سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS ، المملكة المتحدة.

تشكل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

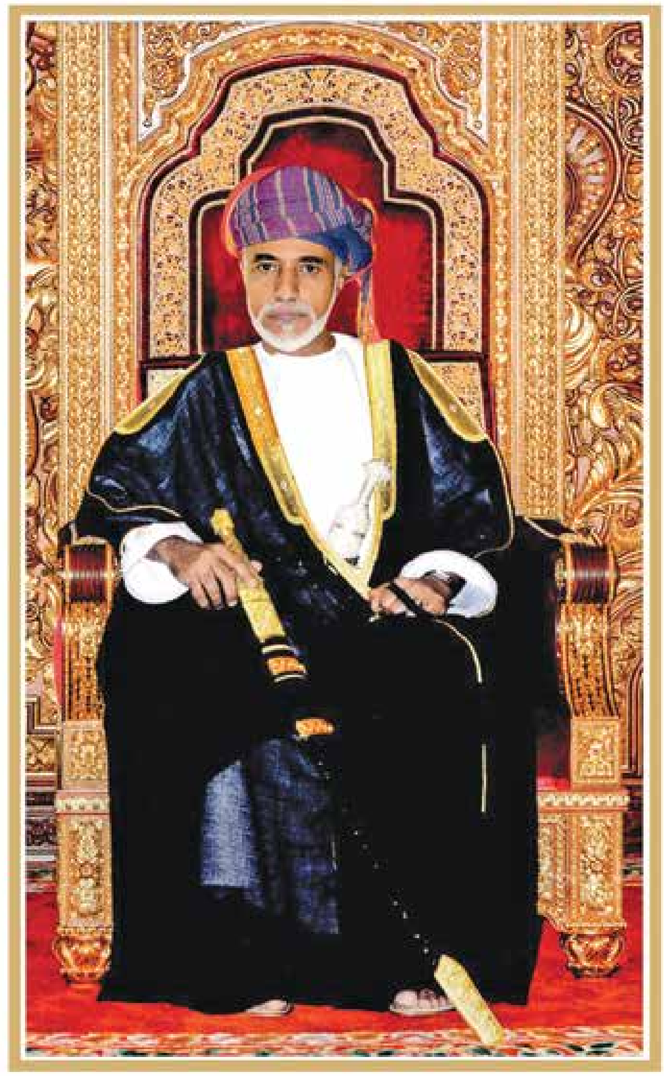
الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمت مواءمتها من كتاب النشاط - الرياضيات للصف الثاني عشر - من سلسلة Cambridge international AS & A level Mathematics 1، للمؤلفين موريل جايمز، ودين تشالمرز.

تمت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد الموقع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة جامعة كامبريدج.

تمت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه



المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
–طيّب اللّه ثراه–

حضـرة صـاحـب الجـلالـة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
–حفظه اللّه ورعاه–

سلطنـــة عُمــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا　　جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان　　بِالْعِزِّ وَالأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا　　عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي　　أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء　　وَامْلَئي الْكَوْنَ ضِياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مُكوِّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّٰه ورعاه.

واللّٰه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم. يعطي هذا الجزء صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحوّل بين الراديان، والدرجة.

١-٢ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٣ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٤ تحلّ المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

مساعدة

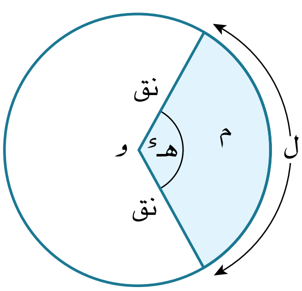
الجذر التربيعي توجد له قيمتان: قيمة موجبة وقيمة سالبة.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

مساعدة: إطارات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول محتوى الكتاب.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) استخدم الشكل المجاور في كل أجزاء هذا التمرين، حيث نق هو نصف قطر الدائرة التي مركزها و (سم)، ل هو طول القوس (سم)، م هو مساحة القطاع الدائري المظلّل (سم^2)، هـ الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالراديان إذا علمت أن:



أ نق = ٧، هـ = ١,٢، فأوجد ل ، م.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة:

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي أسئلة الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس، وقد تم ترميزها بنجمة صفراء.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

الوحدة الأولى

القياس الدائري Circular measure

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحوّل بين الراديان، والدرجة.

١-٢ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٣ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٤ تحلّ المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

١-١ الراديان Radian

تمارين ١-١

١) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة π:

أ °٩٠ ب °١٤٠ ج °٤٥

د °٣٠ هـ °٧٢ و °١٨

ز °١٢٠ ح $\frac{١}{٢}$٢٢° ط °٧٢٠

ي °٤٢٠ ك °٢٧٠ ل °١

٢) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الراديان إلى الدرجات:

أ $\frac{\pi}{١٨}$ ب $\frac{\pi}{٢٠}$ ج $\frac{\pi}{٥}$ د $\frac{\pi}{٨}$

هـ $\frac{\pi}{٩}$ و $\frac{٢\pi}{٣}$ ز $\frac{٥\pi}{٨}$ ح $\frac{٣\pi}{٥}$

ط $\frac{\pi}{٤٥}$ ي ٦π ك $-\frac{\pi}{٢}$ ل $\frac{٥\pi}{١٨}$

٣) اكتب قيمة كل مما يأتي:

أ جا $\frac{\pi}{٣}$ ب جتا $\frac{\pi}{٤}$ ج ظا $\frac{\pi}{٦}$ د جتا $\frac{٣\pi}{٢}$

هـ جا $\frac{٧\pi}{٤}$ و جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ ز ظا $\frac{٥\pi}{٣}$ ح جا^{٢} $\frac{٢\pi}{٣}$

٤) اكتب كل زاوية من الزوايا الآتية بالراديان مقربةً إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ١) °٢٨٨ ٢) °٢٠

ب ١) °٢٧٠ ٢) °٩٠

ج ١) 65°

٢) 145°

د ١) 100°

٢) 83°

٥) اكتب كلًّا من الزوايا الآتية بالدرجات، مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة:

أ ١) $\frac{\pi}{8}$

٢) $\frac{\pi}{4}$

ب ١) $\frac{5\pi}{6}$

٢) $\frac{2\pi}{3}$

ج ١) $\frac{3\pi}{2}$

٢) $\frac{5\pi}{3}$

د ١) ١,٢٢ ء

٢) ٤,٦٣ ء

٦) اكتب كلًّا من الزوايا الآتية بالدرجات مقرّبًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ١,٥ ء　　ب ٢,٢ ء　　ج ١,٠٦ ء

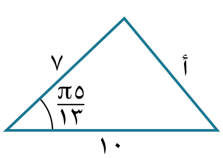
د ١,٩٣ ء　　هـ ٠,٦٨ ء

٧) استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة كل مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

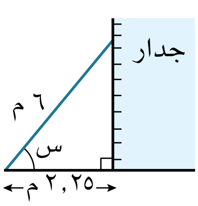
أ جا ١,٢ ء　　ب جتا ٠,٨ ء　　ج ظا ١,٢ ء

د جا $\frac{\pi}{١٠}$　　هـ جتا $\frac{\pi}{٥}$　　و ظا $\frac{٣\pi}{٤}$

٨) إذا علمت أن أطوال أضلاع المثلث المجاور بوحدة الطول هي ٧، ١٠، أ، وقياس إحدى زواياه يساوي $\frac{٥\pi}{١٣}$، فأوجِد قيمة أ مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

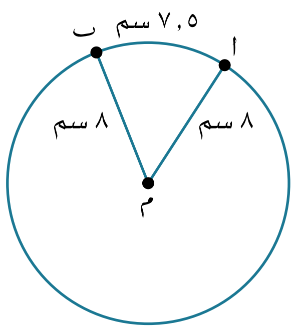


٩) يبيّن الشكل المجاور سلّمًا طوله ٦ م مستندًا إلى حائط رأسي. تم تثبيت السلّم على الأرض الأفقية، وطول المسافة بين قاعدة السلم والجدار تساوي ٢,٢٥ م. يكون استخدام السلّم آمنًا عندما لا تقل الزاوية س عن ١,٢ ء. أوجِد قيمة س بالراديان مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية. هل السلّم آمن للاستخدام؟



١-٢ طول القوس Arc length

تمارين ١-٢



في هذه التمارين، اكتب الإجابات مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة.

١) في الشكل المجاور، نصف قطر الدائرة يساوي ٨ سم، وطول القوس الأصغر ا ب يساوي ٧,٥ سم. احسب قياس الزاوية الحادة ا م ب:

أ بالراديان.

ب بالدرجات.

٢) تقع النقطتان ل، ك على محيط دائرة مركزها م. إذا علمت أن طول $\overset{\frown}{\text{ل ك}}$ يساوي ١٢ سم، $\text{ق}(\text{ل}\hat{\text{م}}\text{ك}) = ١,٦^{\text{د}}$، فأوجد طول نصف قطر الدائرة.

٣) أوجِد (بدلالة π) طول القوس في كلّ من القطاعات الدائرية الآتية:

أ نصف القطر ٤ سم، قياس الزاوية $\frac{\pi}{٢}$

ب نصف القطر ٣ سم، قياس الزاوية $\frac{٣\pi}{٤}$

ج نصف القطر ١٠ سم، قياس الزاوية $\frac{٣\pi}{٥}$

د نصف القطر ١٢ سم، قياس الزاوية $\frac{٥\pi}{٦}$

٤) أوجِد طول قوس كل قطاع دائري من القطاعات الآتية بالراديان إذا علمت أن:

أ نق = ١٢ سم، قياس الزاوية ١,٢ ء

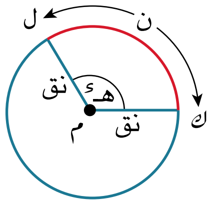
ب نق = ٤,٥ سم، قياس الزاوية ٠,٥٥ ء

٥) أوجِد قياس زاوية كل قطاع من القطاعات الآتية بالراديان:

أ نصف القطر ٢٠ سم، طول القوس ٥ سم.

ب نصف القطر ٩,٣٦ سم، طول القوس ٥,٢ سم.

٦) دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق. القوس الأصغر ل ك يقابل الزاوية هـ ء، وطوله يساوي ن. أوجِد:



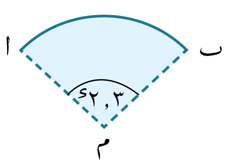
أ ن عندما نق = ٩، هـ = $\frac{٣\pi}{٥}$

ب نق عندما ن = ١٤,٩، هـ = ٢,٩٨ ء

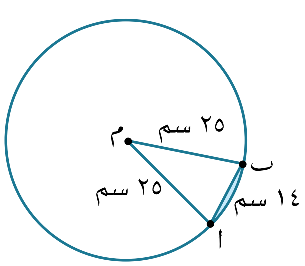
ج هـ عندما ن = $\frac{٤٩\pi}{٩}$، نق = ٧

٧) قطاع دائري من دائرة نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها هـ ء. إذا علمت أن محيط القطاع يساوي ٥٠ سم، فأوجِد قياس الزاوية هـ.

٨) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري م ا ب من دائرة مركزها م، حيث ق(ا م̂ ب) = ٢,٣ ء. إذا علمت أن محيط القطاع يساوي ٣٠ سم، فأوجِد طول $\overline{\text{م ا}}$.



٩) أوجِد محيط القطعة الدائرية الصغرى من الدائرة التي مركزها م، ونصف قطرها ٢٥ سم، حيث طول الوتر ا ب = ١٤ سم.

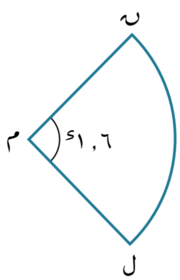


١-٣ مساحة القطاع الدائري Area of a sector

تمارين ١-٣

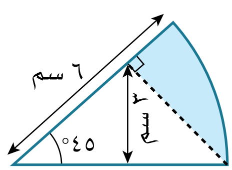
١) قطاع دائري قياس زاويته ١,٢ ء، ومساحته ٥٤ سم². أوجِد نصف قطر الدائرة.

٢) إذا علمت أن محيط القطاع الدائري المجاور يساوي ٢٨ سم، فأوجد مساحته.



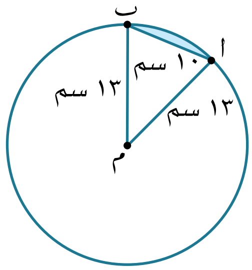
٣) قطاع دائري قياس زاويته ٠,٩ π، ومساحته ١٨٠ سم². أوجِد نصف قطر الدائرة.

٤) أوجِد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور.



٥) تقع النقطتان ل، ك على محيط دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٥ سم. الفرق بين مساحة القطاع الأكبر ل م ك، والقطاع الأصغر ل م ك يساوي ١٥ سم². أوجِد قياس الزاوية المنفرجة ل م ك.

٦) أوجِد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور، حيث م هي مركز الدائرة، وطول نصف قطرها ١٣ سم، وطول الوتر ا ب = ١٠ سم.

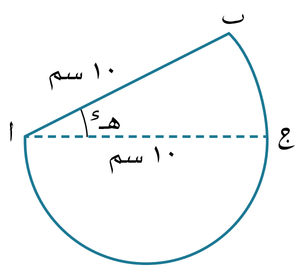


٧) وتر في دائرة يقابل الزاوية المركزية هـ ء، ويقطع قطعة دائرية مساحتها $\frac{1}{4}$ المساحة الإجمالية للدائرة:

أ بيّن أن هـ ء − جا هـ ء = $\frac{\pi}{2}$

ب أثبت أن هـ ء = ٢,٣١ ء مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

٨) ا ب ع قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ١٠ سم، ومركزها ا. ق(ب $\hat{ا}$ ع) = هـ ء، مساحة نصف الدائرة التي قطرها ا ع = ضعف مساحة القطاع الدائري ا ب ع.

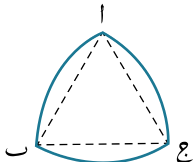


أوجِد:

أ هـ بدلالة π.

ب محيط كامل الشكل بدلالة π.

