - ٦ = (ع - ٣)(ع^{٢} - ٤ت ع - ٢)$

$$ع = \frac{٤ت \pm \sqrt{(-٤ت)^{٢} - ٤(١)(-٢)}}{٢(١)}$$

$$= \frac{٤ت \pm \sqrt{-١٦ + ٨}}{٢}$$

$$= \frac{٤ت \pm \sqrt{-٨}}{٢}$$

$$= \frac{٤ت \pm ٢ت\sqrt{٢}}{٢}$$

$$= ٢ت \pm ت\sqrt{٢}$$

$$= ت\left(٢ \pm \sqrt{٢}\right)$$

> حل المعادلة $ع^{٢} - ٤ت ع - ٢ = ٠$ لتجد العوامل الأخرى لـ $هـ(ع)$.
> استخدم الصيغة التربيعية، حيث $أ = ١$، $ب = -٤ت$، $جـ = -٢$

∴ جذور $هـ(ع)$ هي: $ع_{١} = ٣$، $ع_{٢} = \left(٢ + \sqrt{٢}\right)ت$، $ع_{٣} = \left(٢ - \sqrt{٢}\right)ت$

ج $|ع_١ + ع_٢ + ع_٣| = |٣+ (٢ + \sqrt{٢})ت + (٢ - \sqrt{٢})ت|$ .... اجمع الجذور الثلاثة، وأوجد مقياس المجموع.

$= |٣+ (٢ + \sqrt{٢} + ٢ - \sqrt{٢})ت|$

$= |٣ + ٤ت|$

$= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$

$= ٥$

مثـــال ١٥

ليكن (ح + ٢ت) عامل لـ د (ح) = $ح^٤ - ٤ح^٣ - ح^٢ - ١٦ح - ٢٠$:

أ حل المعادلة د (ح) = ٠

ب عيّن كل جذور هذه المعادلة في صورة متجهات موضعية على مخطط أرجاند.

الحــلّ:

أ ∵ (ح + ٢ت) عامل ∴ مرافقه (ح - ٢ت) عامل أيضًا. .... ح = -٢ت، ح = ٢ت هما جذران مركبان أيضًا لـ د(ح).

$ح^٤ - ٤ح^٣ - ح^٢ - ١٦ح - ٢٠ = (ح + ٢ت)(ح - ٢ت)(أ ح^٢ + ب ح + جـ)$

$= (ح^٢ + ٢ت ح - ٢ت ح - ٤ت^٢)(أ ح^٢ + ب ح + جـ)$

$= (ح^٢ + ٤)(أ ح^٢ + ب ح + جـ)$ .... بالملاحظة: أ = ١، جـ = -٥

$ح^٤ - ٤ح^٣ - ح^٢ - ١٦ح - ٢٠ = (ح^٢ + ٤)(ح^٢ + ب ح - ٥)$ .... ساو بين معاملات $ح^٣$ لتحصل على ب = -٤

$= ح^٤ + ب ح^٣ - ٥ح^٢ + ٤ح^٢ + ٤ب ح - ٢٠$

$= ح^٤ + ب ح^٣ - ح^٢ + ٤ب ح - ٢٠$

ب = -٤ .... ساو بين معاملات $ح^٣$ أو ح لتجد قيمة ب.

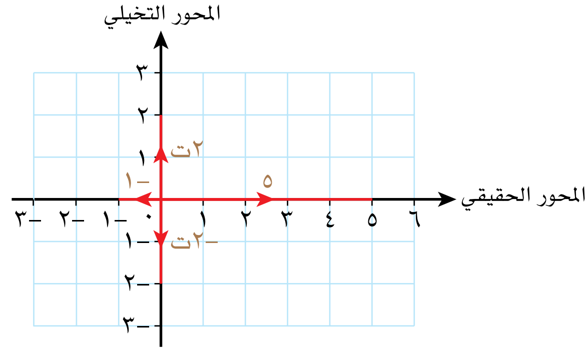
$ح^٤ - ٤ح^٣ - ح^٢ - ١٦ح - ٢٠ = (ح^٢ + ٤)(ح^٢ - ٤ح - ٥)$ .... حلل العامل التربيعي إلى العوامل.

$= (ح^٢ + ٤)(ح - ٥)(ح + ١)$

$= (ح + ٢ت)(ح - ٢ت)(ح - ٥)(ح + ١)$

∴ الجذور هي: ح = -٢ت، ح = ٢ت، ح = ٥، ح = -١

ب



مثال ١٦

حل المعادلة ع^{٤} + ١٣ع^{٢} + ٣٦ = ٠ إذا علمت أن (ع − ٢ت) أحد عواملها.

الحل:

∵ (ع − ٢ت) أحد العوامل. ········ تظهر الجذور المركبة في أزواج على الصورة س ± ص ت، ص ≠ ٠

∴ (ع + ٢ت) عامل ثانٍ.

(ع − ٢ت) (ع + ٢ت) = ع^{٢} + ٢ت ع − ٢ت ع − ٤ت^{٢}

= ع^{٢} + ٤

ع^{٤} + ١٣ع^{٢} + ٣٦ = (ع^{٢} + ٤)(ع^{٢} + ب ع + ٩) ········ فك الأقواس، وقارن.

= ع^{٤} + ب ع^{٣} + ٩ع^{٢} + ٤ع^{٢} + ٤ب ع + ٣٦

= ع^{٤} + ب ع^{٣} + ١٣ع^{٢} + ٤ب ع + ٣٦

ع^{٤} + ١٣ع^{٢} + ٣٦ = ع^{٤} + ب ع^{٣} + ١٣ع^{٢} + ٤ب ع + ٣٦ ········ ساو بين معاملات ع^{٣} أو ع لتجد ب.

ب = ٠ ········ تحقق مستخدمًا معامل ع.

٠ = ٤(٠) ✓

ع^{٤} + ١٣ع^{٢} + ٣٦ = (ع^{٢} + ٤)(ع^{٢} + ٩) ········ ضع (ع^{٢} + ٤) (ع^{٢} + ٩) = ٠ لتجد الحلول.

إما ع^{٢} + ٤ = ٠، ومنها ع = ±$\sqrt{-٤}$

ع = ±٢ت

ع^{٢} + ٩ = ٠ ومنها ع = ±$\sqrt{-٩}$

ع = ±٣ت

∴ حلول المعادلة هي: ع = ±٢ت، ع = ±٣ت ········ ٤ جذور في صورة س ± ص ت، ص ≠ ٠

مُساعَدة

يمكنك حل المعادلة ع^{٤} + ١٣ع^{٢} + ٣٦ = ٠ باستبدال ع = ك^{٢} لتصبح المعادلة ك^{٢} + ١٣ ك + ٣٦ = ٠

إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب

يمكننا إيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب.

مثــال ١٧

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب −٢ + ($٢\sqrt{٣}$) ت، وبيّن مواقع الجذور على مخطط أرجاند.

الحـلّ:

ليكن العدد س + ت ص هو الجذر التربيعي للعدد المركب −٢ + ($٢\sqrt{٣}$) ت، حيث س، ص عددان حقيقيان.

س + ت ص = $\sqrt{-٢ + (٢\sqrt{٣})\,ت}$	ربّع الطرفَين.
(س + ت ص)^{٢} = −٢ + ($٢\sqrt{٣}$) ت	فك الأقواس في الطرف الأيمن.
س^{٢} + ٢س ص ت + ت^{٢} ص^{٢} = −٢ + ($٢\sqrt{٣}$) ت	جمّع الأجزاء الحقيقية، والأجزاء التخيلية معًا، ت^{٢} = −١
(س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = −٢ + ($٢\sqrt{٣}$) ت	ساوِ الأجزاء الحقيقية، وكذلك الأجزاء التخيلية.
س^{٢} − ص^{٢} = −٢ .... (١)	
٢س ص = $٢\sqrt{٣}$ .... (٢)	حل النظام آنيًا.

من المعادلة (٢): ص = $\frac{\sqrt{٣}}{س}$، وبالتعويض في (١) نجد أن:

س^{٢} − $\frac{٣}{س^{٢}}$ = −٢	اضرب في س^{٢}
س^{٤} − ٣ = −٢س^{٢}	أعد ترتيب المعادلة، وافترض أن ل = س^{٢}
ل^{٢} + ٢ل − ٣ = ٠	حل المعادلة.
(ل + ٣) (ل − ١) = ٠	
ل = −٣، ل = ١	
س^{٢} = −٣، س^{٢} = ١	س عدد حقيقي، لذا أهمل س^{٢} = −٣
س = ±١	عوّض في ص = $\frac{\sqrt{٣}}{س}$

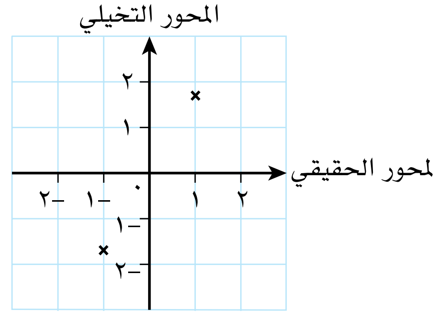
عند س = ١ تكون ص = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$ = $\sqrt{٣}$

عند س = −١ تكون ص = $\frac{\sqrt{٣}}{-١}$ = $-\sqrt{٣}$

وعليه، فإن الجذور التربيعية للعدد $-٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت

هي: $١ + ت\sqrt{٣}$ ، $-١ - ت\sqrt{٣}$

لاحظ أن الجذرَين التربيعيَّين لهما المقياس نفسه، وأن الفرق بين السعتين هو π.



الجذور التكعيبية للواحد

من النظرية الأساسية في الجبر، توجد للمعادلة $ع^{٣} - ١ = ٠$ ثلاثة جذور (أحدها جذر حقيقي، والآخران مركبان مترافقان).

نعرف أن أحد هذه الجذور هو ١، لأن $ع = \sqrt[٣]{١} = ١$، وهو الجذر الحقيقي المعروف.

لتجد الجذرَين المركبَين في صورة س ± ت ص، ص $\neq$ ٠ اتبع الطريقة الآتية:

$\because$ ع = ١ أحد الجذور، فإن (ع − ١) أحد العوامل، وعليه:

$$ع^{٣} - ١ = (ع - ١)(ع^{٢} + ب ع + ١)$$ فك الأقواس، وقارن.

$$ع^{٣} - ١ = ع^{٣} + ب ع^{٢} + ع - ع^{٢} - ب ع - ١$$

$$= ع^{٣} + (ب - ١) ع^{٢} + (١ - ب) ع - ١$$

$$ع^{٣} - ١ = ع^{٣} + (ب - ١) ع^{٢} + (١ - ب) ع - ١$$ قارن معاملات $ع^{٢}$

$$ب - ١ = ٠ ، ب = ١$$ تأكد باستخدام معاملات ع.

$$٠ = ١ - ١ \checkmark$$

$$ع^{٣} - ١ = (ع - ١)(ع^{٢} + ع + ١)$$ حل المعادلة.

$$ع = ١ ، ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١^{٢} - ٤(١)(١)}}{٢(١)} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$$

$\therefore$ الجذور التكعيبية للواحد هي: $ع = ١ ، ع = \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢} ، ع = \frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$

تُعدّ هذه الجذور مفيدة عندما تحل معادلات ذات صلة.

مثــال ١٨

حل المعادلة ع^{٣} = ٨

الحــلّ:

ع = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ $\sqrt[٣]{١}$ .... بما أن ع = ٢ × $\sqrt[٣]{١}$، استبدل $\sqrt[٣]{١}$ بكل جذر من الجذور التكعيبية للواحد.

ع = ٢ × ١، ع = ٢ × $\frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}$، ع = ٢ × $\frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢}$ .... بسّط.

ع = ٢، ع = −١ + ت$\sqrt{٣}$، ع = −١ − ت$\sqrt{٣}$

تمارين ٧-٥

١) إذا علمت أن ع$_{١}$ = −ت جذر للمعادلة ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ك = ٠، فأوجد:

أ قيمة العدد الثابت ك.

ب الجذرين الآخرين للمعادلة، وحدد ما إذا كانا حقيقيين أم مركبين.

٢) ليكن ع = ٢ + ت جذرًا للمعادلة ع^{٣} − ١٢ع^{٢} + ل ع + ك = ٠،
حيث ل، ك عددان حقيقيان:

أ اكتب جذرًا آخر للمعادلة.

ب أوجد قيمة كلّ من ل، ك.

ج مثّل جميع جذور المعادلة على مخطط أرجاند.

٣) أوجد جذور المعادلة ٢ع^{٢} + ع + ٣ = ٠، واكتب إجابتك في الصورة القطبية.

٤) إذا علمت أن (ع − ٣) عامل للعبارة ع^{٣} − ٣ع^{٢} + ٢٥ع − ٧٥، فأوجد جذور المعادلة ع^{٣} − ٣ع^{٢} + ٢٥ع − ٧٥ = ٠

٥) إذا علمت أن (س + ت ص)^{٢} = ٥٥ + ٤٨ت، فأوجد قيمة كل من س، ص، حيث س، ص عددان حقيقيان موجبان.

٦) إذا علمت أن (٢ع + ١) عامل للعبارة ٢ع^{٣} − ١١ع^{٢} + ١٤ع + ١٠، فأوجد جذور المعادلة ٢ع^{٣} − ١١ع^{٢} + ١٤ع + ١٠ = ٠

٧) إذا علمت أن ع = ٣ت جذر للمعادلة ع^{٤} − ٢ع^{٣} + ١٤ع^{٢} − ١٨ع + ٤٥ = ٠، فحلّ المعادلة.

٨) أوجد الجذور التربيعية لكلّ من الأعداد المركبة الآتية:

أ $٢٤ - ١٠\text{ت}$

ب $٧ + (٦\sqrt{٢})\text{ت}$

ج $\frac{٥}{٤} - \text{ت}\sqrt{٦}$

د $٧ - ٢٤\text{ت}$

هـ $-٤ + (٢\sqrt{٥})\text{ت}$

٩) حل كلًا من المعادلات الآتية:

أ $(\text{ع} - ٥)^{٢} = ٨$

ب $(٢\text{ع} + ٣)^{٢} = \frac{١}{٦٤}$

١٠) لتكن $\text{د}(\text{ع}) = \text{ع}^{٤} - \text{ع}^{٣} + ٢٠\text{ع}^{٢} - ١٦\text{ع} + ٦٤ = (\text{ع}^{٢} + \text{أ})(\text{ع}^{٢} + \text{ب ع} + ٤)$

حلّ المعادلة $\text{د}(\text{ع}) = ٠$

١١) أ بيّن أن $\text{ع} = \frac{١}{٥} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}\text{ت}$ أحد جذور المعادلة $٥\text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ٥ = ٠$

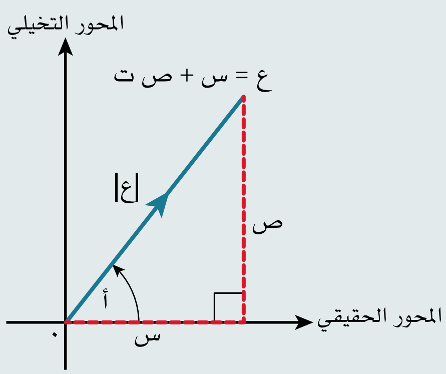
ب اكتب الجذر الآخر للمعادلة.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

$ت^{٢} = -١$، أي أن: $ت = \sqrt{-١}$

العمليات الحسابية على $ع_{١} = أ + ب\,ت$، $ع_{٢} = ج + د\,ت$:

- الجمع: $ع_{١} + ع_{٢} = (أ + ج) + (ب + د)\,ت$
- الطرح: $ع_{١} - ع_{٢} = (أ - ج) + (ب - د)\,ت$
- الضرب: $ع_{١}\,ع_{٢} = (أ\,ج - ب\,د) + (أ\,د + ب\,ج)\,ت$
- القسمة: $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{(أج + ب\,د) + (ب\,ج - أد)\,ت}{ج^{٢} + د^{٢}} = \frac{(أج + ب\,د)}{ج^{٢} + د^{٢}} + \frac{(ب\,ج + أ\,د)}{ج^{٢} + د^{٢}}\,ت$
- عند ضرب عدد مركب في مرافقه تكون النتيجة دائمًا عددًا حقيقيًا، لأنه إذا كان $ع = س + ت\,ص$، $ع^{*} = س - ت\,ص$، فإن $ع\,ع^{*} = (س + ت\,ص)(س - ت\,ص) = س^{٢} + ص^{٢}$، وبما أن س، ص عددان حقيقيان، فإن $س^{٢} + ص^{٢}$ عدد حقيقي. كذلك عند جمع العدد المركب ع مع مرافقه $ع^{*}$ تكون النتيجة دائمًا عددًا حقيقيًا، وتساوي ٢س.



المقياس والسعة للعدد المركب $ع = س + ص\,ت$

- المقياس: $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$
- السعة: توجد باستخدام مخطط أرجاند حيث $ظا\,أ = \frac{ص}{س}$

المقياس والسعة للعدد المركب $(ع_{١}ع_{٢})$

- المقياس $= |ع_{١}ع_{٢}| = ر_{١} \times ر_{٢} = |ع_{١}||ع_{٢}|$،
- السعة $= أ_{١} + أ_{٢}$

  = السعة للعدد المركب $(ع_{١})$ + السعة للعدد المركب $(ع_{٢})$

المقياس والسعة للعدد المركب $\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)$

- المقياس $= \left|\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right| = \frac{ر_{١}}{ر_{٢}} = \frac{|ع_{١}|}{|ع_{٢}|}$،
- السعة $= أ_{١} - أ_{٢}$

  = السعة للعدد المركب $(ع_{١})$ − السعة للعدد المركب $(ع_{٢})$

صور العدد المركب

- الصورة الديكارتية للعدد المركب هي: س + ت ص حيث س، ص عددان حقيقيان.
- الصورة القطبية: $ر\,(جتا\,أ + ت\,جا\,أ)$.
- الصورة الأسيّة: $ر\,هـ^{ت\,أ}$.