٩) قطعة معدنية تتشكل في البداية من مثلث متساوي الأضلاع ا ب ج طول ضلعه ٢ سم. تمر الدائرة التي مركزها ا بالنقطتين ب ، ج، وتمر الدائرة التي مركزها ب بالنقطتين ا ، ج، وتمر الدائرة التي مركزها ج بالنقطتين ا ، ب. أوجِد محيط القطعة المعدنية، ومساحة أحد وجهيها.

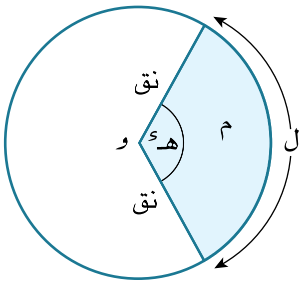


١٠) ★ دائرة مركزها و، ونصف قطرها نق سم. قطاع دائري فيها محيطه ٦ سم ، وقياس زاويته المركزية هـ ء.

أ) بيّن أن هـ ء = $\frac{٦}{\text{نق}}$ − ٢، واكتب مساحة القطاع الدائري (م سم^{٢}) بدلالة نق.

ب) بيّن أن أكبر مساحة ممكنة للقطاع الدائري (م) عندما نق = $\frac{٣}{٢}$، واحسب القيمة المناظرة للزاوية هـ ء.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى



١) استخدم الشكل المجاور في كل أجزاء هذا التمرين، حيث نق هو نصف قطر الدائرة التي مركزها و (سم)، ل هو طول القوس (سم)، م هو مساحة القطاع الدائري المظلّل (سم^{٢})، هـ الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالراديان إذا علمت أن:

أ نق = ٧، هـ ء = ١,٢، فأوجد ل ، م.

ب نق = ٣,٥، هـ ء = ٢,١، فأوجد ل ، م.

ج ل = ١٢، نق = ٨، فأوجد هـ ء، م.

د ل = ١٤، هـ ء = ٠,٧، فأوجد نق، م.

هـ م = ٣٠، نق = ٥، فأوجد هـ ء، ل.

و م = ٦٤، ل = ١٦، فأوجد نق، هـ ء.

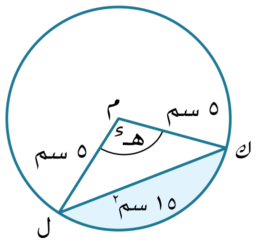
ز م = ٢٤، نق = ٦، فأوجد ل.

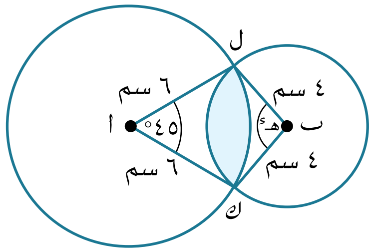
ح) م = ٣٠، ل = ١٠، فأوجد هـ^{ء}.

٢) قطاع دائري محيطه ح = ١٢ سم، وقياس زاويته المركزية هـ = (٠,٤)^{ء}. أوجِد نصف قطر الدائرة.

٣) قطاع دائري محيطه ٧ سم، ومساحته ٣ سم^{٢}. أوجِد الأطوال الممكنة لنصف قطر الدائرة.

٤) ★ في الشكل المجاور: دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٥ سم. $\overset{\frown}{\text{ل ك}}$ يقابل الزاوية المركزية هـ^{ء}. إذا علمت أن مساحة القطعة الدائرية الصغرى (المظللة) تساوي ١٥ سم^{٢}، فبيّن أن جا هـ^{ء} = هـ^{ء} − ١,٢



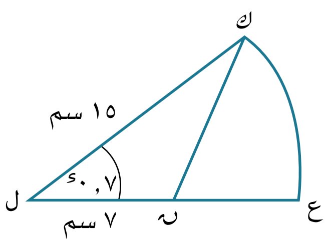


٥) في الشكل المجاور: دائرتان مركزهما أ ، ب تتقاطعان عند النقطتَين ل ، ك. نصفا قطر الدائرتَين ٦ سم، ٤ سم، ق(ل $\hat{أ}$ ك) = ٤٥°:

أ بيّن أن طول $\overline{لك}$ = ٦ $\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$

ب أوجِد ق(ل $\hat{ب}$ ك).

ج أوجِد مساحة المنطقة المظللة (مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة).

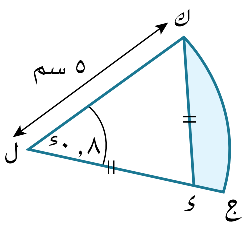


٦) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري ل ك ع في دائرة مركزها ل، ونصف قطرها ١٥ سم. ق(ك $\hat{ل}$ ع) = (٠,٧)ء، طول $\overline{لن}$ = ٧ سم، أوجد:

أ مساحة المنطقة ك ن ع.

ب محيط المنطقة ك ن ع.

٧) يبيّن الشكل المجاور ل ك ج قطاعًا دائريًّا في دائرة نصف قطرها ٥ سم، ومركزها ل، ق(ك لˆ ج) = (٠,٨)ء. احسب مقرّبًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة:

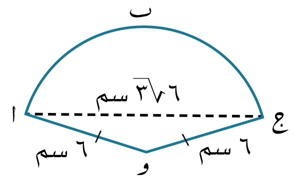


أ طول ك⌒ج.

ب مساحة القطاع الدائري ل ك ج.

ج طول ل ى.

د مساحة المنطقة المظللة.



٨) ا و ج ب قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ٦ سم. طول ا ج = ٦√٣ سم.

أوجِد:

أ ق(ا$\hat{\text{و}}$ ج).

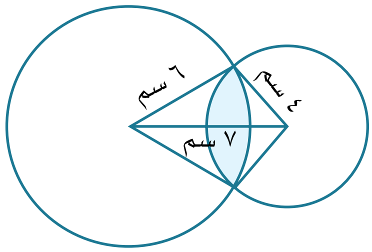
ب مساحة القطاع الدائري ا و ج ب.

ج مساحة المثلث ا و ج.

د مساحة القطعة الدائرية ا ج ب (مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

هـ محيط القطاع الدائري ا و ج ب (مقرّبًا إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

٩) يبيّن الشكل المجاور دائرتَين متقاطعتَين نصفا قطرَيهما ٦ سم، ٤ سم، والمسافة بين مركزَيهما ٧ سم. أوجِد محيط ومساحة المنطقة المظللة المشتركة بين الدائرتَين (مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).



الوحدة الثانية
حساب المثلثات Trigonometry

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تتذكر القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٠°، ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°، ٩٠°، وقيمها المكافئة بالراديان، وتجد القيم الدقيقة للزوايا المتعلقة بها.

٢-٢ تجد القيم الدقيقة (بالدرجات أو بالراديان) للنسب المثلثية (جاهـ، جتاهـ، ظاهـ) بمعلومية إحداها.

٢-٣ ترسم وتستخدم التمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لأي زاوية (بالدرجات وبالراديان).

٢-٤ ترسم التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد) للتمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لزوايا قياسها بين ٠°، ٣٦٠° أو بين ٠، ٢ π، مثل: ص = ٢جا (٣س).

٢-٥ تستخدم الصيغ جا$^{-1}$(س)، جتا$^{-1}$(س)، ظا$^{-1}$(س) للتعبير عن القيم الرئيسية للعلاقات العكسية للمثلثات، وتجد قيم الدوال البسيطة باستخدام المعرفة حول القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° وقيمها المكافئة بالراديان.

٢-٦ تحل معادلات مثلثية بسيطة تقع في مجال محدد بالدرجات أو بالراديان.

٢-٧ تستخدم المتطابقات ظا هـ = $\frac{\text{جا (هـ)}}{\text{جتا (هـ)}}$، جا^{2}(هـ) + جتا^{2}(هـ) = ١ لتحل معادلات مثلثية في براهين مثلثية بالدرجات وبالراديان.

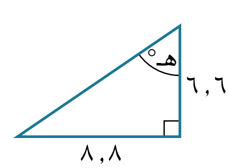
٢-١ الزوايا بين ٠°، ٩٠°
Angles between 0° and 90°

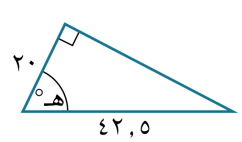
تمارين ٢-١

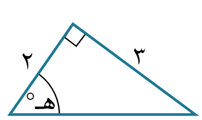
١) لكل مثلث من المثلثات المبيّنة أدناه:

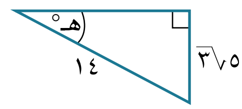
أ استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول الضلع الثالث.

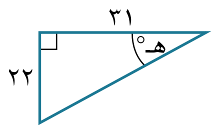
ب اكتب قيمة جا هـ، جتا هـ، ظا هـ

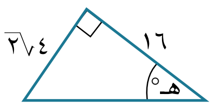
١)


٢)


٣)


٤)


٥)


٦)


٢) إذا علمت أن جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$، حيث هـ زاوية حادة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ

ب ظا هـ

ج ٣جا هـ × جتا هـ

د $\frac{٣}{\text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}$

هـ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا هـ}}$

و $\frac{١ - \text{جا هـ}}{١ + \text{جا هـ}}$

٣) إذا علمت أن ظا هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$، حيث هـ زاوية حادة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

مساعدة

جا^{٢} هـ تعني (جا هـ)^{٢}

أ جا هـ

ب جتا هـ

ج جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ

د $\frac{\text{٢جتا هـ}}{\text{ظا هـ}}$

هـ $\dfrac{٢}{\text{جا}^{٢}\,\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\,\text{هـ}}$

و $\dfrac{\text{٥جا هـ}}{\text{١} - \text{جتا هـ}}$

٤) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ $\text{جا}\ ٦٠° \times \text{جتا}\ ٦٠°$

ب $\text{جا}^{٢}\ ٦٠°$

ج $\text{جا}\ ٣٠° + \text{جتا}\ ٣٠°$

د $\dfrac{\text{جا}\ ٣٠°}{\text{جا}\ ٦٠°}$

هـ $\dfrac{\text{ظا}^{٢}\ ٤٥°}{٢ + \text{ظا}\ ٣٠°}$

و $\dfrac{\text{جا}^{٢}\ ٣٠° + \text{جتا}^{٢}\ ٣٠°}{\text{جا}\ ٣٠°\ \text{جتا}\ ٣٠°}$

٥) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

أ $١ - \text{جا}^{٢}\ ٣٠°$

ب $١ + \text{ظا}^{٢}\ ٣٠°$

ج $\text{جا}\ ٤٥° + \text{جا}\ ٦٠°$

د $\text{جتا}\ ٦٠° - \text{جتا}\ ٣٠°$

٦) بيّن أن:

أ $\text{جا}\ ٦٠° \times \text{جتا}\ ٣٠° + \text{جتا}\ ٦٠° \times \text{جا}\ ٣٠° = \text{جا}\ ٩٠°$

ب جا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٤٥° = ١

ج جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠° = جتا ٦٠°

د (١ + ظا ٦٠°)^{٢} = ٤ + ٢$\sqrt{٣}$

٧) بيّن أن جا ٦٠° + ظا ٣٠° = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$

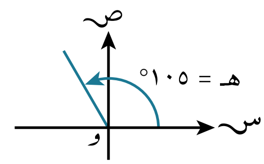
٨) إذا كان $\frac{\text{جا } ٣٠° + \text{جا } ٤٥°}{\text{جتا } ٣٠° + \text{جتا } ٤٥°}$ = $\sqrt{٦}$ + $\sqrt{٣}$ − $\sqrt{\text{أ}}$ + ب، فأوجد قيمتَي أ ، ب.

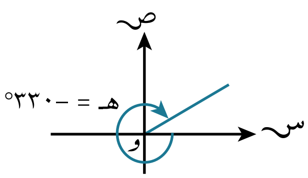
٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية)

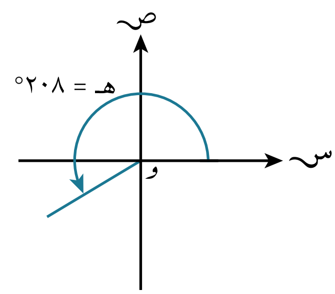
The Principal angle (the reference angle)

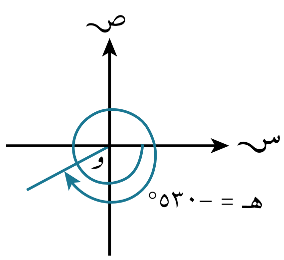
تمارين ٢-٢

١) أوجِد زاوية الأساس للزاوية هـ في كل ممّا يأتي:

أ


ب


ج


د


٢) في كل ممّا يأتي، سمّ الربع الذي تقع فيه و ل عندما تكون الزاوية التي تصنعها و ل مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل:

أ ١٤٥°

ب ٣٤٠°

ج -١٠٠°

د ١٨٥°

هـ -٣٨٠°

و $\frac{٢\pi}{٥}$

ز $-\frac{١٢\pi}{٥}$

٣) إذا علمت أن ب هي زاوية الأساس للزاوية هـ، فأوجد قيمة هـ في كل مما يأتي:

أ ب = ٧٥° تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°

ب ب = ٣٠° تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°

ج ب = ٥٤° تقع في الربع الرابع، ٣٦٠° < هـ < ٧٢٠°

د ب = $\frac{\pi}{٣}$ تقع في الربع الثالث، ٠ < هـ < ٢π

هـ ب = $\frac{\pi}{٤}$ تقع في الربع الثاني، ٢π < هـ < ٤π

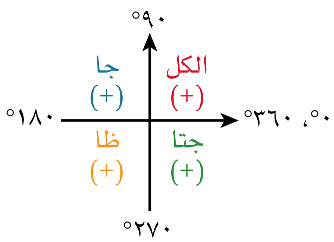
و ب = $\frac{\pi}{٥}$ تقع في الربع الرابع، −٤π < هـ < −٢π

٢–٣ النسب المثلثية للزوايا العامة

Trigonometric ratios of general angles

مساعدة

يذكرك المخطط المجاور بالربع الذي تكون فيه كل نسبة من النسب المثلثية موجبة.



تمارين ٢-٣

١) إذا علمت أن جتا هـ = $\frac{٢}{٣}$، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ.

ب ظا هـ.

٢) إذا علمت أن ظا هـ = ٣، فأوجِد القيمتَين الممكنتَين لـ جا هـ.

٣) إذا علمت أن ل = جا س، حيث ٩٠° < س < ١٨٠°، فاكتب جتا س بدلالة ل.

٤) إذا علمت أن جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$، حيث هـ زاوية منفرجة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا هـ

ب ظا هـ

٥) إذا علمت أن ظا (ف) = $\frac{٣}{٤}$، جا (ن) = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$، حيث ف، ن تقعان في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا (ف)

ب جتا (ف)

ج جتا (ن)

د ظا (ن)

٦) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ ١) جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ٢) جتا $\frac{٥\pi}{٤}$

ب ١) جا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ ٢) جا $\left(-\frac{\pi}{٣}\right)$

ج ١) ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ٢) ظا $\left(-\frac{\pi}{٤}\right)$

٧) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

أ ١ − جا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

ب جا $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ + جا $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

ج جتا $\frac{\pi}{٣}$ − جتا $\frac{\pi}{٦}$

٨) بيّن أن جتا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ − جا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

٩) بيّن أن $\left(١ + \text{ظا } \frac{\pi}{٣}\right)^{٢} = ٤ + ٢\sqrt{٣}$

٢-٤ التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

Graphs of trigonometric functions

مساعدة

قبل أن تبدأ بحل تمارين الدرس ٢-٤، تأكّد من أنك تفهم المقصود بالمصطلحات الآتية: الدورة، السعة، خط التقارب، الراديان، المجال، المدى، الدالة.

مساعدة

لا يؤثر الانسحاب والتمدد الرأسي على الدورة.

لا يؤثر الانسحاب والتمدد الأفقي على السعة.

تمارين ٢-٤

مساعدة

نحصل على التمثيل البياني للدالة ص = جتا س من التمثيل البياني للدالة ص = جا س بالانسحاب ٩٠° إلى اليسار والعكس صحيح. أي أن:

جتا س = جا (س + ٩٠°)

جا س = جتا (س − ٩٠°)

١) سمّ السعة والدورة لكل دالة من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٣ جا (٤س)

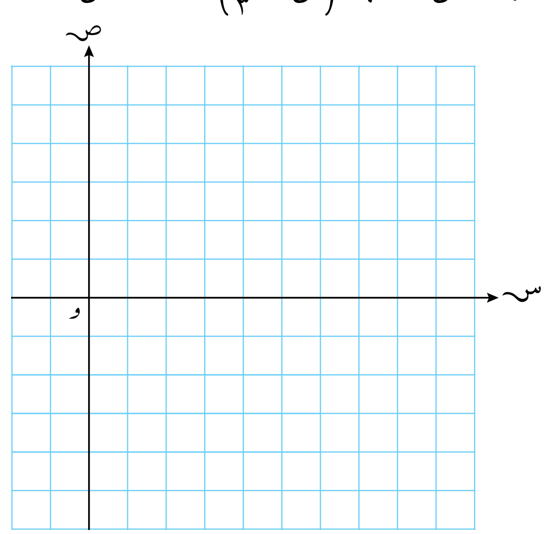
ب د(س) = جتا $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

ج د(س) = جتا (٣س)

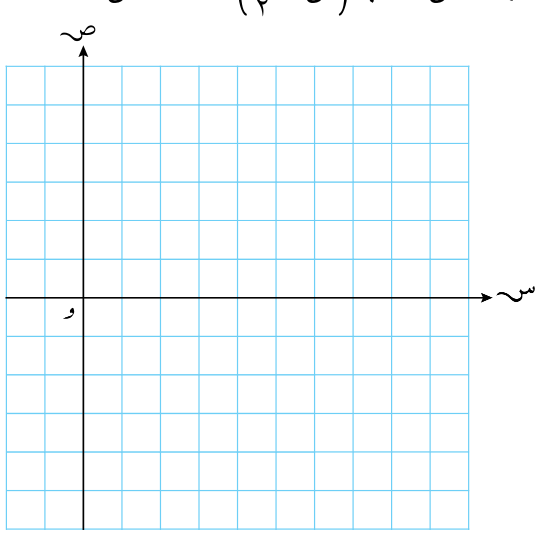
د د(س) = ٢جا (π س)

٢) ارسم بيان كل من الدوال الآتية، وحدد أعلى قيمة وأقل قيمة للدالة:

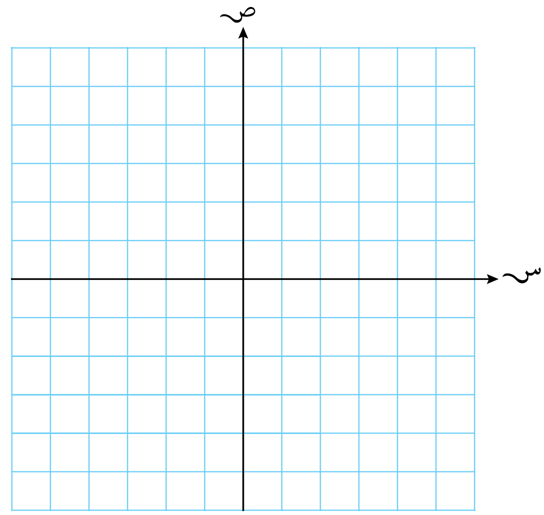
أ ١) ص = ٢جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٣}\right)$ ، ٠ ⩽ س ⩽ ٢π



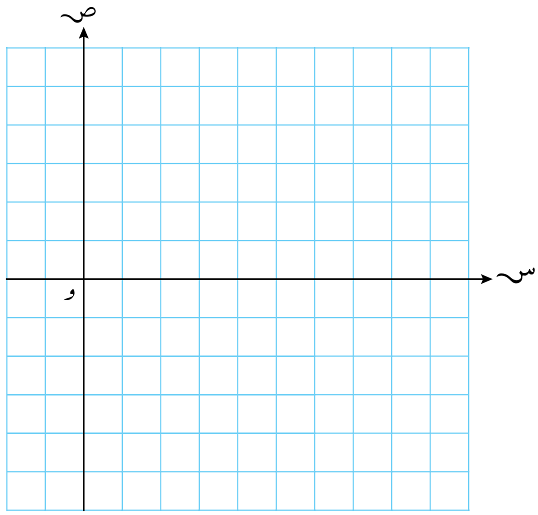
٢) ص = ٣جا $\left(\text{س} + \frac{\pi}{٢}\right)$ ، ٠ ⩽ س ⩽ ٢π



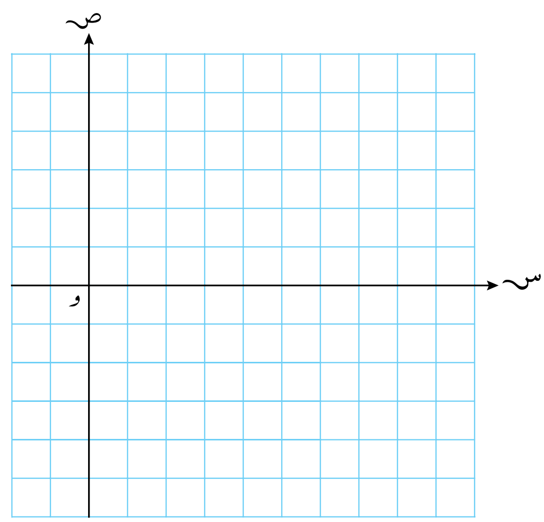
ب ١) ص = جا(٢س) ، $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$



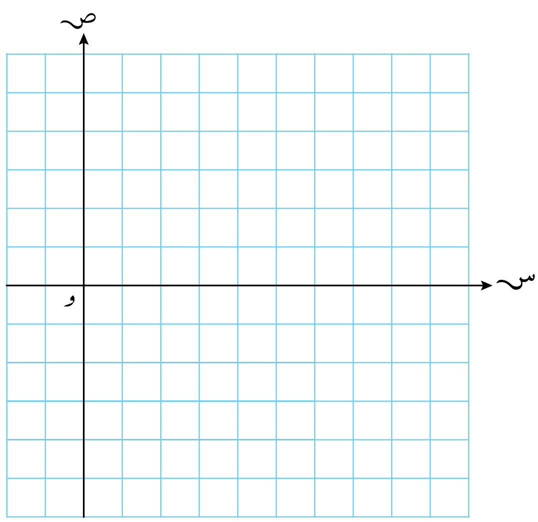
٢) ص = جتا(٣س) ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$



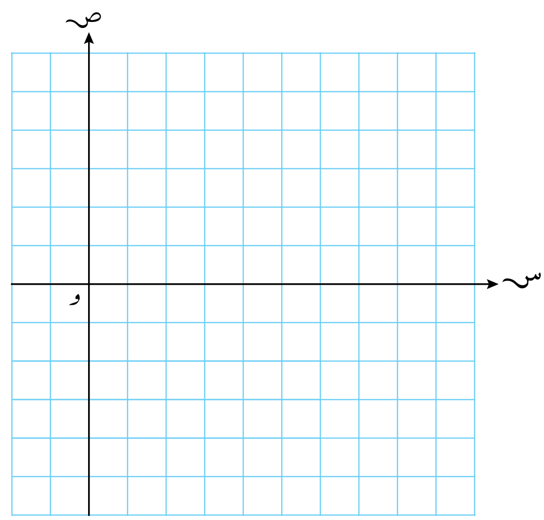
ج ١) ص = ظا$\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)$ ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$



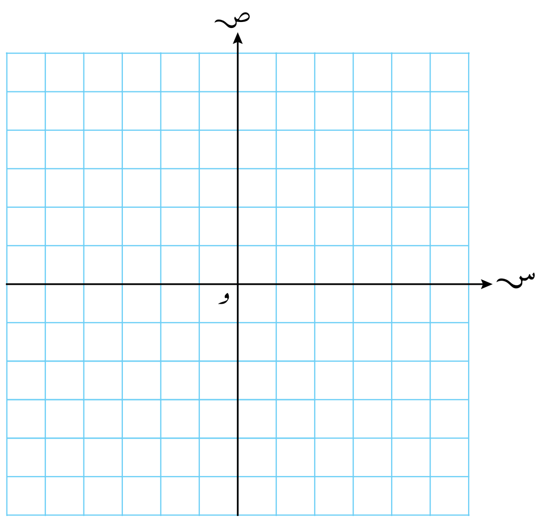
٢) ص = ظا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$ ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$



د ١) ص = −٢ + ٣جتا س ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant ٤\pi$



٢) ص = ١ + ٢جا س ، $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$

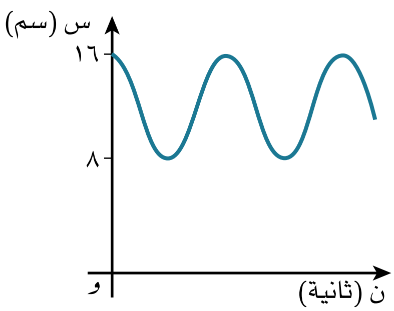


٣) يتغير عمق الماء في مرفأ خلال اليوم، ويعطى التغير بالمعادلة م = ١٦ + ٧جا $\left(\frac{\pi}{١٢}\right.$ن$\left.\right)$، حيث م العمق بالأمتار، ن الوقت بالساعات بعد منتصف الليل.

أ أوجِد عمق الماء عند المد، وعند الجزر.

ب في أي وقت يحدث المد؟

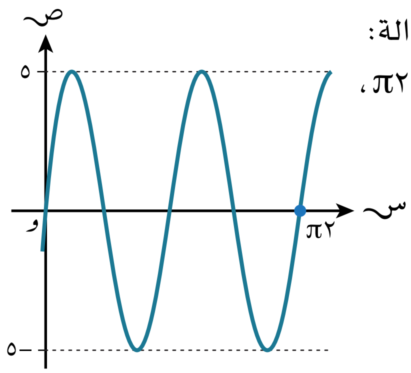
٤) يوضح التمثيل البياني المجاور كيف تتغير المسافة (س سم) بين نقطة ثابتة وجسيم دوّار مع مرور الوقت. معادلة البيان هي: س = م + أ جتا (٥πن)، حيث ن مقيسة بالثواني؛ أ ، م عددان ثابتان.



أ أوجد السعة.

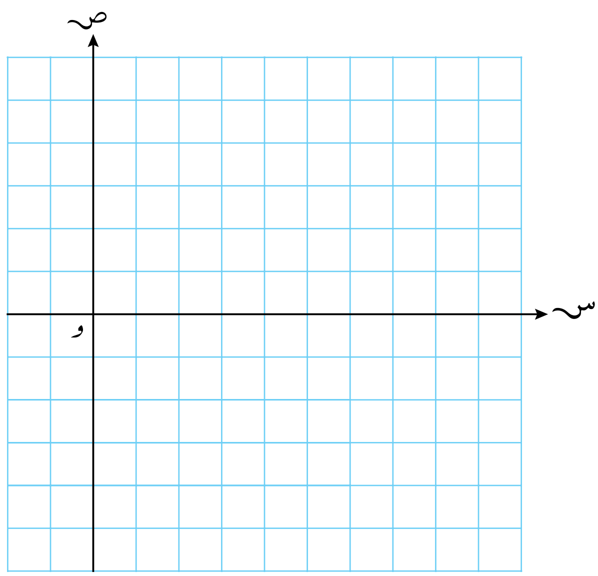
ب ما الوقت الذي يستغرقه الجسيم للقيام بخمس دورات كاملة؟

٥) التمثيل البياني المجاور يمثل بيان الدالة:
ص = ل جا (ق س)، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π،
أوجِد قيمتَي ل، ق.



مساعدة
هناك فرق بين جتا (ق س)،
ق جتا (س)

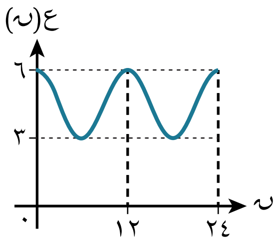
٦) أ على المستوى الإحداثي نفسه، ارسم بيان الدالتَين ص = ١ + جا ٢س،
ص = ٢جتا س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π.