نظرية العوامل

لأي دالة معطاة د (س):

- إذا كان (س − أ) عاملًا للدالة د (س)، فإن د (أ) = ٠
- إذا كانت د (أ) = ٠، فإن (س − أ) عامل للدالة د (س).
- إذا كان (أس + ب) عاملًا للدالة د (س)، فإن د $\left(-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)$ = ٠
- إذا كانت د $\left(-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)$ = ٠، فإن (أس + ب) عامل للدالة د (س).

الجذور المركبة للمعادلات تكون أزواجًا أحدهما مرافق للآخر

- للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان أو جذران مركبان في صورة س ± ت ص، ص ≠ ٠
- للمعادلة التكعيبية ٣ جذور حقيقية أو جذر حقيقي وجذران مركبان في صورة س ± ت ص، ص ≠ ٠
- للمعادلة من الدرجة الرابعة ٤ جذور حقيقية أو جذران حقيقيان وجذران مركبان في صورة س ± ت ص، ص ≠ ٠ أو ٤ جذور مركبة في صورة س + ت ص، ص ≠ ٠

الجذور التكعيبية للواحد هي: ع = ١، ع = $\frac{-١ + \text{ت}\sqrt{٣}}{٢}$، ع = $\frac{-١ - \text{ت}\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) اكتب $\frac{\text{٥ − ٢ت}}{\text{١ + ٣ت}}$ في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

٢) حل المعادلة ق$^{\text{٢}}$ − ٢ق + ٢٦ = ٠

٣) ليكن العدد المركب ع = ك − ٦ت، حيث ك قيمة حقيقية ثابتة.

أوجد عبارات بدلالة ك لكل من: ع ع*، $\frac{\text{ع}}{\text{ع*}}$، وبسّطها. اكتب إجابتك في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

٤) ليكن العددان المركبان ق، ح، حيث ق = ٤$\left(\text{جتا}\ \frac{\text{٥}\pi}{\text{١٢}} + \text{ت جا}\ \frac{\text{٥}\pi}{\text{١٢}}\right)$، ح = ٢هـ$^{\text{ت}\pi}$،

أوجد عبارة لـ $\frac{\text{ق}}{\text{ح}}$، وبسّطها، واكتب إجابتك في صورة رهـ$^{\text{ت أ}}$، حيث ر > ٠، −π < أ ⩽ π

٥) ليكن العدد المركب ح = ١ + ٢ ت:

أ مثّل ح، ح* على مخطط أرجاند، وسمّهما ل، ك، مع نقطة الأصل و، ثم صِف المثلث و ل ك.

ب إذا علمت أن ق = −٣ − ت، فاكتب العدد المركب $\frac{\text{ق}}{\text{ح}}$ في صورة ر (جتا هـ + ت جا هـ)، −π < هـ ⩽ π

٦) لتكن ع = ٢ − ٥ت:

أ أوجد قيمتَي س، ص الحقيقيتَين بحيث ع* = (٢س + ١) + (٤س + ص) ت.

ب عيّن النقاط ا، ب، ج على مخطط أرجاند التي تمثل الأعداد المركبة ع، ع*، −ع على الترتيب. ما نوع المثلث ا ب ج؟

ج اكتب $\frac{\text{ع*}}{\text{−ع}}$ في صورة:

١) س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

٢) ر (جتا أ + ت جا أ)، حيث ر > ٠، −π < أ ⩽ π

٧) لتكن ع$^{\text{٢}}$ + (٤$\sqrt{\text{٣}}$) ع + ١٣= ٠:

أ أوجد جذور المعادلة، واكتب إجابتك في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

ب مثّل متجهَي الموضع $\overleftarrow{\text{و أ}}$، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ اللذَين يمثلان جذور المعادلة على مخطط أرجاند، حيث و نقطة الأصل.

ج أوجد المقياس والسعة لكلّ جذر.

٨) لتكن ع = ٤$\sqrt{٣}$ − ٤ت:

أ) أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع.

ب) إذا علمت أن ح = ٢$\sqrt{٢}$ $\left(\text{جتا } \frac{\pi}{١٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{١٢}\right)$، فاكتب $\frac{\text{ع}}{\text{ح}}$ في صورة ر هـ$^{\text{ت أ}}$، حيث $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$

٩) أوجد العدد المركب ح الذي يحقق المعادلة ح* − ٢ − ٢ت = ٣ت ح، واكتب إجابتك في صورة س + ص ت، حيث س، ص عددان حقيقيان.

١٠) إذا علمت أن (س + ت ص)^{٢} = ٧ − (٦$\sqrt{٢}$)ت، حيث س، ص عددان حقيقيان، فأوجد قيمتَي س، ص.

١١) أ) بيّن أن (ع − ٣) عامل للعبارة ٢ع^{٣} − ٤ع^{٢} − ٥ع − ٣

ب) حل المعادلة ٢ع^{٣} − ٤ع^{٢} − ٥ع − ٣ = ٠

١٢) إذا علمت أن ع$_{١}$ = ٥ − ٣ت، ع$_{١}$ع$_{٢}$ = ٢١ + ت، فأوجد ع$_{٢}$ في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

١٣) حل المعادلة (٣ع + ١)^{٣} = −٢٧

١٤) إذا علمت أن ح = ١ جذر للمعادلة ٢ح^{٤} + ٥ح^{٣} − ٢ح^{٢} + ح − ٦ = ٠:

أ) بيّن أن (ح + ٣) عامل للعبارة ٢ح^{٤} + ٥ح^{٣} − ٢ح^{٢} + ح − ٦

ب) حل المعادلة د (ح) = ٠

١٥) أ) إذا علمت أن ع$_{١}$ = $-\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢}$ت جذر للمعادلة ع^{٢} + ل ع + ك = ٠، حيث ل، ك عددان حقيقيان، فأوجد قيمتَي ل، ك.

ب) أوجد $|$ع$_{١}|$.

١٦) أ) أوجد جذور المعادلة ع^{٣} + ١ = ٠

ب) حدّد النقاط ا، ب، ج التي تمثل جذور المعادلة ع^{٣} + ١ = ٠ على مخطط أرجاند. ما نوع المثلث ا ب ج؟

١٧) لتكن ع = $\sqrt{٥}$ − ت:

أ) بيّن أن $\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{*}} = \frac{٢}{٣} - \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ت.

ب) أوجد قيمة $\left|\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{*}}\right|$، والسعة لـ $\left(\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{*}}\right)$.

ج) أوجد معادلة تربيعية جذراها $\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{*}}$ ومرافقه، ثم بسّطها.

١٨) عُرّف العدد المركب ع على النحو: ع = $\frac{ك - ٤ت}{٢ك - ت}$، حيث ك عدد صحيح.

أ إذا علمت أن الجزء التخيلي لـ ع هو $\frac{٧}{٥}$ ، فأوجد قيمة ك.

ب أوجد سعة ع.

١٩) حل المعادلة ٣ح + ٢ت ح* = ١٧ + ٨ ت، حيث ح* هو عدد مركب مرافق للعدد ح، واكتب إجابتك في صورة أ + ب ت.

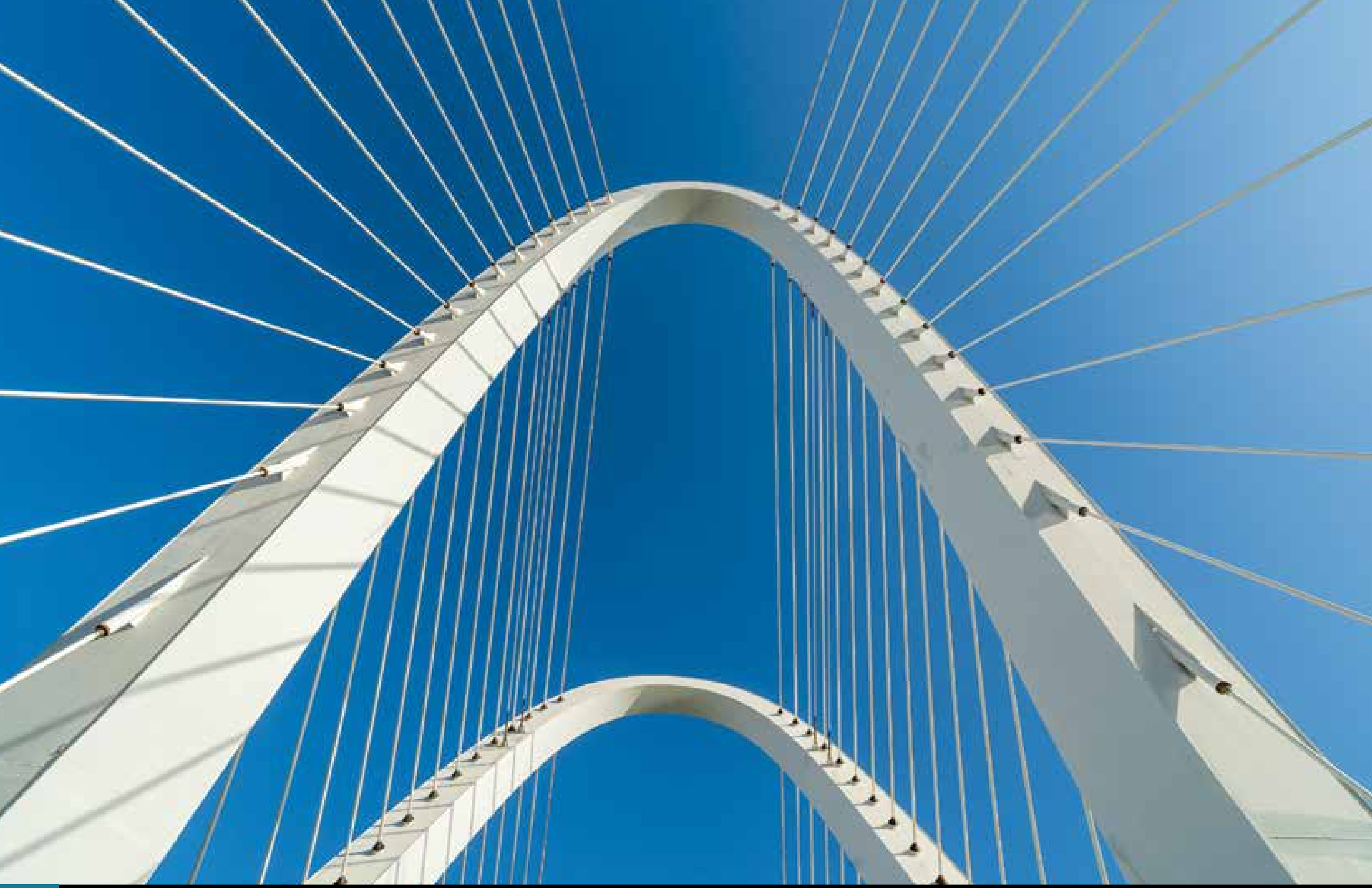
٢٠) العددان المركبان ق، ف يحققان المعادلتَين: ق + ٢ف = ٢ ت ، ت ق + ف = ٣

حل المعادلتَين لإيجاد ق، ف، واكتب إجابتك في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

٢١) يحقق العددان المركبان ح، ع العلاقة ح = $\frac{ع + ت}{ت ع + ٢}$. إذا علمت أن:

أ ع = ١ + ت، فأوجد ح في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.

ب ح = ع، والجزء الحقيقي لـ ع سالب (س < ٠)، فأوجد ع، واكتب إجابتك في صورة س + ت ص، حيث س، ص عددان حقيقيان.



الوحدة الثامنة

التوزيع الطبيعي

The normal distribution

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٨-١ تعرّف خصائص المتغير العشوائي المتصل، واستخدام التوزيع الطبيعي لتمثيل المتغير العشوائي المتصل حيث يكون مناسبًا.

٨-٢ تتذكر خصائص التوزيع الطبيعي.

٨-٣ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي، عندما ز ~ ط (٠، ١) لإيجاد:

- قيمة ل(ز < ز$_{١}$)، أو قيمة احتمال متعلقة بها.
- قيمة ز$_{١}$، بمعلومية قيمة ل(ز < ز$_{١}$)، أو قيمة احتمال متعلقة بها.

٨-٤ تستخدم جدول التوزيع الطبيعي لتحل المسائل المتعلقة بالمتغير س، حيث س ~ ط (و، ع^{٢})، بما في ذلك إيجاد:

- قيمة ل(س < س$_{١}$)، أو قيمة احتمال متعلق بذلك، بمعلومية قيم س$_{١}$، و، ع.
- قيمة س$_{١}$، و، ع إذا علمت قيمة ل(س < س$_{١}$)، أو قيمة احتمال متعلق بذلك.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الحادي عشر، الوحدة الرابعة	تجد الوسط الحسابي، والتباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات.	١) لمجموعة البيانات ١٢، ٣، ٨، ١٢، ٦، ٣، ١٢، أوجد: أ الوسط الحسابي ب التباين والانحراف المعياري (مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية)
الصف الحادي عشر، الوحدة التاسعة	تكتب قيم المتغير العشوائي المنفصل، وتحسب الاحتمالات المتعلقة به.	٢) يبيّن الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل س: س: ٢، ٣، ٤، ٥ ل(س): $\frac{٢}{١٣}$، $\frac{٤}{١٣}$، $\frac{١}{٢}$ك، ٣ك أ اكتب قيم المتغير العشوائي س. ب أوجد قيمة ك. ج احسب ل(٣ < س ≤ ٥)

المفردات

المتغير العشوائي المتصل Continuous random variable

دالة كثافة الاحتمال Probability density function (PDF)

المنحنى الطبيعي Normal curve

التوزيع الطبيعي Normal distribution

المقاييس Parameters

المتغير الطبيعي المعياري Standard normal variable

المعيارية Standardising

الدرجة (القيمة) (ز) Z-score

لماذا ندرس التوزيع الطبيعي؟

إذا درست أيًّا من الفروع العلمية، فإنه يطلب إليك أحيانًا قياس مقدار كجزء من تجربة ما. قد يكون المقدار قياس زمن، أو كتلة، أو مسافة، أو حجم، أو غيرها. ومهما تكن طبيعة التجربة، فإن قياس المقادير المتصلة ستتعرض لخطأ ما، فطبيعة المقادير المتصلة تعني عدم القدرة على قياسها بدقة مهما حاولنا ذلك، وعدم الدقة يكمن في أدوات القياس المستخدمة، وفي طبيعتنا البشرية، حيث نضيف إليها مقدارًا من عدم المصداقية.

من جهة ثانية، قد تكون الأخطاء الصغيرة محتومة أكثر من الأخطاء الكبيرة، ومن المرجح أن يكون لدينا سوء تقدير للقياسات، سواء للأعلى أو للأدنى. وعند تكرار القياسات، فإن الأخطاء يلغي بعضها بعضًا، ويكون معدل الخطأ قريبًا من الصفر، لذا يحق لنا أن نفترض أن معدل القياسات خال تقريبًا من الأخطاء.

تُعدّ هذه الوحدة مقدمة لفكرة المتغير العشوائي المتصل، والطريقة المستخدمة لتقديم التوزيع الاحتمالي له. سيتم التركيز على نوع واحد من المتغير العشوائي المتصل، وهو الذي يتبع التوزيع الطبيعي.

لقد اكتشف التوزيع الطبيعي في أواخر القرن الثامن عشر العالم الرياضي الألماني كارل فريدريتش جاوس (Carl Friedrich Gauss) خلال بحثه في أخطاء القياسات في المشاهدات الفلكية. فبعض خصائص التوزيع الطبيعي تكمن في أن القيم القريبة من الوسط هي الأكثر ترجيحًا، وأنه كلما ابتعدت القيم عن الوسط، أصبحت فرص حدوثها أقل، وأن المنحنى متماثل حول قيمة الوسط.

يوجد العديد من الأمثلة على المتغير العشوائي المتصل، والمأخوذة من واقع الحياة، والتي يمكن تمثيلها باستخدام التوزيع الطبيعي، والكثير من هذه الأمثلة يحدث طبيعيًا مثل: الطول، وكتلة المولود، وزمن الحمل، وضغط الدم، والقدرة على القراءة، والوقت المستغرق لتعلم مهارة جديدة، والرضى الوظيفي، والدرجات المحصّلة في الاختبارات الدولية، واختبارات الذكاء، وغيرها.

بعض خصائص التوزيع الطبيعي التي ستدرسها:

- متماثل حول الوسط الحسابي.
- كلما اقتربت القيم من الوسط الحسابي، زادت فرصة حدوثها.
- كلما ابتعدت القيم عن الوسط الحسابي، قلّت فرصة حدوثها.

٨-١ المتغير العشوائي المتصل والمنحنى الطبيعي
Continuous random variable and the normal curve

إذا كانت القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) تأخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها، فإن (س) يعتبر **متغيرًا عشوائيًا متصلًا** **continuous random variable**.

أحد الأمثلة على المتغير العشوائي المتصل هو الطول، إذ ليس ممكنًا أن نجد طول شخص ما بدقة متناهية، ولكننا يمكن أن نعطي طوله مقرّبًا إلى أقرب سنتيمتر.

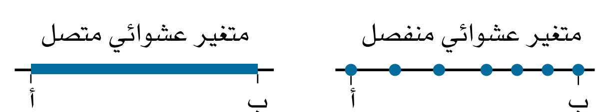
فمثلًا، إذا كان الطول المعطى ١٦٣ سم، فهذا يعني أن الطول يقع ضمن الفترة

١٦٢,٥ ⩽ الطول < ١٦٣,٥ سم.