ب اذكر عدد حلول المعادلة ١ + جا ٢س = ٢جتا س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π.

ج اذكر عدد حلول المعادلة ١ + جا ٢س = ٢جتا س، حيث −٢π ⩽ س ⩽ ٦π.

٧) يبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين ارتفاع مستوى الماء تحت جسر، والزمن ں (بالساعات). وفقًا للعلاقة ع(ں) = جـ + أ جتا (ب ں) أوجِد قيم أ، ب، جـ.



---

٨) أوجِد أعلى قيمة وأقل قيمة لـ ص، وقيم س الموجبة المناظرة لأعلى قيمة، وأقل قيمة في كل مما يأتي:

أ ص = ١ + جتا (٢س)

ب ص = ٥ − ٤جا (س + ٣٠°)

ج ص = ٢٩ − ٢٠جا (٣س − ٤٥°)

د ص = $\frac{١٢}{٣ + \text{جتا س}}$

٢-٥ الدوال المثلثية العكسية Inverse trigonometric functions

تمارين ٢-٥

١) اكتب بالدرجات زاوية الأساس لكل ممّا يأتي:

أ $جتا^{-١} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

ب $ظا^{-١}$ ١

ج $جتا^{-١}$ (٠)

د $ظا^{-١} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)$

هـ $ظا^{-١} (-\sqrt{٣})$

و $جا^{-١}$ (-١)

ز $ظا^{-١}$ (-١)

هـ $جتا^{-١}$ (-١)

مساعدة

مجال $جا^{-١}$ س هو:
$-١ \leqslant س \leqslant ١$
ومداها هو:
$-\frac{\pi}{٢} \leqslant جا^{-١} س \leqslant \frac{\pi}{٢}$

مجال $جتا^{-١}$ س هو:
$-١ \leqslant س \leqslant ١$
ومداها هو:
$٠ \leqslant جتا^{-١} س \leqslant \pi$

مجال $ظا^{-١}$ س هو: ع
ومداها هو:
$-\frac{\pi}{٢} < ظا^{-١} س < \frac{\pi}{٢}$

٢) اكتب زاوية الأساس لكل ممّا يأتي بدلالة π:

أ $جتا^{-١} \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

ب $جا^{-١}$ (-٠,٥)

ج $جتا^{-١}$ (-٠,٥)

د $ظا^{-١} \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

٣) أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ جا (جا$^{-1}$ (٠,٥))

ب جتا (جتا$^{-1}$ (−١))

ج ظا (ظا$^{-1}$ ($\sqrt{٣}$))

د جتا (جتا$^{-1}$ (٠))

٤) أوجِد كلًّا ممّا يأتي:

أ جتا$^{-1}$(جتا $\frac{٣\pi}{٢}$)

ب جا$^{-1}$(جا $\frac{١٣\pi}{٦}$)

ج ظا$^{-1}$(ظا $\frac{\pi}{٦}$)

د جتا$^{-1}$(جتا ٢π)

٥) أوجِد مجال ومدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = ظا$^{-1}$ (٣س)

ب ص = جتا$^{-1}$ (س) − ٢

٦) إذا علمت أن الدالة د(س) = ٣ + ٢جا س معرّفة في المجال $-\frac{\pi}{2} \geqslant$ س $\geqslant \frac{\pi}{2}$، فأوجِد:

أ مدى الدالة د(س).

ب $د^{-1}$(س).

٧) إذا علمت أن الدالة د(س) = ٤ − ٣ جتا س، حيث ٠ $\geqslant$ س $\geqslant \pi$، فأوجِد مدى الدالة د(س).

٨) الدالة د(س) = ٥ − ٢جا س، حيث $\frac{\pi}{2} \geqslant$ س $\geqslant$ ك

أ أوجِد أكبر قيمة لـ ك عندما تكون للدالة د(س) دالة عكسية.

ب مستخدمًا الإجابة في الجزئية (أ)، أوجِد $د^{-1}$(س) واذكر مجالها.

٢-٦ المعادلات المثلثية Trigonometric equations

تمارين ٢-٦

مساعدة

تُقاس الزوايا الموجبة بدءًا من الجزء الموجب من المحور السيني وبعكس اتجاه عقارب الساعة.

- الزوايا بين ٠°، ٩٠° تقع في الربع الأول.
- الزوايا بين ٩٠°، ١٨٠° تقع في الربع الثاني.
- الزوايا بين ١٨٠°، ٢٧٠° تقع في الربع الثالث.
- الزوايا بين ٢٧٠°، ٣٦٠° تقع في الربع الرابع.

مساعدة

تُقاس الزوايا السالبة بدءًا من الجزء الموجب من المحور السيني في اتجاه عقارب الساعة.

- الزوايا بين ٠°، −٩٠° تقع في الربع الرابع.
- الزوايا بين −٩٠°، −١٨٠° تقع في الربع الثالث.
- الزوايا بين −١٨٠°، −٢٧٠° تقع في الربع الثاني.
- الزوايا بين −٢٧٠°، −٣٦٠° تقع في الربع الأول.

١) حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

أ ١) ١ + ٢جا هـ = ١,٢، حيث ٠° < هـ < ٣٦٠°

٢) ٣ + ٤جا س = ٢، حيث −٩٠° < س < ٢٧٠°

ب ١) −١ + ٣جتا س = $\frac{١}{٣}$، حيث ٠° < س < ٣٦٠°

٢) ٢ + ٥جتا س = ٤,٧، حيث ٠° < س < ٣٦٠°

ج ١) −١ + ٣ظا ن = ٤، حيث −١٨٠° < ن < ١٨٠°

٢) −٣ + ٥ ظا ن = ٨، حيث ٠° < ن < ٣٦٠°

٢) حل المعادلة (ظا س + ١)(٥جا س − ٢) = ٠، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°، س ≠ ٩٠°، س ≠ ٢٧٠°

٣) أوجِد قيم هـ في الفترة $-٣٦٠° < هـ < ٣٦٠°$ عندما $٣ جا \left(\frac{هـ}{٢}\right) = -٢$

٤) حل المعادلة $٢ ظا \left(\frac{هـ}{٣}\right) = ٥$، حيث $٠° < هـ < ٥٤٠°$

٥) أوجِد قيم س في الفترة $-٣٦٠° < س < ٣٦٠°$ عندما $٢ جا (٢س + ٣٠°) + \sqrt{٣} = ٠$

٦) حل المعادلة $٢ جتا (٣س - ٥٠°) - \sqrt{٢} = ٠$، حيث $-٩٠° < س < ٩٠°$

٧) أوجِد قيم س في الفترة $-\sqrt{١٨٠°} < س < \sqrt{١٨٠°}$ عندما $جا س^٢ = \frac{١}{٢}$

٨) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $٠° \leqslant س \leqslant ٣٦٠°$ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ١) $٣ جا^٢ س = ٢$

٢) $٣ ظا^٢ س = ٥$

مساعدة

الجذر التربيعي توجد له قيمتان: قيمة موجبة وقيمة سالبة.

ب ١) ظا^{٢} س − ظا س − ٦ = ٠

٢) ٣جتا^{٢} س + جتا س − ٢ = ٠

ج ١) ٤جتا^{٢} س − ١١جتا س + ٦ = ٠

٢) ٥جا^{٢} س + ٦جا س − ٨ = ٠

د ١) ٣جا^{٢} س + جا س = ٠

٢) ٤ظا^{٢} س + ٥ظا س = ٠

٩) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة −١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ١٨٠° مقرّبًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

مساعدة

جا^{٢} س تعني (جا س)^{٢}

أ ١) ٢جا هـ − ٥جا هـ × جتا هـ = ٠

٢) ٤جتا هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٠

ب ١) ٤جا هـ × جتا هـ = جتا هـ

٢) ٣جا هـ $=$ ٥جا هـ $\times$ جتا هـ

١٠) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$ مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ ٤جا^{٢} هـ $- ١ = ٠$

ب جا^{٢} هـ $+$ ٢جتا^{٢} هـ $= ٢$

ج ١٠جا^{٢} هـ $-$ ٥جتا^{٢} هـ $+ ٢ =$ ٤جا هـ

د ٤جا^{٢} هـ $\times$ جتا هـ $=$ ظا^{٢} هـ

٧-٢ المتطابقات المثلثية Trigonometric identities

تمارين ٧-٢

١) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ ٣جا^{٢} (س) + ٣جتا^{٢} (س)

ب جا^{٢} (٥س) + جتا^{٢} (٥س)

ج −٢جتا^{٢} (٢س) − ٢جا^{٢} (٢س)

د $\frac{٣}{٢جا^{٢}(٤س)} - \frac{٣}{٢ظا^{٢}(٤س)}$

٢) أ اكتب ٣جا^{٢} س + ٤جتا^{٢} س بدلالة جا س.

ب اكتب جتا^{٢} س − جا^{٢} س بدلالة جتا س.

★ **٣)** أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ ١) $(جا\ س + جتا\ س)^{٢} + (جا\ س - جتا\ س)^{٢} \equiv ٢$

٢) $(٢جا\ س - جتا\ س)^{٢} + (جا\ س + ٢جتا\ س)^{٢} \equiv ٥$

ب ١) جا هـ × ظا هـ + جتا هـ ≡ $\frac{١}{جتا\ هـ}$

٣) $\frac{\text{جتا}^{2}\text{ هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{1}{\text{جا هـ}} - \text{جا هـ}$

٤) اكتب كلًّا ممّا يأتي بدلالة جتا س:

أ $3 - 2\text{ظا}^{2}\text{ س}$

ب $\frac{1}{1 + \text{ظا}^{2}\text{ س}}$

٥) بسّط العبارة $\left(\frac{1}{\text{جا س}} - \frac{1}{\text{ظا س}}\right)\left(\frac{1}{\text{جا س}} + \frac{1}{\text{ظا س}}\right)$

★ **٦)** بيّن أن $2\text{ظا}^{2}(2\text{س}) - \frac{2}{\text{جتا}^{2}(2\text{س})}$ = ك لكل قيم س، وأوجد قيمة ك.

★ **٧)** أثبت المتطابقة: $\frac{1}{\text{جتا هـ}} - \text{جتا هـ} \equiv \text{جا هـ} \times \text{ظا هـ}$.

٨) استخدم المتطابقتَين: ظا هـ $\equiv \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$، حيث جتا هـ $\neq$ ٠، جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ $\equiv$ ١ لتبيّن كلًّا ممّا يأتي:

أ $\frac{١}{\text{جا هـ}} - \frac{١}{\text{ظا هـ}} \equiv \frac{\text{١ − جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

ب $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{١ − جتا هـ}} \equiv$ ١ + جتا هـ

ج $\frac{١}{\text{جتا هـ}} + \text{ظا هـ} \equiv \frac{\text{جتا هـ}}{\text{١ − جا هـ}}$

د $\frac{\text{ظا هـ} \times \text{جا هـ}}{\text{١ − جتا هـ}} \equiv ١ + \frac{١}{\text{جتا هـ}}$

٢-٨ المزيد من المعادلات المثلثية More trigonometric equations

تمارين ٢-٨

١) استخدم المتطابقة ظا س ≡ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°:

ب ١) ٣جا س = ٢ جتا س

٢) ٣جا س = ٥جتا س

ب ١) ٧جتا س − ٣ جا س = ٠

٢) جا س − ٥جتا س = ٠

٢) استخدم المتطابقة جا^{٢}س + جتا^{٢}س ≡ ١ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

ب ١) ٧جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س = ٥

٢) جا^{٢}س + ٤جتا^{٢}س = ٢

ب ١) ٣جا^{٢}س − جتا^{٢}س = ١

٢) جتا^{٢}س − جا^{٢}س = ١

٣) أوجِد قيم س في الفترة ٠ < س < ٢π عندما جا (٢س) + جتا (٢س) = ٠

٤) حل المعادلة جا س + $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}}$ = ٠، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

٥) حل المعادلة جا س × ظا س = جا^{٢}س، حيث −١٨٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°

٦) حل المعادلة ٥جا^{٢} هـ = ٤جتا^{٢} هـ، حيث −١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ١٨٠° مقرّبًا الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

٧) حل المعادلة ٢جتا^{٢} ن − جا ن − ١ = ٠، حيث ٠° ⩽ ن ⩽ ٣٦٠°

٨) أوجِد قيم س في الفترة −١٨٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠° التي تحقق ٤جتا^{٢} س − ٥جا س − ٥ = ٠

٩) أ إذا علمت أن ٦جا^{٢} س + جتا س = ٤، فأوجِد قيم جتا س.

ب حل المعادلة ٦جا^{٢}س + جتا س = ٤، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

١٠) أ بيّن أن المعادلة ٢جا^{٢}س − ٣جا س × جتا س + جتا^{٢}س = ٠ يمكن كتابتها في صورة
٢ ظا^{٢}س − ٣ ظا س + ١ = ٠

ب حل المعادلة ٢جا^{٢}س − ٣جا س × جتا س + جتا^{٢}س = ٠ مبيّنًا كل الحلول عندما −١٨٠° < س < ١٨٠°

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) أ إذا علمت أن الزاوية أ منفرجة، جا أ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{١٤}$، فأوجِد قيمة جتا أ.

ب إذا علمت أن ١٨٠° < ب < ٣٦٠°، ظا ب = $-\frac{٢١}{٢٠}$، فأوجِد قيمة جتا ب.

ج أوجِد كل القيم الممكنة لـ جا هـ إذا علمت أن جتا هـ = $\frac{١}{٢}$

د أوجِد كل قيم د إذا علمت أن −١٨٠° < د < ١٨٠°، ظا د = ٥جا د.

٢) حل كل معادلة من المعادلات الآتية مبيّنًا كل الحلول عندما ٠° < هـ < ٣٦٠°:

أ جا هـ = ظا هـ

ب ٢ − ٢ جتا^{٢} هـ = جا هـ

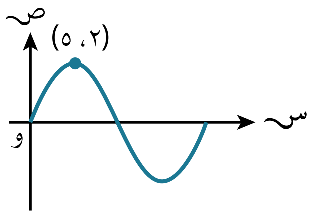
ج ظا^{٢} هـ − ٢ظا هـ = ١

د جا ٢هـ − $\sqrt{٣}$ جتا ٢هـ = ٠

٣) أوجِد قيم س في الفترة ٠° < س < ٧٢٠° إذا علمت أن ٢جتا$\left(\frac{١}{٢}\text{س} + ٤٥°\right)$ = $\sqrt{٣}$

٤) ما عدد حلول المعادلة جا^{٢} ٢س = $\frac{١}{٤}$ في الفترة −١٨٠° > س > ١٨٠°؟

٥) يبيّن الشكل الآتي بيان الدالة د(س) = أ جا (ب س)، حيث س بالراديان. أوجِد قيمتَي أ، ب.



٦) أثبت المتطابقة $\frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ − ظا^{٢}س ≡ ٢ + ظا^{٢}س.

٧) أوجِد كل قيم س في الفترة −٩٠° > س > ٩٠° التي تحقق ٦جتا^{٢} (٢س) ≡ جا (٢س) + ٤

٨) أ أوجِد قيم ك عندما يكون للمعادلة ٤س^{٢} − ك س + ١ = ٠ جذر متكرر.

ب بيّن أن المعادلة ٤جا^{٢}هـ = ٥ − ك جتا هـ يمكن كتابتها في صورة ٤جتا^{٢} هـ − ك جتا هـ + ١ = ٠

٩) إذا علمت أن ل = ظا س، فعبّر عن كل ممّا يأتي بدلالة ل:

أ جتا^{٢} س

ب جا^{٢} س

ج جتا^{٢} س − جا^{٢} س

د $\frac{٢}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$ + ١

الوحدة الثالثة
مقدمة في النهايات والاتصال
Introduction to limits and continuity

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تتعرف على مفهوم نهاية الدالة د(س) عندما س تقترب من أ عدديًّا، وبيانيًّا.

٣-٢ تتذكر وتطبق خواص النهايات.

٣-٣ تجد نهايات الدوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية (بسطها ومقامها كثيرة حدود)، والدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة باستخدام خواص النهايات.

٣-٤ تفهم وتحدد باستخدام جداول القيم، وجبريًّا، وبيانيًّا مفهوم نهاية الدالة د(س) عند اللانهاية للدالة النسبية.

٣-٥ تحدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة أو على فترة مغلقة.

٣-١ نهاية الدالة عند نقطة Limit of the function at a Point

٣-١ أ نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of polynomial function

تمارين ٣-١ أ

١) اكتب كلًّا من العبارات الآتية باستخدام صيغة النهاية:

أ قيمة الدالة هـ(س) تقترب من ١ كلما اقتربت قيمة س من ٣ من جهة اليمين.

ب عندما تقترب القيم المتزايدة لـ س من الصفر، تقترب قيمة الدالة ع(س) من −١

ج تقترب الدالة ك(س) من ٦ عندما تتناقص قيم س لتقترب من −٢

د عندما تؤول س إلى ٩ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيمة الدالة ر(س) تؤول إلى ٢٩

٢) عبّر لفظيًّا عن معنى كل نهاية من النهايتَين الآتيتَين:

أ $\underset{س \leftarrow ٧^-}{نهـــــا}$ د(س) = −٨

ب $\underset{س \leftarrow -١^+}{نهـــــا}$ هـ(س) = ١

٣) أكمل الجدولَين الآتيَين لتقدر قيمة $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــــا}$ ع(س)، حيث ع(س) = ١٢ − س − $س^٢$:

من جهة اليسار	
س	ع(س)
٢,٥	٣,٢٥
٢,٩	
٢,٩٥	
٢,٩٩	

من جهة اليمين	
س	ع(س)
٣,٥	−٣,٧٥
٣,١	
٣,٠٥	
٣,٠١	

٤) أنشئ الجداول لتقدّر قيمة $\lim\limits_{س \to ١}$ ق(س)، حيث ق(س) = $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٨س + ٥$

---

٥) استخدم الجداول لتقدّر قيمة $\lim\limits_{س \to -٢٧}$ د(س)، حيث د(س) = $\frac{س}{٣} + ١٠$

٣-١ ب نهاية الدالة النسبية Limit of a rational function

تمارين ٣-١ ب

١) لتكن الدالة د(س) = $\frac{٢١ + ٤س - س^{٢}}{س + ٣}$:

أ بيّن أن الدالة د(س) غير معرّفة عند س = − ٣، اشرح إجابتك.

ب استخدم الجداول لإيجاد نهاية د(س) عندما تقترب س من − ٣ من جهة:

١) اليسار.

٢) اليمين.

ج بيّن سبب وجود نهاية للدالة د(س) عند س = − ٣

٢) لتكن الدالة هـ(س) = $\frac{٧س - ٤س^٣}{س}$:

أنشأت خديجة الجدولَين الآتيَين لمعرفة نهاية الدالة هـ(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، ومن جهة اليسار:

من جهة اليمين	
س	هـ(س)
٠,٥	أ
٠,١	٦,٩٦
٠,٠١	٦,٩٩٩٦
٠,٠٠١	ب

من جهة اليسار	
س	هـ(س)
−٠,٥	جـ
−٠,١	٦,٩٦
−٠,٠١	٦,٩٩٩٦
−٠,٠٠١	د

أ) احسب قيم كل من أ، ب، جـ، د .

ب) استخدم النتائج من الجدولَين لتقدّر قيمة $\lim_{س \leftarrow ٠}$ هـ(س).

٣) لتكن الدالة ف(س) = $\frac{٣}{س}$ + ١١ :

أ) أكمل الجدولَين الآتيَين مبيّنًا قيم ف(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، ومن جهة اليسار:

من جهة اليمين	
س	ف(س)
٠,١	٤١
٠,٠٥	
٠,٠١	
٠,٠٠٥	
٠,٠٠١	
٠,٠٠٠٥	٦٠١١

من جهة اليسار	
س	ف(س)
−٠,١	
−٠,٠٥	−٤٩
−٠,٠١	−٢٨٩
−٠,٠٠٥	−٥٨٩
−٠,٠٠١	−٢٩٨٩
−٠,٠٠٠٥	

ب هل يمكن إيجاد قيمة للنهايتَين الآتيتَين؟ فسّر إجابتك.

(١) $\lim_{س \to ٠^+}$ ف(س)

---

(٢) $\lim_{س \to ٠^-}$ ف(س)

ج ماذا تستنتج حول $\lim_{س \to ٠}$ ف(س)؟

د اكتب معادلة خط التقارب الرأسي لمنحنى الدالة ص = $\frac{٣}{س}$ + ١١

---

٤) لتكن الدالة د(س) = $\frac{٢س - ٤}{س - ٢}$:

أ ما قيمة س التي تكون عندها د(س) غير معرّفة؟

ب ما هي إحداثيات الفجوة في منحنى الدالة د(س)؟

---

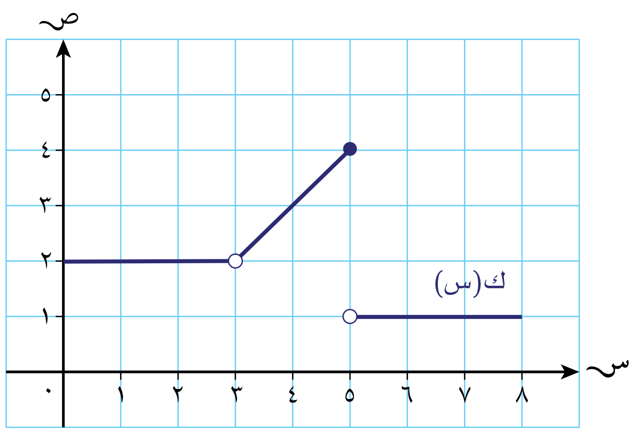
٥) إذا علمت أن منحنى الدالة د(س) = $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ هو مستقيم ميله ١، ومقطعه من المحور الصادي ٥، ويتضمن فجوة عند النقطة (أ، ب). فأوجد قيمتَي أ ، ب.

٦) إذا علمت أن منحنى الدالة د(س) = $\frac{س(س^٢ + س - ٤٢)}{س^٢ - ٦س}$ هو مستقيم يتضمن فجوتَين، فأوجد إحداثيات النقطتَين حيث توجد الفجوتان.

٣-١ ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة
Limit of a piecewise function

تمارين ٣-١ ج

١) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة ك(س) في المجال ٠ ⩽ س ⩽ ٨:

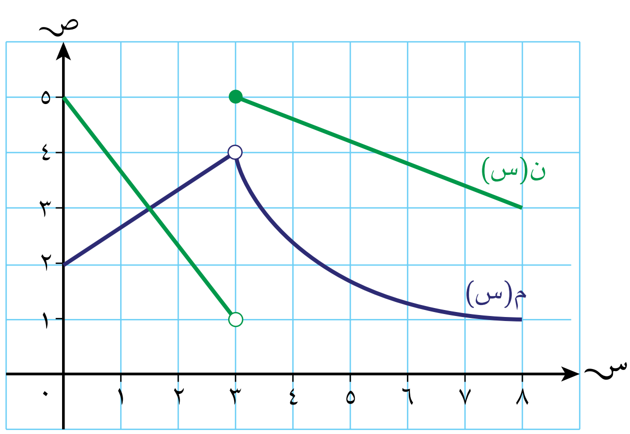


صف باستخدام الرموز الرياضية سلوك الدالة من حيث إنها: معرّفة أم لا، نهايتها موجودة أم لا، عندما:

أ س = ٣

ب س = ٥

٢) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالتَين م(س)، ن(س) في المجال ٠ ⩽ س ⩽ ٨

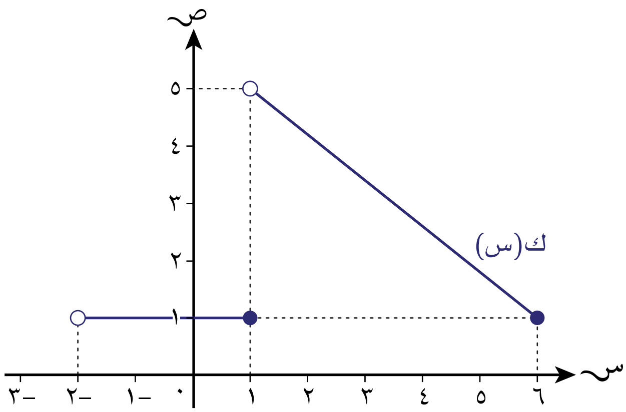


صف باستخدام الرموز الرياضية، أوجه التشابه وأوجه الاختلاف بين قيمتَي الدالتين، ونهايتيهما عند س = ٣

٣) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة ك(س) المعرّفة بأكثر من قاعدة:

إليك خمس عبارات كتبها الطلبة حول المنحنى ك(س).

يوجد خطأ واحد في كل عبارة. أعد كتابة كل عبارة مصححًا الخطأ.



أ) يبيّن الرسم الدالة في المجال
$-٢ < س < ٦$

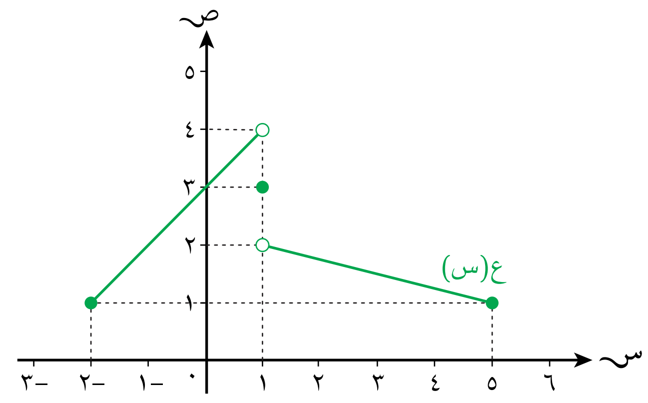
ب) ك(س) = ١ في المجال $-٢ < س \leqslant ٦$

ج) ك(س) = $-\frac{٤}{٥}$ س + $\frac{٢٧}{٥}$، في المجال $١ < س \leqslant ٦$

د) $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ك(س) = ١، ولكن $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ك(س) غير موجودة.

هـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ك(س) = $\frac{١ + ٥}{٢}$ = ٣

٤) يبيّن الرسم أدناه منحنى الدالة ع(س) المعرّفة بأكثر من قاعدة:



أ استخدم المنحنى لتجد كلًّا ممّا يأتي:

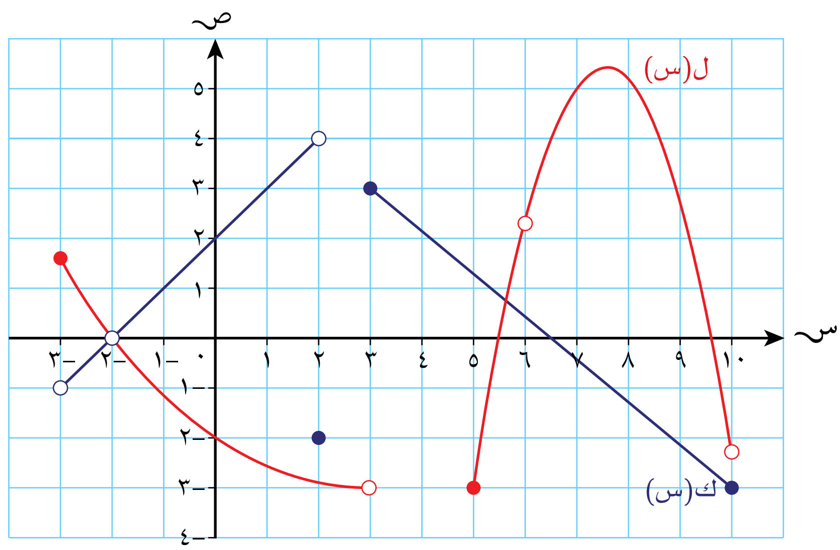
١) ع(١)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ ع(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ ع(س)

ب ما الخلاصة التي يمكن أن تستنتجها من الجزئية (أ) ذات صلة بـ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ع(س) ؟

٥) يبيّن الرسم أدناه منحنى كل من الدالتَين ل(س)، ك(س):



أ أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

١) ك(٢)

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ^{-}٢}$ نهـا ك(س)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ^{-}٣}$ نهـا ل(س)

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow ^{+}٥}$ نهـا ل(س)

ب انسخ العبارات الآتية، واستخدم المتباينات لإكمال كلّ منها:

١) ل(س) غير معرّفة على الفترة ٣ ... س ... ٥

٢) ك(س) غير معرّفة على الفترة ٢ ... س ... ٣

ج أوجد كل قيم س الصحيحة في المجال -٣ < س < ١٠، حيث يكون كل مما يأتي غير موجود:

١) نهاية ل(س).