وبالمثل فإن كتلة الطفل حديث الولادة تمثّل متغيرًا عشوائيًا متصلًا. فإذا كانت كتلة طفل معيّن حديث الولادة ٣,٢ كجم، فهي تعني أن كتلته تقع ضمن الفترة ٣,١٥ ⩽ الكتلة < ٣,٢٥ كجم.

تعطى قيم المتغير العشوائي المتصل لأقرب درجة من الدقة، وهي تختلف عن قيم المتغير العشوائي المنفصل. فإذا أخذنا عدد المسافرين على متن الطائرة، فيمكن أن يعطى العدد بدقة كاملة مثل ٠، ١، ٢، ٣، ... وهكذا.

تعرض المخططات الآتية القيم الممكنة لهذَين النوعَين من المتغيرات العشوائية على الفترة (المجال) من أ إلى ب:



درست سابقًا أن في التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل، يمكننا كتابة جميع القيم الممكنة، والاحتمال المناظر لكلّ منها يكون فيٍ جدول أو في مخطط كالأعمدة البيانية.

أما في التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل، فلا يمكننا كتابة جميع القيم، ولكن يمكن كتابة المجال الكامل لكل القيم على شكل فترات، واحتمالات هذه الفترات التي تظهر في **جدول**، أو في **مدرج تكراري**.

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا منفصلًا، فيمكننا تمثيل ل(س).
- إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فيمكننا تمثيل

ل(أ < س ≤ ب) أو ل(أ ≤ س < ب)، أو غير ذلك.

المنحنى الطبيعي

يمكن عرض بيانات المتغير العشوائي المتصل في المدرج التكراري، حيث يمثّل ارتفاع العمود كثافة التكرار، وتتناسب مساحات الأعمدة مع تكراراتها.

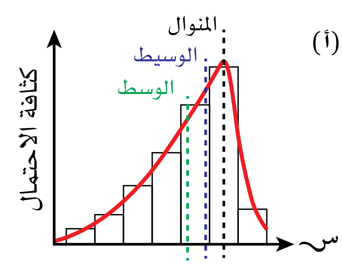
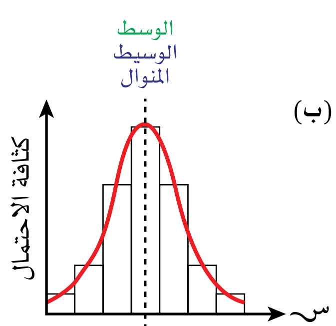
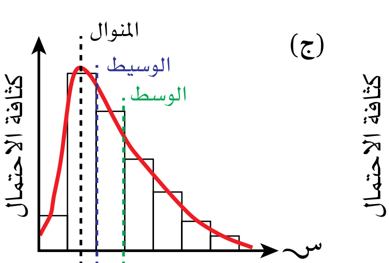
في المدرج التكراري، يكون مجموع مساحات الأعمدة مساويًا لمجموع تكرار البيانات.

لتمثّيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل، نرسم منحنى يعتمد على شكل المدرج التكراري.

يُسمى تمثيل المنحنى بـ **دالة كثافة الاحتمال** **probability density function (PDF)**.

عندما نرسم منحنى دالة كثافة الاحتمال فوق المدرج التكراري، فإننا نحوّل كثافة التكرار إلى كثافة الاحتمال، وعليه تكون **المساحة الكلية تحت المنحنى مساوية لمجموع الاحتمالات، وتساوي واحدًا.**

ترسم منحنيات دالة كثافة الاحتمال فوق المدرج التكراري للمتغير العشوائي المتصل (س) كما هو مبيّن في الأشكال الآتية:

 التواء سالب، الالتواء إلى اليسار	 متماثل	 التواء موجب، الالتواء إلى اليمين
التوزيع في الشكل (أ) هو التواء سالب لأن الوسط الحسابي للمتغير (س) يقع إلى يسار قمة المنحنى. **الوسط الحسابي < الوسيط < المنوال**	التوزيع في الشكل (ب) متماثل، ويقع المنوال، والوسط الحسابي، والوسيط عند قمة المنحنى، وجميعها متساوية. **الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال**	التوزيع في الشكل (ج) هو التواء موجب لأن الوسط الحسابي للمتغير (س) يقع إلى يمين قمة المنحنى. **الوسط الحسابي > الوسيط > المنوال**

يقع المنوال عند قمة المنحنى ويقع الوسيط عند القيمة التي تقسم المساحة تحت المنحنى إلى جزأين متساويَين.

المنحنى الذي يمثّل التوزيع الاحتمالي في الشكل (ب) يسمّى: **المنحنى الطبيعي** **normal curve**.

استكشف ١

تبيّن الجداول أدناه التوزيع التكراري لثلاثة متغيرات عشوائية متصلة (ع)، (س)، (ص).
توجد ١٢٦ قيمة للمتغير (ع) في الفترة من ٣ إلى ١٨:

ع	٣ ⩽ ع < ٦	٦ ⩽ ع < ٩	٩ ⩽ ع < ١٢	١٢ ⩽ ع < ١٥	١٥ ⩽ ع < ١٨
التكرار (ت)	٢٤	٢٧	٢٤	٢٧	٢٤
كثافة التكرار	$\frac{٢٤}{٦ - ٣} = ٨$				

توجد ٢١٦ قيمة للمتغير (س) في الفترة من ٢ إلى ٢٢

س	٢ ⩽ س < ٦	٦ ⩽ س < ١٠	١٠ ⩽ س < ١٤	١٤ ⩽ س < ١٨	١٨ ⩽ س < ٢٢
التكرار (ت)	١٢	٥٦	٨٠	٥٦	١٢
كثافة التكرار	$\frac{١٢}{٦ - ٢} = ٣$				

توجد ٨٥ قيمة للمتغير (ص) في الفترة من ١ إلى ٢٦

ص	١ ⩽ ص < ٦	٦ ⩽ ص < ١١	١١ ⩽ ص < ١٦	١٦ ⩽ ص < ٢١	٢١ ⩽ ص < ٢٦
التكرار (ت)	٢٥	١٥	٥	١٥	٢٥
كثافة التكرار	$\frac{٢٥}{٦ - ١} = ٥$				

١) انسخ الجداول، وأكملها بأن تحسب كثافة تكرار القيم.
٢) ارسم مدرجًا تكراريًا لكلّ من التوزيعات الثلاثة.
٣) ارسم منحنى فوق الأعمدة لكلّ مدرج تكراري.
٤) ما المشترك بين المنحنيات الثلاثة التي رسمتها؟
٥) أي المنحنيات التي رسمتها يمكن وصفه بالمنحنى الطبيعي؟

في نشاط استكشف ١، التوزيع التكراري للمتغير العشوائي المتصل (س) متماثل، وهو منحنى طبيعي يأخذ شكل الجرس.

إذا كان بالإمكان تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل لعدد محدد من القيم بمنحنى طبيعي على فترة محددة، فإن:

- **قمة المنحنى الطبيعي تقع عند الوسط الحسابي (و)، وهي النقطة التي يمر بها محور التماثل.**
- **الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.**

- **تتناقص الاحتمالات مع التحرك بعيدًا عن الوسط الحسابي من كلتا الجهتَين**، حيث إنه كلما ابتعدت القيم عن الوسط الحسابي، كانت فرصة حدوثها قليلة.
- **تناقص قيمة الوسط الحسابي عن الوسيط والمنوال تسحب المنحنى إلى اليسار.**
- **تزايد قيمة الوسط الحسابي عن الوسيط والمنوال تسحب المنحنى إلى اليمين.**
- **تناقص قيمة الانحراف المعياري (ع) والتباين ($ع^٢$) يؤدي إلى أن يكون انتشار القيم قريبًا حول الوسط الحسابي. ويؤدي ذلك إلى زيادة في الارتفاع، ونقص في العرض، الأمر الذي يؤكد على بقاء المساحة نفسها تحت المنحنى.**

عند مقارنة منحنيات طبيعية لأطوال الأولاد، وأطوال البنات في مدرسة ما يمكن رسمهما على الشكل نفسه، تكون المقارنة على النحو الآتي:

- **إذا كان لمنحنيَين طبيعيَّين محور التماثل نفسه، فإن للمتغيرَين الوسط الحسابي نفسه.**
- **إذا كان لمنحنيَين طبيعيَّين الارتفاع والعرض نفساهما، فإن للمتغيرَين الانحراف المعياري والتباين نفسَيهما.**

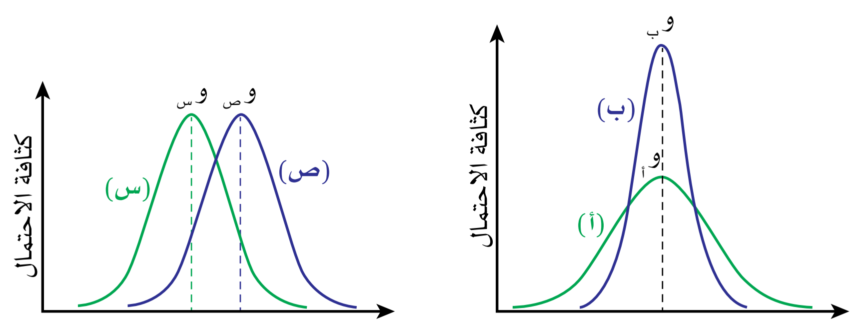
مُساعَدة

الرموز التي تستخدم للتعبير عن المقاييس المهمة في توزيع المتغير العشوائي المتصل (س) هي:

- الوسط الحسابي = و أو $و_س$
- التباين = $ع^٢$ أو $ع^٢_س$
- الانحراف المعياري = ع أو $ع_س$

مثـــال ١

تبيّن الأشكال الآتية منحنيات طبيعية تمثل التوزيعات الاحتمالية (أ)، (ب)، (س)، (ص).



الوسط الحسابي لكل من المتغيرات هو $و_أ$، $و_ب$، $و_س$، $و_ص$، وانحرافاتها المعيارية هي $ع_أ$، $ع_ب$، $ع_س$، $ع_ص$.

قرر ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرر إجابتك:

أ $و_أ = و_ب$

ب $و_س < و_ص$

ج $ع_أ > ع_ب$

د $ع^٢_س = ع^٢_ص$

رابط الكتروني

يمكنك التحقق من تأثير تغيير المتوسط و/أو الانحراف المعياري على موقع وشكل المنحنى الطبيعي من خلال زيارة مصدر التوزيع الطبيعي على موقع GeoGebra الإلكتروني.

لاحظ أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي ١، أيًا كانت قيم و، ع التي تم اختيارها.

الحــلّ:

أ $و_أ = و_ب$ صحيحة. ..... الوسط الحسابي للمتغير (أ) يساوي الوسط الحسابي للمتغير (ب)، لأن المنحنيَين لهما محور التماثل نفسه، ويتمركزان حول قيمة الوسط الحسابي نفسها.

ب $و_س > و_ص$ خاطئة. ..... الوسط الحسابي للمتغير (س) ليس أكبر من الوسط الحسابي للمتغير (ص) لأن محورَي تماثل المنحنيَين مختلفان، فمحور تماثل منحنى (ص) يقع يمين محور تماثل منحنى (س) (العبارة الصحيحة هي $و_س < و_ص$) .

ج $ع_أ > ع_ب$ خاطئة. ..... شكلا المنحنيَين مختلفان. المنحنى (أ) أقصر وأعرض من المنحنى (ب) ، لذا تكون قيم التوزيع (أ) أكثر تباعدًا من قيم التوزيع (ب). الانحراف المعياري لـ (أ) أكبر منه لـ (ب) (العبارة الصحيحة هي $ع_أ < ع_ب$) .

د $ع_س^٢ = ع_ص^٢$ صحيحة. ..... المنحنيان لهما الشكل نفسه (لهما الارتفاع نفسه والعرض نفسه)، وانتشار قيمهما متماثل. الانحراف المعياري للمتغيرَين (س)، (ص) متساوٍ، لذا فلهما التباين نفسه.

مثــال ٢

يباع نوعان من الشاي (س) ، (ص) في عبوات تحوي كل عبوة منهما ١٠٠ جم من الشاي.
توزيع كتلة الشاي في العبوات لكلا النوعَين يتبع توزيعًا طبيعيًا .
تم استقصاء عدد كبير من عبوات الشاي من كلا النوعَين.
تم عرض النتائج في الجدول الآتي:

	النوع (س)	النوع (ص)
الوسط الحسابي لكتلة الشاي (جم)	١٠٤	٩٨
الانحراف المعياري (جم)	٣	٢

أ اكتب عبارة رياضية لتقارن بين:

١) الوسط الحسابي لكتلة الشاي من النوعَين.

٢) تباين كتلة الشاي من النوعَين.

ب ارسم منحنى طبيعيًا يلخص توزيع كتلة الشاي لكلا النوعَين (س)، (ص) على الشكل نفسه.

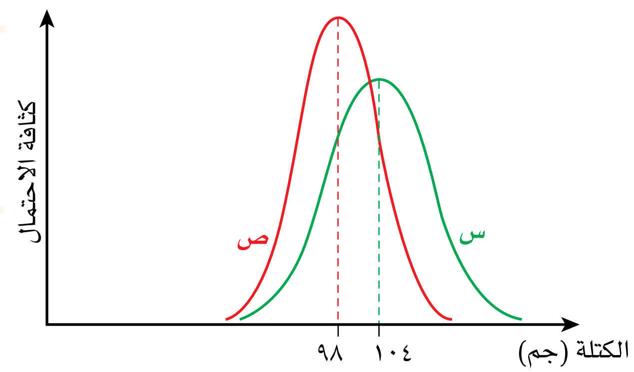
الحـــلّ:

أ

١) $و_{س} > و_{ص}$ — الوسط الحسابي للنوع (س) أكبر من الوسط الحسابي للنوع (ص).

٢) $ع^{٢}_{س} > ع^{٢}_{ص}$ — الانحراف المعياري للنوع (س) أكبر من الانحراف المعياري للنوع (ص)، لذا تباين النوع (س) أكبر من تباين النوع (ص)

ب



$و_{س} > و_{ص}$ لذا يكون محور تماثل المنحنى (س) إلى يمين محور تماثل المنحنى (ص).

$ع_{س} > ع_{ص}$، $ع^{٢}_{س} > ع^{٢}_{ص}$ لذا شكل المنحنيَين مختلف، فمنحنى (س) أقصر وأعرض من المنحنى (ص)، إلا أن المساحة تحت كل من المنحنيَين متساوية (تساوي ١).

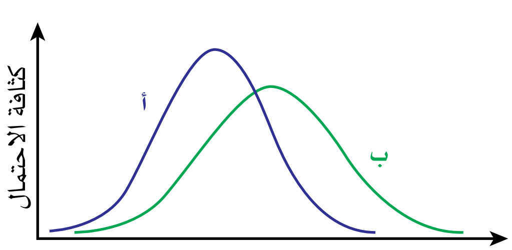
تمارين ٨-١

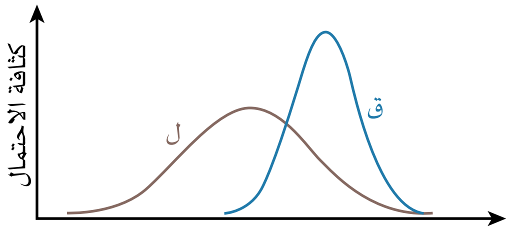
١) أيٌّ من العبارات الآتية يمثل متغيرًا عشوائيًا متصلًا؟ برر عدم كون المتغيرات العشوائية الأخرى متصلة.

- **أ** عدد مرات ظهور ’صورة‘ عند رمي قطعة نقد ١٠٠ مرة.
- **ب** عدد تأشيرات السفر لزيارة سلطنة عمان في شهر محرم الماضي.
- **ج** الحجوم الممكنة لأكوام من الرمل.
- **د** عدد مرات رمي حجر نرد منتظم حتى يظهر الوجه الذي يحمل الرقم ٦ لأول مرة.

٢) يبيّن الشكل المجاور توزيعَي الاحتمال للمتغيرَين العشوائيَّين المتصلَين (أ) ، (ب).
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرّر إجابتك.

- **أ** $و_{أ} > و_{ب}$
- **ب** $ع_{أ} > ع_{ب}$
- **ج** أكثر من نصف القيم في (ب) أكبر من $و_{أ}$
- **د** أقل من نصف القيم في (أ) أقل من $و_{ب}$





٣) يبيّن الشكل المجاور منحنيَين طبيعيَّين يمثلان التوزيعين الاحتماليين للمتغيرَين (ل)، (ق).

أ استخدم عبارة رياضية للمقارنة بين:

١) تباين المتغير (ل)، وتباين المتغير (ق).

٢) الوسط الحسابي للمتغير (ل)، والوسط الحسابي للمتغير (ق).

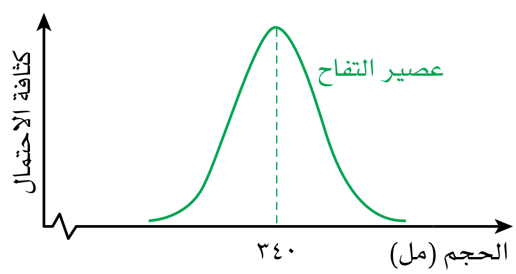
ب اكتشف أن هناك أخطاء في حساب (ل)، (ق).

الوسط الحسابي الصحيح للمتغير (ل) أكبر مما يظهر عليه في الشكل، والانحراف المعياري الصحيح للمتغير (ق) أقل مما يظهر في الشكل.