٢) نهاية ك(س).

٣-٢ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية $(\text{س} \leftarrow \pm\infty)$

Limit of a rational function at infinity

تمارين ٣-٢

١) أوجِد نهاية كلٍّ مما يأتي عندما $(\text{س} \leftarrow \pm\infty)$:

أ $\text{د(س)} = \text{٨} + \frac{\text{١}}{\text{س}}$

ب $\text{د(س)} = \frac{\text{٩}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{٢}$

ج $\text{د(س)} = \frac{\text{٦} + \text{٥س}}{\text{١٠س} - \text{٧}}$

د $\text{د(س)} = \frac{\text{٦س}^{\text{٢}}}{\text{٥} - \text{٢س}^{\text{٢}}}$

هـ $\text{د(س)} = \frac{\text{٩١س}^{\text{٢}} - \text{٤٣س}}{\text{١} - \text{١٣س}^{\text{٢}}}$

و $\text{د(س)} = \frac{\text{٢٠س}^{\text{٤}} - \text{٩س}^{\text{٣}} + \text{٤س}}{\text{٥} - \text{س}^{\text{٣}} + \text{٨س}^{\text{٤}}}$

ز $\text{د(س)} = \frac{\text{٩س}^{\text{٢}}}{\text{٢} - \text{س}}$

ح $\text{د(س)} = \frac{\text{٢} - \text{س}}{\text{٩س}^{\text{٢}}}$

ط $\text{د(س)} = \frac{\text{٤} + \text{٣س}}{\text{٢س}^{\text{٣}}} - \text{٥}$

ي $\text{د(س)} = \frac{(\text{١} - \text{س})(\text{س} + \text{١})}{\text{٢س}^{\text{٢}}}$

٢) لتكن $\text{د(س)} = \frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{١}} - \frac{\text{٣س}}{\text{س} + \text{١}}$:

أ اكتب العبارة $\frac{\text{٥}}{\text{س} - \text{١}} - \frac{\text{٣س}}{\text{س} + \text{١}}$ في صورة كسر.

ب أوجِد نهاية الدالة د(س) عندما (س ← −∞).

٣) إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٦ + ٢س - (ب س - ٣)^{٢}}{٩ - ٢س^{٢}} = ١٨$، فأوجد القيم الممكنة لـ ب.

٤) إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س^{٥} - ٧س^{٣}}{١٣ - \frac{ك س^{٥}}{٣}} = ٦$، فأوجِد قيمة ك.

٣-٣ خواص النهايات properties of limits

تمارين ٣-٣

١) استخدم خواص النهايات لتقدّر كلًّا ممّا يأتي علمًا بأن $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ د(س) = −٢، $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٦:

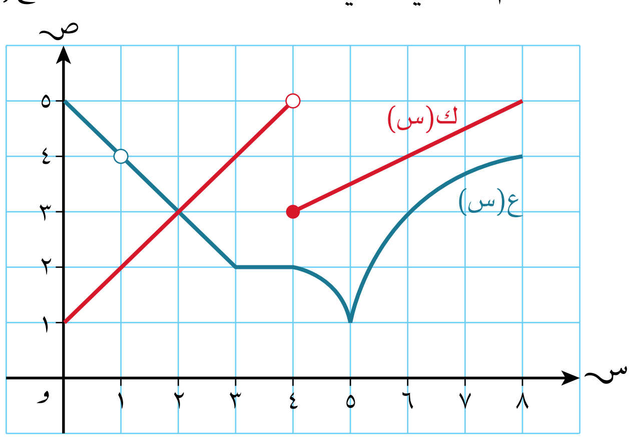
أ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ(س)}}{\text{د(س)}}$

ب $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ (هـ(س) − د(س))

ج $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(\text{٢٤هـ(س)}\right)^{\frac{١}{٢}}$

د $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٢}\ \text{هـ(س)} \times \text{د(س)}\right)^{٣}$

٢) يبيّن الرسم البياني الآتي جزءًا من منحنى الدالتَين ع(س)، ك(س):



استخدم الرسم أعلاه لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي إن أمكن:

أ $\underset{س \leftarrow ٦}{\text{نهـا}}$ (ع(س) − ك(س))

ب $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ (ع(س) + ك(س))

ج) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \left(\text{ع(س)} \times \text{ك(س)}\right)$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع(س)}}{\text{ك(س)}}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\left(\text{ع(س)}\right)^{٢} \times \left(\text{ك(س)}\right)^{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

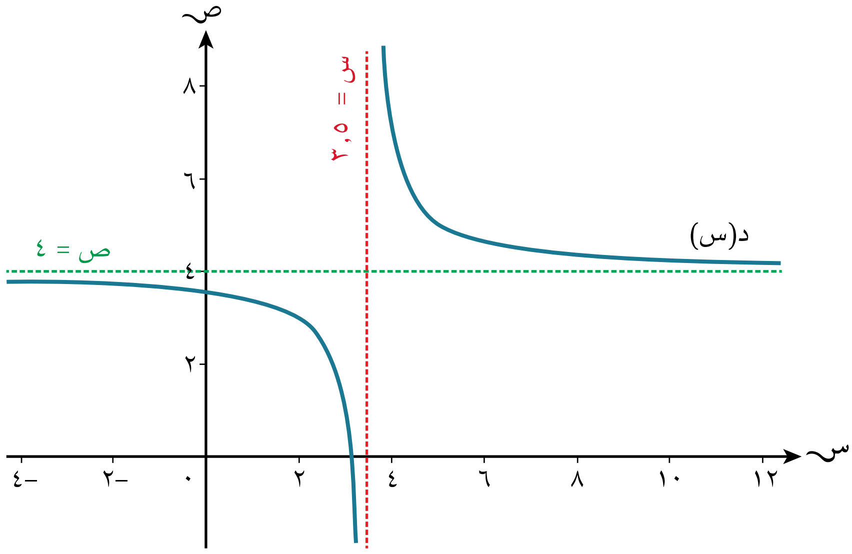
٣) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٨، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢هـ(س)}}{\text{٣د(س)}}$ = ١٠، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س) موجودة،

فقدّر قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١٠د(س)}}{\text{هـ(س)}}$.

٤) إذا علمت أن د(س)، هـ(س) دالتان خطيتان حيث $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٤، $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢٢،

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ١، $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}} = -\dfrac{١١}{١٧}$، فأوجِد قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ (د(س) × هـ(س)).

٥) يبيّن الرسم الآتي جزأَين من منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢٥ - أ\ س}{٧ - ب\ س}$ ، أوجد:



أ قيمتَي أ ، ب.

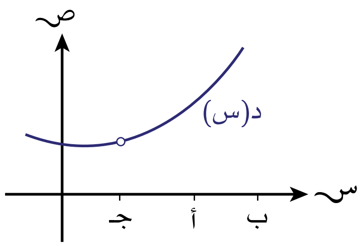
ب قيمة $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــــا}} \left(\frac{٣}{٢}د(س)\right)^{٢}$.

٣-٤ الاتصال Continuity

تمارين ٣-٤

١) اذكر ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة أو غير متصلة، مع ذكر السبب:

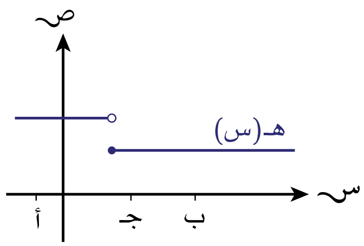
أ



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

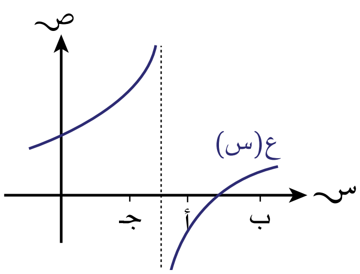
ب



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

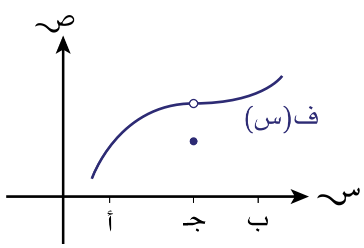
ج



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

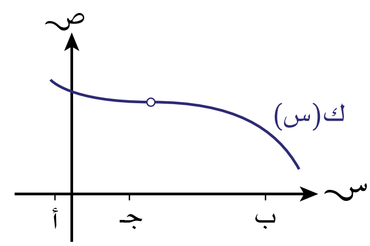
د



١) عند س = جـ:

٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

هـ



١) عند س = جـ:

____

____

____

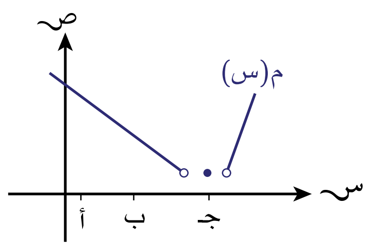
٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

____

____

____

و



١) عند س = جـ:

____

____

____

٢) على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب:

____

____

____

٢) لتكن هـ(س) = $\frac{٦}{س - ٢}$:

أ اشرح السبب في أن الدالة هـ(س) غير متصلة على الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٨

____

____

____

ب اكتب أي فترة مغلقة تكون الدالة هـ(س) متصلة عندها.

____

____

____

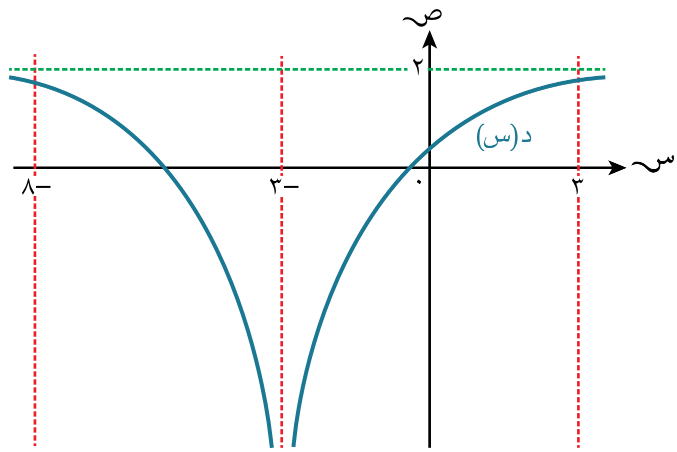
٣) بيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{١٢}{٤ - ٣س}$ متصلة عند س = ٠

____

____

____

٤) حصل أحمد على التمثيل البياني للدالة د(س)، ورسم عليه أربعة مستقيمات اعتبرها خطوط تقارب كما يبيّن الرسم أدناه:



إذا افترضنا أن التمثيل البياني للدالة د(س) صحيح، فاكتب معادلة:

أ الخطوط المستقيمة التي رسمها أحمد، مفترضًا بشكل خاطئ أنها خطوط تقارب.

ب اكتب معادلتَي خطَّي التقارب اللذَين رسمهما أحمد بشكل صحيح، واشرح بإيجاز المعلومات التي يعطيها كل منهما عن قيم الدالة واتصالها.

٥) الدالة هـ(س) = $\frac{\text{س} - ٦}{٥\text{س} + ١١}$ متصلة على الفترتين $-\infty <$ س $\leq$ أ، ب $\leq$ س $< \infty$:

أ اكتب:

١) أكبر قيمة ممكنة للعدد الصحيح أ.

٢) أصغر قيمة ممكنة للعدد الصحيح ب.

ب أوجِد قيمة جـ إذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{هـ(س)}$ غير متصلة عند س = جـ.

٦) أ أكمل الجدولَين الآتيَين اللذَين يبيّنان قيم الدالة هـ(س) = ٤ − $\frac{٢}{٣ - س}$ عندما تقترب س من ٣:

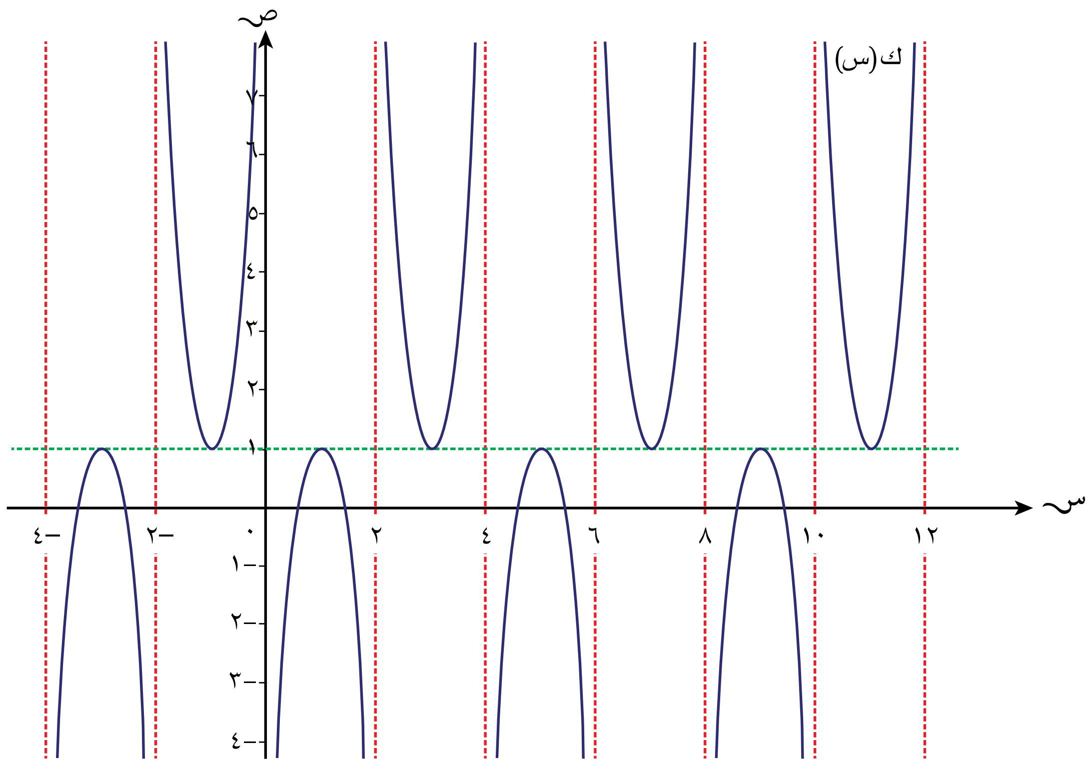
س	هـ(س)
٣,١	٢٤
٣,٠١	٢٠٤
٣,٠٠١	
٣,٠٠٠١	

س	هـ(س)
٢,٩	−١٦
٢,٩٩	−١٩٦
٢,٩٩٩	
٢,٩٩٩٩	

ب علامَ تدل القيم الموجودة في الجدول حول اتصال الدالة؟

ج إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty}$ هـ(س) = ف، فأوجد $\lim_{س \to ف}$ هـ(س).

٧) يبيّن الرسم الآتي أجزاء من منحنى الدالة ك(س):



أ اكتب عدد النقاط التي تكون الدالة عندها غير متصلة على الفترتَين الآتيتَين:

١) ٦ ⩽ س ⩽ ١٢

٢) −٤ ⩽ س ⩽ ٢

ب حدّد ما إذا كانت الدالة ك(س) متصلة أو غير متصلة في كل فترة من الفترات الآتية:

١) ١ ⩽ س ⩽ ١,٩٩

٢) −١,٥ ⩽ س ⩽ −٠,٥

مساعدة

تذكّر أن قيمة π هي ٣,١٤ أو $\frac{٢٢}{٧}$ تقريبًا.

٣) ٦,٠١ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٩,٩٩

٤) $\frac{\pi}{٢}$ $\leqslant$ س $\leqslant$ $\frac{٢\pi}{٣}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) إذا كانت هـ(س) = $\frac{٢س}{(س + ٥)(س - ٨)}$ ، فأوجد:

أ قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير متصلة في كل فترة من الفترتَين:

١) ١ ⩽ س ⩽ ١٠

____

____

٢) −١٠ ⩽ س ⩽ −١

____

____

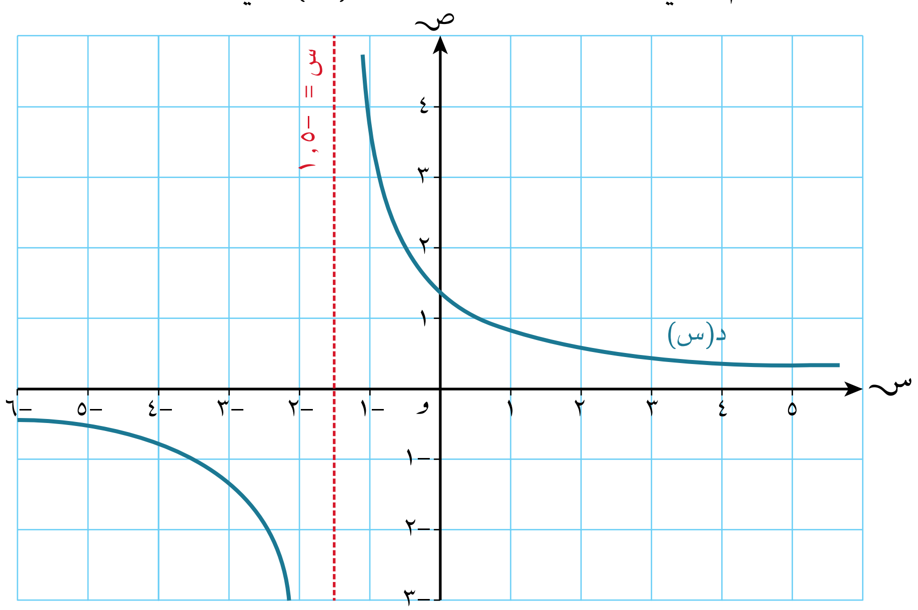
ب نهاية الدالة عند (س ← ±∞).

____

____

____

٢) يبيّن الرسم الآتي جزأَين من منحنى الدالة د(س) التي لمنحناها خط تقارب رأسي معادلته س = −١,٥:



أ علامَ يدل خط التقارب الرأسي س = −١,٥؟

____

____

____

ب إذا علمت أن د(س) = $\frac{٤}{أ + ب\, س}$ ، وتمر بالنقطة (−١، ٤)، فأوجِد قيمة كل من أ، ب.

ج استخدم جداول القيم لتبيّن أن الدالة د(س) متصلة عند س = ١

٣) استخدم جداول القيم لتبيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{٨}{٢ - ٣س}$ متصلة عند س = −١

٤) لتكن هـ(س) = $\frac{٣س + ١}{١ - ٢س}$:

أ ١) استخدم أي طريقة مناسبة لتبيّن أن $\lim\limits_{س \to ٠,٥}$ هـ(س) غير موجودة.

٢) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي لمنحنى الدالة هـ(س).

ب ١) أوجِد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـــــا}}$ هـ(س).

٢) اكتب معادلة خط التقارب الأفقي للدالة هـ(س)

٥) يبيّن الجدولان الآتيان بعض قيم الدالة د(س) = ١ + ٤ لط س مقرّبة إلى أقرب ٣ منازل عشرية:

س	د(س)
٦,١	٨,٢٣٣
٦,٠١	٨,١٧٤
٦,٠٠١	٨,١٦٨
٦,٠٠٠١	أ

س	د(س)
٥,٩	٨,١٠٠
٥,٩٩	٨,١٦٠
٥,٩٩٩	٨,١٦٦
٥,٩٩٩٩	ب

أ أوجِد قيمتَي أ، ب الموجودتَين في الجدولَين مقرّبًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

ب عبّر عن نهاية د(س) عندما تقترب س من ٦ باستخدام الرموز، وأوجد قيمتها.

٦) رسم محمود جداول قيم تبيّن أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^-}{\text{نهـــــا}}$ ر(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^+}{\text{نهـــــا}}$ ر(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$،

حيث ر(س) = $\text{س}^{-١} + \sqrt{\text{س} + ٥}$، س > −٥، أ ، ب عددان صحيحان. استخدم هذه المعلومات لإيجاد قيمة كل من أ، ب.

الوحدة الرابعة

التفاضل Differentiation

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تفهم (من خلال التمثيل البياني للدالة) أن ميل الدالة عند نقطة هو عبارة عن نهاية الميل لمتتالية مناسبة من المماسات عند تلك النقطة، وعلاقته بمشتقة الدالة؛ وتستخدم الصيغ د′(س)، د″(س)، $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ ، $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$ ، $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}$ (ص) و $\frac{\text{ى}^{٢}}{\text{ى س}^{٢}}$ (ص) أو $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)$ للمشتقتَين الأولى والثانية.

٤-٢ تجد وتستخدم مشتقة لدوال في الصيغة د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.

٤-٣ تجد وتستخدم مشتقة الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث تكون الدوال المركبة في صورة $\text{س}^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.

٤-٤ تجد وتستخدم ميل المماس أو المستقيم العمودي على منحنى الدالة، أو معادلة المماس، و/أو معادلة المستقيم العمودي لدوال في الصيغة د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح للدوال، وللدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.

٤-٥ تجد وتستخدم المشتقة الأولى لتحدد قيم س التي تكون عندها الدالة في الصيغة د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح، متزايدة، أو متناقصة.

٤-٦ تحدد النقاط الحرجة لدوال في الصيغة د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب في ثابت، الجمع، والطرح للدوال، وتستخدم المشتقتَين الأولى والثانية لتحدد نوعها (طبيعتها).

٤-١ المشتقة وعلاقتها بالميل

Derivative and its relationship with gradient

تمارين ٤-١

١) تقع النقاط ا(٢، ٥٠)، ب(٤، ٢٥)، ج$\left(٢\frac{١}{٢}، ٤٠\right)$، ى$\left(٢\frac{١}{٥}، \frac{٥٠٠}{١١}\right)$، هـ$\left(٢\frac{١}{٨}، \frac{٨٠٠}{١٧}\right)$، ر$\left(٢\frac{١}{١٠}، \frac{١٠٠٠}{٢١}\right)$، ز$\left(٢\frac{١}{٢٠}، \frac{٢٠٠٠}{٤١}\right)$، ع$\left(٢\frac{١}{٥٠}، \frac{٥٠٠٠}{١٠١}\right)$ على منحنى الدالة ص = ع(س):

أ أكمل الجدول الآتي:

الوتر	اب	اج	اى	اهـ	ار	از	اع
الميل	$-١٢\frac{١}{٢}$						

ب استخدم القيم الموجودة في الجدول لتتوقع قيمة $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ عند س = ٢

٢) أوجِد قيمة ميل المماس لمنحنى كل دالة من الدوال الآتية عند كل نقطة من النقاط المعطاة باستخدام سلسلة من أميال الأوتار:

أ ص = س^{٢} − س عند (٢، ٢).

ب ص = (س + ٢)^{٢} عند (٣، ٢٥).

ج ص = $\frac{١}{٢}\sqrt{س}$ عند (٤، ١).

د ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ عند (٢، ١).

٤-٢ مشتقة دالة القوة Differentiation of power functions

تمارين ٤-٢

١) أوجِد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل ممّا يأتي:

أ) ١) $ص = \sqrt[٣]{س}$

٢) $ص = \sqrt[٥]{س}$

مساعدة

١) $\frac{ء}{ءس}$ (ك د (س))
$= ك \frac{ء}{ءس}$ (د (س))

٢) $\frac{ء}{ءس}$ (د (س) ± ع(س))
$= \frac{ء}{ءس}$ (د (س)) ± $\frac{ء}{ءس}$ (ع(س))

ب) ١) $ص = ٨\sqrt[٤]{س}$

٢) $ص = \frac{\sqrt{س}}{٣}$

ج) ١) $ص = -\frac{١}{س}$

٢) $ص = \frac{١}{س^{٤}}$

د) ١) $ص = \frac{٣}{س^{٢}}$

٢) $ص = \frac{٢}{٥ س^{١٠}}$

هـ) ١) $ص = \frac{١}{\sqrt{س}}$

٢) $ص = \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$

و ١) $ص = \frac{١٠}{\sqrt[٥]{س}}$

٢) $ص = \frac{٨}{٣\sqrt[٤]{س}}$

٢) أوجِد $د'(س)$ في كل ممّا يأتي:

أ ١) $د(س) = (٢س - ٣)(س + ٤)$

٢) $د(س) = ٣س(س - ٥)$

ب ١) $د(س) = \sqrt{س}\,(٤س + ٣)$

٢) $د(س) = \sqrt[٣]{س}\,(س - ١)$

ج ١) $د(س) = (\sqrt{س} + ٢س)^٢$

٢) $د(س) = (\sqrt[٤]{س} - ٤)^٢$

د ١) $د(س) = \left(س + \frac{١}{س}\right)^٢$

٢) $د(س) = \left(س + \frac{٢}{س}\right)\left(س - \frac{٢}{س}\right)$

٣) أوجِد مشتقة كلّ من الدوال الآتية:

أ $ص = ٢\sqrt{س}$

ب $ص = (١ + \sqrt{س})^٢$

ج $ص = س - \frac{١}{٢}\sqrt{س}$

د) $ص = س\left(١ - \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^٢$

هـ) $ص = س - \frac{١}{س}$

و) $ص = \frac{س^٣ + س^٢ + ١}{س}$

ز) $ص = \frac{(س + ١)(س + ٢)}{س}$

ح) $ص = \frac{\sqrt{س} + س}{\sqrt{س}}$

٤) إذا علمت أن ٤ د(س) = $\frac{٩س^٢ + ٣}{٢\sqrt[٣]{س}}$، فأوجِد د′(س).

٥) إذا علمت أن ص = (٤س^٢ − ١)(٣ − س)، فأوجِد $\frac{ءص}{ءس}$.

٦) إذا علمت أن د(س) = $٣\sqrt{س} - \frac{٢}{\sqrt{س}}$، فأوجِد:

أ) د′(س).

مساعدة

انتبه عند التعامل مع الأعداد السالبة، والأسس الكسرية.

مثلًا: $\frac{-١}{٢س^{\frac{٢}{٣}}} = -\frac{١}{٢}س^{-\frac{٢}{٣}}$

ب ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) عند س = ٤

٧) إذا علمت أن د(س) = س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س ، د′(١) = ٢ ، د″(١) = −٢، فأوجِد قيمة كل من ب، جـ

٨) أوجِد إحداثيات النقطتَين الواقعتَين على منحنى الدالة ص = ٢س^{٣} − ٥س^{٢} + ٩س − ١ علمًا بأن ميل المماس عند كل منهما يساوي ١٣

٤-٣ قاعدة السلسلة The chain rule

تمارين ٤-٣

١) استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة كل ممّا يأتي بدلالة س:

أ ١) د(س) = $(٣س + ٤)^{٥}$ ٢) د(س) = $(٥س + ٤)^{٧}$

ب ١) ص = $\sqrt{٣س - ٢}$ ٢) ص = $\sqrt{س + ١}$

ج ١) د(س) = $\frac{١}{٣ - س}$ ٢) د(س) = $\frac{١}{(٢س + ٣)^{٢}}$

٢) أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ص = $(٥س + ٣)^{٦}$ ب ص = $(٥س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$ ج ص = $\frac{١}{٥س + ٣}$

٣) أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ د(س) = $(١ - ٤س)^{٥}$ ب ع(س) = $(١ - ٤س)^{-٣}$ ج هـ(س) = $\sqrt{١ - ٤س}$

٤) أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ص = $(١ + س^٣)^٥$

ب ص = $(١ + س^٣)^{-٤}$

ج ص = $\sqrt[٣]{١ + س^٣}$

٥) أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ك(س) = $(٢س^٢ + ٣)^٦$

ب م(س) = $\frac{١}{٢س^٢ + ٣}$

ج د(س) = $\frac{١}{١ - س^٢}$

٦) إذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{١ + س^٢}$ ، فأوجِد:

أ د′(٢).

ب قيمة س عندما د′(س) = ٠

٧) إذا علمت أن ص = $\sqrt[٤]{س^٣ + ٨}$ ، فأوجِد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢

٨) أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ص = $(س^٢ + ٣س + ١)^٦$

ب ص = $\frac{١}{(س^٢ + ٥س)^٣}$

٤-٤ المماس والعمودي Tangent and normal

تمارين ٤-٤

١) إذا علمت أن معادلة أحد المماسَّين لمنحنى الدالة ص = ٤س − س^{٣} هي: ص = س − ٢، فأوجِد معادلة المماس الثاني الموازي للمستقيم ص = س − ٢

٢) أوجِد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt{\text{س}}$ عند النقطة (٤، ٢).

٣) أوجِد معادلة العمودي على منحنى الدالة ص = س + $\frac{١}{\text{س}}$ عند النقطة (١، ٢).

٤) يمر منحنَيا الدالتَين ص = س^{٢} − ٢س، ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٢س بنقطة الأصل. بيّن أن المنحنيَين لهما المماس نفسه عند تلك النقطة.

٥) أوجِد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٢س − ٦ عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور الصادات.

٦) أوجِد معادلتَي المماس والعمودي على منحنى الدالة ص = $\sqrt[3]{س^{2}}$، عند النقطة (٨، ٤).

٧) إذا علمت أن المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{1}{س^{2}}$ عند النقطة $\left(\frac{1}{2}، 4\right)$ يتقاطع مع المحورَين السيني، والصادي في النقطتَين ل، ك، فأوجِد إحداثيات ل، ك.

٨) أوجِد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $(س^{2} - 5)^{3}$ عند النقطة (٢، −١).

٩) أوجِد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{1}{\sqrt{س} - 1}$ عند النقطة (٤، ١).

١٠) أوجِد معادلة العمودي على منحنى الدالة ص = $\frac{8}{1 - س^{3}}$ عند النقطة (−١، ٤).

٤–٥ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

Increasing and decreasing functions

تمارين ٤-٥

١) أوجد د′(س)، والفترة التي تكون عندها د(س) متناقصة لكل مما يأتي:

أ د(س) = س^{٢} + ٤س − ٩

ب د(س) = س^{٢} − ٣س − ٥

ج د(س) = ٥ − ٣س + س^{٢}

د د(س) = ٢س^{٢} − ٨س + ٧

هـ د(س) = ٤ + ٧س − ٢س^{٢}

و د(س) = ٣ − ٥س − ٧س^{٢}

٢) أ ١) أوجِد الفترة التي تكون عندها الدالة ص = س^{٢} − س متزايدة.

٢) أوجِد الفترة التي تكون عندها الدالة ص = س^{٢} + ٢س − ٥ متناقصة.

ب ١) أوجِد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة ص = س^{٣} − ٣س متزايدة.

٢) أوجِد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة ص = س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥ متناقصة.

ج ١) أوجِد الفترة التي تكون عندها دالة الميل لمنحنى الدالة ص = $س^٣$ − ٣س متناقصة.

٢) أوجِد الفترة التي تكون عندها دالة الميل لمنحنى الدالة ص = $٢س^٣$ − $س^٢$ متزايدة.

٣) أ أوجِد $\frac{ءص}{ءس}$ للدالة ص = $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ عند س = ٩

ب هل دالة الميل متزايدة أم متناقصة عند س = ٩؟

٤) بيّن أن الدالة ص = $س^٣$ + ك س + جـ متزايدة دائمًا لجميع قيم ك > ٠

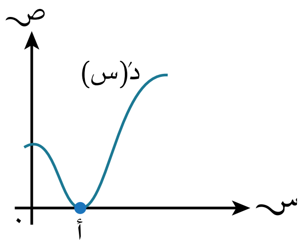
٥) إذا علمت أن الدالة د(س) = ١٢س − $٢س^٢$ − $\frac{١}{٣}س^٣$ متزايدة على الفترة أ < س < ب، فأوجِد قيمتَي أ ، ب.

٦) أوجِد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة ص = $س^٣$ − $٦س^٢$ + ٩س + ٢ متناقصة، ودالة ميلها متزايدة.

٧) أ) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ − ٢ عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحور السيني.

ب) هل المنحنى متزايد أم متناقص عند هذه النقطة؟ برّر إجابتك.

٨) يبيّن الشكل المجاور منحنى د′(س).



أي من العبارات الآتية صحيح دائمًا عند النقطة أ:

أ) د(س) لها نقطة صغرى.

ب) د(س) لها نقطة عظمى.

ج) د(س) = ٠

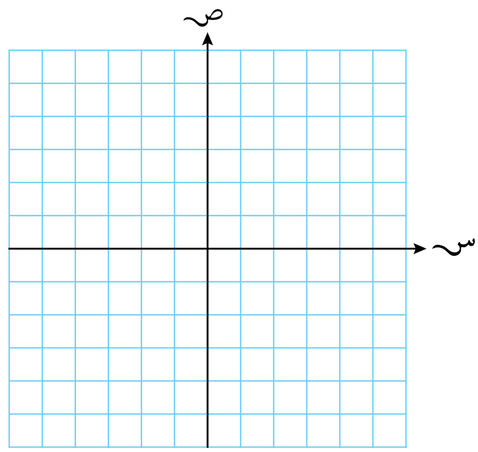
د) د″(س) = ٠

٤-٦ النقاط الحرجة Stationary points

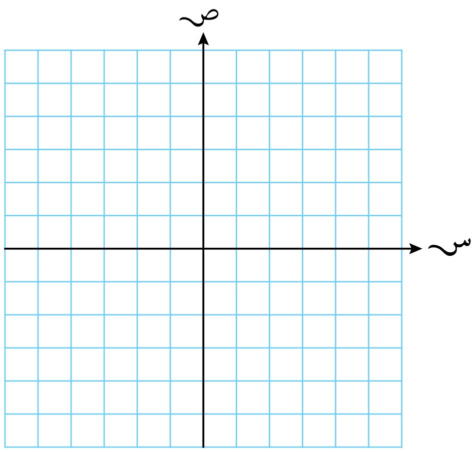
تمارين ٤-٦

١) أوجِد النقاط الحرجة للدوال الآتية، وحدّد نوع كل منها، ثم ارسم منحناها (موضحًا النقاط الحرجة):

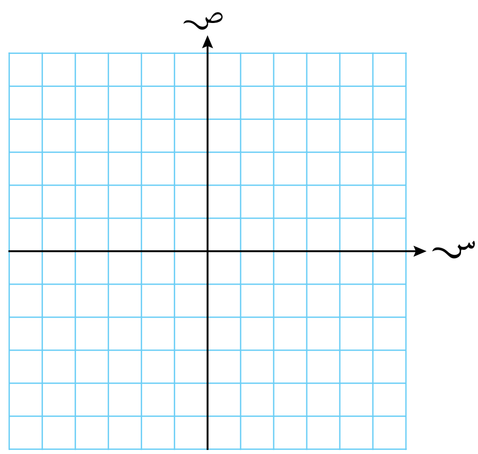
أ د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} − ٧٢س + ٥



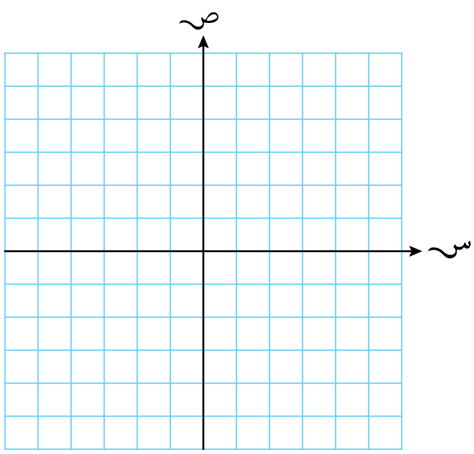
ب د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٤٥س + ٧



ج د(س) = ٢س + س^{٢} − ٤س^{٣}



د د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١



٢) بيّن أن منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤س − ١ ليس له نقاط عظمى أو صغرى.

٣) لتكن د(س) = $\frac{٩س^{٢} + ١}{س}$:

أ أوجِد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة على منحنى الدالة د(س).

ب حدد ما إذا كانت كل من هذه النقاط نقطة عظمى أو نقطة صغرى.

٤) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة ص = س − $\sqrt{س}$ ، وحدد نوعها.

٥) أ أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة ص = ٦س^{٢} ($\sqrt[٣]{س − ٧}$)، وحدد نوعها.

ب حدّد ما إذا كانت هذه النقاط عظمى أو صغرى.

مساعدة

بالنسبة إلى التمرين ٥، اكتب المعادلة على أنها ناتج ضرب جذرين مكعبين، ثم ادمجهما.

٦) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + ١٠س^{٢} + ك س − ٢ نقطة حرجة عند س = −٨، فأوجد:

أ الإحداثي السيني للنقطة الحرجة الأخرى.

ب نوع كل من النقطتَين الحرجتَين.

٧) تقع على منحنى الدالة ص = أ س^{٢} + ب س − ٢ نقطة صغرى عند س = −٢، ويمرّ المنحنى بالنقطة (١، ١٣). أوجِد أ، ب.

٨) أوجِد النقاط الحرجة الواقعة على المنحنى ص = ك س^{٣} + ٦س^{٢}؛ وصنّفها بدلالة ك.

٩) لكل دالة من الدوال الآتية:

١) أوجِد إحداثيات النقطة الحرجة.

٢) حدد ما إذا كانت هذه النقطة عظمى أو صغرى، مبررًا السبب.

٣) تحقق من إجابتك مستخدمًا صيغة 'إكمال المربع' لإيجاد رأس المنحنى.

أ) د(س) = س^{٢} − ٨س + ٤

ب) د(س) = ٣س^{٢} + ١٢س + ٥

ج) د(س) = ٥س^{٢} + ٦س + ٢

د) د(س) = ٤ − ٦س − س^{٢}

هـ) د(س) = س^{٢} + ٦س + ٩

و) د(س) = ١ − ٤س − ٤س^{٢}

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ عند ص = ٣

٢) إذا علمت أن د(س) = أ س^{٣} + ب س$^{-٢}$، حيث أ، ب عددان ثابتان، د′(١) = ١٨، د″(١) = ١٨، فأوجِد أ، ب.

٣) إذا علمت أن د(س) = $\sqrt{س^{٣}}$ + ١٥$\sqrt{س}$، فأوجِد قيم س عندما يكون ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) يساوي ٩

٤) أ ١) أوجِد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا علمت أن ص = أ س^{٢} + (١ – أ) س، حيث أ ثابت.

٢) أوجِد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا علمت أن ص = س^{٣} + ب^{٢}، حيث ب ثابت.

ب ١) أوجِد $\frac{ءك}{ءأ}$ إذا علمت أن ك = $\sqrt{أ ب}$ + $\sqrt{ب}$، حيث ب ثابت.

٢) أوجِد $\frac{ءل}{ءن}$ إذا علمت أن ل = ٣(أ ن)^{٢}، حيث أ ثابت.

٥) أوجِد معادلة العمودي على منحنى الدالة ص = س^{٤} − ٤س^{٣} عند س = $\frac{١}{٢}$

٦) ليكن د(س) = $\frac{١}{س}$:

أ) بيّن أن معادلة المماس لمنحنى الدالة د(س) = ص = $\frac{١}{س}$ عند س = ل هي:

ل^{٢}ص + س = ٢ل

ب) عند أي نقطة على المنحنى تكون معادلة المماس ٩ص + س + ٦ = ٠؟

٧) يتقاطع مماس منحنى الدالة ص = ٦$\sqrt{س}$ عند النقطة (٤، ١٢) مع المحورَين في النقطتَين أ، ب.

بيّن أن طول القطعة المستقيمة أ ب يمكن كتابته في صورة $\sqrt{١٣}$ ك، وأوجِد قيمة ك.

٨) إذا علمت أن معادلة العمودي على منحنى الدالة ص = ٥س^{٢} − ١٢س + ١ عند نقطة ما هي س + ١٨ص + جـ = ٠، فأوجِد قيمة الثابت جـ.

٩) يتقاطع منحنى الدالة ص = $س^م$ مع منحنى الدالة ص = $س^ن$ عند النقطة ل(١، ١). إذا كان المماسان للمنحنيَين عند النقطة ل متعامدَين، فأوجد العلاقة بين م، ن.

١٠) يتقاطع العمودان على منحنيَي الدالتَين ص = $\frac{١}{س^٢}$ ، ص = $\frac{١}{س^٣}$ عند س = ٢ في ك.
أوجِد إحداثيات ك.

١١) إذا علمت أن الدالة ص = $س^٢$ + أ س − ٧ متزايدة عندما س > ٥، فأوجِد قيمة أ.

١٢) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = $\frac{١}{٣}س^٣$ − أ$س^٢$ + ٣أس + ١، (أ ≠ ٠) نقطة حرجة واحدة، فأوجِد قيمة أ.

١٣) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = أ$س^٣$ + ب $س^٢$ + ٨س − ١ نقطتَين حرجتَين عند س = $\frac{١}{٣}$، س = ٤، فأوجِد قيمة كل من أ، ب.

تم بحمد الله

رقم الإيداع

٢٠٢٣/٦٥٧٩

طبع بالمطابع العالمية - سلطنة عمان - ت : ٢٤٨١٥٧٧١

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

كتاب النشاط

يتميز كتاب النشاط بمحتوى سهل يمكن استخدامه إلى جانب كتاب الطالب لمنهاج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر .

يتضمن كتاب النشاط:

- تمارين شاملة وهادفة تتبع ترتيب الدروس الموجودة في كتاب الطالب.
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة تحتوي على أسئلة تحاكي الاختبار، وتغطي جميع موضوعات الوحدة، ويمكن استخدامها للتحقق من فهم الطالب للموضوعات التي درسها.
- فقرات مساعدة تزودك بالنصائح والإرشادات لحل الأسئلة والتحقق من الإجابات.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب الطالب.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om