لتصحح الشكل، اشرح التغييرات الواجب القيام بها على المنحنى الطبيعي الذي يمثل:

١) المتغير (ل)   ٢) المتغير (ق)

ج عند تنفيذ هذه التغييرات في الجزئية (ب)، ما خواص كلا المنحنيَين التي لم تتغيّر؟



٤) التوزيع الاحتمالي لكمية العصير في ٥٠٠ علبة عصير تفاح ينتج منحنى طبيعيًا وسطه الحسابي ٣٤٠ مل، وتباينه ٤ مل^2 كما هو مبيّن في الشكل المجاور.

كمية العصير في ٧٥٠ علبة عصير خوخ تنتج منحنى طبيعيًا وسطه الحسابي ٣٤٠ مل، وانحرافه المعياري ٤ مل.

أ انسخ الشكل، وارسم عليه المنحنى الطبيعي الذي يمثل علب عصير الخوخ.

ب صف أوجه التشابه، وأوجه الاختلاف بين المنحنيَين.

٥) تتبع كل من كتلة ٤٤٤ طفلًا حديثي الولادة في البلد (أ)، وكتلة ٨٨٨ طفلًا حديثي الولادة في البلد (ب) منحنى طبيعيًا.

أطفال البلد (أ): و = ٣,٤ كجم، ع = ٢٠٠جم.

أطفال البلد (ب): و = ٣,٣ كجم، ع^2 = ٣٦١٠٠جم^2.

أ ارسم المنحنيَين الطبيعيَّين على التمثيل البياني نفسه، وسمّهما.

ب صِف أوجه التشابه، وأوجه الاختلاف بين المنحنيَين.

مُساعَدة

الوسط الحسابي

لـ س = $\frac{\sum س}{ن}$،

التباين

لـ س = $\frac{\sum س^2}{ن} - \left(\frac{\sum س}{ن}\right)^2$

٦) تتبع مجموعتا البيانات (س)، (ص) توزيعًا احتماليًا طبيعيًا:

$\sum$ س^2 = ٣٥٠٠٠، $\sum$ س = ١٢٠٠٠، ن = ٥٠٠٠

$\sum$ ص^2 = ٧٢٠٠٠، $\sum$ ص = ٢٦٠٠٠، ن = ١٠٠٠٠

أ بيّن أن محور تماثل المنحنى (ص) يقع إلى يمين محور تماثل المنحنى (س).

ب ارسم على التمثيل البياني نفسه المنحنى الطبيعي لكل من مجموعتَي بيانات (س)، (ص).

٨-٢ التوزيع الطبيعي The normal distribution

لاحظنا في الدرس ٨-١ كيف يُستخدم التماثل في المنحنى الطبيعي الذي يشبه الجرس في تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المتصلة.

يُمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل الذي له **توزيع طبيعي Normal distribution** بدالة رياضية تستخدم كأداة لتحديد احتمال حدوث نواتج أو مشاهدات مختلفة.

التمثيل البياني لهذه الدالة يُعرّف لجميع قيم (س) الحقيقية، وتساوي المساحة تحت المنحنى مجموع الاحتمالات أي ١

المقاييس Parameters التي تعرّف التوزيع الطبيعي لمتغير عشوائي متصل هي الوسط الحسابي (و)، والتباين ع^{٢}.

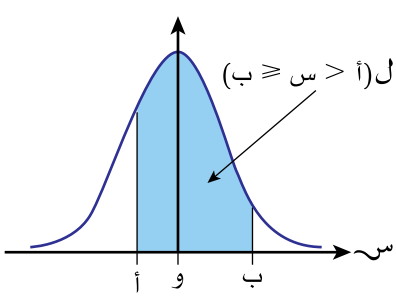
لوصف التوزيع الطبيعي لمتغير عشوائي متصل (س) نكتبه على النحو: س ~ ط (و، ع^{٢}).

نتيجة ١

تعرّف س ~ ط (و، ع^{٢}) توزيعًا طبيعيًا لمتغير عشوائي متصل.

وتقرأ 'س تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي (و)، وتباينه (ع^{٢})'.

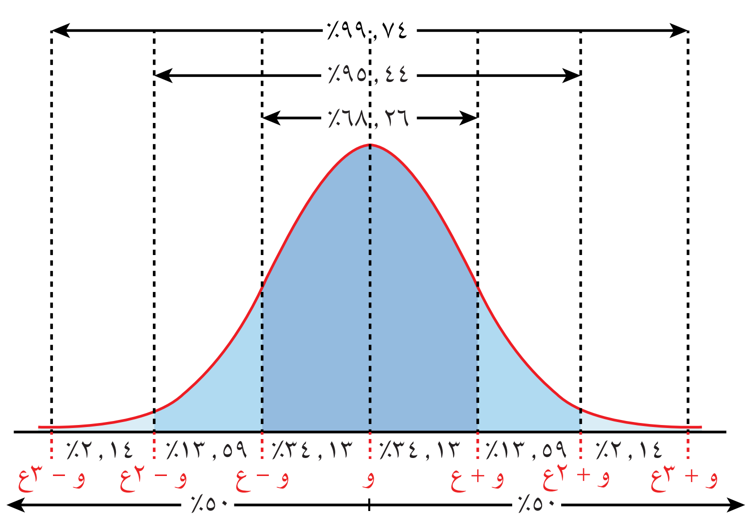
لأي توزيع طبيعي لمتغير عشوائي متصل (س)، احتمال أن تكون قيم (س) بين (أ)، (ب) يساوي المساحة تحت المنحنى الطبيعي المحصورة بين محور السينات، والحدَّين س = أ، س = ب.



مُساعَدة

المساحة تحت أيّ جزء من المنحنى هي نفسها سواء تضمنت الحدَّين أو لا. وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين قيم
ل(أ < س ≤ ب)،
ل(أ ≤ س < ب)،
ل(أ ≤ س ≤ ب)،
ل(أ < س < ب).

للتوزيع الطبيعي عدد من الخصائص المهمة، وبعضها مبيّن في التمثيل البياني والجدول الآتيين:

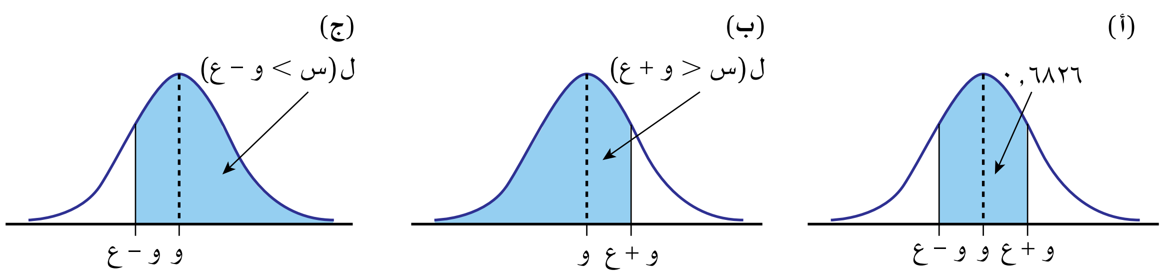


الخصائص	الاحتمال
نصف القيم أصغر من الوسط الحسابي. نصف القيم أكبر من الوسط الحسابي.	ل(س > و) = ل(س ⩾ و) = ٠,٥ ل(س < و) = ل(س ⩽ و) = ٠,٥
٦٨,٢٦٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.	ل(و − ع > س ⩾ و + ع) = ٠,٦٨٢٦
٩٥,٤٤٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار انحرافَين معياريَّين عن الوسط الحسابي.	ل(و − ٢ع > س ⩾ و + ٢ع) = ٠,٩٥٤٤
٩٩,٧٤٪ تقريبًا من القيم تقع بمقدار ٣ انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي.	ل(و − ٣ع > س ⩾ و + ٣ع) = ٠,٩٩٧٤

تلاحظ من الجدول أن احتمال القيم في التوزيع الطبيعي تنحصر بين عدد محدد، وثابت من الانحرافات المعيارية.

ويمكننا استخدام تماثل المنحنى والجدول، والمساحة الإجمالية تحت المنحنى والتي تساوي ١ لإيجاد احتمالات أخرى.

فمثلًا: لإيجاد ل(س > و + ع)، ل(س < و − ع) نتبع الخطوات الآتية:



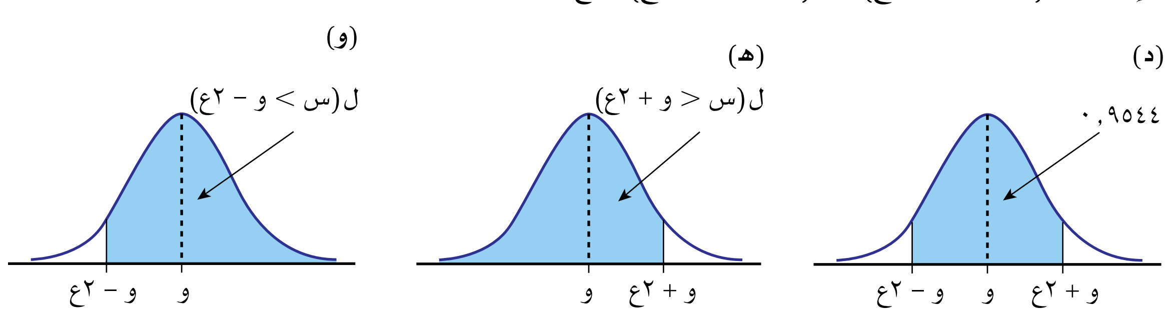
مساحة كل منطقة غير مظللة في الشكل (أ) = $\frac{١ - ٠,٦٨٢٦}{٢}$ = ٠,١٥٨٧

وعليه، فإن مساحة المنطقة المظللة في كل من الشكلَين (ب)، (ج) هي:

١ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٨٤١٣

نستنتج أن ل(س > و + ع) = ل(س < و − ع) = ٠,٨٤١٣

ولإيجاد ل(س > و + ٢ع)، ل(س < و − ٢ع) نتبع الخطوات الآتية:



مساحة كل منطقة غير مظللة في الشكل (د) = $\frac{١ - ٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٠٢٢٨

وعليه فإن مساحة المنطقة المظللة في كل من الشكلَين (هـ)، (و) هي:

١ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٩٧٧٢

نستنتج أن ل(س > و + ٢ع) = ل(س > و − ٢ع) = ٠,٩٧٧٢

استكشف ٢

يتضمن الجدول الآتي الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري لتوزيعات ثلاثة متغيرات عشوائية متصلة، وهي (أ)، (ب)، (ج):

	(أ)	(ب)	(ج)
الوسط الحسابي (و)	٤٠	٧٢	١٢٣
التباين ($ع^2$)	٦٤	١٤٤	١٢١
الانحراف المعياري (ع)	٨	١٢	١١

أُخذت مشاهدات عشوائية من كل توزيع، فكانت النتائج:

- (أ): ٧٨٧٢ من أصل ١٣١٢٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٣٢ إلى ٤٨
- (ب): ٨٣٦٢ من أصل ١٢٢٥٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٦٠ إلى ٨٤
- (ج): ٧٦٣٠ من أصل ١٠٩٠٠ مشاهدة تقع في الفترة من ١١٢ إلى ١٣٤

على كل فترة من الفترات أعلاه تقع المشاهدات ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي، أي بين (و − ع) ، (و + ع).

١) استخدم التمثيل البياني الثاني في هذا الدرس ٨-٢ (في نهاية الصفحة ١٤٦) والجدول الذي يليه (في بداية الصفحة ١٤٧)، لإيجاد تناسب القيم بين (و + ع)، (و − ع) لكل من التوزيعات (أ)، (ب)، (ج).

٢) هل من الممكن أن تمثل أي من هذه المتغيرات توزيعًا طبيعيًا؟

اكتب أحرف المتغيرات مرتبة بدءًا بالمتغير الأكثر ترجيحًا ليكون توزيعًا طبيعيًا.

٣) للمتغير العشوائي الأكثر ترجيحًا ليمثّل توزيعًا طبيعيًا، احسب القيم المتوقعة ح، ط، ف، ك المستخدمة في العبارات الآتية:

أ ح مشاهدة من ٥٠٠٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٤٨ إلى ٩٦

ب ١١٣٥٨ مشاهدة من ط مشاهدة تقع في الفترة من ٣٦ إلى ١٠٨

ج ف ٪ من المشاهدات جميعها تقع في الفترة من ٨٤ إلى ٩٦

د ك مشاهدة من ٩٦٨٠ مشاهدة تقع في الفترة من ٤٨ إلى ٨٤

التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي المتصل، حيث:

الوسط الحسابي (و) = ٠، والانحراف المعياري (ع) = ١، والتباين (ع^٢) = ١

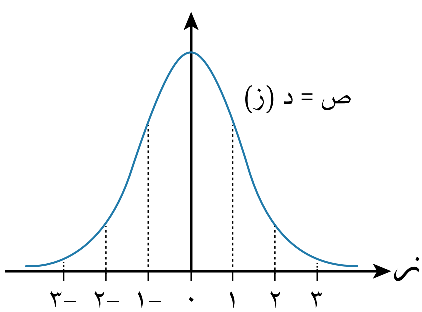
يُسمى **بالتوزيع الطبيعي المعياري** **standard normal distribution**.

ويُرمز للمتغير العشوائي في هذا التوزيع بالرمز (ز).

نتيجة ٢

في التوزيع الطبيعي المعياري لمتغير عشوائي متصل (ز) يكون الوسط الحسابي (و) = ٠، والتباين (ع^٢) = ١

التمثيل البياني للمتغير الطبيعي المعياري (ز):



معادلة منحنى التوزيع الطبيعي المعياري (دالة كثافة الاحتمال) هي:

د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}$ هـ$^{-\frac{س^٢}{٢}}$، حيث عدد أويلر Euler' number هـ ≈ ٢٫٧١٨٢٨

خصائص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

- الوسط الحسابي للمتغير (ز) هو و = ٠
- محور التماثل هو مستقيم رأسي يمر بالوسط الحسابي كما هي الحال في جميع التوزيعات الطبيعية.
- تباين (ز) هو ع^٢ = ١، وانحرافه المعياري هو ع = ١
- ز = ±١، ±٢، ±٣ تمثل قيم الانحراف المعياري ١، ٢، ٣ يسار (أصغر من الوسط أو يمين (أكبر من الوسط.
- أيّ قيمة ز < ٠ تمثّل قيمة يسار (أصغر من) الوسط الحسابي.
- أيّ قيمة ز > ٠ تمثّل قيمة يمين (أكبر من) الوسط الحسابي.
- عندما تكون ز > ٣٫٥، ز < –٣٫٥ تكون قيمة د(ز) قريبة جدًا من الصفر، أي ل(ز > ٣٫٥) = ل(ز < –٣٫٥) ≈ ٠
- المساحة تحت منحنى ص = د (ز) تساوي ١

المستقيم الرأسي عند ز = $ز_١$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى جزأين: مساحة أحد الجزأين هي ل (ز ⩽ $ز_١$)، ومساحة الجزء الآخر هي ل(ز > $ز_١$).

قيمة ل (ز ⩽ $ز_١$) تعني د ($ز_١$).

تم تجميع قيم د (ز) من قبل الرياضيين في جدول، ويظهر في نهاية الوحدة تحت مسمى جدول **التوزيع الطبيعي المعياري standard normal distribution**.

مُساعَدة

تم تجميع الجدول لأن العثور على المساحة الواقعة أسفل أجزاء المنحنى أمر صعب جدًا، ويستغرق وقتًا طويلًا.

ملاحظة حول استخدام الحاسبة

إضافة إلى استخدام الجدول، فإن بعض الآلات الحاسبة الحديثة تعطي قيم د (ز).

لتكتشف كيف يتم ذلك، ارجع إلى دليل الحاسبة، حيث إن نماذج الحاسبة لا تستخدم المفاتيح والرموز نفسها، إضافة إلى أن بعض الآلات الحاسبة تعطي قيمًا لا تتطابق مع القيم المعطاة في الجدول الخاص بالموضوع.

قيم د (ز) المستخدمة في الأمثلة، والمعادلات المعطاة في هذه الوحدة موجودة في الجدول، وليست مأخوذة من الحاسبة.

على الرغم من ظهور الصفر، وقيم (ز) الموجبة فقط في جدول التوزيع الطبيعي المعياري، إلا أن تماثل المنحنى الطبيعي يتيح استخدام الجدول لقيم (ز) الموجبة والسالبة (كما سيظهر في الأمثلة اللاحقة).

تظهر قيم المتغير الطبيعي في الجداول لأقرب ٣ أرقام معنوية كحد اقصى ضمن المدى من ز = ٠,٠٠ إلى ز = ٣,٤٩

- يظهر الرقمان الأول والثاني من ز في العمود الأيمن.
- يظهر الرقم الثالث من ز في الصف الأول.

يمكن إيجاد قيمة د (ز) لأي قيمة ز، ويمكن إيجاد قيمة ز لأي قيمة لـ د (ز)، باستخدام الجدول عكسيًا.

المثال الآتي يبيّن كيف تجد قيمة د (ز) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

مثـــال ٣

استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد د (٠,٢٧).

الحــلّ:

الرقمان الأول والثاني

الرقم الثالث

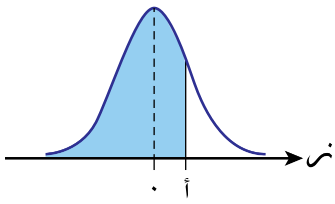
ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٣٢	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦٤٦١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩

خطوات إيجاد قيمة د (٠,٢٧) هي:

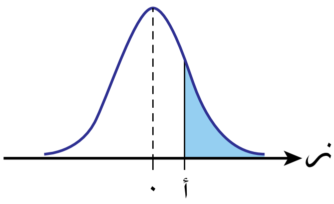
- حدد موقع الرقمَين الأول والثاني من ز (عند ٠,٢) في العمود الأول إلى اليمين.
- حدد موقع الرقم الثالث من ز (عند ٧) من الصف الأول.
- عند تقاطع صف القيمة ٠,٢ مع عمود القيمة ٧ تجد القيمة ٠,٦٠٦٤

هذا يعني أن د (٠,٢٧) = ٠,٦٠٦٤

يبيّن التمثيلان الآتيان طريقة إيجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي باستخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري:



إذا كانت أ > ٠، والمساحة تحت المنحنى إلى يسار ز = أ، فإن ل (ز > أ) = د (أ) (أي أنه يمكننا إيجاد المساحة مباشرة من الجدول)



إذا كانت أ > ٠، والمساحة تحت المنحنى إلى يمين ز = أ، فإن ل (ز < أ) = ١ − د (أ)

مُساعَدة

ل (ز > أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يسار ز = أ

ل (ز < أ) = المساحة تحت المنحنى إلى يمين ز = أ

مثــال ٤

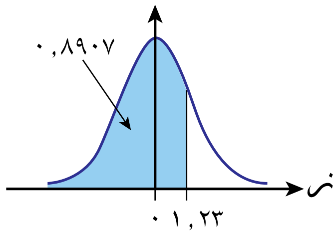
إذا علمت أن ز ~ ط (٠، ١)، فأوجد:

أ ل(ز ⩽ ١,٢٣)

ب ل(ز > ١,٢٣)

الحــلّ:

أ

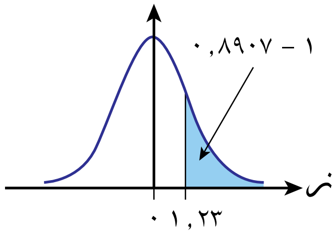


استخدم الجدول لتجد د (١,٢٣)

ل(ز ⩽ ١,٢٣) = د (١,٢٣)

= ٠,٨٩٠٧

ب



ل(ز > ١,٢٣) = ١ − ل(ز ⩽ ١,٢٣)

= ١ − د (١,٢٣)

= ١ − ٠,٨٩٠٧

= ٠,١٠٩٣

مُساعَدة

من المستحسن أن ترسم تمثيلًا بيانيًا توضيحيًا لمساعدتك في حل أمثلة وتمارين هذه الوحدة.

مثــال ٥

إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)، فأوجد:

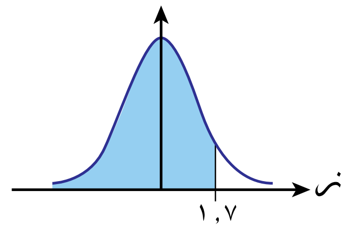
أ ل(ز ⩽ ١,٧)

ب ل(ز ⩽ ٠,٤)

ج ل(٠,٤ < ز ⩽ ١,٧)

الحــلّ:

أ

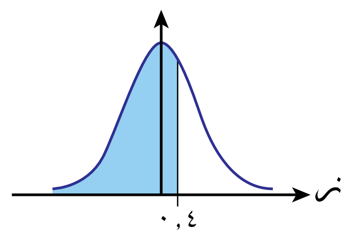


استخدم الجدول لتجد د (١,٧)

ل(ز ≤ ١,٧) = د (١,٧)

= ٠,٩٥٥٤

ب

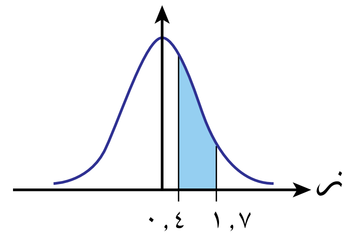


استخدم الجدول لتجد د (٠,٤)

ل(ز ≤ ٠,٤) = د (٠,٤)

= ٠,٦٥٥٤

ج



ل(٠,٤ < ز ≤ ١,٧) = ل(ز ≤ ١,٧) − ل(ز < ٠,٤)

= د (١,٧) − د (٠,٤)

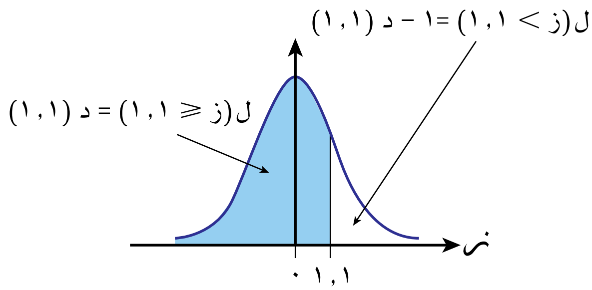
= ٠,٩٥٥٤ − ٠,٦٥٥٤

= ٠,٣٠٠٠

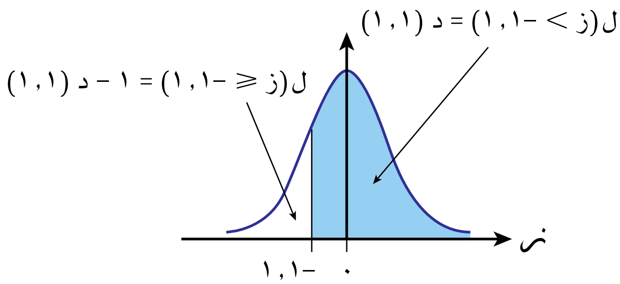
جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لا يظهر قيم ز < ٠؛ لذا استخدم خصائص التماثل، والمنحنى الطبيعي، وحقيقة أن المساحة تحت المنحنى الطبيعي تساوي ١، لتجد قيمة د (ز) عندما تكون ز سالبة.

الشكلان الآتيان يوضحان الحالة عندما ز = ١,١، وعندما ز = −١,١

قيمة د (ز) في الجدول تعطي أكبر المساحتَين تحت المنحنيَين.



الشكل (١)



الشكل (٢)

في الشكل (١):

يمكنك ايجاد المساحة المظللة مباشرة من الجدول كالآتي:

ل(ز ⩽ ١,١) = د (١,١)

= ٠,٨٦٤٣

المساحة تحت المنحنى تساوي ١، ∴ المساحة غير المظللة هي:

ل(ز > ١,١) = ١ − د (١,١)

= ١ − ٠,٨٦٤٣

= ٠,١٣٥٧

المنحنى متماثل حول المستقيم ز = ٠

إذا رسمت تماثل المنحنى في الشكل (١) حول المستقيم ز = ٠، فستحصل على المنحنى الموجود في الشكل (٢).

في الشكل (٢):

المساحة المظللة هي نفسها المساحة المظللة في الشكل (١)، وعليه:

ل(ز > −١,١) = د (١,١)

= ٠,٨٦٤٣

المساحة غير المظللة هي نفسها المساحة غير المظللة في الشكل (١)، وعليه:

ل(ز ⩽ −١,١) = ١ − د (١,١)

= ١ − ٠,٨٦٤٣

= ٠,١٣٥٧

ويمكن الملاحظة أنّه، عندما ز = $ز_{١}$:

ل(ز ⩽ $ز_{١}$) = ل(ز > −$ز_{١}$)

ل(ز > $ز_{١}$) = ل(ز ⩽ −$ز_{١}$)

نتيجة ٣

إذا كان المتغير (ز) يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا، فإن الجدول يعطي قيم د (ز$_١$) لكل قيمة من قيم ز$_١$، حيث ز$_١$ > ٠، بحسب العلاقات الآتية:

- ل(ز $\leqslant$ ز$_١$) = د (ز$_١$)
- ل(ز > ز$_١$) = ١- ل(ز $\leqslant$ ز$_١$)
  = ١ - د (ز$_١$)
- ل(ز $\leqslant$ -ز$_١$) = ١ - ل(ز $\leqslant$ ز$_١$)
  = ١ - د (ز$_١$)
- ل(ز > -ز$_١$) = ل(ز $\leqslant$ ز$_١$)
  = د (ز$_١$)

مُساعَدة

تذكّر أنه لمتغير عشوائي متصل يكون،
ل(ز > ز$_١$) = ل(ز $\geqslant$ ز$_١$)،
ل(ز $\leqslant$ ز$_١$) = ل(ز < ز$_١$).

مثـــال ٦

إذا علمت أن ز ~ ط (٠، ١)، فأوجد:

أ ل(ز $\leqslant$ ٢,١١)

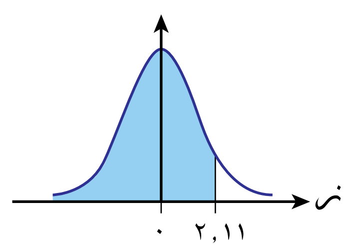
ب ل(ز > -١)

ج ل(-١ < ز $\leqslant$ ٢,١١)

د ل(-١,٦٩ $\leqslant$ ز < -٠,٨١)

الحـــلّ:

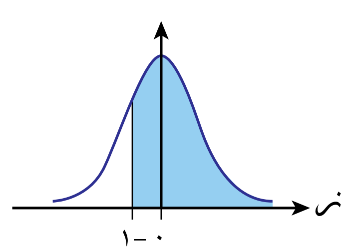
أ



استخدم الجدول لتجد د (٢,١١)

ل(ز $\leqslant$ ٢,١١) = د (٢,١١)
= ٠,٩٨٢٦

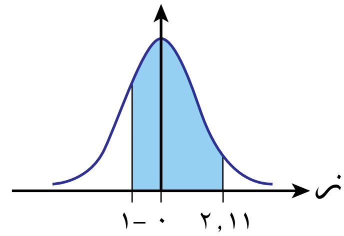
ب



استخدم تماثل المنحنى الطبيعي، حيث ل(ز > -١) = ل(ز < ١)، وأضف التمثيل لتوضيح التماثل.

ل(ز > -١) = ل(ز < ١)
= د (١)
= ٠,٨٤١٣

ج



الاحتمال المطلوب هو الفرق بين المساحة إلى اليسار من ز = ٢,١١ والمساحة إلى اليسار من ز = -١

المساحة الأولى أكبر من ٠,٥ والمساحة الثانية أقل من ٠,٥

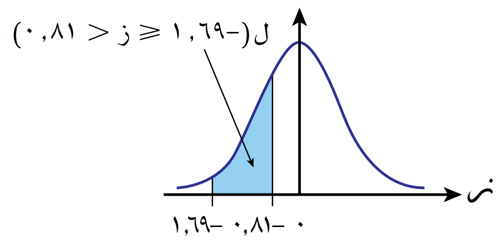
ل(-١ < ز ⩽ ٢,١١) = ل(ز ⩽ ٢,١١) - ل(ز ⩽ -١)

= ٠,٩٨٢٦ - (١ - ٠,٨٤١٣)

= ٠,٩٨٢٦ + ٠,٨٤١٣ - ١

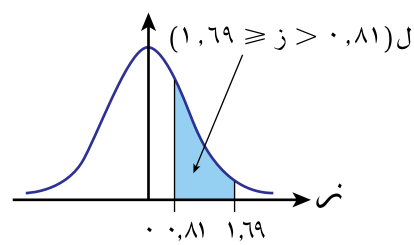
= ٠,٨٢٣٩

د



المساحة المطلوبة تساوي الفرق بين المساحة إلى يسار ز = -٠,٨١ والمساحة إلى يسار ز = -١,٦٩

استخدم خصائص تماثل المنحنى لتعكسه حول المستقيم ز = ٠



المساحة المظللة تحت المنحنى والمحصورة بين المستقيمين ز = ٠,٨١، ز = ١,٦٩ هي المساحة المظللة تحت المنحنى والمحصورة بين ز = -٠,٨١، ز = -١,٦٩ نفسها.

ل(-١,٦٩ ⩽ ز < -٠,٨١) = ل(٠,٨١ < ز ⩽ ١,٦٩)

= د(١,٦٩) - د(٠,٨١)

= ٠,٩٥٤٥ - ٠,٧٩١٠

= ٠,١٧٣٥

استخدمنا جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لحساب احتمالات قيم ز.

يمكننا استخدام الجدول بصورة عكسيّة لنجد قيمة ز بمعلومية قيمة الاحتمال.

مثـــال ٧

إذا علمت أن ل(ز $\leqslant$ ز$_١$) = ٠,٩١٦٢، فأوجد قيمة ز$_١$.

الحــلّ:

الاحتمال المعطى أكبر من ٠,٥

∴ ز$_١$ > ٠

فيما يأتي الجزء المخصص من الجدول حيث يمكن إيجاد الاحتمال المناسب:

الرقمان الأول والثاني

الرقم الثالث

ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩

- نحدد القيمة ٠,٩١٦٢ في القسم الرئيسي من الجدول.
- القيمة ٠,٩١٦٢ تمثّل التقاطع بين صف القيمة ١,٣ وعمود القيمة ٨
- يعني ذلك أن الرقمين الأول والثاني من ز$_١$ هما ١,٣، وأن الرقم الثالث منه هو ٨

∴ د(ز$_١$) = د(١,٣٨) = ٠,٩١٦٢ وعليه يكون ز$_١$ = د$^{-١}$(٠,٩١٦٢) = ١,٣٨

مُساعَدة

نجد مباشرة من الجدول أن ٠,٩١٦٢ تقابل قيمة ز$_١$ = ١,٣٨ ويمكننا كتابتها باستخدام رمز معكوس الدالة كالآتي:
ز$_١$ = د$^{-١}$(٠,٩١٦٢) = ١,٣٨

مثـــال ٨

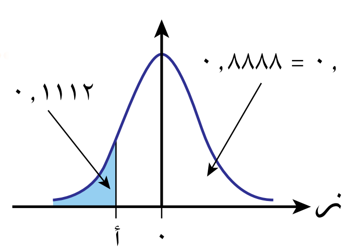
إذا علمت أن ز ~ ط (٠، ١)، فأوجد قيمة أ، إذا كان:

أ ل(ز $\leqslant$ أ) = ٠,١١١٢

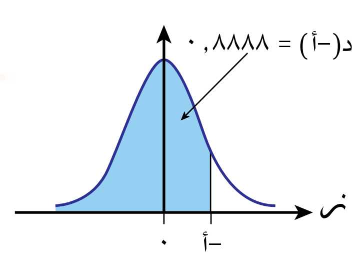
ب ل(ز > أ) = ٠,٠٦٤٣

الحــلّ:

أ ١ − ٠,١١١٢ = ٠,٨٨٨٨



الاحتمال المعطى إلى يسار أ أقل من ٠,٥، ∴ أ < ٠ (قيمة أ سالبة).



يمكننا عكس المنحنى الطبيعي بحيث تظهر −أ إلى يمين الصفر.

ل(ز < −أ) = ٠,٨٨٨٨

استخدم الجدول لإيجاد قيمة −أ.

د(−أ) = ٠,٨٨٨٨

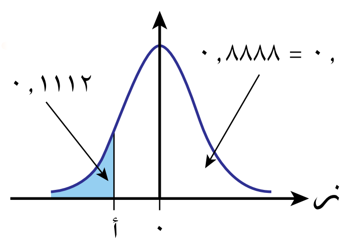
−أ = د^١−^(٠,٨٨٨٨)

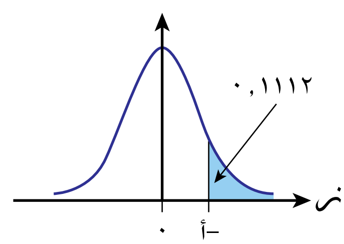
−أ = ١,٢٢

أ = −١,٢٢

طريقة بديلة:

الاحتمال المعطى إلى يسار أ أقل من ٠,٥، ∴ فإن أ < ٠ (قيمة أ سالبة).





باستخدام تماثل المنحنى الطبيعي

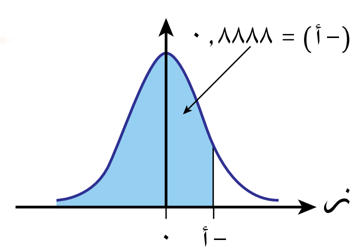
١ − ل(ز < −أ) = ٠,١١١٢

ل(ز < −أ) = ١ − ٠,١١١٢

ل(ز < −أ) = ٠,٨٨٨٨

يمكننا أن نقلب المنحنى الطبيعي لتظهر −أ إلى يمين الصفر.

استخدم الجدول لتجد القيمة −أ، حيث ل(ز < −أ) = ٠,٨٨٨٨

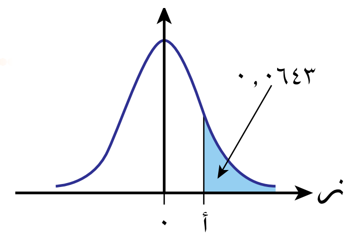


−أ = ١,٢٢

∴ أ = −١,٢٢

من الجدول: ز = د^١−^(٠,٨٨٨٨) = ١,٢٢

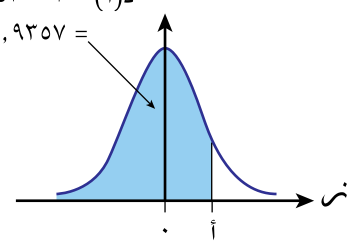
ب



الاحتمال المعطى إلى يمين أ أقل من ٠,٥، ∴ أ > ٠

إذا كان ل(ز > أ) = ٠,٠٦٤٣،

فيكون ل(ز ⩽ أ) = ١ − ٠,٠٦٤٣ = ٠,٩٣٥٧



استخدم الجدول لإيجاد قيمة أ

د (أ) = ٠,٩٣٥٧

أ = د$^{-١}$(٠,٩٣٥٧)

= ١,٥٢

مثال ٩

ارتفاعات الأشجار التي تنمو بالقرب من النهر مقيسة بالمتر، وتتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا، وسطه الحسابي (و)، وانحرافه المعياري (ع).

أ أوجد احتمال أن يكون ارتفاع شجرة هو:

١) أقل من (و + ع) متر.

٢) أكثر من (و + ٠,٨ ع) متر.

ب ما النسبة المئوية للأشجار التي ارتفاعها بين (و + ٠,٥ ع) و (و + ١,٥ ع)؟

الحـلّ:

أ ١) ل(الارتفاع > و + ع) = ل(ز > ١)

= د (١)

= ٠,٨٤١٣

هذا يشير إلى الارتفاعات التي تقل عن انحراف معياري واحد يمين (أكبر من) الوسط الحسابي.

٢) ل(الارتفاع > و + ٠,٨ ع) = ل(ز > ٠,٨)

= ١ − د (٠,٨)

= ١ − ٠,٧٨٨١

= ٠,٢١١٩

هذا يشير إلى الارتفاعات التي تزيد عن ٠.٨ انحراف معياري يمين (أكبر من الوسط الحسابي).

ب ل(و + ٠,٥ ع < الارتفاع < و + ١,٥ ع)

= ل(٠,٥ < ز < ١,٥)

= د(١,٥) − د(٠,٥)

= ٠,٩٣٣٢ − ٠,٦٩١٥

= ٠,٢٤١٧

النسبة المئوية هي:

٠,٢٤١٧ × ١٠٠٪ = ٢٤,١٧٪

يشير هذا إلى الأطوال التي تقع بين ٠,٥ و ١,٥ انحراف معياري يمين (أكبر من الوسط.

اضرب الاحتمال في ١٠٠٪ لتحويله إلى نسبة مئوية.

تمارين ٨-٢

١) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لتجد قيمة كلّ مما يأتي:

أ د(٠,٣٥)　　ب د(١,٤٧)　　ج د(٢,٠٣)

د د(٠,٨٢)　　هـ ١ − د(٢,٨٦)

٢) استخدم جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري لتجد قيمة ز في كل مما يأتي:

أ د(ز) = ٠,٧٠٨٨　　ب د(ز) = ٠,٩٠١٥　　ج د(ز) = ٠,٩٦٢٥

د د(ز) = ٠,٥١٩٩　　هـ ١ − د(ز) = ٠,٠٧٦٤

٣) إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(ز ≥ ١,٥٣)　　ب ل(ز ≥ ٠,٠٧)　　ج ل(ز ≥ −٠,٥٦)

د ل(ز ≥ −٢,٤٦)　　هـ ل(ز ≤ ٠,٨١)　　و ل(ز > ٢)

ز ل(ز > −١,٧٥)　　ح ل(ز > −٠,٠١)

٤) المتغير العشوائي ز يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي (و) = ٠، و تباينه ($ع^٢$) = ١. أوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(٠ < ز ≥ ٢,٥٠)　　ب ل(١ < ز ≥ ١,٢٧)

ج ل(١,٦٤ < ز ≥ ٢,٣٢)　　د ل(١,٤٢ < ز ≥ ١,٦٤)

هـ ل(−١,٧٧ < ز ≥ ٠,٧٤)　　و ل(−١ < ز ≥ −٠,٣١)

ز ل(−١ < ز ≥ ١)　　ح ل(−١,٥٦ < ز ≥ ١,٥٦)

٥) إذا علمت أن ز ~ ط(٠، ١)؛ فأوجد قيمة $ز_١$، في كل مما يأتي:

أ) $ل(ز \leq ز_١) = ٠,٩٣٠٦$

ب) $ل(ز \leq ز_١) = ٠,٦١٠٣$

ج) $ل(ز \leq ز_١) = ٠,٨٣٤٠$

د) $ل(ز \leq ز_١) = ٠,٩٧٦١$

هـ) $ل(ز \leq ز_١) = ٠,٩٣٨٢$

و) $ل(ز > ز_١) = ٠,٠٢٩٤$

ز) $ل(ز > ز_١) = ٠,٧٥١٧$

ح) $ل(ز > ز_١) = ٠,٩٠١٥$

٦) إذا علمت أن (ز) يتبع توزيعًا طبيعيًا حيث و = ٠، $ع^٢ = ١$، فأوجد قيمة $ز_١$، $ز_٢$ في كل مما يأتي:

أ) $ل(ز_١ < ز \leq ١,٧٣) = ٠,٤٥٨٢$

ب) $ل(ز_١ < ز \leq ١,٢٧) = ٠,٢٢٨$

ج) $ل(١,٨٣ < ز \leq ز_٢) = ٠,٠١١$

د) $ل(-١ < ز \leq ز_٢) = ٠,٧٩٣٨$

٧) إذا علمت أن:

أ) $ل(-ز_١ < ز \leq ز_١) = ٠,٩٢٥$، فأوجد قيمة $ز_١$.

ب) $ل(ز > ز_٢) + ل(ز \leq -ز_٢) = ٠,٥٧٥٤$، فأوجد $ل(ز > ٢ز_٢)$.

٨) الوقت المستغرق (بالدقيقة) لرحلات الطيران من مسقط إلى ممباي يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا وسطه الحسابي (و)، وانحرافه المعياري (ع)، احسب:

أ) احتمال أن تستغرق الرحلة زمنًا أقل من (و + ٠,٢٣ع) دقيقة.

ب) النسبة المئوية للرحلات التي تستغرق زمنًا أكثر من (و + ٠,٣٢ع) دقيقة.

٩) الإنتاج اليومي من الحليب، باللتر، المدوّن في السجل اليومي في مصنع ما يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا وسطه الحسابي (و)، وانحرافه المعياري (ع). احسب:

أ) احتمال أن يكون الإنتاج في يوم ما أقل من (و + ١,٩٦ع).

ب) النسبة المئوية للأيام التي يكون الإنتاج فيها أكثر من (و + ٠,٨٨ع).

٨-٣ معيارية التوزيع الطبيعي Standardising a normal distribution

٨-٣أ معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات
Standardising a normal distribution to find probabilities

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل يتبع التوزيع الطبيعي بمنحنى طبيعي، **حيث مركز هذا المنحنى هو الوسط الحسابي (و)، والمساحة تحت المنحنى تساوي ١، وارتفاع قمة المنحنى يحدد بالانحراف المعياري (ع).**

مُساعَدة

تُعرّف دالة التوزيع الطبيعي لجميع القيم الحقيقية لـ س، لذا جميع المنحنيات الناتجة من هذه الدالة لها العرض نفسه.

تعرفنا على طريقة لإيجاد الاحتمالات التي تتضمن متغيرًا طبيعيًا معياريًا هو ز ~ ط (٠، ١) باستخدام جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري. يمكن استخدام هذا الجدول في إيجاد احتمالات قيم لأي متغير عشوائي متصل يتبع التوزيع الطبيعي، مهما كانت قيم و، $ع^٢$.

كي نستخدم الجدول لإيجاد احتمالات التوزيع س ~ ط (و، $ع^٢$)، مثل: ل (س $\leqslant$ $س_١$)، ل (س $>$ $س_١$)، أو ل ($س_١$ $>$ س $\leqslant$ $س_٢$)، نحتاج فقط إلى معرفة كم انحرافًا معياريًا يمين (أكبر من) الوسط الحسابي أو يساره (أصغر من) تقع القيم $س_١$ و/أو $س_٢$.

توجد طريقة بسيطة للقيام بذلك تُسمى **المعيارية standardising**.

افترض أن س = ١٦، حيث س ~ ط (١٠، ٩): $\frac{١٦ - ١٠}{\sqrt{٩}} = \frac{٦}{٣} = +٢$، وعليه يكون س على بُعد انحرافَين معياريَّين يمين (أكبر من) الوسط الحسابي.

القيمة المعيارية لـ س= ١٦ هي ز = ٢

ل (س = ١٦) يطابق ل (ز = ٢).

افترض أن ص = ٥٢، حيث ص ~ ط (٦٠، ٢٥): $\frac{٥٢ - ٦٠}{\sqrt{٢٥}} = \frac{-٨}{٥} = -١,٦$، فيكون ص = ٥٢ تقع إلى يسار الوسط الحسابي على بُعد ١,٦ انحراف معياري.

القيمة المعيارية لـ ص = ٥٢ هي ز = -١,٦

ل (ص = ٥٢) يطابق ل (ز = -١,٦).

يُشار أحيانًا إلى القيمة المعيارية على أنها **الدرجة (ز) z-score**.

نتيجة ٤

إذا كان س ~ ط (و، $ع^٢$) ، فإن ز = $\frac{س - و}{ع}$ يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا،

الدرجة (القيمة) المعيارية ($ز_١$) = $\frac{س_١ - و}{ع}$ تدلنا على عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها $س_١$ عن الوسط الحسابي.

مثـــال ١٠

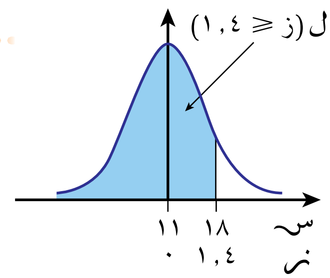
إذا علمت أن س ~ ط (١١، ٢٥)، فأوجد ل(س ⩽ ١٨).

الحــلّ:

ز = $\frac{١٨ - ١١}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٧}{٥}$ = ١,٤

القيمة المعيارية لـ س = ١٨ هي ز = ١,٤
∴ س = ١٨ تقع يمين (أكبر من) الوسط الحسابي ١١ بـ ١,٤ انحرافًا معياريًا.

ل(س ⩽ ١٨) = ل(ز ⩽ ١,٤)



س = ١١ تناظر ز = ٠،
س = ١٨ تناظر ز = ١,٤

ل(س ⩽ ١٨) = ل(ز ⩽ ١,٤)
= د(١,٤)
= ٠,٩١٩٢

مُساعَدة

تحقق من أن:
و + ١,٤ع = ١١ + ١,٤ × $\sqrt{٢٥}$
= ١٨

مثـــال ١١

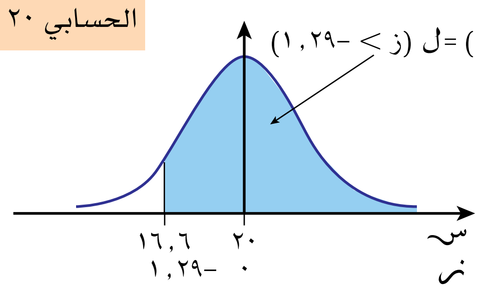
إذا علمت أن س ~ ط (٢٠، ٧)، فأوجد ل(س < ١٦,٦).

الحــلّ:

ز = $\frac{١٦,٦ - ٢٠}{\sqrt{٧}}$ = −١,٢٩

القيمة المعيارية (المقربة إلى ٣ أرقام معنوية) لـ س = ١٦,٦ هي ز = −١,٢٩
∴ تقع القيمة س يسار (أصغر من) الوسط الحسابي ٢٠

ل (س < ١٦,٦) = ل (ز < −١,٢٩)



ل(س < ١٦,٦) = ل(ز < −١,٢٩)
= ل(ز ⩽ ١,٢٩)
= د(١,٢٩)
= ٠,٩٠١٥

المنحنى متماثل حول المستقيم ز = ٠، فيكون ل(ز < −١,٢٩) = ل(ز ⩽ ١,٢٩)

مُساعَدة

استخدم قيمة (ز) المقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية كما تظهر الأعداد في الجدول.

مثــال ١٢

إذا علمت أن س ~ ط(٥، ٥)، فأوجد ل(٢ < س ⩽ ٩).

الحــلّ:

عند س = ٢:

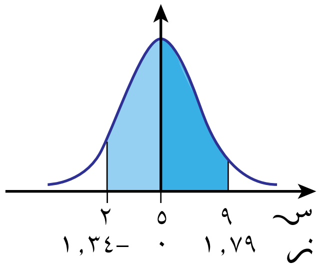
$ز = \frac{٢ - ٥}{\sqrt{٥}} = -١,٣٤$

القيمة س = ٢ تقع يسار (أصغر من) الوسط الحسابي بـ ١,٣٤ انحرافًا معياريًا.

عند س = ٩:

$ز = \frac{٩ - ٥}{\sqrt{٥}} = ١,٧٩$

القيمة س = ٩ تقع يمين (أكبر من) الوسط الحسابي بـ ١,٧٩ انحرافًا معياريًا.



المساحة المطلوبة مبيّنة بمنطقتَين إلى طرفَي ز = ٠

الطريقة الأولى:

ل(٢ < س ⩽ ٩) = ل(-١,٣٤ < ز ⩽ ١,٧٩)

= ل(ز ⩽ ١,٧٩) - ل(ز ⩽ -١,٣٤)

= د(١,٧٩) - (١ - د(١,٣٤))

= ٠,٩٦٣٣ - (١ - ٠,٩٠٩٩)

= ٠,٩٦٣٣ + ٠,٩٠٩٩ - ١

= ٠,٨٧٣٢

يمكنك أن تجد الفرق بين المساحة الواقعة إلى يسار ز = ١,٧٩، والمساحة الواقعة إلى يسار ز = -١,٣٤

الطريقة الثانية:

يمين ز = ٠ تكون:

المساحة المظللة = ل(ز ⩽ ١,٧٩) - ل(ز ⩽ ٠)

= د(١,٧٩) - د(٠)

= ٠,٩٦٣٣ - ٠,٥

= ٠,٤٦٣٣

إلى يسار ز = ٠ تكون:

المساحة المظللة = ل(ز < -١,٣٤) - ل(ز < ٠)

= ل(ز ⩽ ١,٣٤) - ل(ز ⩽ ٠)

= د(١,٣٤) - د(٠)

= ٠,٩٠٩٩ - ٠,٥ ...... استخدم ل(ز < ٠) = ل(ز ⩽ ٠) = د(٠) = ٠,٥

= ٠,٤٠٩٩

ل(٢ < س ⩽ ٩) = ٠,٤٦٣٣ + ٠,٤٠٩٩ ...... اجمع المساحتَين معًا لتحصل على الإجابة.

= ٠,٨٧٣٢

مثـــال ١٣

إذا علمت أن س ~ ط(٥٠، ١٠٠):

أ بيّن أن قيمة ل(٤٥,٦ < س ⩽ ٥٤,٤) تساوي ٢د (٠,٤٤) - ١

ب احسب ل(٤٤ < س ⩽ ٥٦).

الحـــلّ:

أ عند س = ٤٥,٦:

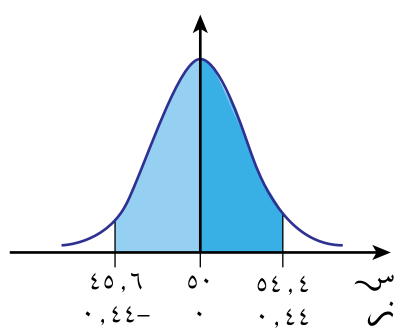
$$ز = \frac{٤٥,٦ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{-٤,٤}{١٠} = -٠,٤٤$$

أوجد القيمة المعيارية المقابلة لـ س = ٤٥,٦، س = ٥٤,٤

عند س = ٥٤,٤:

$$ز = \frac{٥٤,٤ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤,٤}{١٠} = ٠,٤٤$$

تقع س = ٤٥,٦، س = ٥٤,٤ على المسافة نفسها من الوسط الحسابي، وعلى بُعد (±٠,٤٤ انحراف معياري).



المساحة المطلوبة متماثلة حول ز = ٠، لذا نحل المسألة بأن نضرب المساحة الواقعة إلى يمين ز = ٠ في ٢

ل(٤٥,٦ < س ⩽ ٥٤,٤) = ل(-٠,٤٤ < ز ⩽ ٠,٤٤)

= ٢ × ل(٠ < ز ⩽ ٠,٤٤)

= ٢(د(٠,٤٤) - د(٠))

= ٢(د(٠,٤٤) - ٠,٥)

= ٢د(٠,٤٤) - ١

ب القيمتان المعياريتان لـ ٤٤، ٥٦ هما $\frac{٤٤ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = -٠,٦$ ، $\frac{٥٦ - ٥٠}{\sqrt{١٠٠}} = ٠,٦$

ل(٤٤ < س ⩽ ٥٦) = ل(−٠,٦ < ز ⩽ ٠,٦)

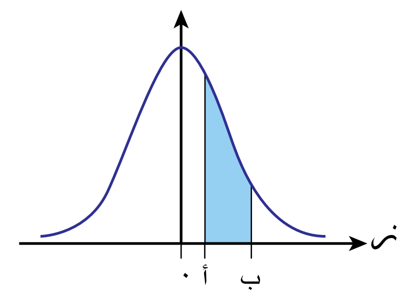
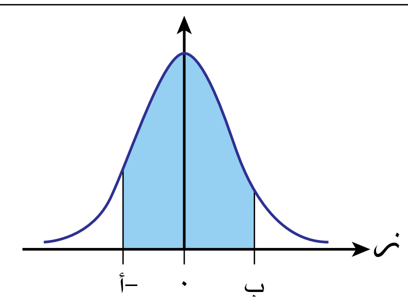
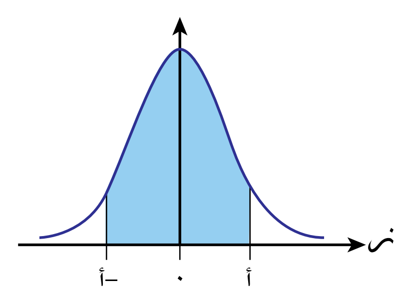
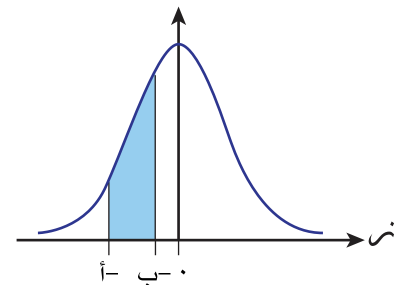
= ٢ × ل(٠ < ز ⩽ ٠,٦)

= ٢ × ٠,٧٢٥٧ − ١

= ٠,٤٥١٤

تقع س = ٤٤ ، س = ٥٦ على مسافة واحدة من الوسط (±٠,٦ انحراف معياري).

يمكن استخلاص بعض النتائج المفيدة من الأمثلة السابقة، وعرضها من خلال الأشكال الآتية، كما يمكن تلخيصها في النتيجة ٥

	عندما ٠ < أ < ب ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)
	عندما −أ < ٠ < ب ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١
	عندما −أ < ٠ < أ ل(−أ < ز < أ) = ٢د(أ) − ١
	عندما −أ < −ب < ٠ ل(−أ < ز < −ب) = د(أ) − د(ب)

نتيجة ٥

إذا علمنا أن س ~ ط(و، ع^{٢}):

- ل(أ < ز < ب) = د(ب) − د(أ)، حيث ٠ < أ < ب
- ل(−أ < ز < ب) = د(ب) + د(أ) − ١، حيث −أ < ٠ < ب
- ل(−أ < ز < أ) = ٢د(أ) − ١، حيث −أ < ٠ < أ
- ل(−أ < ز < −ب) = د(أ) − د(ب)، حيث −أ < −ب < ٠

تمارين ٨-٣أ

١) احسب الدرجة (القيمة) المعيارية، واكتب الناتج مقرّبًا إلى أقرب ٣ أرقام معنوية في كل مما يأتي:

أ س = ١٧ إذا علمت أن س ~ ط(١٥، ٤)

ب س = ٣٨ إذا علمت أن س ~ ط(٣٠، ١٦)

ج س = ٤٨ إذا علمت أن س ~ ط(٤٢، ١٢)

د س = ٣٦,٨ إذا علمت أن س ~ ط(٣٢,٤، ٢٠)

هـ س = ٧٢,٥ إذا علمت أن س ~ ط(٨٣، ٤٩)

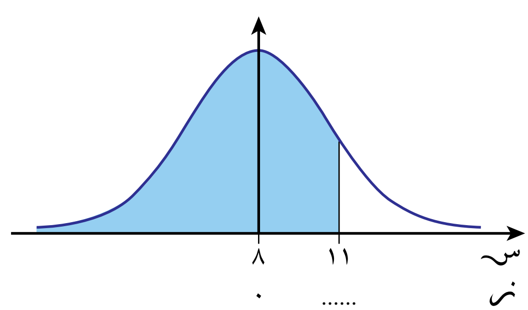
و س = ٢٢ إذا علمت أن س ~ ط(٢٨، ١١)

ز س = ١٣٢ إذا علمت أن س ~ ط(١٤٦، ١٠٩)

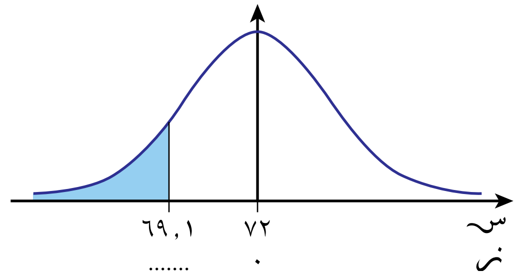
ح س = ٠ إذا علمت أن س ~ ط(١٥، ٣٠)

٢) استخدم الشكل المعطى لتجد الاحتمال في كل مما يأتي:

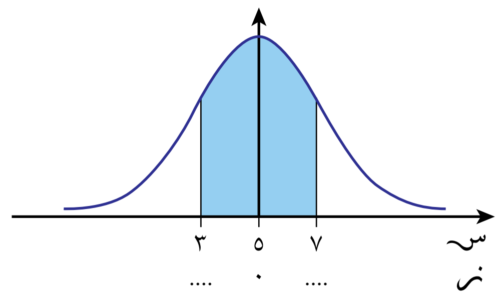
أ إذا علمت أن س ~ ط(٨، ٢٥)، فأوجد ل(س ≤ ١١)



ب إذا علمت أن س ~ ط(٧٢، ١١)، فأوجد ل(س ≥ ٦٩,١)



ج إذا علمت أن س ~ ط(٥، ٥)، فأوجد ل(٣ < س ≥ ٧)



٣ احسب الاحتمالات المطلوبة في كل مما يأتي:

أ إذا علمت أن س ~ ط(٦,٢، ٦,٢٥)، فأوجد:

١) ل(س ≥ ٩,٧)　　　٢) ل(س < ٩,٧)

ب إذا علمت أن س ~ ط(٣، ٤٩)، فأوجد:

١) ل(س ≥ ٥)　　　٢) ل(س < ٥)

ج إذا علمت أن س ~ ط(٣٧، ٤)، فأوجد:

١) ل(س < ٣٣,٤)　　　٢) ل(س ≥ ٣٣,٤)

د إذا علمت أن س ~ ط(٢٠، ١٥)، فأوجد:

١) ل(س ≥ ١٣,٥)　　　٢) ل(س < ١٣,٥)

هـ إذا علمت أن س ~ ط(٨٠، ٣٧٥)، فأوجد:

١) ل(س < ٩١)　　　٢) ل(س ≥ ٩١)

و إذا علمت أن س ~ ط(١١، ٢٥)، فأوجد ل(١ < س ≥ ٢١)

ز إذا علمت أن س ~ ط(٣، ٧)، فأوجد ل(٢ < س ≥ ٥)

ح إذا علمت أن س ~ ط(٢٥، ٦)، فأوجد ل(٢٦ < س ≥ ٢٨)

ط إذا علمت أن س ~ ط(٢٠، ٣,١)، فأوجد ل(١٨ < س ≥ ٢٢)

ي إذا علمت أن س ~ ط(١٢، ٢,٥٦)، فأوجد ل(٨ < س ≥ ١٠)

مُساعَدة

يُنصح برسم شكل في كل سؤال من الأسئلة من ٣ إلى ٦ الآتية، حيث يساعدك على الإجابة.

مُساعَدة

عند إيجاد قيمة ز تقرب إلى أقرب منزلتين عشريتين.

٤) إذا علمت أن المتغير العشوائي المتصل س ~ ط(و، و^٢)، فأوجد احتمال اختيار قيمة س عشوائيًا:

أ أصغر من ٢و

ب أكبر من $\frac{١٠}{٩}$ و

ج أكبر من $\frac{٣}{٤}$ و

د أصغر من $\frac{٣}{٧}$ و

٥) إذا علمت أن المتغير العشوائي المتصل ص ~ ط (٣ع، ٤ع^٢)، فأوجد الاحتمال في كل مما يأتي:

أ ل(ص ⩽ ٧ع)

ب ل(ص > $\frac{٩}{٢}$ ع)

ج ل(ص ⩽ ٢,٣ع)

د ل(ص > − $\frac{١}{٣}$ ع)

٦) الراتب السنوي بالريال العُماني للموظفين في دار نشر يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٨س، وانحرافه المعياري ٢س. احسب:

أ احتمال أن يكون الراتب السنوي لموظف يعمل في دار النشر أقل من ١١س ريالًا عُمانيًا.

ب النسبة المئوية للموظفين الذين يعملون في دار النشر، راتب كل منهم السنوي يقع بين ٦س و ١٠س ريالًا عُمانيًا.

٨-٣ب معيارية التوزيع الطبيعي لإيجاد و، ع، س
Standardising a normal distribution to find μ, σ, x

عرفت في الدرس السابق القيم المعيارية لمتغير عشوائي متصل توزيعه طبيعيّ، واستخدمت هذه القيم من الجدول لتحسب احتمالات محددة.

لقد استطعت القيام بذلك لأن و، ع معطاة، والمطلوب إيجاد الاحتمال لأي قيمة للمتغير (س). بطريقة مشابهة يمكنك أن تستخدم الجدول لتجد أيّ قيم لـ و، ع، س، عندما تعرف الاحتمال، ومعلومات أخرى كافية.

الجزء الأكبر من العمل في هذا الدرس هو أن تستخدم الجزء الرئيسي للجدول بطريقة عكسيّة لتجد قيمة ز.

إذا كان د $(ز_١)$ = ك، عندما تجد قيمة $ز_١$ فإنك تستخدم $ز_١$ = د$^{-١}$ (ك).

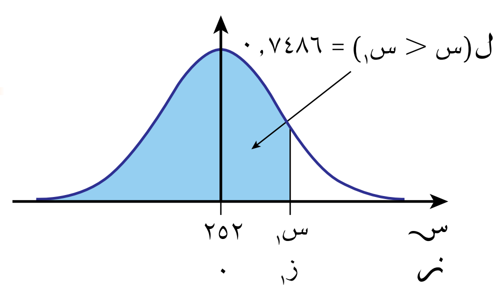
مثــال ١٤

كمية الحليب س مل معبأة في علب سعة الواحدة ٢٥٠ مل، وتتبع التوزيع س ~ ط(٢٥٢، ٤).
احتمال أن تختار علبة عشوائيًا تحوي على كمية من الحليب أقل من $س_١$ يساوي ٠,٧٤٨٦ أوجد قيمة $س_١$ مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحــلّ:

∵ ل(س < $س_١$) > ٠,٥ ،

∴ $س_١$ تقع إلى يمين (أكبر من) الوسط ($س_١$ > ٠).



ل(س < $س_١$) = ل(ز < $ز_١$) = ٠,٧٤٨٦
كما هو مبيّن في الشكل.

القيمة المعيارية لـ $س_١$ هي:

عبّر عن $ز_١$ بدلالة $س_١$

$$ز_١ = \frac{س_١ - ٢٥٢}{\sqrt{٤}} = \frac{س_١ - ٢٥٢}{٢}$$

باستخدام الجدول بطريقة معكوسة،
إذا كان د $(ز_١)$ = ٠,٧٤٨٦،
فإن $ز_١$ = د$^{-١}$(٠,٧٤٨٦)

$$د\left(\frac{س_١ - ٢٥٢}{٢}\right) = ٠,٧٤٨٦$$

$$\frac{س_١ - ٢٥٢}{٢} = د^{-١}(٠,٧٤٨٦)$$

$$\frac{س_١ - ٢٥٢}{٢} = ٠,٦٧$$

$س_١$ = ٢ × ٠,٦٧ + ٢٥٢

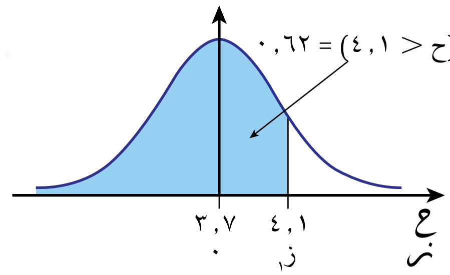
= ٢٥٣,٣٤ مل.

مثـــال ١٥

ارتفاعات الأشجار مقيسة بالمتر في منطقة ما تمثل بالمتغير العشوائي المتصل (ح) حيث ح ~ ط (٣,٧، ع٢).

إذا علمت أن ارتفاعات ٦٢٪ من الأشجار أقل من ٤,١ م، فأوجد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب سنتيمتر.

الحـــلّ:



من المعلومات المعطاة:

ل(ح < ٤,١) = ل(ز < ز١) = ٠,٦٢ مبيّنة في الشكل.

القيمة المعيارية لـ ح هي:

$$\text{ز}_{١} = \frac{٤,١ - ٣,٧}{\text{ع}} = \frac{٠,٤}{\text{ع}}$$

$$\text{د}\left(\frac{٠,٤}{\text{ع}}\right) = ٠,٦٢$$

$$\frac{٠,٤}{\text{ع}} = \text{د}^{-١}(٠,٦٢)$$

$$\frac{٠,٤}{\text{ع}} = ٠,٣٠٥$$

في الجدول تقع القيمة ٠,٦٢ بين ٠,٦١٧٩ و ٠,٦٢١٧، وتقابل هذه المساحات درجات (قيم) ز التي تبلغ ٠,٣٠ و ٠,٣١، لذلك نستخدم في الحسابات الوسط الحسابي للقيمتين، وهو ٠,٣٠٥

$$\text{ع} = \frac{٠,٤}{٠,٣٠٥}$$

$$= ١,٣١$$

الانحراف المعياري هو ١,٣١ متر أو ١٣١ سم.

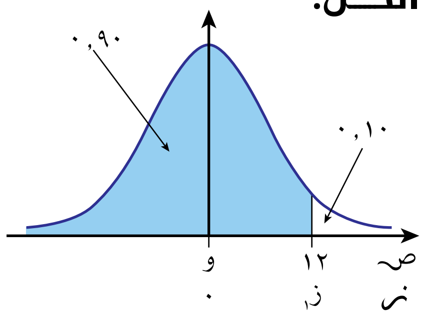
مُساعَدة

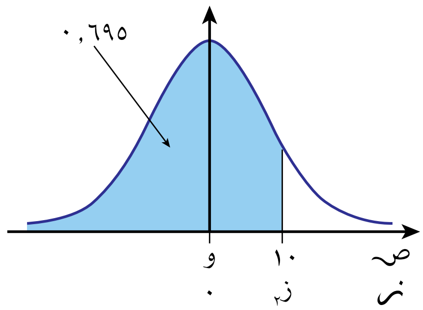
إذا لم تظهر المساحة بشكل مباشر من الجدول وكانت واقعة بين قيمتين، فإننا نحصل على قيمة ز بحساب الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين للمساحتين كقيمة لـ ز.

مثـــال ١٦

إذا علمت أن ص ~ ط(و، ع^{٢})، ل(ص > ١٢) = ٠,١٠ ، ل(ص > ١٠) = ٠,٦٩٥، فأوجد قيمة و، ع مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الحـــلّ:





ل(ص > ١٢) = ٠,١٠ تعني أن
١ − ل(ص ⩽ ١٢) = ٠,١٠
ل(ص ⩽ ١٢) = ١ − ٠,١٠
= ٠,٩٠

لتكن القيمة المعيارية لـ ص$_{١}$ = ١٢ هي ز$_{١}$، فإن:

د (ز$_{١}$) = ٠,٩٠

إذا كان د (ز$_{١}$) = ٠,٩٠، فإن
ز$_{١}$ = د$^{-١}$ (٠,٩٠)

د $\left(\frac{١٢ - و}{ع}\right)$ = ٠,٩٠

$\frac{١٢ - و}{ع}$ = د$^{-١}$ (٠,٩٠)

في الجدول تقع القيمة ٠,٩ بين ٠,٨٩٩٧ و ٠,٩٠١٥، وتقابل هذه المساحات درجات (قيم) ز التي تبلغ ١,٢٨ و ١,٢٩، لذلك نستخدم في الحسابات الوسط الحسابي للقيمتَين، وهو ١,٢٨٥

$\frac{١٢ - و}{ع}$ = ١,٢٨٥

١٢− و = ١,٢٨٥ع .... (١)

لتكن القيمة المعيارية لـ ص$_{٢}$ = ١٠ هي ز$_{٢}$، فإن:

إذا كان د (ز$_{٢}$) = ٠,٦٩٥٠ فإن
ز$_{٢}$ = د$^{-١}$ (٠,٦٩٥٠)

د (ز$_{٢}$) = ٠,٦٩٥٠

د $\left(\frac{١٠ - و}{ع}\right)$ = ٠,٦٩٥٠

$\frac{١٠ - و}{ع}$ = د$^{-١}$ (٠,٦٩٥٠)

$\frac{١٠ - و}{ع}$ = ٠,٥١

١٠ − و = ٠,٥١ع .... (٢)

المعادلة (١) − المعادلة (٢) تعطي:

٢ = ٠,٧٧٢ ع

∴ ع = ٢,٥٨

١٢ − و = ١,٢٨٥ ع

عوّض بدل ع = ٢,٥٨ في إحدى المعادلتَين لتجد و.

و = ١٢ − ١,٢٨٥ × ٢,٥٨

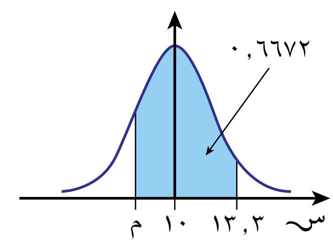
∴ و = ٨,٦٨

مثـــال ١٧

أوجد قيمة م حيث س ~ ط (١٠، ٧)، ل(م < س ≤ ١٣,٣) = ٠,٦٦٧٢، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

الحـــلّ:

الاحتمال المُعطى أكبر من ٠,٥، لذا م < ١٠



$\text{ل}(\text{م} < \text{س} \leqslant ١٣,٣) = ٠,٦٦٧٢$

الفرق بين المساحة إلى يسار س = ١٣,٣ والمساحة إلى يسار س = م يساوي ٠,٦٦٧٢

$\text{ل}(\text{س} \leqslant ١٣,٣) - \text{ل}(\text{س} < \text{م}) = ٠,٦٦٧٢$

$$\text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{١٣,٣ - ١٠}{\sqrt{٧}}\right) - \text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{\text{م} - ١٠}{\sqrt{٧}}\right) = ٠,٦٦٧٢$$

$$\text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{١٣,٣ - ١٠}{\sqrt{٧}}\right) - \left[١ - \text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{-(\text{م} - ١٠)}{\sqrt{٧}}\right)\right] = ٠,٦٦٧٢$$

$$\text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{١٣,٣ - ١٠}{\sqrt{٧}}\right) - \left[١ - \text{ل}\left(\text{ز} \leqslant \frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}}\right)\right] = ٠,٦٦٧٢$$

$$\text{د}(١,٢٥) - ١ + \text{د}\left(\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}}\right) = ٠,٦٦٧٢$$

$$\text{د}\left(\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}}\right) = ١,٦٦٧٢ - \text{د}(١,٢٥)$$

$$\text{د}\left(\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}}\right) = ١,٦٦٧٢ - ٠,٨٩٤٤$$

$$\text{د}\left(\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}}\right) = ٠,٧٧٢٨$$

$$\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}} = \text{د}^{-١}(٠,٧٧٢٨)$$

$$\frac{١٠ - \text{م}}{\sqrt{٧}} = ٠,٧٤٥$$

$$\text{م} = ١٠ - (٠,٧٤٥ \times \sqrt{٧})$$

$$= ٨,٠$$

يحتوي الدرس السابق على أربعة أشكال بيانية والنتيجة ٥، التي توضح بعض النتائج المفيدة لإيجاد قيمة ل(أ ≤ ز < ب)، بمعلومية $\text{ز}_١$ = أ، $\text{ز}_٢$ = ب.

يمكنك استخدام الأشكال والنتائج من النتيجة ٥ نفسها لإيجاد قيمة:

- $\text{ز}_١$ = أ، بمعلومية ل(أ ≤ ز < ب)، $\text{ز}_٢$ = ب، أو
- $\text{ز}_٢$ = ب، بمعلومية ل(أ ≤ ز < ب)، $\text{ز}_١$ = أ

تمارين ٨-٣ب

١) أوجد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ أ حيث س ~ ط (٣٠، ١٦)، ل(س ⩽ أ) = ٠,٨٩٤٤

ب ب حيث س ~ ط (١٢، ٤)، ل(س ⩽ ب) = ٠,٩٥٩٩

ج ج حيث س ~ ط (١٧، ٢٥)، ل(س < ج) = ٠,٠٩٥١

د د حيث س ~ ط (١٥، ٨)، ل(س < د) = ٠,٣٥٢

هـ هـ حيث س ~ ط (١، ٢)، ل(س < هـ) = ٠,١٢٣

و ك حيث س ~ ط (٢٣، ٩)، ل(س < ك) = ٠,٩٣٣٢

ز ر حيث س ~ ط (١٠٠، ٦٤)، ل(س < ر) = ٠,٩٥

مُساعَدة

إذا لم تظهر المساحة بشكل مباشر من الجدول وكانت واقعة بين قيمتين فإننا نحصل على قيمة ز بحساب متوسط قيمة ز المقابلة للمساحتين.

٢) أوجد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ ح حيث س ~ ط (٧، ٢)، ل(٨ > س ⩾ ح) = ٠,٢١٦٠

ب ص حيث س ~ ط (٤٥، ٥٠)، ل(ص > س ⩾ ٥٥) = ٠,٥٤٨٦

ج ك حيث س ~ ط (٢٠، ١١)، ل(ك > س ⩾ ٢٢) = ٠,٥

د ن حيث س ~ ط (١٢، ٥)، ل(ن > س ⩾ ١٦) = ٠,٣٥٧٦

٣) إذا علمت أن المتغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٤، وتباينه ٦، فأوجد احتمال أن تكون قيمة س سالبة.

٤) إذا علمت أن ت ~ ط(١٠، $ع^{٢}$)، ل(ت > ١٤,٧) = ٠,٠٤، فأوجد قيمة ع مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٥) إذا علمت أن ص ~ ط(و، ١٣)، ل(ص ⩾ ١٥) = ٠,٧٥، فأوجد قيمة و مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٦) إذا علمت أن ص ~ ط(و، $ع^{٢}$)، حيث و = ٤ع، ل(ص ⩾ ٨٣) = ٠,٩٥، فأوجد قيمة كل من و، ع مقربًا كل منهما إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

٧) إذا علمت أن المتغير (س) يتبع التوزيع الطبيعي، حيث ع = و − ٣٠، ل(س < ١٢) = ٠,٩، فأوجد قيمة كل من و، ع مقربًا كل منهما إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

٨) أطوال البالغين بالسنتمترات في مدينة ما مُثلت بالمتغير العشوائي المتصل (ح) حيث ح ~ ط(١٦١، ٧,٢).
أطوال ٢٠٪ بالضبط من البالغين تقع بين $ح_{١}$، ١٦٤ سم.
أوجد $ح_{١}$ مقربة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

٩) ينتج مصنع عبوات زيت سعة كل منها نصف لتر. تتبع كمية الزيت في العبوات توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٥٠٧ مل، وانحرافه المعياري ع.

إذا علمت أن ٢٪ من العبوات تحوي كل منها أقل من نصف لتر، فأوجد تباين كمية الزيت في العبوات مقربًا الناتج إلى منزلة عشرية واحدة.

١٠) المسافة التي يمكن أن يسبحها أشخاص من عمر معيّن في ١٠ دقائق تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ١٩٩م، وتباينه ٣٧٠٠ م^{٢}.

احسب قيمة ب إذا علمت أن ٢٥٪ من هؤلاء الأشخاص يمكن أن يسبحوا أكثر من ب مترًا في ١٠ دقائق.

١١) تتبع كتلة الطفل حديث الولادة في بلد ما توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٣,٣٥ كجم، وتباينه ٠,٠٨٥٥ كجم^{٢}.

في الشهر الماضي، ولد بالضبط ١٢٢١٣ طفلًا. احسب تقديرًا إلى أقرب مئة، لعدد حديثي الولادة حيث الكتلة أقل من ٣,٥ كجم.

١٢) وقت الانتظار للمرضى في عيادة طبيّة بالدقائق يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ١٥، وتباينه ١٦:

أ احسب احتمال أن يكون وقت انتظار مريض اِختير عشوائيًا أقل من ١٠ دقائق.

ب زار العيادة في الشهر الماضي ٦٢٤ مريضًا. احسب عدد المرضى الذين انتظروا أقل من ٨ دقائق.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- إذا كانت القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) تأخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها، فإن (س) يعتبر متغيرًا عشوائيًا متصلًا.
- يصف س ~ ط(و، $ع^٢$) توزيعًا طبيعيًا لمتغير عشوائي متصل. ويقرأ س يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي و، وتباينه $ع^٢$.
- في المتغير الطبيعي المعياري (ز) يكون الوسط الحسابي و = ٠، والتباين $ع^٢$ = ١
يُشار إلى المتغير الطبيعي المعياري بـ ز ~ ط (٠، ١).
- إذا كان المتغير (ز) يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا، فإن الجدول يعطي قيم د ($ز_١$) لكل قيمة من قيم $ز_١$، حيث $ز_١ > ٠$، حسب العلاقات الآتية:
  - ل(ز $\leqslant$ $ز_١$) = د ($ز_١$)
  - ل(ز $>$ $ز_١$) = ١- ل(ز $<$ $ز_١$)
  = ١ - د ($ز_١$)
  - ل(ز $\leqslant$ $-ز_١$) = ١ - ل(ز $\leqslant$ $ز_١$)
  = ١ - د ($ز_١$)
  - ل(ز $>$ $-ز_١$) = ل(ز $<$ $ز_١$)
  = د ($ز_١$)
- إذا كان س ~ ط (و، $ع^٢$) ، فإن ز = $\frac{\text{س} - \text{و}}{\text{ع}}$ يتبع توزيعًا طبيعيًا معياريًا،
الدرجة المعيارية $ز_١$ = $\frac{\text{س}_١ - \text{و}}{\text{ع}}$ تدلنا على عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها $س_١$ عن الوسط الحسابي.
- إذا علمنا أن س ~ ط (و، $ع^٢$):
  - ل(أ $<$ ز $<$ ب) = د (ب) - د (أ)، حيث ٠ $<$ أ $<$ ب
  - ل(-أ $<$ ز $<$ ب) = د (ب) + د (أ) - ١، حيث -أ $<$ ٠ $<$ ب
  - ل(-أ $<$ ز $<$ أ) = ٢د (أ) - ١، حيث -أ $<$ ٠ $<$ أ
  - ل(-أ $<$ ز $<$ -ب) = د (أ) - د (ب)، حيث -أ $<$ -ب $<$ ٠

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) المتغير العشوائي المتصل س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٨، وانحرافه المعياري ع. إذا علمت أن ل(س > ٥) = ٠,٩٧٧٢، فأوجد:

أ قيمة ع.

ب ل(س > ٩,٥)

٢) المتغيران العشوائيان المتصلان س، ص يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي. إذا علمت أن س ~ ط(١,٥، ٢^٢)، ص ~ ط(٢، ٥^٢)، فارسم على الشكل نفسه تمثيلَين بيانيَّين يبيّنان منحنيَين طبيعيَّين يمثلان التوزيع الاحتمالي للمتغيرَين (س) ، (ص)، وبيّن محور التماثل لكلّ منهما.

٣) وجدت محطة وقود أن مبيعاتها اليومية باللتر تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي ٤٥٢٠، وانحرافه المعياري ٥٦٠. أوجد:

أ عدد أيام السنة (٣٦٥ يومًا) التي يتجاوز المبيع اليومي المتوقع فيها ٣٩٠٠ لتر.

ب المبيع اليومي في محطة أخرى س لتر، حيث يتبع المتغير (س) التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي م، وانحرافه المعياري ٥٦٠. إذا علمت أن ل (س > ٨٠٠٠) = ٠,١٢٢، فأوجد قيمة م.

٤) المتغير العشوائي ص يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ع.

إذا علمت أن ع = $\frac{٢}{٣}$و، فأوجد احتمال أن تكون قيمة ص المختارة عشوائيًا أقل من ٢و

٥) كتلة رأس الملفوف الأفريقي تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي و، وانحرافه المعياري ٠,٧٥ إذا علمت أن ٣٥,٢٪ من رؤوس الملفوف كتلتها أقل من ٣ كجم، فأوجد:

أ قيمة و.

ب النسبة المئوية لرؤوس الملفوف التي تقل كتلتها عن ٣,٥ كجم.

٦) إذا كانت كتل قطع الصابون س جرامًا، تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ١٢٥ جرامًا، وانحرافه المعياري ٤,٢ جرامات، فأوجد:

أ احتمال اختيار عشوائي لقطعة صابون أكثر من ١٢٨ جرامًا.

ب قيمة ك حيث ل(ك > س > ١٢٨) = ٠,٧٤٦٥ إلى أقرب عدد صحيح

٧) المتغير ص يتبع توزيعًا طبيعيًا. إذا علمت أن ١٠ع = ٣و، ل(ص > ١٠) = ٠,٧٥، فأوجد:

أ قيمة كل من و، ع.

ب ل(ص ≤ ٦).

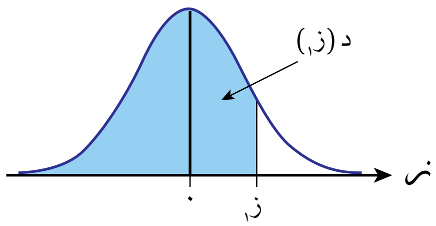
٨) ح، ق متغيران عشوائيان توزيعهما ق ~ ط(٩، ١٦)، ح ~ ط(٦، ع^{٢}).
أوجد قيمة ع إذا علمت أن ل(ح > ٨) = ٢ × ل(ق > ٨).

٩) العمر التشغيلي للسيارات الموجودة في شركة تأجير سيارات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٤٣ شهرًا، وانحرافه المعياري ع. إذا علمت أن احتمال أن يكون عمر سيارة اختيرت عشوائيًا أكبر من ٤$\frac{١}{٦}$ سنة هو ٠,٢٨، فأوجد النسبة المئوية لسيارات الشركة التي عمرها أقل من سنتين.

جدول دالة التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان المتغير (ز) يأخذ شكل التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٠، وتباينه ١، فإن الجدول يُعطي قيمة د (ز) لكل قيمة من قيم ز، حيث:

- د (ز١) = ل(ز ≤ ز١)
- د (−ز١) = ١ − د (ز١)



ز	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٩	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

مصطلحات علمية

ت

التكامل Integration: هو العملية العكسية للتفاضل. (ص ٥١)

التكامل غير المحدود Indefinite integral: تكامل يعبّر عنه من دون حدود، ونتيجته تتضمن ثابت التكامل. (ص ٥٤)

التكامل المحدود Definite integration: تكامل يعبّر عنه مع حدود، ونتيجته لا تتضمن ثابت التكامل. (ص ٦٥)

التوزيع الطبيعي Normal distribution: دالة تمثل التوزيع الاحتمالي لمتغيرات عشوائية متصلة معيّنة في صورة متماثلة تشبه الجرس. (ص ١٤٦)

المتغير الطبيعي المعياري Standard normal variable: متغير عشوائي يُعبّر عنه بالرمز (ز) وسطه الحسابي ٠ (صفر)، وانحرافه المعياري ١ (ص ١٤٩)

ج

الجسم الدوراني Solid of revolution: الجسم الناتج عند دوران منطقة ما حول محور السينات أو الصادات دورة كاملة 360°. (ص ٨٥)

ح

الحجم Volume: الحجم الناتج عند دوران منطقة ما دورة كاملة 360° حول محور السينات أو الصادات. (ص ٨٥)

د

دالة كثافة الاحتمال Probability density function (PDF): دالة كثافة الاحتمال هي منحنى يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. (ص ١٤٠)

الدرجة (ز) Z-score: عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها قيمة ما عن الوسط الحسابي. (ص ١٤٩)

س

سعة العدد المركب Argument of a complex number: سعة العدد المركب ع = س + ص ت هي زاوية المتجه الموضعي $\binom{س}{ص}$، ويُرمز لها بالرمز أ حيث $-\pi <$ أ $\leqslant \pi$، وتُقاس عادة بالراديان. (ص ١٠٨)

ص

الصورة الأسّية للعدد المركب Exponential form of a complex number: ع = ر هـ$^{ت أ}$، حيث ر هي |ع|، أ هي سعة (ع). (ص ١١١)

الصورة الديكارتية للعدد المركب Cartesian form of a complex number: ع = س + ص ت، حيث س، ص عددان حقيقيان. (ص ١٠٧)

الصورة القطبية للعدد المركب Polar form of a complex number: ع = ر(جتا أ + ت جا أ)، حيث ر هي |ع|، أ هي سعة (ع). (ص ١١٠)

ع

العدد التخيلي Imaginary number: هو عدد مركب يرمز له بالرمز ت، حيث ت^2 = −١. (ص ٩٨)

العدد الحقيقي Real numbers: مجموعة كل الأعداد النسبية وغير النسبية. (ص ٩٧)

العدد المركب Complex number: عدد يمكن كتابته في صورة س + ص ت، حيث س، ص عددان حقيقيان، أما ت فهو الوحدة التخيلية. (ص ١٠٠)

ق

قاعدة مشتقة ضرب دالتَين Rule of the derivative of the product of two functions: قاعدة تُستخدم لإيجاد مشتقة ضرب دالتَين. (ص ١٩)

قاعدة مشتقة قسمة دالتَين Rule of the derivative of the quotient of two functions: قاعدة تُستخدم لإيجاد مشتقة قسمة دالتَين. (ص ٢٤)

م

المتغير العشوائي المتصل Continuous random variable: هو المتغير الذي تأخذ فيه القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها. (ص ١٣٩)

مخطط أرجاند Argand diagram: طريقة بيانية لتمثيل العدد المركب ع = س + ت ص بالإحداثيات الديكارتية (س، ص)، حيث المحور السيني هو المحور الحقيقي، والمحور الصادي هو المحور التخيلي. (ص ١٠٧)

مرافق العدد المركب: Conjugate of a complex number: يعرّف العدد المرافق للعدد المركب ع = س + ت ص على أنه $ع^*$ = س − ت ص. (ص ١٠١)

المستوى المركب Complex plane: هو المستوى الذي يتكون من الأعداد المركبة، مع نظام إحداثي ديكارتي، بحيث يسمى المحور السيني بالمحور الحقيقي ويتضمن الاعداد الحقيقية، ويسمى المحور الصادي بالمحور التخيلي ويتضمن الاعداد التخيلية. (ص ١٠٧)

مقلوبات الدوال المثلثية Reciprocal trigonometric functions: ثلاث دوال مثلثية وهي دالة مقلوب الجيب وتسمى قاطع التمام، ودالة مقلوب جيب التمام وتسمى القاطع، ودالة مقلوب الظل وتسمى قاطع الظل. (ص ٣٩)

مقياس العدد المركب Modulus of a complex number: مقياس العدد المركب ع = س + ت ص هو طول المتجه الموضعي $\binom{س}{ص}$، ويُرمز له بالرمز |ع|. (ص ١٠٨)

المنحنى الطبيعي Normal curve: هو منحنى متماثل يشبه الجرس يكون فيه: الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال. (ص ١٤٠)

المقاييس Parameters: القيم الثابتة التي تعرّف التوزيع الطبيعي لمتغير عشوائي. (ص ١٤٦)

المعيارية Standardising: طريقة لترميز القيم في التوزيع بحيث يكون الوسط الحسابي ٠ (صفر)، والانحراف المعياري ١ (ص ١٦٢)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Stephan Snyder/Shutterstock; Dimitrios Pikros/EyeEm/Getty Images; LazingBee/Getty Images; unconfirmed (x3); zhengshun tang/Getty images

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٧٢٢٠ / ٢٠٢٣م

Printed by: Mazoon Printing, Publishing & Packaging L.L.C - 24815693

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

– كتاب النشاط.

– دليل المعلّم.

ISBN 978-99992-56-16-2

9 789999 256162 >

www.moe.gov.om

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS