سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
يتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445هـ - 2023م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف الثاني عشر - من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 -
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 وProbability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

–طيّب اللّه ثراه–

حضرة صاحب الجلالة

السلطان هيثم بن طارق المعظم

– حفظه اللّه ورعاه –

سلطنة عُمان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لَنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلاً مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ ضِياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة الرابعة: التفاضل

مصطلحات علمية

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★، ★، ★ أو★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحوّل بين الراديان، والدرجة.

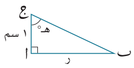
١-٢ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٣ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٤ تحلّ المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث، والنسب المثلثية في مثلثات قائمة الزاوية.	١) في الشكل:  أوجِد كلًا من الآتي بدلالة ر: أ ب ج ب جا هـ ج جتا هـ د ظا هـ

المفردات

الربع quadrant

زاوية الأساس principal angle

الزاوية المرجعية reference Angle

الدالة الدورية periodic function

الدورة period

السعة amplitude

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ٢

$(٢\pi)^ء = ٣٦٠°$

$\pi^ء = ١٨٠°$

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

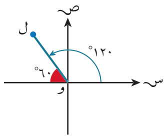
مثــال ٣

ارسم شكلًا يبيّن الزاوية التي تصنعها $\overline{\text{ول}}$ مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل، ثم حدد **الزاوية الحادة** التي تشكلها $\overline{\text{ول}}$ مع المحور السيني في كل مما يأتي:

أ ١٢٠° ب ٤٣٠° ج $\frac{٣\pi}{٤}$ د $-\frac{٢\pi}{٣}$ هـ $-٢,١\pi$ و ٣٣٣°

الحــلّ:

أ تمثل الزاوية ١٢٠° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و أقل من نصف دورة بمقدار ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = ٦٠°

الراديان

radian

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

استكشف ١

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

– بالاستعانة بالشكل أعلاه، وبمعلومية إشارة كل من س، ص في كل ربع من الأرباع، وأن نصف القطر يساوي ر (حيث ر موجب دائمًا) انسخ الجدول الآتي وأكمله:

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

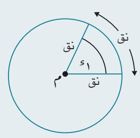
مُساعَدة

بإمكانك حل المعادلتين بتربيع الطرفين، وقد تظهر لك بعض القيم المرفوضة.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الراديان والدرجات



- الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة المرسومة فيها الزاوية، ويرمز إليه بالرمز (ء).
- $\pi = ١٨٠°$
- للتحويل من الدرجات إلى الراديان اضرب الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi}{١٨٠°}$
- للتحويل من الراديان إلى الدرجات، اضرب الزاوية بالراديان في $\frac{١٨٠°}{\pi}$

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

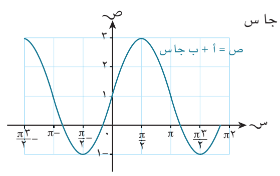
- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

★ **١)** يبيّن الرسم جزءًا من التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جا س
أوجد قيمة كل من أ، ب.



★ **٢)** أوجِد قيمة س التي تحقق المعادلة جا$^{-١}$(س − ١) = ظا$^{-١}$(٣$\sqrt{}$).

الوحدة الأولى
القياس الدائري
Circular measure

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

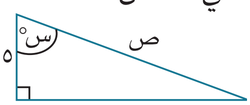
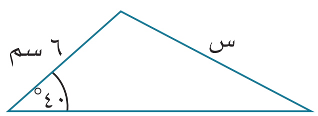
١-١ تحوّل بين الراديان، والدرجة.

١-٢ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٣ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

١-٤ تحلّ المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة السادسة عشرة	تجد محيط القطاع الدائري، ومساحته.	١) أوجِد محيط، ومساحة قطاع دائري نصف قطره ٦ سم، وقياس زاويته ٣٠°
الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث، والنسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية.	٢) في الشكل أدناه:  أوجِد قيمتَي س، ص.
الصف العاشر، الوحدة الثالثة عشرة	تحلّ مسائل تتضمّن قوانين الجيب وجيب التمام لأي مثلث، وتستخدم الصيغة: مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{1}{2}$ أ′ ب′ جا ج	٣) في الشكل أدناه:  أوجِد كلًا مما يأتي: أ مساحة المثلث. ب قيمة س.

المفردات

الراديان radian

طول القوس arc length

مساحة القطاع الدائري area of a sector

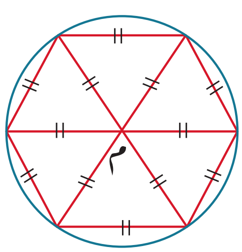
لماذا ندرس القياس الدائري؟

بُنيت هذه الوحدة اعتمادًا على موضوع الدوائر، والنسب المثلثية التي درستها سابقًا في الصفَّين التاسع والعاشر، حيث سبق أن استخدمت الدرجات كوحدة لقياس الزوايا.

هل تساءلت مرة لماذا قياس الزاوية في الدورة الكاملة يساوي ٣٦٠°؟

ما زلنا نجهل السبب الأساسي لاختيار الدرجة كوحدة قياس للزوايا، على الرغم من وجود العديد من الفرضيات حول ذلك، أهمّها:

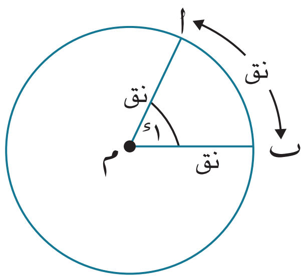
- ادّعى الفلكيون القدماء أن الشمس تتحرك في مسارها درجة واحدة كل يوم، وتتكوّن السنة الشمسية الواحدة من ٣٦٠ يومًا.
- قسّم البابليون قديمًا الدائرة إلى ٦ مثلثات متطابقة الأضلاع، ثمّ قسّموا كلّ زاوية عند مركز الدائرة إلى ٦٠ قسمًا، الأمر الذي نتج منه ٣٦٠ قسمًا في الدورة الكاملة.
- توجد عوامل كثيرة للعدد ٣٦٠ الأمر الذي يجعل تقسيم الدائرة سهلًا.
- أسماء وحدات قياس الزوايا في الدوائر هي نفسها أسماء وحدات قياس الزمن:
  - ١ ساعة = ٦٠ دقيقة، ١ دقيقة = ٦٠ ثانية.
  - ١° = ٦٠ دقيقة، ١ دقيقة = ٦٠ ثانية.



الدرجة ليست الوحدة الوحيدة المستخدمة لقياس الزوايا، ولذلك ستتعلم في هذه الوحدة كيف تستخدم **الراديان** **radian** (الزاوية نصف القطرية) كوحدة لقياس الزاوية المركزية للدائرة، كما أنه يستخدم في علم التفاضل والتكامل، ومعظم الفروع الأخرى للرياضيات (باستثناء الهندسة التطبيقية). إن العديد من العبارات الرياضية التي تتضمن قياس الزاوية تكون أبسط وأكثر دقة عند استخدام قياس الراديان مقارنة باستخدام الدرجات.

هناك العديد من وحدات القياس التي تستخدم الراديان في الكثير من المواقف اليومية مثل: السرعة الدائرية (سرعة محرك السيارة (الدوران في الدقيقة))، وسرعة معالجة الكمبيوتر (هيرتز وجيجاهرتز)، والمسافات التي تشاهد من خلال التلسكوبات التي يستخدمها علماء الفلك والتي تقاس بالمليراديان، ويعتمد الراديان على العدد π الذي يرتبط بالدوائر.

١-١ الراديان Radian



الراديان هو وحدة قياس الزاوية في النظام الدولي (SI)، وهو وحدة قياس الزاوية المستخدمة في العديد من المجالات، بما في ذلك الرياضيات، وهندسة الكهرباء، وهندسة السيارات، وتصميم الدوائر الإلكترونية، وعلم الحاسوب، وعلم الفلك.

يُعرّف الراديان على أنه: قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة المرسومة فيها الزاوية، ويرمز إليه بالرمز (ء).

ففي الشكل المجاور: دائرة مركزها م، طول القوس أ ب يساوي نصف قطر الدائرة نق.

ق (أ $\hat{م}$ ب) = ١ء، وتقرأ **واحد راديان**.

نتيجة ١

القوس الذي طوله ١ نق يقابل زاوية مركزية قياسها ١ء.

ومنه يكون المحيط (قوس طوله ٢ × π × نق) يقابل زاوية مركزية قياسها (٢ × π × ١ء)، وعليه:

نتيجة ٢

$(٢\pi)^ء = ٣٦٠^\circ$

$\pi^ء = ١٨٠^\circ$

عندما يُكتب قياس الزاوية بدلالة π نحذف عادة رمز الراديان.

ونكتبها $\pi = ١٨٠^\circ$

التحويل من الدرجات إلى الراديان والعكس

لتحويل قياس الزوايا من الدرجات إلى الراديان، أو العكس نستخدم العلاقة الآتية:

$\frac{\text{قياس الزاوية بالراديان}}{\pi} = \frac{\text{قياس الزاوية بالدرجات}}{١٨٠^\circ}$، أي أن:

$\frac{هـ^ء}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ}$، ومنها نحصل على:

$هـ^ء = \frac{س^\circ \times \pi}{١٨٠^\circ}$ ، $س^\circ = \frac{هـ^ء \times ١٨٠^\circ}{\pi}$

مما سبق نتوصل إلى النتيجة الآتية:

مُساعَدة

$\pi \approx \frac{٢٢}{٧} \approx ٣,١٤$

نتيجة ٣

- للتحويل من الدرجات إلى الراديان: اضرب الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$.
- للتحويل من الراديان إلى الدرجات: اضرب الزاوية بالراديان في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$.

من نتيجة ٣ نجد أن:

$١^ء = ١ \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \approx ٥٧,٣^\circ$

$١^\circ = ١ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \approx ٠,٠١٧٤٥^ء$

مثــال ١

أ حوّل ٦٠° إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة π.

ب حوّل $\frac{\pi ٥}{٩}$ إلى درجات.

الحــلّ:

أ **الطريقة ١:**

$$٦٠° = \left(٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠}\right)$$

$$٦٠° = \frac{\pi}{٣}$$

الطريقة ٢:

$$١٨٠° = \pi$$

$$\left(\frac{١٨٠}{٣}\right)° = \frac{\pi}{٣}$$

$$٦٠° = \frac{\pi}{٣}$$

ب **الطريقة ١:**

$$\frac{\pi ٥}{٩} = \left(\frac{\pi ٥}{٩} \times \frac{١٨٠}{\pi}\right)°$$

$$\frac{\pi ٥}{٩} = ١٠٠°$$

الطريقة ٢:

$$\pi = ١٨٠°$$

$$\frac{\pi}{٩} = ٢٠°$$

$$\frac{\pi ٥}{٩} = ١٠٠°$$

مُساعَدة

يمكنك استخدام التناسب:

$\pi \leftarrow ١٨٠°$

الزاوية بالراديان ← الزاوية بالدرجات

مُساعَدة

يمكنك استخدام التناسب:

$١٨٠° \leftarrow \pi$

الزاوية بالدرجات ← الزاوية بالراديان

وجدنا في المثال ١ أن: قيمة ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

توجد زوايا أخرى أساسية يجب أن تعرف قياساتها، ويمكن كتابتها بصورة كسور بسيطة من π. بعض هذه الزوايا هي:

مُساعَدة

استخدم π إن أمكن.

تُعدّ كتابة ٦٠° = ١,٠٥ ء أقل دقة.

درجة	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
راديان	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{\pi ٣}{٢}$	$\pi ٢$

يمكن تحويل قياسات زوايا أخرى بدلالة π باستخدام الزوايا الأساسية الموضحة في الجدول، مثل: ١٥°، ١٣٥°، ٢١٠°

تستخدم أغلب الآلات الحاسبة مفتاح [DRG] للانتقال بين الدرجات والراديان والغراديان.

تأكد من وجود المفتاح [RAD] على آلتك الحاسبة.

استخدم المفتاح [DRG] للعودة إلى وضعية الدرجات [0 DEG].

فمثلًا لتحسب جا $\frac{\pi}{٦}$ = ٠,٥، يمكنك تحويل وضعية الحاسبة إلى الراديان (radian mode) على الشكل الآتي: [0 RAD]، ثم إدخال [sin] [π] [a b/c] [6] [=] أو [sin] [(] [π] [÷] [6] [)] [=] للحصول على الإجابة ٠,٥

بدلًا من ذلك، يمكنك تحويل وضعية الحاسبة إلى الراديان (radian mode) بعد إدخال [sin] [π] [a b/c] [6] [DRG] [2] [=] أو [sin] [(] [π] [÷] [6] [)] [DRG] [2] [=]. للحصول على الإجابة ٠,٥ استخدم مفتاح [DRG] للعودة إلى وضعية الدرجات [0 DEG].

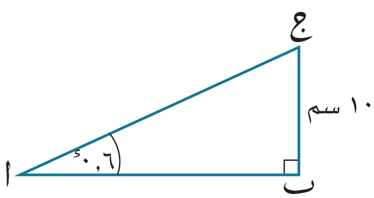
مثـــال ٢

في الشكل المقابل المثلث ا ب ج الذي فيه:

ب ج = ١٠ سم، ق (ا $\hat{ب}$ ج) = $\frac{\pi}{٢}$،

ق (ج $\hat{ا}$ ب) = ٠,٦ ء، احسب طول $\overline{ا ج}$،

مقرّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.



الحـــلّ:

جا (ج $\hat{ا}$ ب) = $\frac{١٠}{ا ج}$

جا (٠,٦ ء) = $\frac{١٠}{ا ج}$

$\overline{ا ج}$ = $\frac{١٠}{جا (٠,٦ ء)}$ استخدم وضعية rad mode

∴ $\overline{ا ج}$ = ١٧,٧ سم.

مُساعَدة

ليس ضروريًا أن تحوّل قياس الزوايا إلى الدرجات. ضع الآلة الحاسبة في وضعية راديان (radian).

تمارين ١-١

١) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الدرجات إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة π:

أ ٢٠°	ب ٤٠°	ج ٢٥°	د ٥٠°	هـ ٥°
و ١٥٠°	ز ١٣٥°	ح ٢١٠°	ط ٢٢٥°	ي ٣٠٠°
ك ٦٥°	ل ٥٤٠°	م ٩°	ن ٣٥°	س ٦٠٠°

٢) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الراديان إلى الدرجات:

أ $\frac{\pi}{٢}$	ب $\frac{\pi}{٣}$	ج $\frac{\pi}{٦}$	د $\frac{\pi}{١٢}$	هـ $\frac{٤\pi}{٣}$
و $\frac{٤\pi}{٩}$	ز $\frac{٣\pi}{١٠}$	ح $\frac{٧\pi}{١٢}$	ط $\frac{٩\pi}{٢٠}$	ي $\frac{٩\pi}{٢}$
ك $\frac{٧\pi}{٥}$	ل $\frac{٤\pi}{١٥}$	م $\frac{٥\pi}{٤}$	ن $\frac{٧\pi}{٣}$	س $\frac{٩\pi}{٨}$

٣) اكتب قياس كل زاوية من الزوايا الآتية بالراديان مقرّبًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ٢٨° ب ٣٢° ج ٤٧° د ٢٠٠° هـ ٣٢٠°

٤) اكتب قياس كل زاوية فيما يأتي بالدرجات مقربًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ ١,٢ ء ب ٠,٨ ء ج ١,٣٤ ء

د ١,٥٢ ء هـ ٠,٧٩ ء

٥) انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكمل كلًا منهما، واكتب الناتج بدلالة π:

أ

درجة	٠°	٤٥°	٩٠°	١٣٥°	١٨٠°	٢٢٥°	٢٧٠°	٣١٥°	٣٦٠°
راديان	٠				π				٢π

ب

درجة	٠°	٣٠°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٥٠°	١٨٠°	٢١٠°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣٣٠°	٣٦٠°
راديان	٠						π						٢π

٦) استخدم الحاسبة لتجد قيمة كلّ ممّا يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ منازل عشرية:

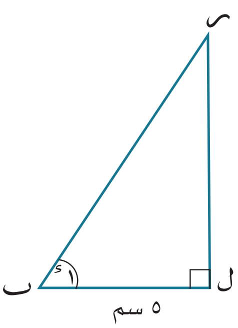
أ جا (٠,٧) ء ب ظا (١,٥) ء ج جتا (٠,٩) ء

د جتا $\frac{\pi}{٢}$ هـ جا $\frac{\pi}{٣}$ و ظا $\frac{\pi}{٥}$

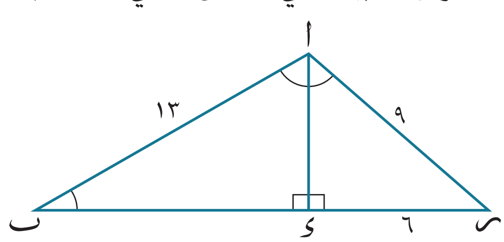
٧) في الشكل المقابل، أوجِد:

أ طول $\overline{ل م}$ (مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

ب ق (ب $\hat{م}$ ل) بدلالة π في صورة كسر.



٨) الأطوال المبيّنة في الشكل الآتي معطاة بالسنتيمترات. أوجِد:



أ ق (ا $\hat{ب}$ ء) بالراديان مقربًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

ب ق (ب $\hat{ا}$ م) بالراديان مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

مُساعَدة

يمكنك استخدام قوانين الجيب وجيب التمام في المثلث:

$$\frac{\text{جا ا}}{ا'} = \frac{\text{جا ب}}{ب'} = \frac{\text{جا ج}}{ج'}$$

$$ا'^٢ = ب'^٢ + ج'^٢ - ٢ب' ج' \text{جتا ا}$$

$$\text{جتا ا} = \frac{ب'^٢ + ج'^٢ - ا'^٢}{٢ب' ج'}$$

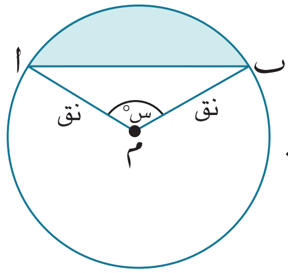
١-٢ طول القوس Arc length

استكشف ١

١) ناقش، مستخدمًا الشكل أدناه، معنى كلّ كلمة من الكلمات الآتية:

وتر　　قوس　　قطاع دائري　　قطعة دائرية

٢) مستعينًا بالشكل المجاور اشرح المقصود بكل ممّا يأتي:

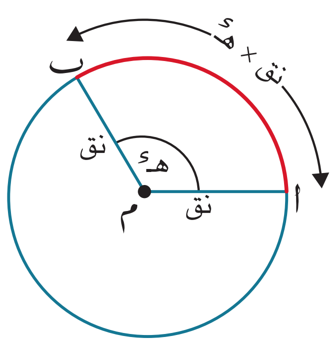


- القوس الأصغر، والقوس الأكبر.
- القطاع الدائري الأصغر، والقطاع الدائري الأكبر.
- القطعة الدائرية الصغرى، والقطعة الدائرية الكبرى.

٣) إذا علمت أن نصف قطر الدائرة هو نق (سم) والزاوية المركزية المقابلة للوتر أ ب هي س°، فناقش، واكتب عبارة بدلالة نق، س لإيجاد كلّ مما يأتي:

- طول القوس الأصغر أ ب
- طول الوتر أ ب

إذا كانت الزاوية هـ تمثل قياس الزاوية س بالراديان بدلًا من الدرجات، فماذا تتوقع أن تكون الإجابات؟



تبيّن لنا من تعريف الراديان أن **طول القوس Arc length** الذي يقابل زاوية مركزية قياسها (١ ء) يساوي طول نصف قطر الدائرة نق، وعليه إذا قابل قوس زاوية مركزية قياسها هـ ء يكون طول القوس أ ب = نق × هـ ء .

مما سبق، يمكن التوصل إلى النتيجة الآتية:

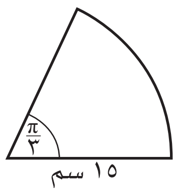
نتيجة ٤

طول القوس = نق × هـ ء

مثال ٣

يبيّن الشكل المقابل قطاعًا دائريًا قياس زاويته المركزية يساوي $\frac{\pi}{٣}$ في دائرة نصف قطرها يساوي ١٥ سم.

أوجِد طول قوس القطاع بدلالة π.



الحــلّ:

طول القوس = نق × هـ ء

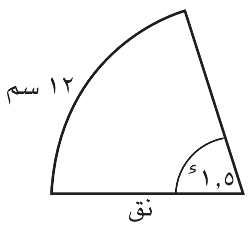
= ١٥ × $\frac{\pi}{٣}$

= ٥ π سم.

مثال ٤

يبيّن الشكل المقابل قطاعًا دائريًا قياس زاويته ١,٥ ء يحصر قوسًا طوله ١٢ سم.

أوجِد طول نصف قطر القطاع.



الحــلّ:

طول القوس = نق × هـ ء

١٢ = نق × ١,٥

نق = ٨ سم.

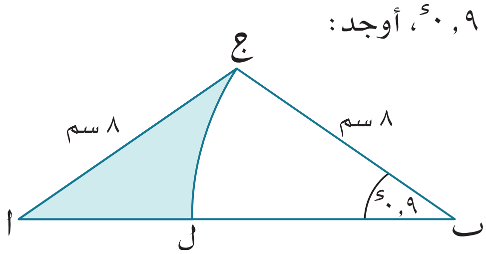
مثال ٥

في الشكل المقابل المثلث أ ب ج متطابق الضلعَين حيث أ ج = ج ب = ٨ سم، ج ل قوس في دائرة مركزها ب، ق (أ بَ ج) = ٠,٩ ء، أوجد:

أ طول $\frown{\text{ج ل}}$.

ب طول $\overline{\text{أ ل}}$.

ج محيط المنطقة المظللة.



الحــلّ:

أ طول $\frown{\text{ج ل}}$ = نق × هـ ء

= ٨ × ٠,٩

= ٧,٢ سم.

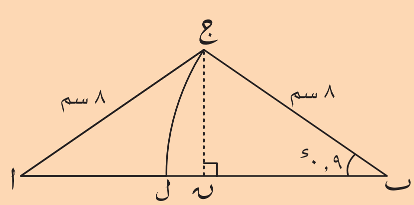
ب أ ل = أ ب − ل ب

= ٢ × ب ن − ل ب

= ٢ × ٨ جتا(٠,٩ ء) − ٨

= ١,٩٥ سم.

ارسم مستقيمًا عموديًا على $\overline{\text{أ ب}}$ من النقطة ج، وينصفه في النقطة ن.



جتا (٠,٩ ء) = $\frac{\text{ن ب}}{٨}$، ∴ ن ب = ٨ جتا (٠,٩ ء)

مُساعَدة

يرمز إلى القوس أ ب بالرمز $\frown{\text{أ ب}}$

مُساعَدة

يمكن حل الجزئية (ب) باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام بمعلومية أن:

ق(أ جَ ب)

= π − ٢ × ٠,٩ ء

= π − ١,٨ ء

ج محيط المنطقة المظللة = طول $\overset{\frown}{\text{ل ع}}$ + طول $\overline{\text{أ ع}}$ + طول $\overline{\text{أ ل}}$

= ٧,٢ + ٨ + ١,٩٥

= ١٧,١٥ سم.

تمارين ١-٢

١) أوجِد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعات الآتية بدلالة π:

أ نصف القطر ٨ سم، وقياس الزاوية $\frac{\pi}{٤}$

ب نصف القطر ٧ سم، وقياس الزاوية $\frac{٣\pi}{٧}$

ج نصف القطر ١٦ سم، وقياس الزاوية $\frac{٣\pi}{٨}$

د نصف القطر ٢٤ سم، وقياس الزاوية $\frac{٧\pi}{٦}$

٢) أوجِد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعين أدناه:

أ نصف القطر ١٠ سم، وقياس الزاوية ١,٣ ء

ب نصف القطر ٣,٥ سم وقياس الزاوية ٠,٦٥ ء

٣) أوجِد قياس زاوية القطاع الدائري بالراديان، حيث:

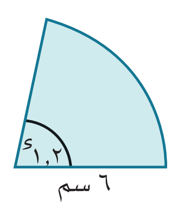
أ نصف القطر ١٠ سم، وطول القوس ٥ سم.

ب نصف القطر ١٢ سم، وطول القوس ٩,٦ سم.

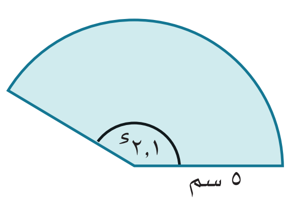
٤) في الشكل المجاور: عجلة دوّارة عملاقة قطرها ١٥٨,٥ متر.
أوجِد المسافة التي يقطعها رجل يجلس في عربة موجودة على محيط العجلة إذا دارت العجلة بزاوية قياسها $\frac{\pi}{١٦}$.

٥) أوجِد محيط كل قطاع من القطاعات الدائرية الآتية:

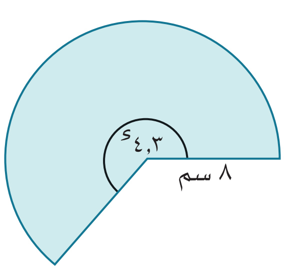
أ



ب



ج

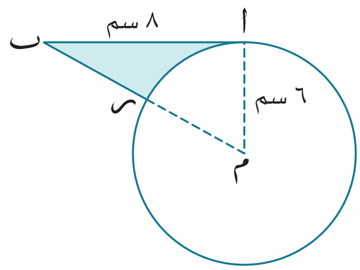


٦) يوضح الشكل المجاور دائرة نصف قطرها ٦ سم، ومركزها م.
ا ب مماس للدائرة عند النقطة ا، وطوله ٨ سم.
ب، س، م تقع على استقامة واحدة. أوجِد:

أ القياس الدائري للزاوية ا مَ ب.

ب طول ب س.

ج محيط المنطقة المظللة.



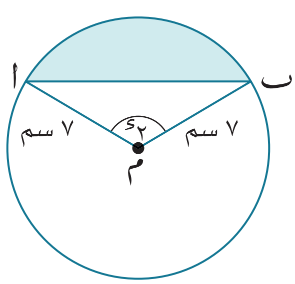
مُساعَدة
يكون المماس عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

٧) يبيّن الشكل المجاور دائرة نصف قطرها ٧ سم، ومركزها م، ا ب وتر في الدائرة،
ق (ا مَ ب) = ٢ ء. أوجِد:

أ طول القوس الأصغر ا ب.

ب طول الوتر ا ب.

ج محيط المنطقة المظللة.

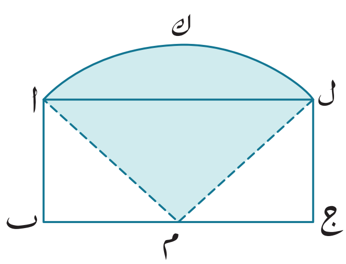


٨) ا ب ج ل مستطيل حيث ا ب = ٥ سم، ب ج = ٢٤ سم،
م منتصف ب ج، م ا ك ل قطاع دائري من دائرة مركزها م. أوجِد:

أ طول ا م.

ب القياس الدائري للزاوية ا مَ ل.

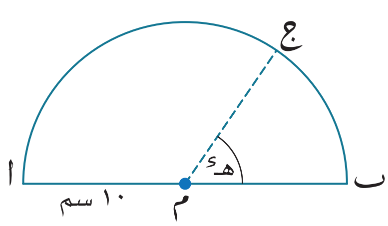
ج محيط المنطقة المظللة.



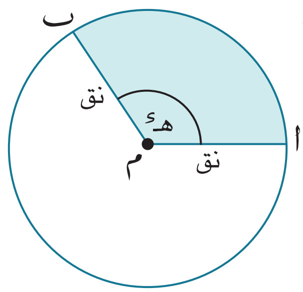
٩) يبيّن الشكل المجاور نصف دائرة نصف قطرها ١٠ سم، ومركزها م.
ق (ب مَ ج) = هـ ء، ومحيط القطاع الدائري ا م ج
يساوي ضعف محيط القطاع الدائري ب م ج.

أ بيّن أن هـ = $\frac{\pi - ٢}{٣}$.

ب أوجِد محيط المثلث ا ب ج.



١-٣ مساحة القطاع الدائري Area of a sector



لإيجاد صيغة لحساب **مساحة القطاع الدائري** **Area of a sector**، الذي قياس زاويته هـ ء، نستخدم التناسب:

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع الدائري}}{\text{قياس زاوية الدورة الكاملة حول المركز}}$$

عندما تقاس الزاوية هـ بالراديان يصبح التناسب:

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^{٢}} = \frac{\text{هـ ء}}{٢\pi}$$

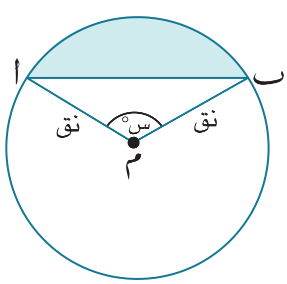
مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{هـ ء}}{٢\pi} \times \pi\,\text{نق}^{٢}$، وتُبسّط الصيغة كما في النتيجة الآتية:

نتيجة ٥

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}\,\text{هـ ء}$

استكشف ٢

دائرة مركزها م، نصف قطرها نق سم، وقياس الزاوية المركزية التي يحصرها الوتر أ ب هي س°



ناقش واكتب عبارة بدلالة نق، س، لإيجاد:

١) مساحة القطاع الدائري الأصغر أ م ب

٢) مساحة القطعة الدائرية الصغرى المظللة.

مثال ٦

أوجِد بدلالة π مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية $\frac{\pi}{٦}$، في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم.

الحــلّ:

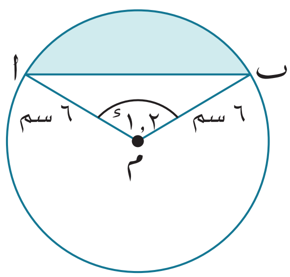
مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}\,\text{هـ ء}$

$= \frac{١}{٢} \times ٩^{٢} \times \frac{\pi}{٦}$

$= \frac{٢٧\pi}{٤}$ سم^{٢}.

مثــال ٧

دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٦ سم. ا ب وتر في الدائرة، ق (ا $\hat{م}$ ب) = ١,٢ء. أوجِد:



- **أ** مساحة القطاع الدائري ا م ب.
- **ب** مساحة المثلث ا م ب.
- **ج** مساحة القطعة الدائرية المظللة (الصغرى).
- **د** مساحة القطعة الدائرية غير المظللة (الكبرى).

الحــلّ:

أ مساحة القطاع الدائري ا م ب = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ ء

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} × ١,٢

= ٢١,٦ سم^{٢}.

ب مساحة المثلث ا م ب = $\frac{١}{٢}$ أَ × بَ × جا م

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × جا ١,٢ء

= ١٦,٨ سم^{٢} (مقرّبة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

ج مساحة القطعة الدائرية المظللة (الصغرى)

= مساحة القطاع الدائري ا م ب − مساحة المثلث ا م ب

= ٢١,٦ − ١٦,٨

= ٤,٨ سم^{٢}.

د مساحة القطعة الدائرية غير المظللة (الكبرى)

= مساحة الدائرة − مساحة القطعة الدائرية الصغرى

= π نق^{٢} − مساحة القطعة الدائرية الصغرى

= π × ٦^{٢} − ٤,٨

= ١٠٨,٣ سم^{٢}.

مساحة الدائرة تساوي مجموع مساحتَي القطعة الدائرية الصغرى، والقطعة الدائرية الكبرى.

مُساعَدة

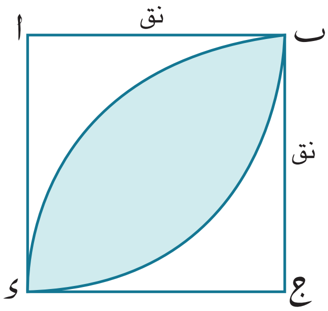
يمكن حل الجزئيتَين ج، د باستخدام القانون:
مساحة القطعة الدائرية
= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢}(هـ ء − جا هـ ء)

لاحظ أنه يمكنك إيجاد:

- مساحة القطعة الدائرية الصغرى بطرح مساحة المثلث المتطابق الضلعَين من مساحة القطاع الدائري الأصغر.
- مساحة القطعة الدائرية الكبرى بجمع مساحة المثلث المتطابق الضلعَين مع مساحة القطاع الدائري الأكبر.

مثــال ٨

يبيّن الشكل المجاور المربع ا ب ج د الذي طول ضلعه نق.
رُسم قوسان من دائرتَين نصف قطر كل منهما نق، ومركزاهما ا، ج،
ويمران بالنقطتَين ب، د. أوجِد:



أ محيط المنطقة المظللة بدلالة نق، π.

ب مساحة المنطقة المظللة، واكتب الناتج في صورة ك نق^{٢}، حيث ك في صورة كسر.

ج مساحة المنطقة المظللة عندما نق = $\frac{٤}{\pi}$ سم بدلالة π.

الحــلّ:

أ المحيط = طول القوس الأول + طول القوس الثاني

= نق هـء + نق هـء

= ٢نق هـء

= ٢ × نق × $\frac{\pi}{٢}$

= π نق وحدة طول.

يتكوّن المحيط من قوسَين يمثل كل منهما ربع دائرة نصف قطرها نق.

ب المساحة = ٢ × (مساحة القطاع الدائري ا ب د − مساحة المثلث ا ب د).

= ٢ × $\left(\frac{١}{٢} \times \text{نق}^{٢} \times \frac{\pi}{٢} - \frac{١}{٢} \times \text{نق} \times \text{نق}\right)$

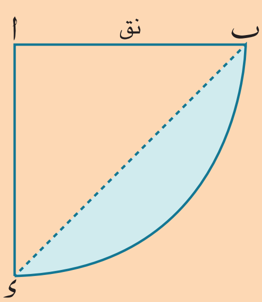
= $\frac{\pi \text{نق}^{٢}}{٢}$ − نق^{٢}

= نق$^{٢}\left(\frac{\pi}{٢} - ١\right)$

= $\left(\frac{\pi - ٢}{٢}\right)$نق^{٢} وحدة مساحة.

تتشكل المنطقة المظللة من قطعتَين دائريتَين متطابقتَين.

مساحة كل قطعة دائرية تساوي الفرق بين مساحة القطاع الدائري ا ب د، ومساحة المثلث ب ا د قائم الزاوية في ا. زاوية القطاع الدائري هي $\frac{\pi}{٢}$



ج المساحة = $\left(\frac{\pi - ٢}{٢}\right)$نق^{٢}

= $\frac{\pi - ٢}{٢} \times \left(\frac{٤}{\pi}\right)^{٢}$

= $\frac{٨(\pi - ٢)}{\pi^{٢}}$ سم^{٢}.

عوّض نق = $\frac{٤}{\pi}$ في إجابة الجزئية (ب).

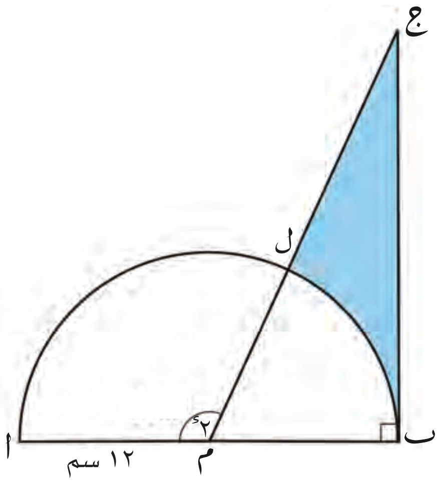
اكتب الإجابة في صورة كسر.

مثـــال ٩

يبيّن الشكل المجاور نصف دائرة مركزها م، ونصف قطرها ١٢ سم، ق (ا م̂ ل) = ٢ء

مُدّ المستقيم م ل بحيث يتقاطع مع العمودي على القطر ا ب في النقطة ع.

احسب مساحة المنطقة المظللة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين.



الحـــلّ:

ظا (ب م̂ ع) = $\frac{\text{ب ع}}{١٢}$ ∵ ا م̂ ب زاوية مستقيمة، ∴ ق (ب م̂ ل) = π − ٢

ب ع = ١٢ ظا(π − ٢)

مساحة المثلث م ب ع = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ب ع مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ ظا(π − ٢ء)

= ١٥٧,٣٢ سم٢.

مساحة القطاع الدائري م ب ل = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٢ × (π − ٢ء) مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ × نق٢ × هـ ء

= ٨٢,١٩ سم٢.

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث م ب ع − مساحة القطاع الدائري م ب ل

= ١٥٧,٣٢ − ٨٢,١٩ = ٧٥,١٣ سم٢.

تمارين ١-٣

١) أوجِد مساحة كل قطاع من القطاعات الدائرية الآتية بدلالة π:

أ نصف القطر ١٢ سم، وقياس الزاوية $\frac{π}{٦}$

ب نصف القطر ١٠ سم، وقياس الزاوية $\frac{٢π}{٥}$

ج نصف القطر ٤,٥ سم، وقياس الزاوية $\frac{٢π}{٩}$

د نصف القطر ٩ سم، وقياس الزاوية $\frac{٤π}{٣}$

٢) أوجِد مساحة كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين:

أ نصف القطر ٣٤ سم، وقياس الزاوية ١,٥ء

ب نصف القطر ٢,٦ سم، وقياس الزاوية ٠,٩ء

٣) أوجِد زاوية كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين بالراديان:

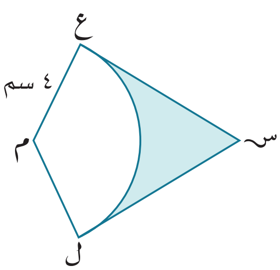
أ نصف القطر ٤ سم، والمساحة ٩ سم^{٢}.

ب نصف القطر ٦ سم، والمساحة ٢٧ سم^{٢}.

٤) ا م ب قطاع دائري في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم، طول القوس ا ب يساوي ١٠ سم. أوجِد:

أ ق (ا م̂ ب) بالراديان.

ب مساحة القطاع الدائري ا م ب.

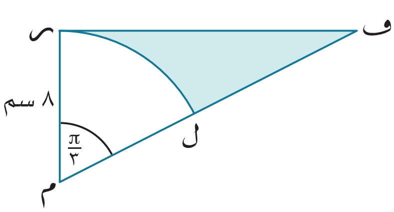


٥) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري ل م ع من دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٤ سم. طول ل⌒ع يساوي ٧ سم.
ل س، ع س تمسّان الدائرة في ل، ع على الترتيب. أوجِد:

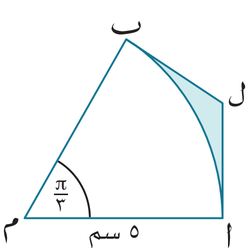
أ ق (ل م̂ ع) بالراديان.

ب طول ل س.

ج مساحة المنطقة المظللة.



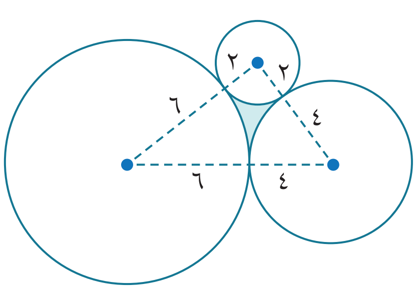
٦) يبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًا ل م ن في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم، وقياس زاوية القطاع $\frac{\pi}{٣}$.
م ن، ف ن متعامدتان، وتقع النقاط م، ل، ف على استقامة واحدة. أوجِد مساحة المنطقة المظللة بدلالة π.



٧) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري ا م ب في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٥ سم، وقياس زاوية القطاع $\frac{\pi}{٣}$.
ل ا، ل ب مماسان للدائرة حيث ا، ب هما نقطتا التماس على الترتيب. أوجِد:

أ طول ا ل.

ب مساحة المنطقة المظللة بدلالة π.

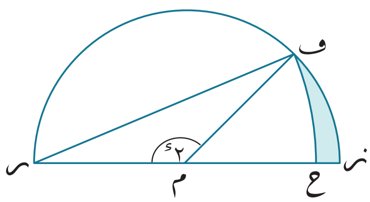


★ **٨)** يبيّن الشكل المجاور ثلاث دوائر متماسة أنصاف أقطارها ٦سم، ٤ سم، ٢ سم. أوجِد مساحة المنطقة المظللة.

٩) يبيّن الشكل المجاور نصف دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم.
ق ($ر\hat{م}ف$) = ٢ء، ف ع قوس في دائرة مركزها ر.
أوجِد مساحة:

أ المثلث ر م ف. ب القطاع الدائري ف م ن.

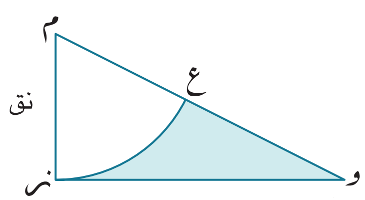
ج القطاع الدائري ف ر ع. د المنطقة المظللة.



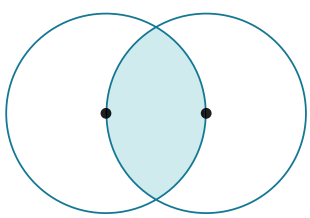
١٠) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري ع م ن من دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق سم. $\overline{نو}$ تمسّ الدائرة في النقطة ن، ع هي منتصف $\overline{مو}$. إذا علمت أن:

أ محيط المنطقة المظللة يساوي ل، فبيّن أن:
ل = $\frac{نق}{٣}$ (٣ + ٣$\sqrt{٣}$ + π)

ب مساحة المنطقة المظللة تساوي أ، فبيّن أن:
أ = $\frac{نق^٢}{٦}$ (٣$\sqrt{٣}$ − π)



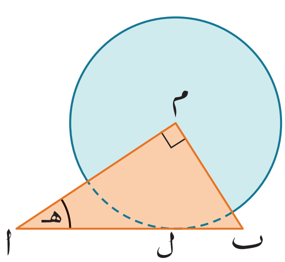
١١) يبيّن الشكل المجاور دائرتَين نصف قطر كل منهما نق، ومركز كل دائرة يقع على محيط الدائرة الأخرى. أوجِد مساحة المنطقة المظللة بدلالة نق.



★ ١٢) يبيّن الشكل المجاور دائرة نصف قطرها ١ سم، ومركزها م. المثلث أ م ب قائم الزاوية في م، ويمسّ وتره أ ب الدائرة عند النقطة ل، ق ($ب\hat{أ}م$) = هـء. أوجِد:

أ عبارة تمثل طول $\overline{أب}$ بدلالة ظا هـ.

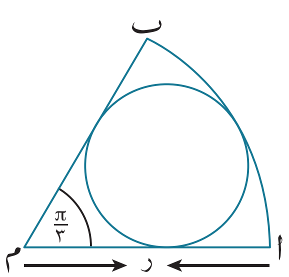
ب قيمة هـ عندما تتساوى مساحتا المنطقتَين المظللتَين.



★ ١٣) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري أ م ب في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ر، وقياس زاوية القطاع $\frac{π}{٣}$.
تمّ رسم دائرة داخلية نصف قطرها نق، وتمسّ حواف القطاع الثلاث. أثبت أن:

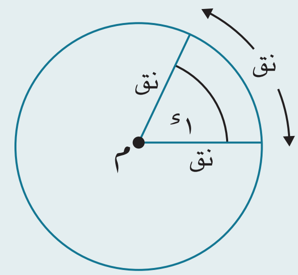
أ ر = ٣ نق.

ب $\frac{\text{مساحة الدائرة الداخلية}}{\text{مساحة القطاع الدائري الخارجي}} = \frac{٢}{٣}$



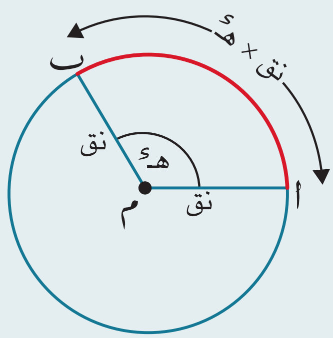
قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الراديان والدرجات



- الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة المرسومة فيها الزاوية، ويرمز إليه بالرمز (ء).
- $\pi = ١٨٠^\circ$
- للتحويل من الدرجات إلى الراديان اضرب الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$
- للتحويل من الراديان إلى الدرجات، اضرب الزاوية بالراديان في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

طول القوس ومساحة القطاع الدائري

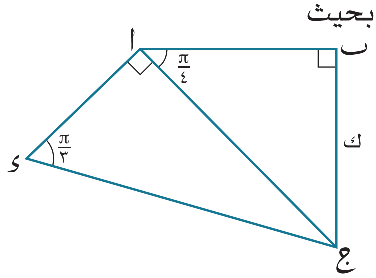


- عندما تقاس الزاوية هـ بالراديان، فإن طول القوس أ ب = نق × هـ ء.
- عندما تقاس الزاوية هـ بالراديان، فإن مساحة القطاع الدائري أ م ب = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ هـ ء.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) دائرة نصف قطرها وحدة واحدة مرسومة داخل مربع بحيث تمسّ أضلاعه الأربعة. أوجِد مساحة المنطقة داخل المربع وخارج الدائرة بدلالة π.

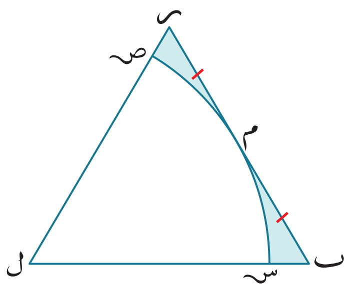
٢) في الشكل المجاور: ا ب ج ى مضلع رباعي مكوّن من مثلثَين قائمَي الزاوية، بحيث ب ج = ك سم، ق (ب $\hat{ا}$ ج) = $\frac{\pi}{4}$، ق (ا $\hat{ى}$ ج) = $\frac{\pi}{3}$. أوجِد:



أ) ا ى بدلالة ك.

ب) قيمة ك إذا علمت أن طول $\overline{\text{ا ى}}$ = ٢ سم.

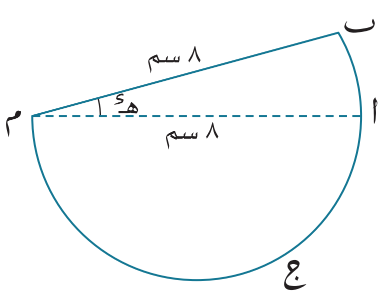
٣) في الشكل المجاور: ل ب ن مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٥ سم. م نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب ن. يمسّ قوس دائرة مركزها ل المستقيم ب ن في النقطة م، ويتقاطع مع الضلع ل ب في س وَمع الضلع ل ن في ص. أوجِد بدلالة π و $\sqrt{3}$:



أ) المحيط الإجمالي للمنطقة المظللة.

ب) المساحة الإجمالية للمنطقة المظللة.

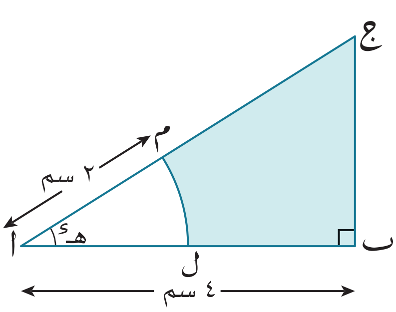
٤) في الشكل المجاور: م ا ب قطاع دائري من دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم. ق (ب $\hat{م}$ ا) = هـ^{ى}. م ا ج نصف دائرة قطرها م ا. إذا كانت مساحة نصف الدائرة م ا ج تساوي ضعف مساحة القطاع الدائري م ا ب، فأوجِد:



أ) قياس هـ بدلالة π.

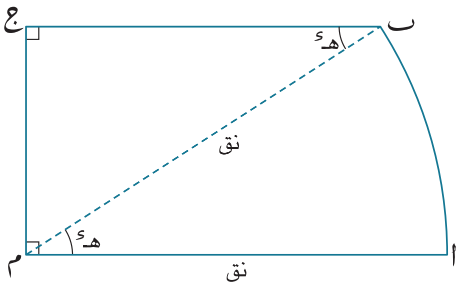
ب) المحيط الإجمالي للشكل بدلالة π.

٥) يبيّن الشكل المجاور: المثلث ا ب ج، حيث $\overline{\text{ا ب}} \perp \overline{\text{ب ج}}$، وطول $\overline{\text{ا ب}}$ = ٤ سم، ق (ج $\hat{ا}$ ب) = هـ^{ى}. القوس م ل في دائرة مركزها ا، ونصف قطرها ٢ سم يتقاطع مع الضلع ا ج في النقطة م، ومع الضلع ا ب في النقطة ل. أوجِد بدلالة هـ^{ى}:



أ) مساحة المنطقة المظللة.

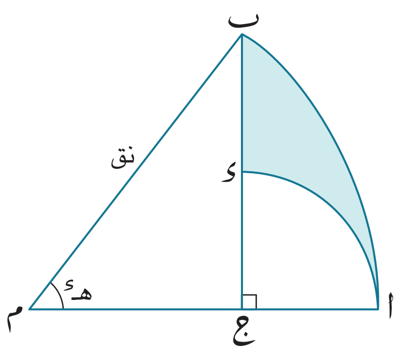
ب) محيط المنطقة المظللة.



٦) يمثل الشكل المجاور صفيحة معدنية م ا ب ج، مكوّنة من القطاع الدائري م ا ب من دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق، والمثلث م ج ب قائم الزاوية في ج. ق (ا مَ ب) = ق (م بَ ج) = هـ،
م ج ⊥ م ا. أوجِد:

أ محيط الصفيحة بدلالة نق، هـ.

ب مساحة الصفيحة عندما نق = ١٠، هـ = $\frac{\pi}{٥}$



٧) يبيّن الشكل المجاور القطاع الدائري م ا ب من دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق، ق (ا مَ ب) = هـ.
تقع النقطة ج على م ا حيث ب ج ⊥ م ا. تقع النقطة ى على الضلع ب ج، وعلى القوس ا ى من دائرة مركزها ج. أوجِد:

أ ا ج بدلالة نق، هـ.

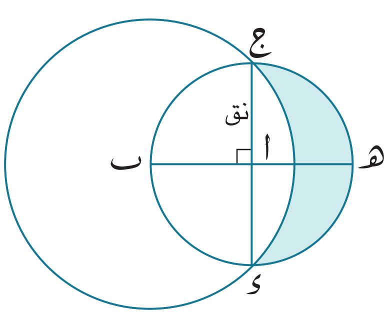
ب محيط المنطقة المظللة ا ب ى عندما هـ = $\frac{\pi}{٣}$، نق = ٤ وحدات.

٨) ثُني سلك معدني طوله ٢٤ سم فشكّل قطاعًا دائريًا من دائرة، ونصف قطرها نق سم.

أ بيّن أن مساحة القطاع (م سم^{٢})، تعطى بالصيغة م = ١٢ نق − نق^{٢}،

ب عبّر عن م في صورة أ − (نق − ب)^{٢}، حيث أ، ب ثابتان.

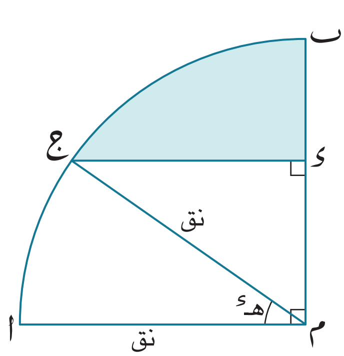
ج إذا علمت أن نق يمكن أن تتغير قيمته، فحدّد أكبر قيمة للمساحة م، وأوجِد قياس زاوية القطاع الدائري.



٩) يبيّن الشكل المجاور دائرتين: دائرة صغرى مركزها ا، ونصف قطرها نق وقطراها ج ى، ب هـ متعامدان، ودائرة كبرى مركزها ب، وتمرّ بالنقطتَين ج، ى.

أ بيّن أن نصف قطر الدائرة الكبرى يساوي $\sqrt{٢}$ نق.

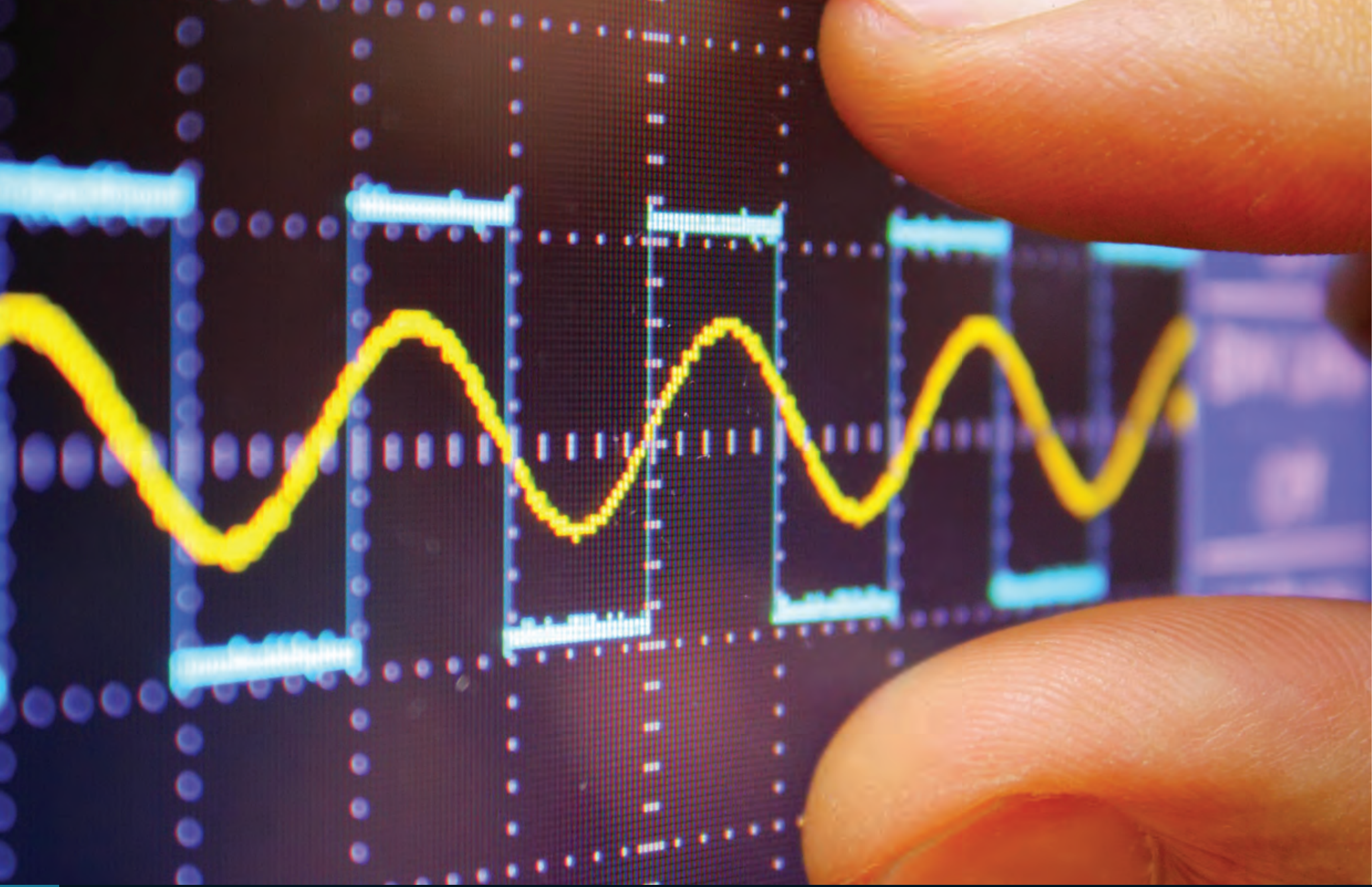
ب أوجِد مساحة المنطقة المظللة بدلالة نق.



١٠) في الشكل المجاور ا م ب رُبع دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق.
تقع النقطة ج على القوس ا ب، وتقع النقطة ى على م ب.
ج ى // ا م، ق (ا مَ ج) = هـ.

أ اكتب محيط المنطقة المظللة بدلالة نق، هـ، π.

ب أوجِد مساحة المنطقة المظللة إذا علمت أن نق = ٥ سم، هـ = ٠,٦



الوحدة الثانية
حساب المثلثات
Trigonometry

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تتذكر القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٠°، ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°، ٩٠°، وقيمها المكافئة بالراديان، وتجد القيم الدقيقة للزوايا المتعلقة بها.

٢-٢ تجد القيم الدقيقة (بالدرجات أو بالراديان) للنسب المثلثية (جاهـ، جتاهـ، ظاهـ) بمعلومية إحداها.

٢-٣ ترسم، وتستخدم التمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لأي زاوية (بالدرجات و بالراديان).

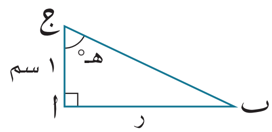
٢-٤ ترسم التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد) للتمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لزوايا قياسها بين ٠°، ٣٦٠° أو بين ٠، ٢π، مثل: ص = ٢جا(٣س).

٢-٥ تستخدم الصيغ جا$^{-1}$(س)، جتا$^{-1}$(س)، ظا$^{-1}$(س) للتعبير عن القيم الرئيسية للعلاقات العكسية للمثلثات، وتجد قيم الدوال البسيطة باستخدام المعرفة حول القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° وقيمها المكافئة بالراديان.

٢-٦ تحل معادلات مثلثية بسيطة تقع في مجال محدد بالدرجات أو بالراديان.

٢-٧ تستخدم المتطابقات ظا هـ = $\frac{\text{جا(هـ)}}{\text{جتا(هـ)}}$، جا^{2}(هـ) + جتا^{2}(هـ) = ١ لتحل معادلات مثلثية في براهين مثلثية بالدرجات وبالراديان.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث، والنسب المثلثية في مثلثات قائمة الزاوية.	١) في الشكل:  أوجد كلًا من الآتي بدلالة ر: أ ب ع ب جا هـ ج جتا هـ د ظا هـ
الصف الثاني عشر، الوحدة الأولى	تحوّل بين الدرجات والراديان.	٢) أ حوّل كلًا من قياسات الزوايا الآتية إلى الراديان: ١) ٤٥° ٢) ٧٢٠° ٣) ١٥٠° ب حوّل كلًا من قياسات الزوايا الآتية إلى الدرجات: ١) $\frac{\pi}{٦}$ ٢) $\frac{٧\pi}{٢}$ ٣) $\frac{١٣\pi}{١٢}$
الصف العاشر، الوحدة التاسعة، والصف الحادي عشر، الوحدة الأولى	تحُلّ المعادلات التربيعية.	٣) حل المعادلتَين الآتيتَين: أ $س^٢ - ٥س = ٠$ ب $٢س^٢ + ٧س - ١٥ = ٠$

المفردات

الربع quadrant

زاوية الأساس principal angle

الزاوية المرجعية reference Angle

الدالة الدورية periodic function

الدورة period

السعة amplitude

خط التقارب asymptote

المتطابقة identity

الدالة المثلثية العكسية inverse trigonometric function

لماذا ندرس حساب المثلثات؟

لقد درست سابقًا كيف تحسب الأطوال وقياسات الزوايا باستخدام النسب المثلثيّة: الجيب، وجيب التمام، والظل. وستتعلم في هذه الوحدة بعض القوانين والخواص التي تربط الدوال المثلثيّة ببعضها وبتمثيلاتها البيانية. يشار إلى التمثيل البياني لـ ص = جا س، ص = جتا س أحيانًا بالدوال الموجية (**الدورية**).

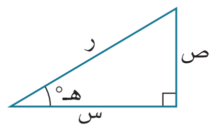
تحدث الاهتزازات والأمواج في كثير من المواقف اليومية، ومن الأمثلة على ذلك أمواج الصوت، والأمواج الضوئية، والمائية، والكهرباء، واهتزازات أجنحة الطائرات، وأفران الميكروويف. يمثّل العلماء والمهندسون هذه الاهتزازات والأمواج باستخدام الدوال المثلثيّة.

٢-١ الزوايا بين ٠°، ٩٠°

Angles between 0° and 90°

لقد درست سابقًا النسب المثلثيّة الآتية:

جا هـ = المقابل / الوتر ، جتا هـ = المجاور / الوتر ، ظا هـ = المقابل / المجاور



ومن خلال الشكل المجاور نجد أن:

جا هـ = ص / ر ، جتا هـ = س / ر ، ظا هـ = ص / س

مثـــال ١

إذا علمت أنّ: جتا هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٩٠°:

أ فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

١) جتا^{٢} هـ ٢) جا هـ ٣) ظا هـ

ب أثبت أن $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{جا هـ}} = \frac{٣\sqrt{٥} - ٦}{٥}$

الحـــلّ:

أ ١) جتا^{٢} هـ = جتا هـ × جتا هـ

$= \frac{\sqrt{٥}}{٣} \times \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

$= \left(\frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)^{٢}$

$= \frac{٥}{٩}$

مُساعَدة

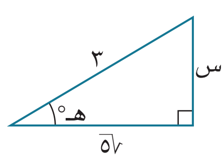
جتا^{٢} هـ = جتا هـ × جتا هـ

= (جتا هـ)^{٢}

٢) ∵ جتا هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

∴ الزاوية هـ موجودة في مثلث قائم الزاوية

كما هو موضح في الشكل المجاور



س = $\sqrt{٣^{٢} - (\sqrt{٥})^{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$ ...... استخدم نظرية فيثاغورث.

∴ جا هـ = $\frac{٢}{٣}$

٣) باستخدام المثلث، نجد أن: ظا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

ب $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{جا هـ}} = \frac{١ - \left(\frac{٢}{\sqrt{٥}}\right)^{٢}}{\frac{\sqrt{٥}}{٣} + \frac{٢}{٣}}$ ...... عوّض ثم بسّط.

$= \frac{\left(\frac{١}{٥}\right)}{\left(\frac{\sqrt{٥} + ٢}{٣}\right)}$ ...... اضرب كلًا من البسط والمقام في ١٥

$= \frac{٣}{٥(\sqrt{٥} + ٢)}$ ...... اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sqrt{٥} - ٢$ (مرافق المقام لإنطاق المقام)

$= \frac{٣(\sqrt{٥} - ٢)}{٥(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢)}$ ...... $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) = ٥ - ٤ = ١$

$= \frac{٣\sqrt{٥} - ٦}{٥}$

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

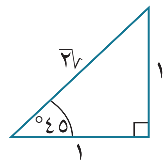
يمكننا الحصول على قيم الجيب، وجيب التمام، والظل للزوايا الخاصة ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° أو $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٣}$ من المثلثَين أدناه:

المثلث الأول:

ليكن لديك المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعَين طول كل من ضلعَيه وحدة واحدة.

نجد طول الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$\sqrt{١^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢}$$



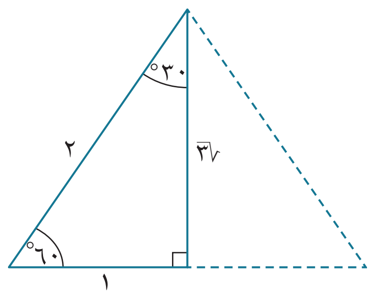
المثلث الثاني:

ليكن لديك مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه وحدتان.

العمود المنصف للقاعدة يقسم المثلث متطابق الأضلاع إلى مثلثَين قائمَي الزاوية متطابقَين.

نجد طول ارتفاع المثلث باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$\sqrt{٢^٢ - ١^٢} = \sqrt{٣}$$



نحصل من المثلثَين على النتائج المهمّة الآتية:

	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
هـ = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
هـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
هـ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$

مُساعَدة

إنطاق المقام: هو جعل المقام خاليًا من الجذور، وذلك بضرب الجذر في نفسه بسطًا ومقامًا:

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$$

مثــال ٢

أوجِد قيمة كل ما يأتي:

أ جا ٣٠° × جتا ٤٥°

ب جا² $\frac{\pi}{٣}$

ج $\dfrac{٢\text{جتا } \frac{\pi}{٤} \text{ جا } \frac{\pi}{٦}}{\text{جتا}^٢ \frac{\pi}{٣} + \text{جا}^٢ \frac{\pi}{٣}}$

مُساعَدة

عند ضرب نسبتَين مثلثيّتَين ليس ضروريًا وضع إشارة الضرب بينهما.

الحــلّ:

أ جا ٣٠° × جتا ٤٥° $= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ .... إنطاق المقام.

$= \frac{١ \times \sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

ب) $\text{جا}^{٢}\,\frac{\pi}{٣} = \text{جا}\,\frac{\pi}{٣} \times \text{جا}\,\frac{\pi}{٣}$ ← $\text{جا}^{٢}\,\frac{\pi}{٣} = \text{جا}\,\frac{\pi}{٣} \times \text{جا}\,\frac{\pi}{٣} = \left(\text{جا}\,\frac{\pi}{٣}\right)^{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{٣}{٤}$

ج) $\frac{٢\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}}{\text{جتا}^{٢}\,\frac{\pi}{٣} + \text{جا}^{٢}\,\frac{\pi}{٣}} = \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}}$ ← يُبسّط المقام إلى $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← إنطاق المقام.

$= \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

تمارين ٢-١

١) إذا علمت أن جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$، حيث هـ زاوية حادة، فأوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ) جا هـ
ب) ظا هـ
ج) ٢جا هـ جتا هـ
د) $\frac{٥}{\text{ظا هـ}}$
هـ) $\frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا هـ}}$
و) $\frac{٣ - \text{جا هـ}}{٣ + \text{جتا هـ}}$

٢) إذا علمت أن ظا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$، وأن هـ زاوية حادة، فأوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ) جا هـ
ب) جتا هـ
ج) $\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$
د) $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$
هـ) $\frac{٢}{١ + \text{جا هـ}}$
و) $\frac{٥}{١ + \text{جتا هـ}}$

٣) إذا علمت أن جا هـ = $\frac{١}{٤}$، وأن الزاوية هـ حادة، فأوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ) جتا هـ
ب) ظا هـ
ج) $١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}$
د) $\frac{\text{جا هـ} \times \text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}}$
هـ) $\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}$
و) $٥ - \frac{\text{ظا هـ}}{\text{جا هـ}}$

٤) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ) جا ٣٠° × جتا ٦٠°
ب) $\text{جا}^{٢}\,٤٥°$
ج) جا ٤٥° + جتا ٣٠°
د) $\frac{\text{جا }٦٠°}{\text{جا }٣٠°}$
هـ) $\frac{\text{جا}^{٢}\,٤٥°}{٢ + \text{ظا }٦٠°}$
و) $\frac{\text{جا}^{٢}\,٣٠° + \text{جتا}^{٢}\,٣٠°}{٢\text{جا }٤٥° \times \text{جتا }٤٥°}$

٥) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ) جا $\frac{\pi}{٤}$ × جتا $\frac{\pi}{٤}$

ب) جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

ج) ١ − ٢جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$

د) $\frac{\text{جا } \frac{\pi}{٦} - \text{ظا } \frac{\pi}{٣}}{\text{جا } \frac{\pi}{٤}}$

هـ) $\frac{١}{\text{ظا } \frac{\pi}{٤}} - \frac{١}{\text{جتا } \frac{\pi}{٣}}$

و) $\frac{\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ظا } \frac{\pi}{٦}}{\text{جا } \frac{\pi}{٣}}$

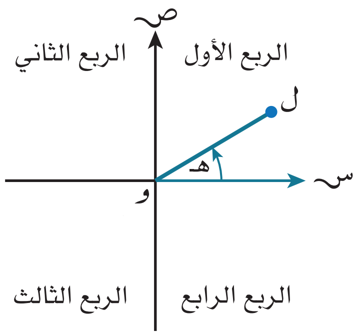
٦) انسخ الجدول أدناه، ثم أكمله، حيث ٠ ⩽ هـ ⩽ $\frac{\pi}{٢}$:

الزوايا / النسب المثلثية	هـ = ...	هـ = ...	هـ = ...
....	١	$\sqrt{٣}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جتا هـ	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	......
$\frac{١}{\text{جا هـ}}$	......	......	٢

٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية)
The principal angle (the reference angle)

نحتاج إلى استخدام النسب المثلثية الثلاث لإيجاد قياس أي زاوية، وليس لإيجاد قياس الزوايا بين ٠°، ٩٠° فقط.

تعرف الزاوية بشكل عام على أنها شكل هندسي ناتج من اتحاد شعاعين لهما نقطة البداية نفسها، وتسمى هذه النقطة رأس الزاوية، ويسمى الشعاعان ضلعَي الزاوية.



يوضح الشكل المجاور زاوية في الوضع القياسي، والتي تعرف على أنها قياس لمقدار دوران $\overline{\text{ول}}$ حول النقطة الثابتة و، حيث تقاس الزاوية بدءًا من الجزء الموجب من المحور السيني، إذ إن الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة يعطي زاوية موجبة والدوران باتجاه عقارب الساعة يعطي زاوية سالبة.

يُقسم المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع **quadrants**، ونقول إن الزاوية هـ تقع في الربع الذي تقع فيه $\overline{\text{ول}}$، ففي الشكل المجاور، تقع الزاوية هـ في الربع الأول.

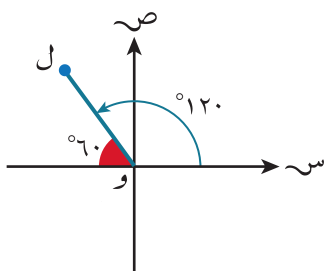
مثال ٣

ارسم شكلًا يبيّن الزاوية التي تصنعها $\overline{\text{ول}}$ مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل، ثم حدد **الزاوية الحادة** التي تشكلها $\overline{\text{ول}}$ مع المحور السيني في كل مما يأتي:

أ ١٢٠° ب ٤٣٠° ج $\frac{٣\pi}{٤}$ د $-\frac{٢\pi}{٣}$ هـ $-٢,١\pi$ و ٣٣٣°

الحــلّ:

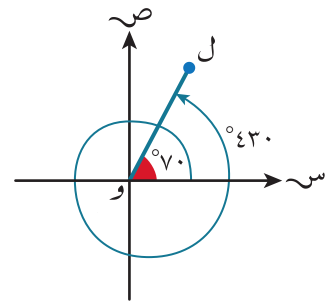
أ تمثل الزاوية ١٢٠° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و أقل من نصف دورة بمقدار ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = ٦٠°

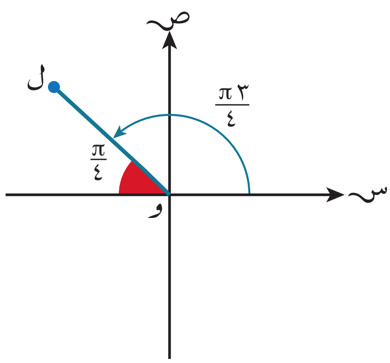
ب تمثل الزاوية ٤٣٠° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و دورة واحدة إضافة إلى ٤٣٠° − ٣٦٠° = ٧٠°

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = ٧٠°

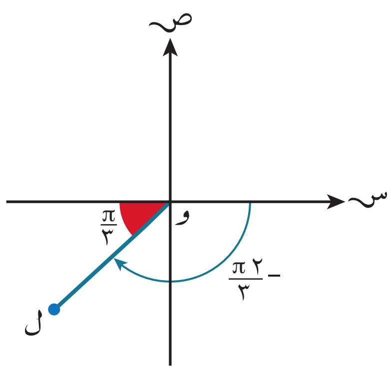
ج تمثل الزاوية $\frac{٣\pi}{٤}$ دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و أقل من نصف دورة بمقدار $\pi - \frac{٣\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = $\frac{\pi}{٤}$

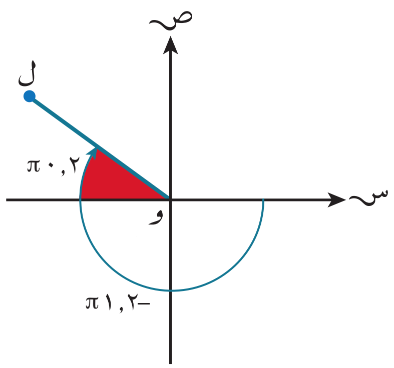
د تمثل الزاوية $-\frac{٢\pi}{٣}$ دورانًا باتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و باتجاه عقارب الساعة بمقدار $\pi - \frac{٢\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}$

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = $\frac{\pi}{٣}$

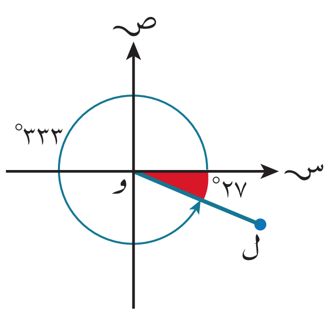
هـ تمثل الزاوية −١,٢ π دورانًا باتجاه عقارب الساعة.



حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و أكثر من نصف دورة باتجاه عقارب الساعة بمقدار ١,٢ π − π = ٠,٢ π

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = ٠,٢ π

و تمثل الزاوية ٣٣٣° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة.

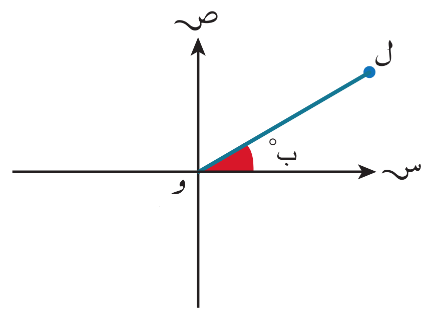
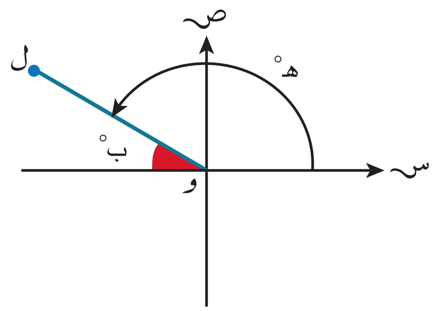
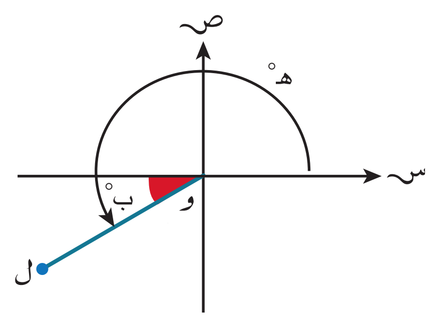
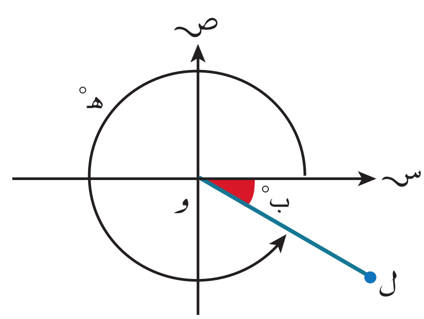


حيث دارت القطعة المستقيمة ول حول النقطة و أقل من دورة كاملة بعكس اتجاه عقارب الساعة بمقدار ٣٦٠° − ٣٣٣° = ٢٧°

∴ قياس الزاوية الحادة المحصورة مع المحور السيني = ٢٧°

تُسمى الزاوية الحادة الناتجة والمحصورة مع محور السينات **بزاوية الأساس** **principal angle** أو **الزاوية المرجعية** **reference angle**.

تبيّن الرسوم أدناه موقع وقياس الزاوية المرجعية ب° للزوايا الموجبة (دورانها عكس عقارب الساعة) في كل من الأرباع الأربعة:

الزاوية المرجعية	
الربع الأول	**الربع الثاني**
 الزاوية المرجعية = ب°	 ب° = ١٨٠° – هـ°
الربع الثالث	**الربع الرابع**
 ب° = هـ° – ١٨٠°	 ب° = ٣٦٠° – هـ°

مثـــال ٤

في كل ممّا يأتي، حُدّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ.

أوجِد قياس الزاوية هـ:

أ ب = ٤٢°، تقع في الربع الثاني، ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

ب ب = ٥٣°، تقع في الربع الثالث، ٣٦٠° ⩽ هـ ⩽ ٧٢٠°

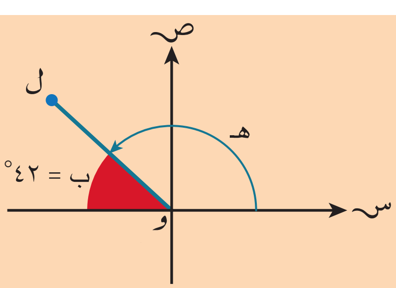
ج ب = $\frac{٢\pi}{٩}$ ، تقع في الربع الرابع، −٤π ⩽ هـ ⩽ −٢π

الحـــلّ:

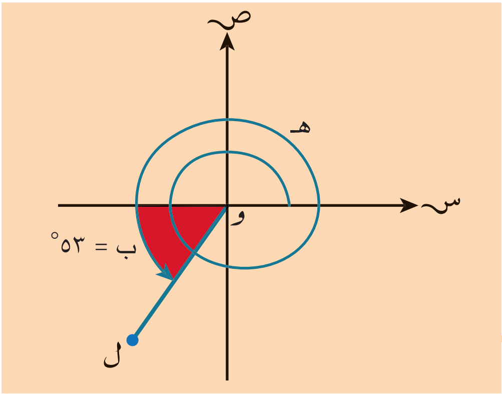
أ باستخدام الفترة المعطاة للزاوية هـ،

يُفترض بالقطعة المستقيمة ول أن تدور أكثر من ربع دورة وأقل من نصف دورة حول النقطة و .

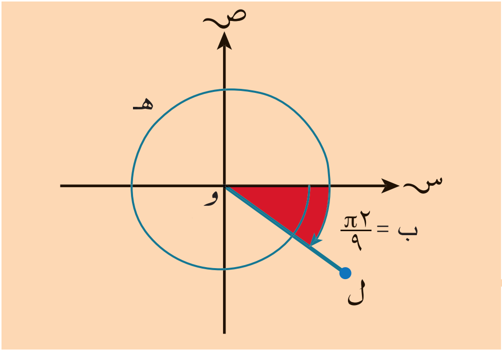
∴ هـ = ١٨٠° – ٤٢° = ١٣٨°



ب باستخدام الفترة المعطاة للزاوية هـ،
يُفترض بالقطعة المستقيمة ول أن تدور أكثر من دورة واحدة وأقل من دورتَين بعكس اتجاه عقارب الساعة حول النقطة و.
يبيّن الشكل أن القطعة المستقيمة ول دارت $1\frac{1}{2}$ دورة إضافة إلى °٥٣
هـ = $1\frac{1}{2}$ × °٣٦٠ + °٥٣ = °٥٩٣



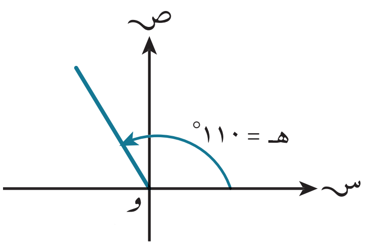
ج باستخدام الفترة المعطاة للزاوية هـ،
يُفترض بالقطعة المستقيمة ول أن تدور أكثر من دورة واحدة ولكن أقل من دورتَين باتجاه عقارب الساعة حول النقطة و.
هـ = $-2\pi - \frac{2\pi}{9} = -\frac{20\pi}{9}$



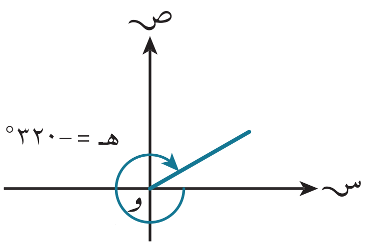
تمارين ٢-٢

١) أوجِد قياس زاوية الأساس للزاوية هـ في كل مما يأتي:

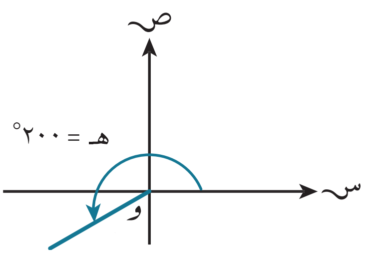
أ



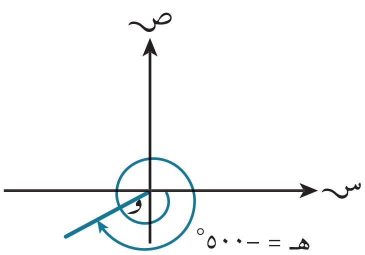
ب



ج



د



٢) ارسم شكلًا يبيّن الربع الذي تقع فيه $\overline{ول}$ عند دورانها لتشكّل كل زاوية من الزوايا أدناه. أشر بوضوح إلى اتجاه الدوران على كل شكل، وحدد الزاوية الحادة التي تشكلها $\overline{ول}$ مع المحور السيني:

- **أ** ١٠٠°
- **ب** − ١٠٠°
- **ج** ٣١٠°
- **د** − ١٥٠°
- **هـ** ٤٠٠°
- **و** $\frac{٢\pi}{٣}$
- **ز** $\frac{٧\pi}{٦}$
- **ح** $-\frac{٥\pi}{٣}$
- **ط** $\frac{١٣\pi}{٩}$
- **ي** $-\frac{١٧\pi}{٨}$

٣) في كل ممّا يأتي، حُدّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ.

أوجِد قياس الزاوية هـ:

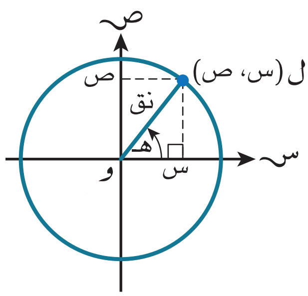
- **أ** ب = ٥٥°، تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°
- **ب** ب = ٢٠°، تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°
- **ج** ب = ٣٢°، تقع في الربع الرابع، ٣٦٠° < هـ < ٧٢٠°
- **د** ب = $\frac{\pi}{٤}$، تقع في الربع الثالث، ٠ < هـ < ٢π
- **هـ** ب = $\frac{\pi}{٣}$، تقع في الربع الثاني، ٢π < هـ < ٤π
- **و** ب = $\frac{\pi}{٦}$، تقع في الربع الرابع، −٤π < هـ < −٢π

٣-٢ النسب المثلثية للزوايا العامة
Trigonometric ratios of general angles

تعرف النسب المثلثية لأي زاوية هـ، وفي أي ربع تقع فيه الزاوية، كما يأتي:

نتيجة ١

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ ، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، حيث س ≠ ٠



في الشكل المجاور، (س، ص) إحداثيات النقطة ل، وطول $\overline{\text{ول}}$ = نق، حيث نق = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$.

ولمعرفة إشارة النسب المثلثية الثلاث في كل ربع من الأرباع، ناقش استكشف ١:

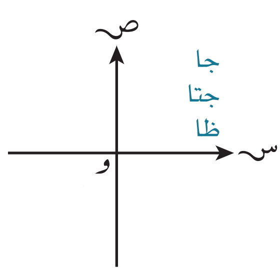
استكشف ١

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

– بالاستعانة بالشكل أعلاه، وبمعلومية إشارة كل من س، ص في كل ربع من الأرباع، وأن نصف القطر يساوي ر (حيث ر موجب دائمًا) انسخ الجدول الآتي وأكمله:

	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
الربع الأول	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{+}{+} = +$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{+}{+} = +$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{+}{+} = +$
الربع الثاني	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-}{+} = -$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} =$
الربع الثالث	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-}{-} = +$
الربع الرابع	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{-}{+} = -$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} =$

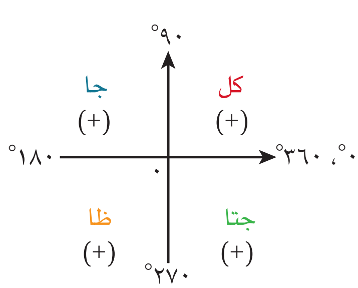
– انسخ المحورَين المجاورَين، وحدد أيّ النسب المثلثية موجبة في كل ربع من الأرباع الأربعة. إشارات النسب المثلثية في الربع الأول مبيّنة وجميعها موجبة.



مُساعَدة

يمكنك العثور على شكل ديناميكي يوضح علامات النسب المثلثية في كل ربع من الأرباع في
https://www.desmos.com/calculator/oimdvxdw1x

يبيّن الشكل المجاور النسب المثلثية الموجبة في كل ربع من الأرباع.



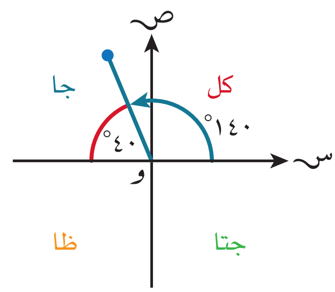
مثــال ٥

اكتب كلًا ممّا يأتي بدلالة نسب مثلثية لزاوية الأساس:

أ جا ١٤٠° **ب** جتا (−١٣٠°)

الحــلّ:

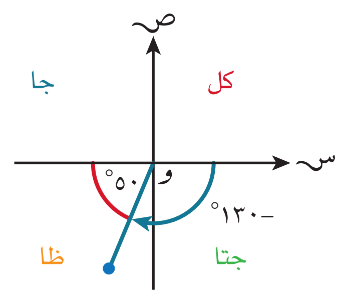
أ



قياس زاوية الأساس هو ٤٠°
إشارة جيب الزاوية الواقعة في الربع الثاني موجبة.

جا ١٤٠° = جا ٤٠°

ب



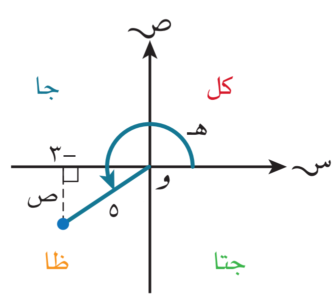
قياس زاوية الأساس هو ٥٠°
إشارة جيب تمام الزاوية الواقعة في الربع الثالث سالبة.

جتا (−١٣٠°) = −جتا ٥٠°

مثــال ٦

إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{٣}{٥}$ في الفترة ١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل من: جا هـ، ظا هـ.

الحــلّ:



تقع الزاوية هـ في الربع الثالث، فتكون إشارة جيب الزاوية سالبة وإشارة ظل الزاوية موجبة.

ص^{٢} + (٣)^{٢} = ٥^{٢}

ص^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦

ص = ± ٤

∵ جا هـ < ٠

∴ جا هـ = $\frac{-٤}{٥}$ = $-\frac{٤}{٥}$

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\frac{-٤}{٥}}{\frac{-٣}{٥}}$

∴ ظا هـ = $\frac{-٤}{-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

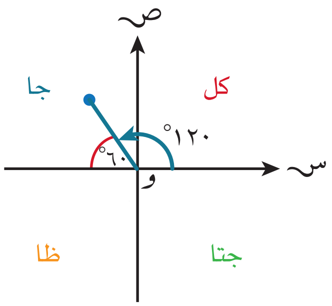
مثــال ٧

أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا ١٢٠°   ب جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

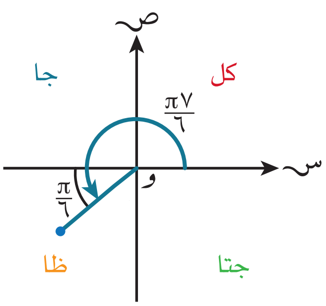
الحــلّ:

أ قياس زاوية الأساس = ١٨٠° − ١٢٠°
= ٦٠°
∴ جا ١٢٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$



تقع الزاوية ١٢٠° في الربع الثاني.
∴ جا ١٢٠° موجب.

ب قياس زاوية الأساس = $\frac{٧\pi}{٦} - \pi$
= $\frac{\pi}{٦}$
∴ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = −جتا $\frac{\pi}{٦}$ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$



تقع الزاوية $\frac{٧\pi}{٦}$ في الربع الثالث.
∴ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ سالب.

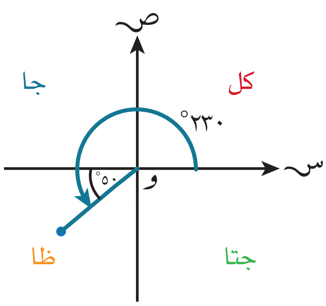
مثــال ٨

إذا علمت أن جا ٥٠° = ب، فاكتب قيمة كل ممّا يأتي بدلالة ب:

أ جا ٢٣٠°   ب جتا ٥٠°   ج ظا ٤٠°   د ظا ١٤٠°

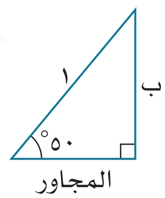
الحــلّ:

أ قياس زاوية الأساس = ٢٣٠° − ١٨٠°
= ٥٠°
∴ جا ٢٣٠° = − جا ٥٠° = − ب



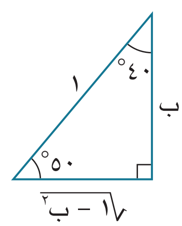
تقع الزاوية ٢٣٠° في الربع الثالث.
∴ جا ٢٣٠° سالب.

ب جتا ٥٠° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\sqrt{1 - ب^{2}}}{1}$ = $\sqrt{1 - ب^{2}}$



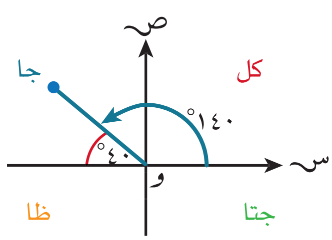
ارسم مثلثًا قائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٥٠° يساوي ب، ووتره يساوي ١ حيث جا ٥٠° = ب.
استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول الضلع المجاور بدلالة ب.
(الضلع المقابل)^{2} + (الضلع المجاور)^{2} = ١
ب^{2} + (الضلع المجاور)^{2} = ١
الضلع المجاور = $\sqrt{1 - ب^{2}}$

ج ظا ٤٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\sqrt{1 - ب^{2}}}{ب}$



بيّن الزاوية ٤٠° على المثلث القائم الزاوية نفسه.

د قياس زاوية الأساس = ١٨٠° − ١٤٠°
= ٤٠°
∴ ظا ١٤٠° = − ظا ٤٠° = − $\frac{\sqrt{1 - ب^{2}}}{ب}$



تقع الزاوية ١٤٠° في الربع الثاني.
∴ ظا ١٤٠° سالب.

تمارين ٢-٣

١) اكتب كلًا ممّا يأتي في صورة نسبة مثلثية لزاوية حادة:

أ جا ١٩٠° **ب** جتا ٣٠٥° **ج** ظا ١٢٥° **د** جتا (−٢٤٥°)

هـ جتا $\frac{4\pi}{5}$ **و** جا $\frac{9\pi}{8}$ **ز** جتا $\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$ **ح** ظا $\frac{11\pi}{9}$

٢) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا ١٢٠° **ب** ظا ٣٣٠° **ج** جا ٢٢٥° **د** ظا (−٣٠٠°)

هـ جا $\frac{4\pi}{3}$ **و** جتا $\frac{7\pi}{3}$ **ز** ظا $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **ح** جتا $\frac{10\pi}{3}$

٣) إذا علمت أن جا هـ > ٠، ظا هـ > ٠، ففي أي ربع تقع الزاوية هـ ؟

٤) إذا علمت أن جا هـ = $\frac{2}{5}$، حيث هـ زاوية منفرجة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا هـ **ب** ظا هـ

٥) إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$، حيث ١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ   **ب** ظا هـ

٦) إذا علمت أن ظا هـ = $-\frac{٥}{١٢}$، حيث ١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ   **ب** جتا هـ

٧) إذا علمت أن ظا ٢٥° = أ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي بدلالة أ:

أ ظا ٢٠٥°   **ب** جا ٢٥°   **ج** جتا ٦٥°   **د** جتا ٢٤٥°

٨) إذا علمت أن جتا ٧٧° = ب، فعبّر عن قيمة كل ممّا يأتي بدلالة ب:

أ جا ٧٧°   **ب** ظا ١٣°   **ج** جا ٢٥٧°   **د** جتا ٣٤٧°

٩) إذا علمت أن جا ا = $\frac{٥}{١٣}$، جتا ب = $-\frac{٤}{٥}$، حيث تقع الزاويتان ا، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا ا   **ب** ظا ا   **ج** جا ب   **د** ظا ب

١٠) إذا علمت أن ظا ا = $-\frac{٢}{٣}$، جتا ب = $\frac{٣}{٤}$، حيث تقع الزاويتان ا، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا ا   **ب** جتا ا   **ج** جا ب   **د** ظا ب

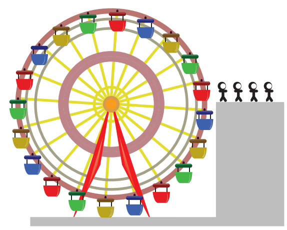
★ **١١)** انسخ الجدول أدناه، ثم أكمله، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°:

الزوايا / النسب المثلثية	هـ = ١٢٠°	هـ = ...	هـ = ٢١٠°
....	......	١−	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جا هـ	......	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$-\frac{١}{٢}$
$\frac{١}{\text{جتا هـ}}$	٢−	$-\sqrt{٢}$	......

٢-٤ التمثيلات البيانية للدوال المثلثية
Graphs of trigonometric functions

استكشف ٢

افترض أنك تركب عجلة دوّارة نصف قطرها ٥٠ م، وتدور بسرعة ثابتة.



إذا ركبت العجلة من المنصة الموجودة على مستوى مركز العجلة نفسه، ودارت العجلة دورة كاملة واحدة بعكس اتجاه عقارب الساعة:

١) باستخدام المحور الأفقي الذي تدور حوله الزاوية، ارسم التمثيلَين البيانيَين الآتيين بشكل منفصل وناقش خصائصهما.

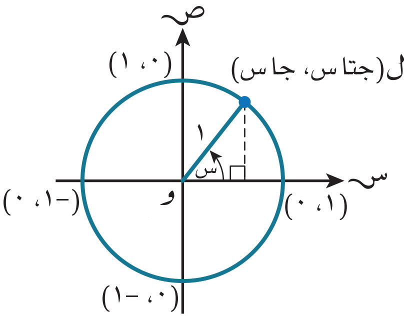
أ التمثيل البياني لزاوية دوران العربة مع الإزاحة الرأسية لحركتها.

ب التمثيل البياني لزاوية دوران العربة مع الإزاحة الأفقية لحركتها.

٢) ناقش مع زملائك في الصفّ كيف يظهر كلا التمثيلَين، إذا دارت العجلة دورتَين كاملتَين.

التمثيلان البيانيان لـ ص = جا س، ص = جتا س

افترض أن $\overline{ول}$ تشكل زاوية قياسها س مع الجزء الموجب للمحور الأفقي (س)، وأن النقطة ل تتحرك على دائرة الوحدة لتكمل دورة كاملة.



إحداثيات النقطة ل هي (جتا س، جا س).

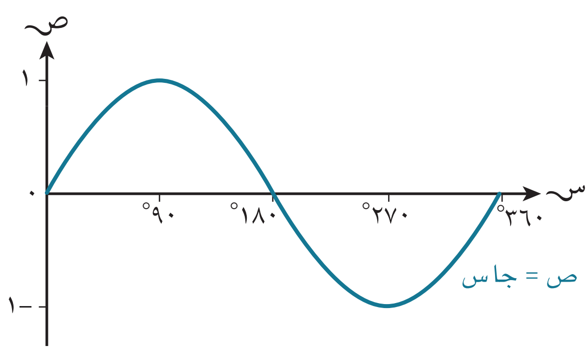
ارتفاع النقطة ل عن المحور الأفقي (س)، والذي يساوي جا س، يتغيّر من

٠ ← يزداد ١ ← يتناقص ٠ ← يتناقص -١ ← يزداد ٠

مُساعَدة

يبيّن الشكل دائرة الوحدة، وهي دائرة مركزها و (٠، ٠) ونصف قطرها ١، وتقطع دائرة الوحدة المحور السيني في النقطتين (١، ٠)، (-١، ٠) والمحور الصادي في النقطتين (٠، ١)، (٠، -١).

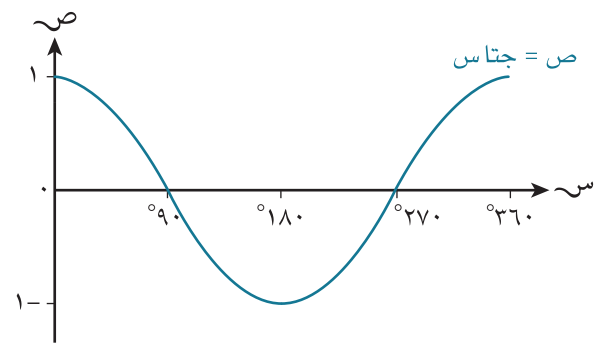
يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ جا س، حيث ٠° ≥ س ≥ ٣٦٠°:



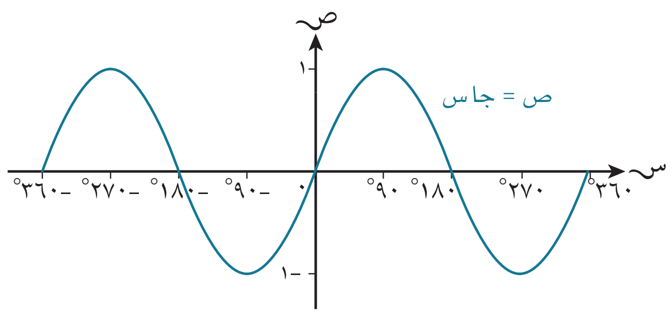
إزاحة ل عن المحور الرأسي (ص) تساوي جتا س وتتغيّر من

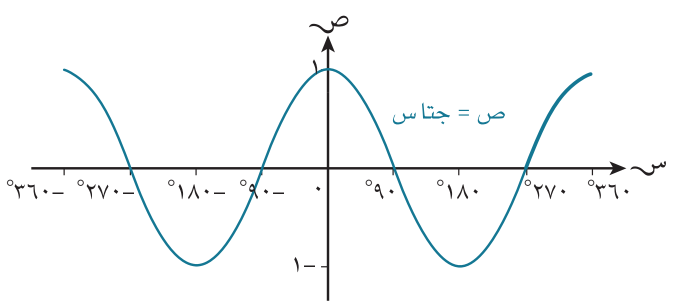
١ ← تتناقص ٠ ← تتناقص −١ ← تزداد ٠ ← تزداد ١

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ جتا س حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:



يمكن للتمثيلَين البيانيَّين لـ ص = جا س، ص = جتا س أن يستمرا لأكثر من دورة واحدة:





مجال دالتَي الجيب وجيب التمام هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع.

مدى دالتَي الجيب وجيب التمام هو −١ ⩽ ص ⩽ ١

تسمى دالّتا الجيب وجيب التمام **دالّتَين دوريتَين periodic functions** لأن كل منهما تتكرر أكثر من مرة.

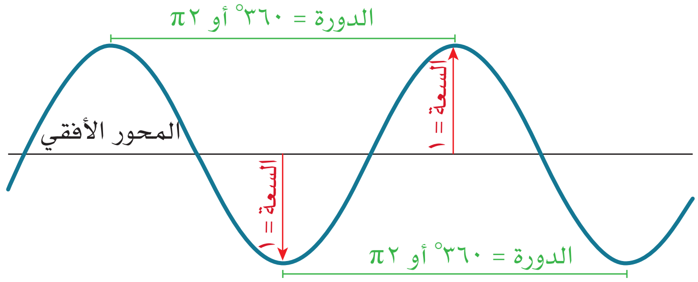
تُعرّف **دورة period** الدالة الدورية بأنها طول موجة واحدة (المسافة بين قمتين أو قاعين متتاليين).

تتكرر دالتا الجيب وجيب التمام كل ٣٦٠°

وعليه، نقول إن دورة كل منهما هي ٣٦٠° (أو ٢π).

سعة amplitude الدالة الدورية هي المسافة بين أعلى نقطة (أو أدنى نقطة)، والمحور الأفقي الذي يتوسط القيمتَين، وتعرف السعة أيضًا بأنها نصف الفرق بين القيمة العظمى، والقيمة الصغرى في دورة واحدة.

سعة كل دالة من الدالتَين ص = جا س، ص = جتا س تساوي ١



يبيّن بيان الدالة ص = جا س العلاقات المهمة الآتية:

- جا (−س) = − جا س
- جا (١٨٠° − س) = جا س
- جا (١٨٠° + س) = − جا س
- جا (٣٦٠° − س) = − جا س
- جا (٣٦٠° + س) = جا س

مُساعَدة

يمكنك الاستعانة بإشارة الجيب في الأرباع.

استكشف ٣

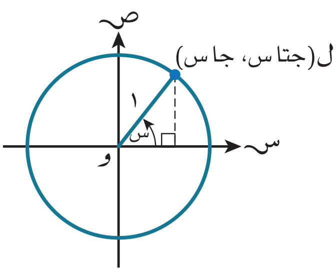
اعتمادًا على شكل التمثيل البياني لدالة جيب التمام، أكمل العبارات الآتية، واكتب إجاباتك بدلالة جتا س:

١) جتا (−س) = ...
٢) جتا (١٨٠° − س) = ...
٣) جتا (١٨٠° + س) = ...
٤) جتا (٣٦٠° − س) = ...
٥) جتا (٣٦٠° + س) = ...

التمثيل البياني لـ ص = ظا س

تلاحظ من الشكل المجاور أن:

ظل الزاوية الحادة س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$، ويمثّل ميل المستقيم $\overline{\text{و ل}}$.



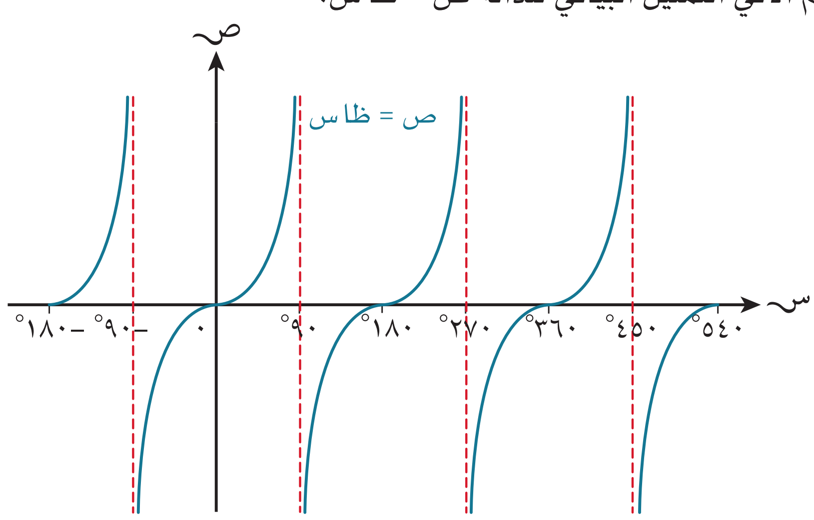
مُساعَدة

لاحظ أن ميل $\overline{\text{و ل}}$ هو ظل الزاوية التي تصنعها $\overline{\text{و ل}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

عندما تقطع النقطة ل دورة كاملة حول دائرة الوحدة بعكس اتجاه عقارب الساعة فإن ميل $\overline{\text{و ل}}$ يتغيّر بحسب الآتي:

س = ٠°	س = ٩٠°	س = ١٨٠°	س = ٢٧٠°	س = ٣٦٠°
أفقي ←	رأسي ←	أفقي ←	رأسي ←	أفقي
الميل = ٠ ←	الميل غير معرّف ←	الميل = ٠ ←	الميل غير معرّف ←	الميل = ٠

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني للدالة ص = ظا س:



مجال دالة الظل هو مجموعة الأعداد الحقيقية، باستثناء المضاعفات الفردية لـ ٩٠° والتي تعادل جميع المضاعفات الفردية لـ $\frac{\pi}{٢}$.

مدى دالة الظل هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

يختلف رسم دالة الظل كثيرًا عن رسم كل من دالتي الجيب وجيب التمام.

فدورة دالة الظل تكون كل ١٨٠° (أو π).

المستقيمات المنقطة الحمراء عند س = ±٩٠°، س = ٢٧٠°، س = ٤٥٠° هي عندما تكون قيمة ص = ظا س غير معرّفة، وتسمى هذه المستقيمات **خطوط التقارب asymptotes**، حيث تقترب أجزاء التمثيل البياني من خطوط التقارب لكن لا تقطعها أبدًا.

سعة دالة الظل غير معرّفة.

استكشف ٤

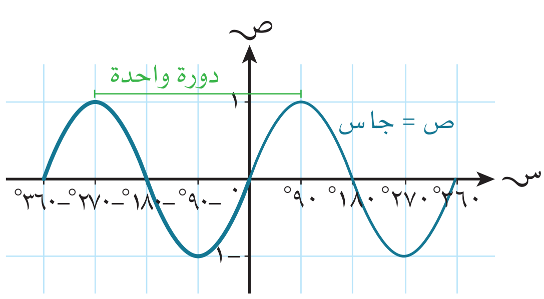
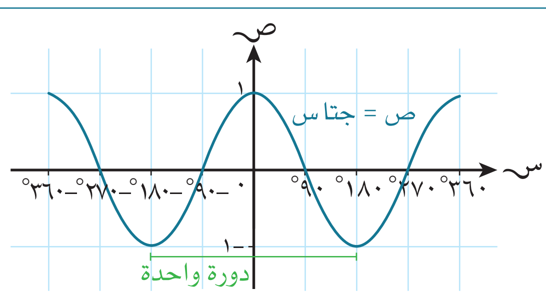
بناءً على شكل التمثيل البياني لدالة الظل، أكمل العبارات الآتية، واكتب إجابتك بدلالة ظا س.

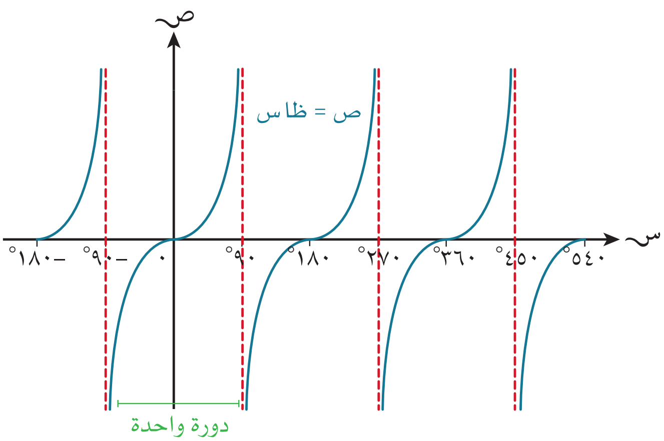
١) ظا (−س) = ...   ٢) ظا (١٨٠° − س) = ...

٣) ظا (١٨٠° + س) = ...   ٤) ظا (٣٦٠° − س) = ...

٥) ظا (٣٦٠° + س) = ...

ويلخص الجدول الآتي السعة، والدورة، والتمثيل البياني لكل من دوال الجيب وجيب التمام والظل:

الدالة	السعة	الدورة (دورة واحدة)	التمثيل البياني
د (س) = جا س	١	٣٦٠° أو ٢π	
د (س) = جتا س	١	٣٦٠° أو ٢π	

الدالة	السعة	الدورة (دورة واحدة)	التمثيل البياني
د (س) = ظا س	غير معرّفة	١٨٠° أو π	

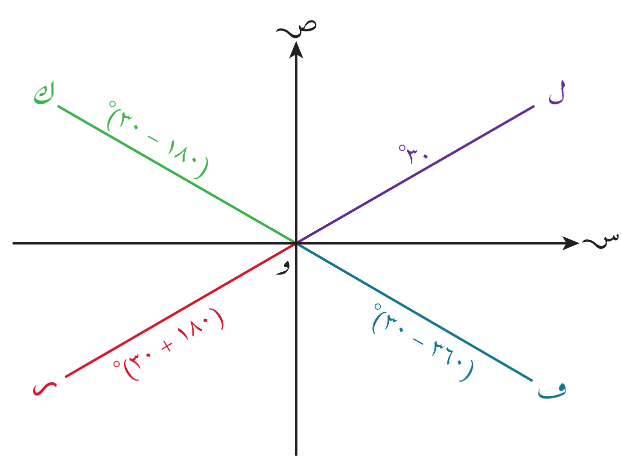
مثـــال ٩

يبيّن الشكل أدناه القطعتين المستقيمتين ل ر، ف ك وهما قطرا مستطيل المتقاطعين عند نقطة الأصل و بحيث يكون المستقيمان ك ل، ف ر، موازيَين للمحور السيني.

إذا وجدنا قياس الزاوية بعكس اتجاه عقارب الساعة المحصورة بين المحور السيني الموجب والقطعة المستقيمة المعطاة، نجد أن هذا القياس:

- مع و ل يساوي ٣٠°
- مع و ك يساوي (١٨٠ – ٣٠)°
- مع و ر يساوي (١٨٠ +٣٠)°
- مع و ف يساوي (٣٦٠ – ٣٠)°

يتم كتابة قياس كل زاوية من هذه الزوايا فوق القطعة المستقيمة:



أ استخدم الشكل لتكتب كلًا مما يأتي بدلالة جا ٣٠°:

١) جا (١٨٠ − ٣٠)°

٢) جا (١٨٠ + ٣٠)°

٣) جا (٣٦٠ − ٣٠)°

ب اكتب جتا (٣٦٠ − ٣٠)° بدلالة جتا ٣٠°

ج اكتب ظا (١٨٠ − ٣٠)° بدلالة ظا ٣٠°

الحــلّ:

أ ∵ ٣٠° تقع في الربع الأول

∴ جا ٣٠° موجبة.

١) جا (١٨٠ − ٣٠)° = جا ٣٠°

∵ (١٨٠ − ٣٠)° تقع في الربع الثاني

∴ جا (١٨٠ − ٣٠)° موجبة.

٢) جا (١٨٠ + ٣٠)° = − جا ٣٠°

∵ (١٨٠ + ٣٠)° تقع في الربع الثالث

∴ جا (١٨٠ − ٣٠)° سالبة.

٣) جا (٣٦٠ − ٣٠)° = − جا ٣٠°

∵ (٣٦٠ − ٣٠)° تقع في الربع الرابع

∴ جا (٣٦٠ − ٣٠)° سالبة.

ب جتا (٣٦٠ − ٣٠)° = جتا ٣٠°

∵ ٣٠° تقع في الربع الأول

∴ جتا ٣٠° موجبة.

∵ (٣٦٠ − ٣٠)° تقع في الربع الرابع

∴ جتا (٣٦٠ − ٣٠)° موجبة.

ج ظا (١٨٠ − ٣٠)° = − ظا ٣٠°

∵ ٣٠° تقع في الربع الأول

∴ ظا ٣٠° موجبة.

∵ (١٨٠ − ٣٠)° تقع في الربع الثاني

∴ ظا (١٨٠ − ٣٠)° سالبة.

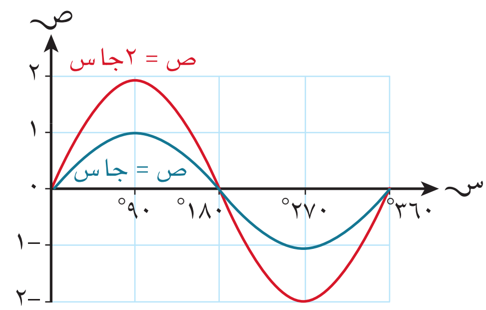
مُساعَدة

لأي زاوية س في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠° توجد قيمتان موجبتان لجيب الزاوية وقيمتان أخريان سالبتان وفق الربع الذي تقع فيه الزاوية.
فمثلًا جا س موجبة في الربعين الأول والثاني
أي أن
جا س = جا (١٨٠° − س)
وتكون جا س سالبة في الربعين الثالث والرابع
أي أن
جا (س + ١٨٠°) = جا (٣٦٠° − س). وعليه فمثلًا، عندما س = ٣٠°،
نجد أن
جا ٣٠° = جا ١٥٠° = ٠,٥
وأن
جا ٢١٠° = جا ٣٣٠° = −٠,٥
(يطبق ذلك أيضًا على جيب التمام والظل لتلك الزوايا الأربع).

التحويلات الهندسية للدوال المثلثية

تعلمت في الصف ١١، الوحدة ٢ كيف تجري بعض التحويلات الهندسية على الدالة د(س). وهذه التحويلات هي ص = أ د (س)، ص = د (أ س)، ص = د (س) + أ، ص = د (س + أ) وتركيباتها البسيطة. وسنتعلم في هذا الدرس كيف نجري هذه التحويلات على الدوال المثلثية.

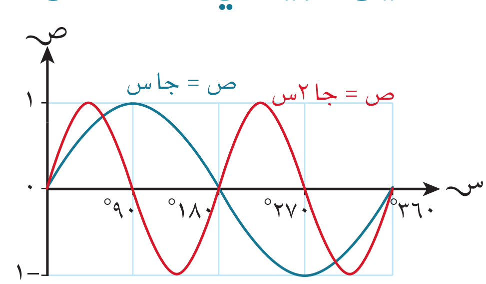
التمثيل البياني للدالة ص = أ جا س



التمثيل البياني للدالة ص = ٢جا س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س، معامله ٢ باتجاه موازٍ للمحور الصادي.

سعة الدالة ص = ٢جا س تساوي ٢، ودورتها تساوي ٣٦٠°

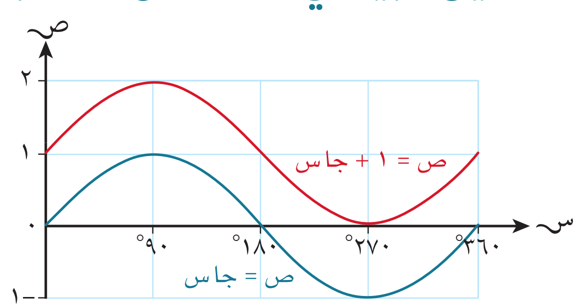
التمثيل البياني للدالة ص = جا (أ س)



التمثيل البياني للدالة ص = جا ٢س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س، معامله $\frac{١}{٢}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني.

سعة الدالة ص = جا ٢س تساوي ١، ودورتها تساوي ١٨٠°

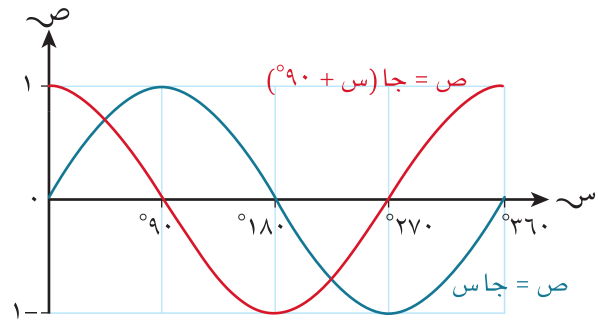
التمثيل البياني للدالة ص = أ + جا س



التمثيل البياني للدالة ص = ١ + جاس هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$.

سعة الدالة ص = ١ + جا س تساوي ١، ودورتها ٣٦٠°

التمثيل البياني للدالة ص = جا(س + جـ°)



التمثيل البياني للدالة ص = جا (س + ٩٠°) هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه $\binom{-٩٠°}{٠}$.

سعة الدالة ص = جا (س + ٩٠°) تساوي ١، ودورتها ٣٦٠°

ملاحظة: تنطبق جميع التحويلات الهندسية الخاصة بدالة الجيب على دالة جيب التمام.

تُلخص التحويلات الهندسية للتمثيلات البيانية للدوال ص = جاس، ص = جتاس،

ص = جا س
ص = جتا س
ص = ظا س

- تمدد معامله أ باتجاه موازٍ للمحور الصادي ←
  ص = أ جا س
  ص = أ جتا س
  ص = أ ظا س
- تمدد معامله $\frac{١}{أ}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني ←
  ص = جا أس
  ص = جتا أس
  ص = ظا أس
- انسحاب بالمتجه $\binom{٠}{أ}$ ←
  ص = أ + جا س
  ص = أ + جتا س
  ص = أ + ظا س
- انسحاب بالمتجه $\binom{-جـ°}{٠}$ ←
  ص = جا (س + جـ°)
  ص = جتا (س + جـ°)
  ص = ظا (س + جـ°)

ملاحظات هامة:

- التمدد الموازي للمحور الرأسي يؤثر على سعة دالة الجيب، ودالة جيب التمام فقط.
- التمدد الموازي للمحور الأفقي يؤثر على دورة دالة الجيب، ودالة جيب التمام، ودالة الظل.
- لا يؤثر الانسحاب على السعة أو الدورة لأيّ من هذه الدوال المثلثيّة.
- نعرف في الدالتين الدوريتين ص = أ جا ب(س + جـ°) + ك، ص = أ جتا ب(س + جـ°) + ك أن:

١) السعة = |أ|

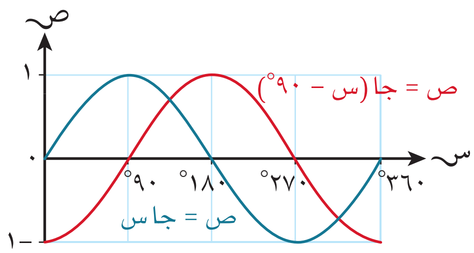
٢) الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

٣) المدى هو: −أ + ك ⩽ ص ⩽ أ + ك، حيث −أ + ك هي أقل قيمة (القيمة الصغرى)، أ + ك هي أعلى قيمة (القيمة العظمى).

نجد من الجزئية (٣) أن السعة = $\frac{\text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة}}{٢} = \frac{\text{أ} + \text{ك} - (-\text{أ} + \text{ك})}{٢} = \text{أ}$

مثـــال ١٠

على المستوى الإحداثي نفسه، ارسم التمثيل البياني للدوال ص = جا س، ص = جا (س − ٩٠°)،
حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°



الحـــلّ:

التمثيل البياني للدالة ص = جا (س − ٩٠°)

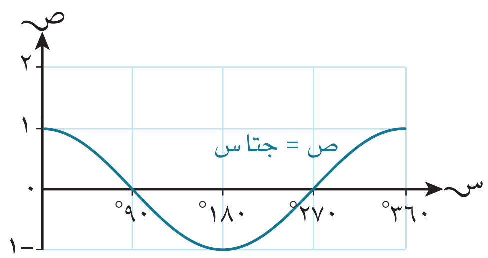
هو انسحاب للدالة ص= جا س بالمتجه $\begin{pmatrix} ٩٠° \\ ٠ \end{pmatrix}$.

لترسم بيان الدالة المثلثية ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)،
حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°، اتبع الخطوات الآتية للتحويل الهندسي:

الخطوة الأولى: ارسم بيان الدالة ص = جتا س، حيث:

الدورة = ٣٦٠°

السعة = ١

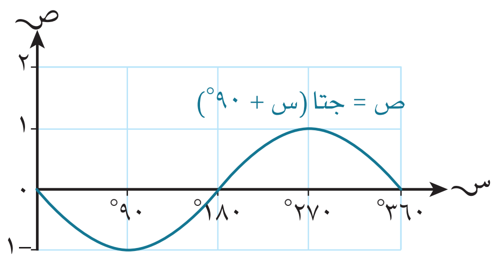


الخطوة الثانية: ارسم بيان الدالة ص = جتا (س + ٩٠°)،

أجرِ انسحابًا لبيان الدالة ص = جتا س بالمتجه $\begin{pmatrix} -٩٠° \\ ٠ \end{pmatrix}$

الدورة = ٣٦٠°

السعة = ١

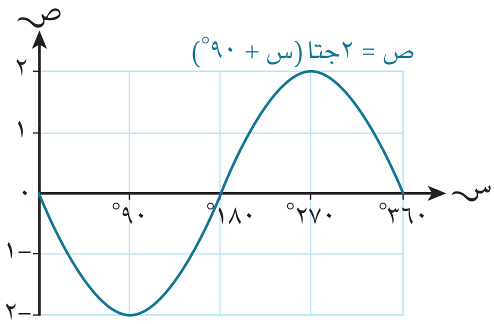


الخطوة الثالثة: ارسم بيان الدالة ص = ٢جتا (س + ٩٠°)،

أجرِ تمدّدًا لبيان الدالة ص = جتا (س + ٩٠°) معامله ٢
وباتجاه موازٍ للمحور الصادي.

الدورة = ٣٦٠°

السعة = ٢



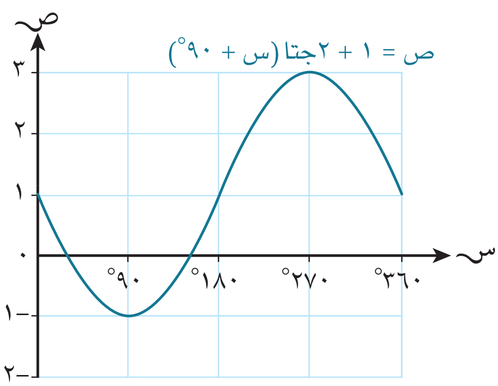
الخطوة الرابعة: ارسم بيان الدالة ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)،

أجرِ انسحابًا على بيان الدالة ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)

بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

الدورة = ٣٦٠°

السعة = ٢



مثـــال ١١

إذا كانت د (س) = ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

أ أوجِد دورة، وسعة الدالة د (س).

ب اكتب إحداثيات أعلى وأدنى نقاط للدالة ص = د (س).

ج ارسم بيان الدالة ص = د (س).

د استخدم إجابتك للجزئية (ج) لترسم بيان الدالة د (س) = ١ + ٣جتا (٢س).

الحـلّ:

أ الدورة = $\frac{٣٦٠°}{٢}$ = ١٨٠°

السعة = ٣

ب أعلى نقاط للدالة د (س) = ٣جتا(٢س) هي:

(٠°، ٣)، (١٨٠°، ٣)، (٣٦٠°، ٣)

وأدنى النقاط لهذه الدالة هي:

(٩٠°، −٣)، (٢٧٠°، −٣)

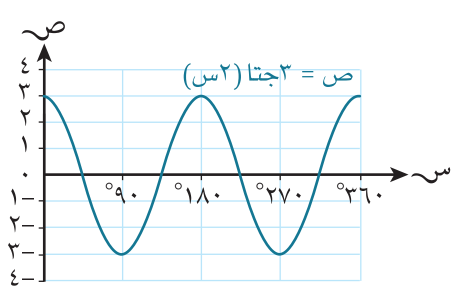
إحداثيات أعلى وأدنى نقاط للدالة ص = جتا س هي:

(٠°، ١)، (١٨٠°، −١)، (٣٦٠°، ١)، (٥٤٠°، −١)، (٧٢٠°، ١)

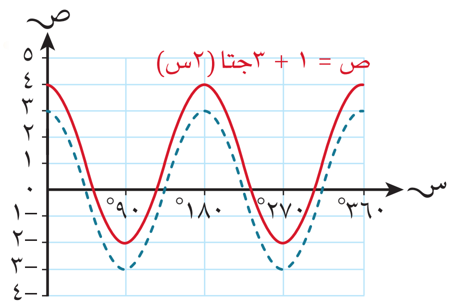
يتم تحويل الدالة ص = جتاس إلى الدالة د(س) = ٣جتا(٢س) بإجراء تمدد معامله $\frac{١}{٢}$ موازٍ للمحور السيني، وتمدد معامله ٣ موازٍ للمحور الصادي.

لإيجاد إحداثيات أعلى وأدنى نقاط للدالة ص = ٣جتا(٢س) نضرب الزوايا في الإحداثيات أعلاه بـ $\frac{١}{٢}$ ونضرب الإحداثي الصادي في ٣

ج



د



التمثيل البياني للدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) هو انسحاب لبيان الدالة ص = ٣جتا (٢س) بالمتجه $\binom{٠}{١}$

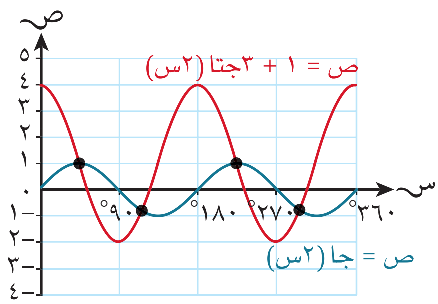
مثــال ١٢

أ في المستوى الإحداثي نفسه، مثّل بيانيًا الدالتَين ص = جا (٢س)، ص = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ب حدد عدد حلول المعادلة جا (٢س) = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

الحــلّ:

أ بيان الدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) تم تمثيله في المثال السابق. نرسم بيان الدالة ص = جا (٢س) بإجراء تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله $\frac{١}{٢}$ وموازٍ للمحور السيني.



ب يتقاطع بيان الدالة ص = جا (٢س) مع بيان الدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) في أربع نقاط في الفترة المعطاة.

∴ توجد أربعة حلول للمعادلة جا (٢س) = ١ + ٣جتا (٢س) .

تمارين ٢-٤

١) اكتب دورة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جتا س   **ب** ص = جا (٢س)   **ج** ص = ٣ظا ($\frac{١}{٢}$س)

د ص = ١ + ٢جا (٣س)   **هـ** ص = ظا (س − ٣٠°)   **و** ص = ٥جتا (٢س + ٤٥°)

٢) اكتب سعة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جا س   **ب** ص = ٥جتا (٢س)   **ج** ص = ٧جا ($\frac{١}{٢}$س)

د ص = ٢ − ٣جتا (٤س)   **هـ** ص = ٤جا (٢س + ٦٠°)   **و** ص = ٥ + ٢جا (٣س + ١٠°)

٣) مثّل بيانيًا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

أ ص = ٢جتا س   **ب** ص = جا ($\frac{١}{٢}$س)   **ج** ص = ظا (٣س)

د ص = ٣جتا (٢س)   **هـ** ص = ١ + ٣جتا س   **و** ص = −١ + ٢جا (٣س)

ز ص = جا (س − ٤٥°)   **ح** ص = ٢جتا (س + ٦٠°)   **ط** ص = ظا (س − ٩٠°)

٤) **أ** مثِّل بيانيًا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٢π

١) ص = ٢جا س ٢) ص = جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)$ ٣) ص = جا $\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$

ب اكتب إحداثيات أعلى وأدنى النقاط للتمثيل البياني للجزئية (أ (٣)).

٥) **أ** ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالتَين ص = جا (٢س)، ص = ١ + جتا (٢س) في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ب حدد عدد حلول المعادلة جا (٢س) = ١ + جتا (٢س) في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

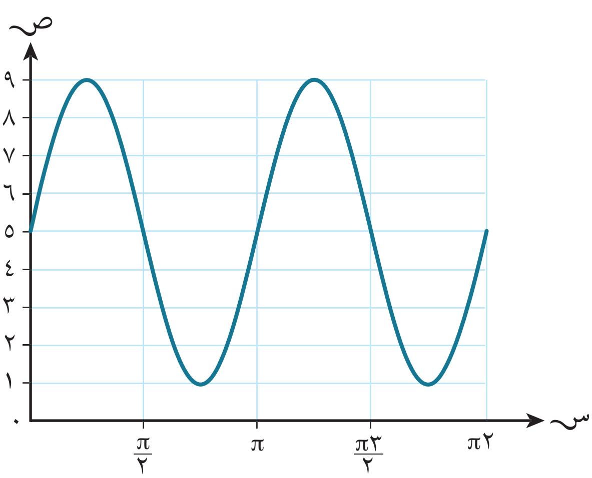
٦) **أ** ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالة ص = ٢جا س، وبيان الدالة ص = ٢ + جتا ٣س في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

ب حدد عدد حلول المعادلة ٢جا س = ٢ + جتا (٣س) في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

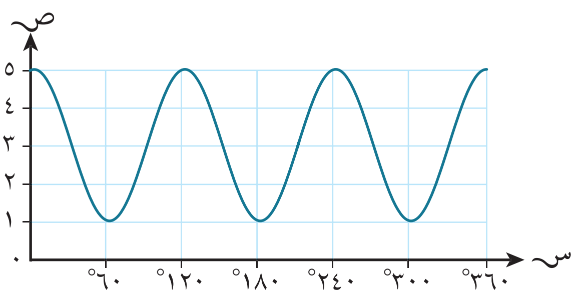
٧) **أ** ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالتَين ص = ٣جا س، ص = جتا (٢س) في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

ب حدد عدد حلول المعادلة ٣جا س = جتا (٢س) في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

٨) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة
ص = جـ + أ جا (ب س).
أوجِد قيم أ، ب، جـ.



٩) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة
ص = أ + ب جتا (جـ س).
أوجِد قيم أ، ب، جـ.



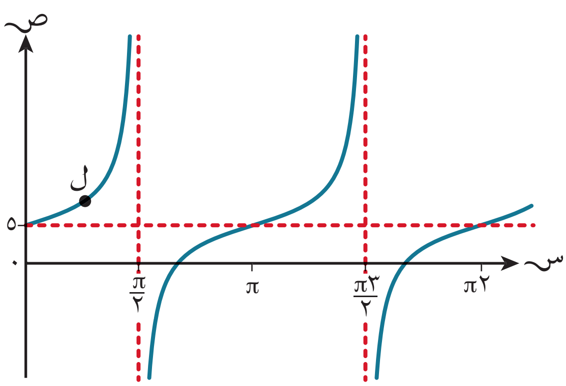
١٠) أ ارسم بيان الدالة ص = ٢جا س في الفترة $-\pi \leqslant$ س $\leqslant \pi$

ب إذا كان المستقيم ص = ك س، حيث ك ثابت، ويقطع بيان الدالة عند نقطة القيمة العظمى، فأوجِد:

١) قيمة ك بدلالة π

٢) حدّد إحداثيات النقاط الأخرى التي يتقاطع عندها المستقيم مع بيان الدالة.

١١) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة
ص = جـ + أ ظا (ب س)،
الذي يمر بالنقطة ل $\left(\frac{\pi}{٤}، ٨\right)$.
أوجِد قيم أ، ب، جـ.



١٢) إذا علمت أن د (س) = أ + ب جا س في الفترة ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢π،
د (٠) = ٣، د $\left(\frac{٧\pi}{٦}\right)$ = ٢، فأوجِد:

أ قيمة كل من أ، ب.

ب مدى الدالة د (س).

١٣) د (س) = أ − ب جتا س في الفترة ٠° $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣٦٠°، أ، ب عددان ثابتان موجبان.
القيمة العظمى للدالة د(س) هي ٨، والقيمة الصغرى هي −٢

أ أوجِد قيمة كل من أ، ب.

ب ارسم بيان الدالة ص = د(س).

١٤) د (س) = أ + ب جا (جـ س) في الفترة ٠° $\leqslant$ س $\leqslant$ ٣٦٠°، أ، ب عددان ثابتان موجبان.
القيمة العظمى للدالة د (س) هي ٩، والقيمة الصغرى هي ١، ودورتها هي ١٢٠°
أوجِد قيم أ، ب، جـ.

١٥) د (س) = أ + ٥ جتا (ب س) في الفترة ٠° $\leqslant$ س $\leqslant$ ١٢٠°
القيمة العظمى للدالة د (س) هي ٧، ودورتها هي ٦٠°

أ اكتب قيمة كل من أ، ب.

ب اكتب سعة الدالة د (س).

ج ارسم بيان الدالة د (س).

★ **١٦)** إذا أُجري انعكاس لبيان الدالة ص = جا س حول المستقيم س = π، ثم حول المستقيم ص = ١، فأوجِد معادلة الدالة الناتجة.

★ **١٧)** إذا أُجري انعكاس لبيان الدالة ص = جتا س حول المستقيم س = $\frac{\pi}{٢}$، ثم حول المستقيم ص = ٣، فأوجِد معادلة الدالة الناتجة.

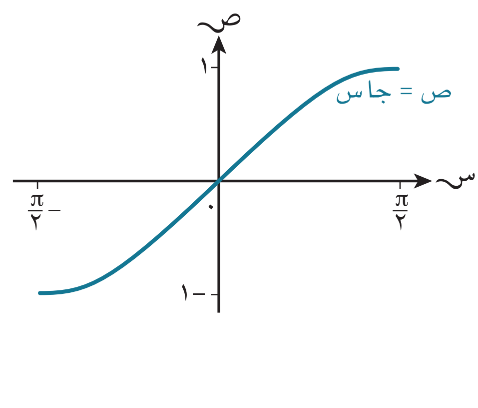
٥-٢ الدوال المثلثيّة العكسية Inverse trigonometric functions

تعلمت في الصف ١١، الوحدة ٢ الدالة العكسية. وستتعلم في هذا الدرس الحالة الخاصة **للدوال المثلثيّة العكسية Inverse trigonometric functions**. الدوال ص = جا س، ص = جتا س، ص = ظا س هي دوال متعدد إلى واحد. إذا حددنا فترة من مجال كل منها، فيمكننا أن نجعل الدالة واحدًا إلى واحد، الأمر الذي يُمكّننا من تعريف دالتها العكسية.

فيما يأتي التمثيلات البيانية للدوال المحدد مجالها ومداها: ص = جا س، ص = جتا س، ص = ظا س والدوال العكسية لها هي ص = جا$^{-1}$ س، ص = جتا$^{-1}$ س، ص = ظا $^{-1}$ س مع مجالها ومداها:

مُساعَدة

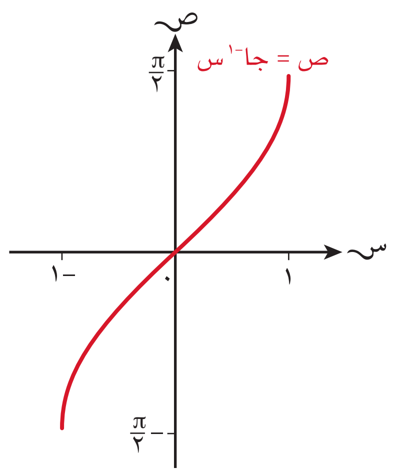
الدوال واحد إلى واحد فقط لها دوال عكسية. فإذا كانت د (س)، د$^{-1}$(س) دالتَين عكسيتَين، فإن التمثيل البياني للدالة د$^{-1}$(س) هو انعكاس للدالة د (س) حول المستقيم ص = س.



ص = جا س

المجال: −$\frac{\pi}{2}$ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{2}$

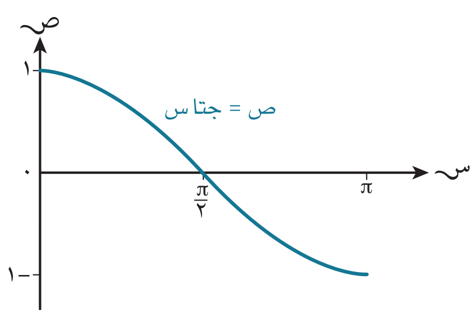
المدى: −١ ≤ جا س ≤ ١



ص = جا$^{-1}$ س

المجال: −١ ≤ س ≤ ١

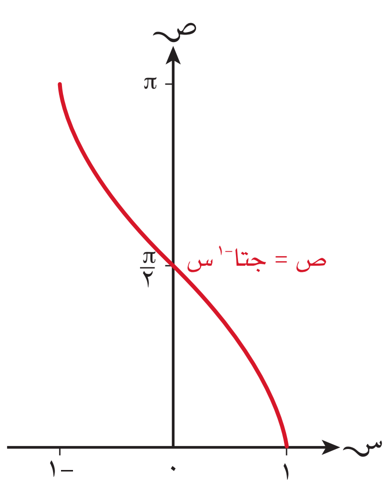
المدى: −$\frac{\pi}{2}$ ≤ جا$^{-1}$ س ≤ $\frac{\pi}{2}$



ص = جتا س

المجال: ٠ ≤ س ≤ π

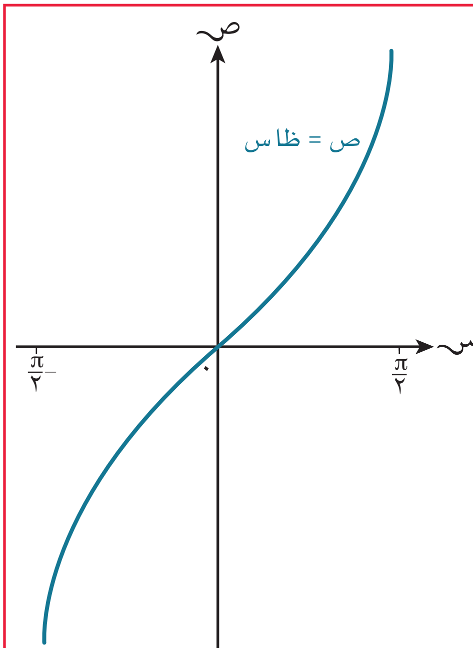
المدى: −١ ≤ جتا س ≤ ١



ص = جتا$^{-1}$ س

المجال: −١ ≤ س ≤ ١

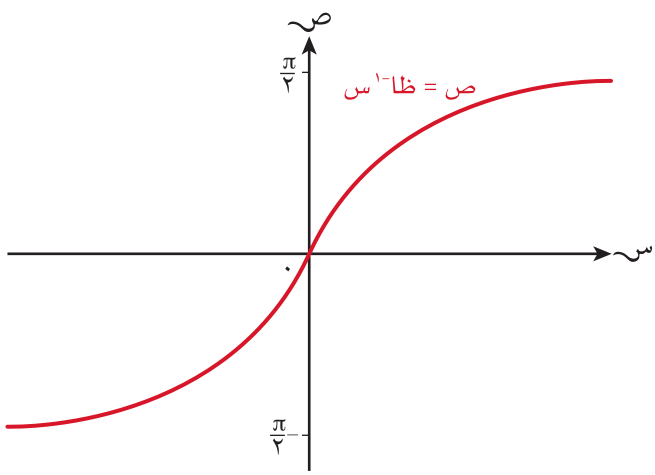
المدى: ٠ ≤ جتا$^{-1}$ س ≤ π



ص = ظا س

المجال: $-\frac{\pi}{٢} <$ س $< \frac{\pi}{٢}$

المدى: ظا س $\in$ ع



ص = ظا$^{-١}$ س

المجال: س $\in$ ع

المدى: $-\frac{\pi}{٢} <$ ظا$^{-١}$ س $< \frac{\pi}{٢}$

عند حل المعادلة جا س= ٠,٥، حيث ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$، يمكننا أن نجد حلًا وحيدًا باستخدام الدالة العكسية:

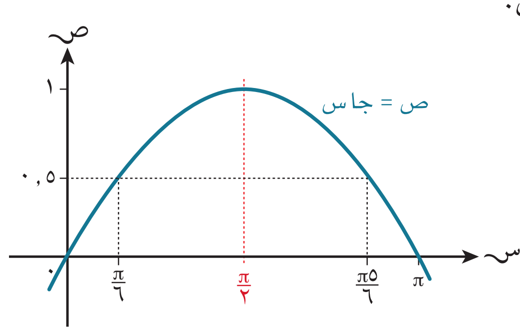
س = جا$^{-١}$ ٠,٥

استخدم الحاسبة لتجد أن س = $\frac{\pi}{٦}$

الزاوية التي تظهر على الحاسبة هي التي تقع في مجال الدالة العكسية جا$^{-١}$(س).

زاوية الأساس principal angle: هي الزاوية التي تقع في مدى الدالة المثلثية العكسية.

توجد زاوية ثانية وهي س = $\frac{٥\pi}{٦}$، والتي تحقق المعادلة جا س = ٠,٥ حيث ٠ $\leqslant$ س $\leqslant \pi$.
نجد هذه الزاوية الثانية إما باستخدام المهارات التي تعلمناها سابقًا أو باستخدام تماثل بيان الدالة ص = جا س.



الزاوية الثانية هي: $\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$

مثال ١٣

أوجد بالدرجات قيمة كلّ مما يأتي:

أ جا$^{-1}$(٠) في المجال −٩٠° ⩽ جا$^{-1}$ (٠) ⩽ ٩٠°

ب جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في المجال ٠° ⩽ جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⩽ ١٨٠°

ج ظا$^{-1}$ (−١) في المجال −٩٠° ⩽ ظا$^{-1}$ (−١) ⩽ ٩٠°

الحـلّ:

أ جا(٠) = ٠، ∴ جا$^{-1}$(٠) = ٠°

جا$^{-1}$(٠) هي الزاوية في الفترة المعطاة التي جيبها = ٠

ب جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$، ∴ جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ = ٣٠°

جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هي الزاوية في الفترة المعطاة التي جيب تمامها = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج ظا (−٤٥°) = −١، ∴ ظا$^{-1}$ (−١) = −٤٥°

ظا$^{-1}$ (−١) هي الزاوية في الفترة المعطاة التي ظلها = −١

مثال ١٤

إذا علمت أن الدالة د (س) = −١ + ٣جا $\left(\frac{س}{2}\right)$ معرّفة في الفترة −π ⩽ س ⩽ π:

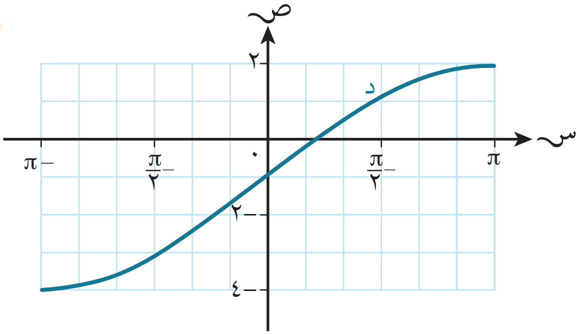
أ ارسم بيان الدالة ص = د (س)، وفسر سبب وجود دالة عكسية للدالة د (س).

ب أوجِد مدى الدالة د (س).

ج أوجِد د$^{-1}$ (س)، وحدد مجالها.

الحـلّ:

أ



نحصل على بيان الدالة د(س) بإجراء التحويلات الهندسية على بيان الدالة ص = جا س، وهي تمدد معامله ٢ موازٍ للمحور السيني، يتبعه تمدد معامله ٣ موازٍ للمحور الصادي، ثم انسحاب بالمتجه $\binom{0}{-1}$.

توجد للدالة دالة عكسية لأنها دالة واحد إلى واحد في المجال المعطى.

ب مدى الدالة د (س) هو $-٤ \leqslant$ د(س) $\leqslant ٢$

نلاحظ من بيان الدالة أن أصغر قيمة لـ ص هي -٤ وأكبر قيمة هي ٢

ج د (س) = -١ + ٣ جا $\left(\frac{س}{٢}\right)$

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ⟵ ص = -١ + ٣جا $\left(\frac{س}{٢}\right)$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيرَين س، ص ⟵ س = -١ + ٣جا $\left(\frac{ص}{٢}\right)$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ⟵ $\frac{س + ١}{٣}$ = جا $\left(\frac{ص}{٢}\right)$

$\frac{ص}{٢}$ = جا$^{-١}\left(\frac{س + ١}{٣}\right)$

ص = ٢جا$^{-١}\left(\frac{س + ١}{٣}\right)$

الدالة العكسيّة هي: د$^{-١}$(س) = ٢جا$^{-١}\left(\frac{س + ١}{٣}\right)$، ومجالها $-٤ \leqslant$ س $\leqslant ٢$

مُساعَدة

جا$^{-١}$(جا س) = س

مُساعَدة

مدى الدالة د (س) هو مجال الدالة د$^{-١}$(س)

تمارين ٢-٥

١) اكتب قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات:

أ جتا$^{-١}$ ١   **ب** جا$^{-١}\left(\frac{١}{٢}\right)$ **ج** ظا$^{-١}$ $\sqrt{٣}$

د جا$^{-١}$(−١)   **هـ** ظا$^{-١}$(−$\sqrt{٣}$)   **و** جتا$^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

٢) اكتب قيمة كل ممّا يأتي بدلالة π:

أ جا$^{-١}$(٠)   **ب** ظا$^{-١}$(١)   **ج** جتا$^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

د ظا$^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ **هـ** جتا$^{-١}\left(-\frac{١}{٢}\right)$ **و** جا$^{-١}\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

٣) إذا علمت أن هـ = جتا$^{-١}\left(\frac{٣}{٥}\right)$، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا^{٢} هـ   **ب** ظا^{٢} هـ

٤) إذا علمت أن الدالة د (س) = -٤ + ٣جا س معرّفة على المجال $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{٢}$، فأوجِد:

أ مدى الدالة د (س).   **ب** د$^{-١}$(س).

٥) الدالة د (س) = ٤ − ٢جتا س معرّفة على المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ π:

أ أوجِد مدى الدالة د (س)، وارسم بيان الدالة ص = د (س).

ب فسّر سبب وجود دالة عكسية للدالة د (س)، وأوجِد $د^{-١}$(س).

ج ارسم بيان الدالة ص = $د^{-١}$ (س) في المستوى الإحداثي نفسه للدالة في الجزئية (أ).

٦) الدالة د (س) = ٥ − ٢جا س معرّفة على المجال $\frac{\pi}{٢}$ $\leqslant$ س $\leqslant$ ر:

أ أوجِد أكبر قيمة لـِ ر بحيث تكون للدالة د (س) دالة عكسية.

ب عند قيمة ر في الجزئية (أ)، أوجِد $د^{-١}$(س)، ثم حدد مجالها.

٧) إذا علمت أن الدالة د (س) = −٥ + ٤جتا$\left(\frac{س}{٢}\right)$ معرّفة على المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢π، فأوجِد:

أ مدى الدالة د (س).

ب $د^{-١}$(س)، وحدد مداها.

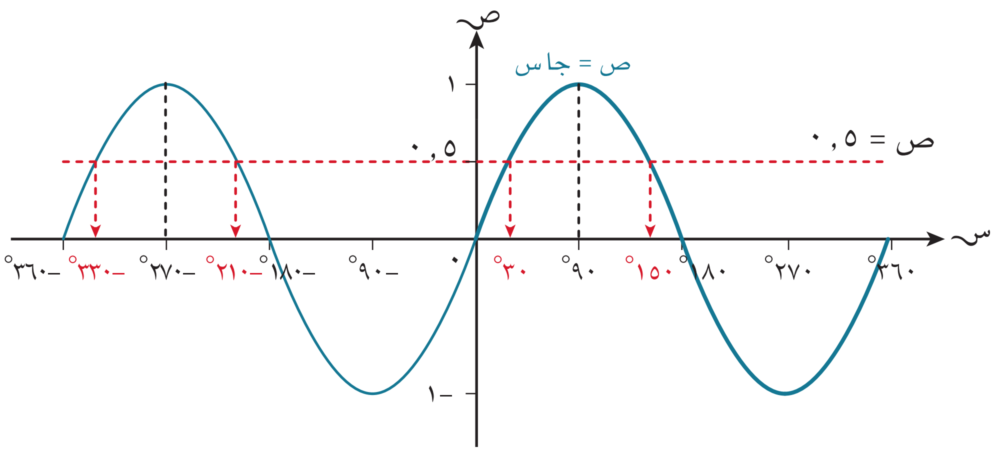
٢-٦ المعادلات المثلثية Trigonometric equations

عند حل المعادلة جا س = ٠,٥ في الفترة –٣٦٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ستجد أن أحد الحلول هو: س = جا$^{-1}$(٠,٥) = $\frac{\pi}{٦}$ أو ٣٠°،

ولكن توجد قيم أخرى لـ س تحقق المعادلة في الفترة المعطاة،

يمكنك إيجادها من التمثيل البياني للدالة ص = جا س:



يبيّن التمثيل البياني أربع قيم لـ س بين –٣٦٠° و ٣٦٠° تحقق المعادلة جا س = ٠,٥

يمكن أن نستخدم قيمة س = ٣٠ ° مع خصائص التماثل لبيان الدالة (في الفترات الجزئية) كما هو موضح في الشكل السابق، لنجد الإجابات الأخرى، وهي: –٣٦٠° + ٣٠°، –١٨٠° – ٣٠°، ١٨٠° – ٣٠°

وعليه تكون حلول المعادلة جا س = ٠,٥، حيث –٣٦٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠° هي:

–٣٣٠°، –٢١٠°، ٣٠°، ١٥٠°

ويمكن التوصل إلى الحلول السابقة للمعادلة من خلال خصائص التماثل باستخدام الزوايا –٢٧٠°، ٩٠° مع س = ٦٠°: –٢٧٠° – ٦٠°، –٢٧٠° + ٦٠°، ٩٠° + ٦٠°، ٩٠° – ٦٠°

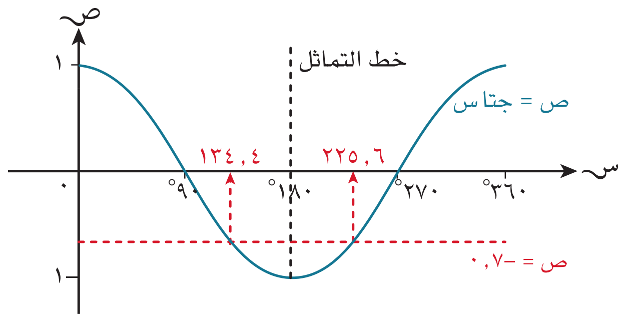
مثــال ١٥

حل المعادلة جتا س = −٠,٧ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

الحــلّ:

جتا س = −٠,٧ — استخدم الآلة الحاسبة لتجد جتا⁻¹(−٠,٧) (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

أحد الحلول هو ١٣٤,٤°



يبيّن التمثيل البياني أن هناك قيمتَين لـ س بين ٠° و ٣٦٠° تحقق المعادلة جتا س = −٠,٧

نستخدم خصائص التماثل لإيجاد القيمة الثانية كالآتي: (١٨٠° + ٤٥,٦°) = ٢٢٥,٦°

كما يمكنك إيجادها من خلال (٣٦٠° − ١٣٤,٤°) = ٢٢٥,٦°

وعليه يكون حل المعادلة جتا س = −٠,٧ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° هو:

س = ١٣٤,٤° أو ٢٢٥,٦° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

طريقة بديلة:

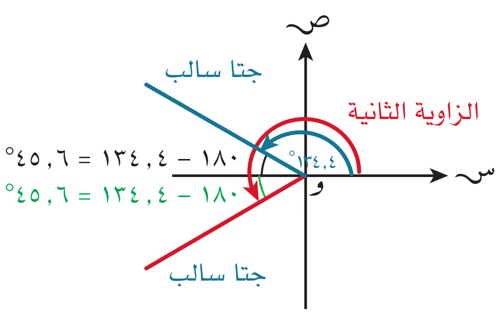
∵ جتا س = −٠,٧

∴ أحد الحلول هو ١٣٤,٤°

وتقع هذه الزاوية في الربع الثاني

لإيجاد قياس 'الزاوية' الثانية والتي تقع في الربع الثالث نتبع الآتي:

١٨٠° + (١٨٠° − ١٣٤,٤°) = ٢٢٥,٦°



وعليه يكون حل المعادلة جتا س = −٠,٧ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° هو:

س = ١٣٤,٤° أو ٢٢٥,٦° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

مُساعَدة

القيمة ٤٥,٦° تم الحصول عليها من: ١٨٠° − ١٣٤,٤° وذلك لأن ١٨٠° هو خط التماثل.

فترات الزاوية

لحل معادلة ما، يمكنك استخدام التعويض.

مثال على ذلك: لحل المعادلة جا ٢أ = ٠,٣، يمكنك أن تستخدم التعويض بافتراض أن س = ٢أ، ثم حل المعادلة جا س = ٠,٣

لإيجاد قيمة أ، نقسم س على ٢ لأن أ = $\frac{س}{٢}$

إذا كان المطلوب حلول أ في الفترة −٩٠° ≤ أ ≤ ١٨٠°، يجب عليك إيجاد حلول س في الفترة −١٨٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

تبيّن الخطوات الآتية كيفية إيجاد الفترة الصحيحة لقيم س:

−٩٠° ⩽ أ ⩽ ١٨٠°	عوّض عن أ بـ $\frac{\text{س}}{٢}$
−٩٠° ⩽ $\frac{\text{س}}{٢}$ ⩽ ١٨٠°	اضرب أطراف المتباينة في ٢
−١٨٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°	احصل على فترة س

مثال آخر: لتحل المعادلة جتا (٢أ + ١) = ٠,٨، يمكنك أن تستخدم التعويض بافتراض أن ص = ٢أ + ١، ثم تحل المعادلة جتا ص = ٠,٨

لإيجاد قيمة أ، عليك طرح ١ من الطرفين ، ثم القسمة على ٢ لأن أ = $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$،

إذا كان المطلوب حلول أ في الفترة −π ⩽ أ ⩽ π، فعليك إيجاد حلول ص في الفترة −٢π + ١ ⩽ س ⩽ ٢π + ١

تبيّن الخطوات الآتية كيفية إيجاد الفترة الصحيحة لقيم ص:

−π ⩽ أ ⩽ π	عوّض عن أ بـ $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$
−π ⩽ $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$ ⩽ π	اضرب أطراف المتباينة في ٢
−٢π ⩽ $\frac{\cancel{٢}(\text{ص} - ١)}{\cancel{٢}}$ ⩽ ٢π	أضف ١ إلى أطراف المتباينة
−٢π + ١ ⩽ ص ⩽ ٢π + ١	احصل على فترة ص

إذا لم تقم بتعديل الفترة عند إجراء التعويض، فمن المرجح أن تحصل على حلول غير موجودة ضمن الفترة المحددة في السؤال، أو قد تتجاهل حلولًا تقع ضمن الفترة المحددة.

مُساعَدة

حاول دائمًا التحقق من أن قياسات الزوايا التي حصلت عليها تقع في الفترة المعطاة في السؤال، ومن أنك لم تتجاهل حلولًا واقعة في هذه الفترة.

مثــال ١٦

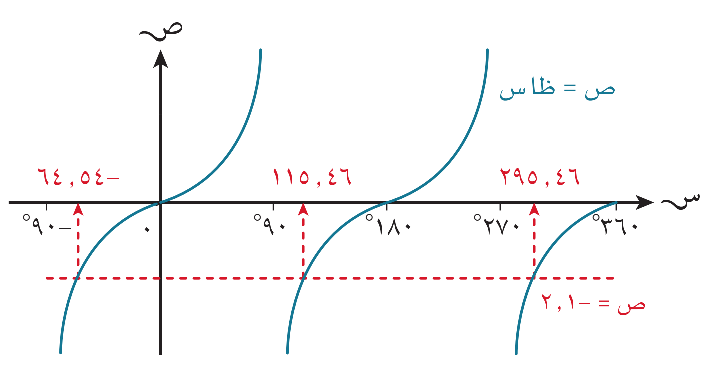
حل المعادلة ظا ٢أ = −٢,١ ، حيث ٠° ⩽ أ ⩽ ١٨٠°

الحــلّ:

ظا ٢أ = −٢,١ .... افترض أن س = ٢أ، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ظا س = −٢,١ .... استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة ظا$^{-1}$(−٢,١)

∴ س = −٦٤,٥٤°



دورة دالة الظل ١٨٠°، وبالتالي فإن ظل كل الزوايا التي في صورة –٦٤,٥٤ + ن × ١٨٠،
حيث ن عدد صحيح، هي نفسها. هذا يعني أن هناك زاويتَين تقعان في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

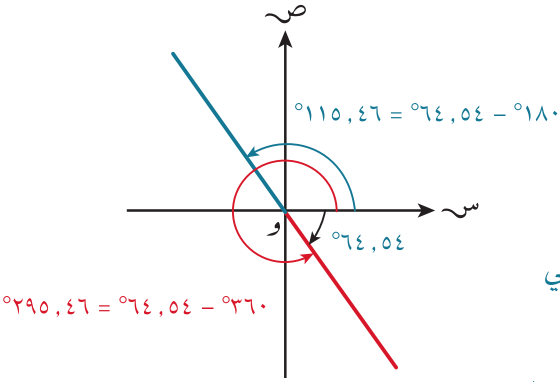
س = (–٦٤,٥٤° + ١٨٠°)	س = (–٦٤,٥٤ + ٢ × ١٨٠)
= ١١٥,٤٦°	= ٢٩٥,٤٦°
٢أ = ١١٥,٤٦°	٢أ = ٢٩٥,٤٦°
أ = ٥٧,٧°	أ = ١٤٧,٧°

حُسبت قيمة س لأقرب منزلتَين عشريتَين لتأكيد إجابة أ لأقرب منزلة عشرية واحدة.

الحلول المطلوبة هي قياس الزاوية في المعادلة الأصلية، أي أ وليس س

وعليه، يكون حل المعادلة ظا٢أ = –٢,١ حيث ٠° ⩽ أ ⩽ ١٨٠° هو:
أ = ٥٧,٧° أو ١٤٧,٧° (لأقرب منزلة عشرية واحدة).

طريقة بديلة:



يمكن حل المعادلة ظا٢أ = –٢,١، حيث ٠° ⩽ أ ⩽ ١٨٠°
باستخدام الشكل المقابل.
استخدم الحاسبة لتجد قياس الزاوية التي ظلها يساوي –٢,١
وبالتالي فإن قياسها يساوي –٦٤,٥٤°، وبالتالي إيجاد قيم ٢أ في الفترة المناسبة، أي: ٠° ⩽ ٢أ ⩽ ٣٦٠°
∵ ظل الزاوية ٢أ سالب، فإن الزوايا تقع في الربعين الثاني والرابع:

٢أ = ١٨٠° – ٦٤,٥٤°	٢أ = ٣٦٠° – ٦٤,٥٤°
= ١١٥,٤٦°	= ٢٩٥,٤٦°

استخدم الحاسبة في وضعية الدرجة، لتتحقق من أن ظا ١١٥,٤٦° ≈ –٢,١، وأن
ظا٢٩٥,٤٦° ≈ –٢,١

إذا كانت ٢أ = ١١٥,٤٦°	إذا كانت ٢أ = ٢٩٥,٤٦°
فإن أ = ٥٧,٧°	فإن أ = ١٤٧,٧°

(تأكد أيضًا من أن الحلَّين أ = ٥٧,٧°، أ = ١٤٧,٧° يقعان في الفترة: ٠° ⩽ ٢أ ⩽ ٣٦٠°)

مثــال ١٧

حل المعادلة جا$\left(٢أ + \frac{\pi}{٦}\right) = ٠,٦$ حيث $٠ \leqslant أ \leqslant \pi$

الحــلّ:

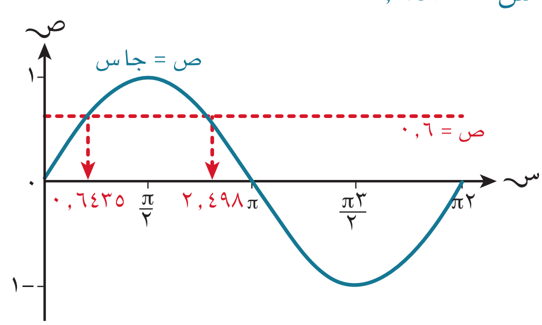
جا$\left(٢أ + \frac{\pi}{٦}\right) = ٠,٦$

افترض أن س = $٢أ + \frac{\pi}{٦}$، لذا نحل أولًا المعادلة جا س = ٠,٦
حيث $\frac{\pi}{٦} \leqslant$ س $\leqslant \frac{١٣\pi}{٦}$، وهي تقريبًا $٠,٥٢٣٦ \leqslant$ س $\leqslant ٦,٨٠٧$

جا س = ٠,٦

استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة جا$^{-١}$(٠,٦)

س = ٠,٦٤٣٥ ء



لاحظ أن جا $\frac{١٣\pi}{٦} = ٠,٥ < ٠,٦$، لذا فإن جميع الحلول تقع ضمن الدورة المبيّنة في التمثيل البياني.

باستخدام تماثل بيان الدالة في الفترة المعطاة توجد زاويتان في الفترة $٠,٥٢٣٦ \leqslant$ س $\leqslant ٦,٨٠٧$

س = ٠,٦٤٣٥

باستخدام س = $٢أ + \frac{\pi}{٦}$:

$٠,٦٤٣٥ = ٢أ + \frac{\pi}{٦}$

أ = $\frac{١}{٢}\left(٠,٦٤٣٥ - \frac{\pi}{٦}\right)$

أ = ٠,٠٦٠٠

س = $\pi - ٠,٦٤٣٥$

= ٢,٤٩٨

$٢أ + \frac{\pi}{٦} = ٢,٤٩٨$

أ = $\frac{١}{٢}\left(٢,٤٩٨ - \frac{\pi}{٦}\right)$

أ = ٠,٩٨٧

وعليه، يكون حل المعادلة جا$\left(٢أ + \frac{\pi}{٦}\right) = ٠,٦$ حيث $٠ \leqslant أ \leqslant \pi$ هو:

أ = ٠,٠٦٠٠ ء أو ٠,٩٨٧ ء (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

طريقة بديلة:

يمكن حل المعادلة $\left(٢أ + \frac{\pi}{٦}\right) = ٠,٦$، حيث $٠ \leqslant أ \leqslant \pi$ باستخدام الشكل المقابل.

استخدم الحاسبة لتجد قياس الزاوية التي جيبها يساوي ٠,٦، وبالتالي فإن قياسها يساوي ٠,٦٤٣٥.

نوجد قيم $٢أ + \frac{\pi}{٦}$ في الفترة المناسبة، أي:

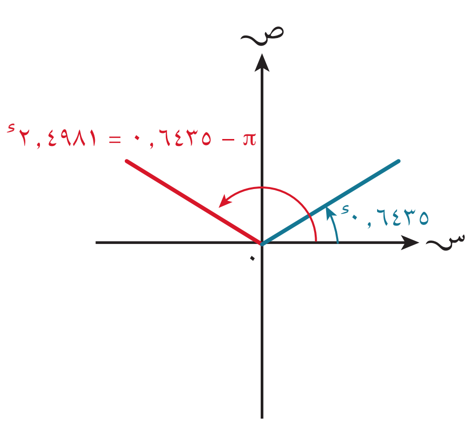
$٠ \leqslant أ \leqslant \pi$

$٠ \leqslant ٢أ \leqslant ٢\pi$

$\frac{\pi}{٦} \leqslant ٢أ + \frac{\pi}{٦} \leqslant ٢\pi + \frac{\pi}{٦}$

$\frac{\pi}{٦} \leqslant ٢أ + \frac{\pi}{٦} \leqslant \frac{١٣\pi}{٦}$

أي أن ٠,٥٢٣٦ ء $\leqslant \frac{١}{٢}$ أ $\leqslant$ ٦,٨٠٦٨ ء



∵ جيب ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ موجب، فإن الزوايا تقع في الربعين الأول والثاني:

٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = ٠,٦٤٣٥ ء

٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = π − ٠,٦٤٣٥ ء

= ٢,٤٩٨١ ء

استخدم الحاسبة في وضعية الراديان، لتتحقق من أن جا(٠,٦٤٣٥) ≈ ٠,٦، وأن جا ٢,٤٩٨١ ≈ ٠,٦

إذا كانت ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = ٠,٦٤٣٥ ء

فإن أ = $\frac{٠,٦٤٣٥ - \frac{\pi}{٦}}{٢}$

أ = ٠,٠٦٠٠ ء

إذا كانت ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = ٠,٦٤٣٥ ء

فإن أ = $\frac{٢,٤٩٨١ - \frac{\pi}{٦}}{٢}$

أ = ٠,٩٨٧ ء

(تأكد أيضًا من أن الحلّين أ = ٠,٠٦٠٠ ء، أ = ٠,٩٨٧ ء يقعان في الفترة ٠ ⩽ أ ⩽ π)

مثــال ١٨

حل المعادلة جا $\left(\frac{١}{٢}أ\right)$ = ٠,٧١٣ ء، حيث ٠ ⩽ أ ⩽ ٢π لأقرب منزلتَين عشريتَين.

الحــلّ:

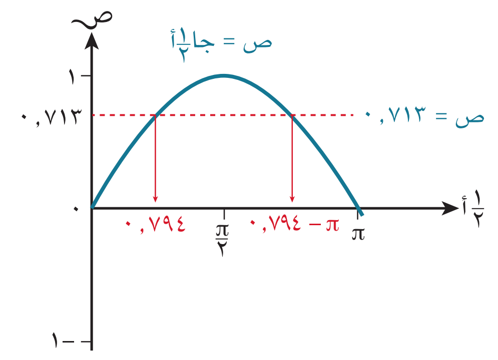
∵ ٠ ⩽ أ ⩽ ٢π

∴ ٠ ⩽ $\frac{١}{٢}$أ ⩽ π

هنا سنحل المعادلة دون استخدام التعويض.

جا $\left(\frac{١}{٢}أ\right)$ =٠,٧١٣ .... استخدم الحاسبة لتجد قيمة جا$^{-١}$(٠,٧١٣) ء

$\frac{١}{٢}$أ = ٠,٧٩٤ ء



سمِ المحور الأفقي $\frac{١}{٢}$ أ

استخدم تماثل بيان الدالة لتجد حلَّين في الفترة ٠ ⩽ $\frac{١}{٢}$أ ⩽ π:

$\frac{١}{٢}$أ = ٠,٧٩٤

أ = ٢ × ٠,٧٩٤

= ١,٥٩

$\frac{١}{٢}$أ = π − ٠,٧٩٤

أ = ٢(π − ٠,٧٩٤)

= ٤,٧٠

وعليه، يكون حل المعادلة جا $\left(\frac{١}{٢}أ\right)$ =٠,٧١٣ حيث ٠ ⩽ أ ⩽ ٢π هو:

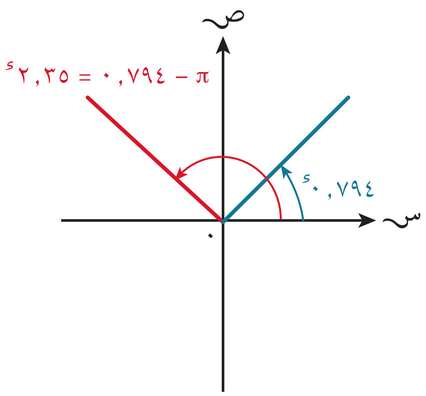
أ = ١,٥٩ ء أو ٤,٧٠ ء

طريقة بديلة:

يمكن حل المعادلة جا $\left(\frac{١}{٢}\text{أ}\right)$ = ٠٫٧١٣، حيث ٠ ⩽ أ ⩽ ٢π

$\frac{١}{٢}$أ = ٠٫٧٩٤ ء

باستخدام الشكل المقابل:



استخدم الحاسبة لتجد قياس الزاوية التي جيبها ٠٫٧١٣، وبالتالي

نوجد قيم $\frac{١}{٢}$أ في الفترة المناسبة، أي:

٠ ⩽ أ ⩽ ٢π

٠ ⩽ $\frac{١}{٢}$أ ⩽ π

٠ ⩽ $\frac{١}{٢}$أ ⩽ ٣٫١٤١٦

∵ جيب $\frac{١}{٢}$أ موجب، فإن الزوايا تقع في الربعين الأول والثاني:

$\frac{١}{٢}$أ = ٠٫٧٩٤ ء

$\frac{١}{٢}$أ = π − ٠٫٧٩٤

= ٢٫٣٥ ء

استخدم الحاسبة في وضعية الراديان، لتتحقق من أن جا(٠٫٧٩٤) ≈ ٠٫٧١٣،

جا ٢٫٣٥ ≈ ٠٫٧١٣

إذا كانت $\frac{١}{٢}$أ = ٠٫٧٩٤

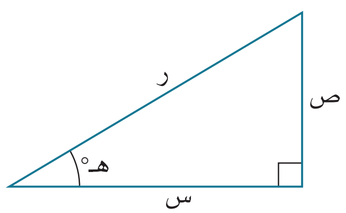
فإن أ = ١٫٥٩ ء

إذا كانت $\frac{١}{٢}$أ = ٢٫٣٥

فإن أ = ٤٫٧٠ ء

(تأكد أيضًا من أن الحلَّين أ = ١٫٥٩ ء، أ = ٤٫٧٠ ء يقعان في الفترة ٠ ⩽ أ ⩽ ٢π)

في الرسم المجاور مثلث قائم الزاوية.



يمكن إيجاد قانونَين مهمَّين هنا باستخدام المثلث:

القانون ١:

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

ومنه، $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \div \frac{\text{س}}{\text{ر}}$

$= \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ر}}{\text{س}}$

$= \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

= ظا هـ

نتيجة ٢

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ لجميع قيم هـ، حيث جتا هـ ≠ ٠

القانون ٢:

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ وباستخدام نظرية فيثاغورث س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}

ومنه، جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = $\left(\frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ر}}\right)^{٢}$

= $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ر}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ر}^{٢}}$

= $\frac{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}{\text{ر}^{٢}}$

= $\frac{\text{ر}^{٢}}{\text{ر}^{٢}}$

= ١

نتيجة ٣

جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١ لجميع قيم هـ.

إذا استخدمنا تعريف **دائرة الوحدة** للدوال المثلثية، نكتشف أنّ هذَين القانونين صحيحان لجميع قيم هـ. يمكننا استخدامهما لحل المزيد من المعادلات المثلثية.

مثـــال ١٩

حل المعادلة ٣جتا^{٢} س − جا س × جتا س = ٠ حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°.

الحـــلّ:

٣جتا^{٢} س − جاس جتا س = ٠ .... حلل إلى العوامل.

جتا س (٣جتا س − جا س) = ٠ .... أحد العاملَين أو كلاهما يساوي صفرًا.

إما جتا س = ٠، فيكون س = ٩٠° أو ٢٧٠° أو ٣جتا س − جا س = ٠

جا س = ٣جتا س

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = ٣

ظا س = ٣

إما س = ٧١,٦° أو ١٨٠ + ٧١,٦

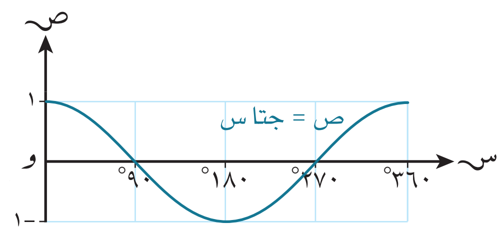
س = ٧١,٦° أو ٢٥١,٦°

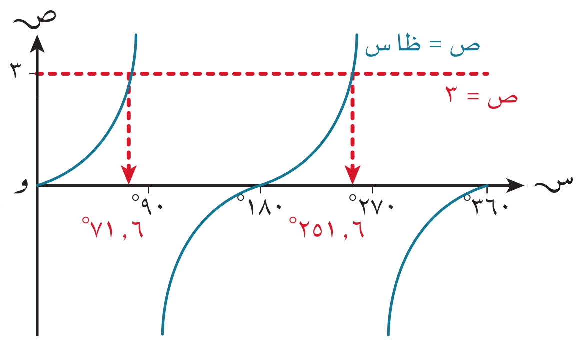
∴ حلول المعادلة هي:

٧١,٣° أو ٩٠° أو ٢٥١,٦° أو ٢٧٠°

طريقة بديلة لإيجاد قيم س باستخدام التمثيل البياني:

يمكن الحصول على قيم س باستخدام التمثيل البياني للدوال ص = جتا س، ص = ظا س:





∴ قيم س هي : ٩٠°، ٢٧٠°

∴ قيم س هي : ٧١,٦°، ٢٥١,٦°

∴ حلول المعادلة ٣جتا^{٢}س − جا س × جتا س = ٠، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠° هي:

٧١,٦° أو ٩٠° أو ٢٥١,٦° أو ٢٧٠°

مثـــال ٢٠

حل المعادلة ٢جا^{٢}س + ٣جتا س − ٣ = ٠، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π.

الحـــلّ:

٢جا^{٢}س + ٣جتا س − ٣ = ٠ .... استبدل جا^{٢}(س) بـ (١ − جتا^{٢}س)

٢(١ − جتا^{٢}س) + ٣جتا س − ٣ = ٠ .... فك الأقواس، وجمّع الحدود.

٢جتا^{٢}س − ٣جتا س + ١ = ٠ .... حلل العبارة التربيعية إلى العوامل بدلالة جتا س.

(٢جتا س − ١)(جتا س − ١) = ٠

جتا س = $\frac{١}{٢}$ أو جتا س = ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ أو ٢π − $\frac{\pi}{٣}$ س = ٠ أو ٢π

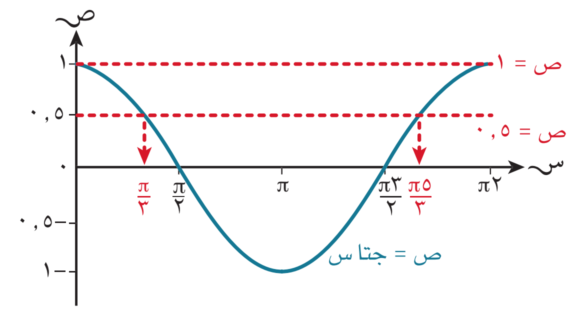
س = $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ حلول المعادلة هي:

٠ أو $\frac{\pi}{٣}$، أو $\frac{٥\pi}{٣}$، أو ٢π

طريقة بديلة لإيجاد قيم س باستخدام التمثيل البياني:

يمكن الحصول على قيم س باستخدام التمثيل البياني للدالة ص = جتا س:



∴ حلول المعادلة ٢جا^{٢}س + ٣جتا س − ١ = ٠، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٢π هي:

٠ أو $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{٥\pi}{٣}$ أو ٢π

تمارين ٢-٦

١) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

- **أ** ظا س = ١,٥
- **ب** جا س = ٠,٤
- **ج** جتا س = ٠,٧
- **د** جا س = −٠,٣
- **هـ** جتا س = −٠.٦
- **و** ظا س = −٢
- **ز** ٢جتا س − ١ = ٠
- **ح** ٥جا س + ٣ = ٠

٢) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π:

- **أ** جا س = ٠,٣
- **ب** جتا س = ٠,٥
- **ج** ظا س = ٣
- **د** جا س = −٠,٧
- **هـ** ظا س = −٣
- **و** جتا س = −٠,٥
- **ز** ٤جا س = ٣
- **ح** ٥ظا س + ٧ = ٠

٣) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°:

- **أ** جتا (٢س) = ٠,٦
- **ب** جا (٣س) = ٠,٨
- **ج** ظا (٢س) = ٤
- **د** جا (٢س) = −٠,٥
- **هـ** ٣جتا (٢س) = ٢
- **و** ٥جا (٢س) = −٤
- **ز** ٤ + ٢ظا (٢س) = ٠
- **ح** ١ − ٥جا (٢س) = ٠

٤) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

أ جا(س − ٦٠°) = ٠,٥ حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ب جتا$\left(\text{س} + \frac{\pi}{٦}\right)$ = −٠,٥ حيث ٠ < س < ٢π

ج جتا(٢س + ٤٥°) = ٠.٨ حيث ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°

د ٣جا(٢س − ٤^{ء}) = ٢ حيث ٠ < س < π

هـ ٢ظا$\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$ + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٥٤٠°

و $\sqrt{٢}$ جا$\left(\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\pi}{٤}\right)$ = ١ حيث ٠ < س < ٤π

٥) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

أ ٢جا س = جتا س

ب ٢جا س − ٣جتا س = ٠

ج ٤جا س + ٧جتا س = ٠

د ٣جتا (٢س) − ٤جا (٢س) = ٠

٦) حل المعادلة ٤جا (٢س + ٠,٣) − ٥جتا (٢س + ٠,٣) = ٠ حيث ٠ ⩽ س ⩽ π

٧) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

أ جا س × جتا(س − ٦٠°) = ٠

ب ٥جتا^{٢}س − ٣جا س = ٠

ج ظا^{٢}س = ٥ظا س

د جا^{٢}س + ٢جا س × جتا س = ٠

هـ ٢جا س × جتا س = جا س

و جا س × ظا س = ٤جا س

٨) حل كل معادلة من المعادلتَين الآتيتَين، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

أ ٤جتا^{٢}س = ١

ب ٤ظا^{٢}س = ٩

٩) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

أ ٢جا^{٢}س + جا س − ١ = ٠

ب ظا^{٢}س + ٢ظا س − ٣ = ٠

ج ٣جتا^{٢}س − ٢جتا س − ١ = ٠

د ٢جا^{٢}س − جتا س − ١ = ٠

هـ ٣جتا^{٢}س − ٣ = جا س

و جتا س + ٥ = ٦جا^{٢}س

ز ٢جتا^{٢}س − جا^{٢}س − ٢جا س − ١ = ٠

ح ١ + ظا س × جتا س = ٢جتا^{٢}س

١٠) حل كل معادلة من المعادلتَين الآتيتَين، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π:

أ ٤ظا س = ٣جتا س

ب ٢جتا^{٢}س + ٥جا س = ٤

١١) حل المعادلة جا^{٢}س + ٣جا س × جتا س + ٢جتا^{٢}س = ٠، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π.

٧-٢ المتطابقات المثلثية Trigonometric identities

المتطابقة المثلثية Trigonometric identity هي علاقة تتحقق بجميع القيم الحقيقية للمتغير، أما المعادلة المثلثية فهي علاقة تتحقق ببعض القيم الحقيقية للمتغير.

فمثلًا: تُسمى س + س = ٢س **متطابقة identity** لأنها صحيحة لكل قيم س.

عندما نكتب متطابقة، غالبًا ما نستبدل الرمز = بالرمز ≡.

توجد متطابقتان مثلثيتان شائعتان، وهما الموجودتان في نتيجة ٢ ونتيجة ٣، وهما:

$$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} \equiv ١ \quad ، \quad \text{ظا س} \equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ستتعلم في هذا الدرس كيف تستخدم هاتَين المتطابقتَين في تبسيط العبارات، وفي برهنة المزيد من المتطابقات الأخرى التي تتضمن جا س، جتا س، و ظا س.

فعند برهنة المتطابقة، من المعتاد البدء بالطرف الذي يمكن تبسيطه في المتطابقة، وتبيان أن تبسيطه يوصل إلى الطرف الآخر.

مُساعَدة

كل متطابقة هي معادلة، وليس كل معادلة هي متطابقة.

مثــال ٢١

اكتب $٤\text{جتا}^2\text{س} - ٣\text{جا}^2\text{س}$ بدلالة جتا س.

الحــلّ:

$٤\text{جتا}^2\text{س} - ٣\text{جا}^2\text{س} \equiv ٤\text{جتا}^2\text{س} - ٣(١ - \text{جتا}^2\text{س})$ استبدل $\text{جا}^2\text{س}$ بـ $(١ - \text{جتا}^2\text{س})$.

$\equiv ٤\text{جتا}^2\text{س} - ٣ + ٣\text{جتا}^2\text{س}$

$\equiv ٧\text{جتا}^2\text{س} - ٣$

مثــال ٢٢

أثبت صحة المتطابقة $\frac{١ + \text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} \equiv \frac{٢}{\text{جتا س}}$.

الحــلّ:

الطرف الأيمن $\equiv \frac{١ + \text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}}$ اجمع الكسرَين

$\equiv \frac{(١ + \text{جا س})^2 + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})}$ فك الأقواس في البسط

$\equiv \frac{١ + ٢\text{جا س} + \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})}$ استخدم المتطابقة $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} \equiv ١$

$\equiv \frac{٢ + ٢\text{جا س}}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})}$ خذ العامل المشترك في البسط

$\equiv \frac{٢(١ + \text{جا س})}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})}$ اقسم البسط والمقام على ١ + جا س

$\equiv \frac{٢}{\text{جتا س}}$ وهو الطرف الأيسر.

مثـــال ٢٣

برهن المتطابقة: $\frac{١ + \text{جا س}}{١ - \text{جا س}} \equiv \left(\text{ظا س} + \frac{١}{\text{جتا س}}\right)^{٢}$.

الحـــلّ:

الطرف الأيسر $\equiv \left(\text{ظا س} + \frac{١}{\text{جتا س}}\right)^{٢}$ .... استخدم ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$\equiv \left(\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{١}{\text{جتا س}}\right)^{٢}$ .... اجمع الكسرَين.

$\equiv \left(\frac{\text{جا س} + ١}{\text{جتا س}}\right)^{٢}$

$\equiv \frac{(١ + \text{جا س})^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ .... استبدل جتا^{٢}س بـ (١ - جا^{٢}س) في المقام

$\equiv \frac{(١ + \text{جا س})^{٢}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$ .... استخدم ١ - جا^{٢}س = (١ + جا س)(١ - جا س)

$\equiv \frac{(١ + \text{جا س})^{٢}}{(١ + \text{جا س})(١ - \text{جا س})}$ .... اقسم كلًا من البسط والمقام على (١ + جا س)

$\equiv \frac{١ + \text{جا س}}{١ - \text{جا س}}$ وهو الطرف الأيمن.

تمارين ٢-٧

١) اكتب العبارة ٢جا^{٢}س - ٧جتا^{٢}س + ٤ بدلالة جا س.

٢) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) جتا س × ظا س ≡ جا س

ب) $\frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س} \times \text{جتا س}} \equiv \text{ظا س}$

ج) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(١ - \text{جا س})} \equiv ١ + \text{جا س}$

د) $\frac{١ + \text{جا س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{ظا س}$

هـ) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} + \text{جا س} \equiv \text{جتا س}$

و) جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س ≡ جتا^{٢}س

٣) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} \equiv ١ + ٢\text{جا س} \times \text{جتا س}$

ب) $٢(١ + \text{جتا س}) - (١ + \text{جتا س})^{٢} \equiv \text{جا}^{٢}\text{س}$

ج) $٢ - (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} \equiv (\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢}$

د) $(\text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢)^{٢} - ٣\text{جا}^{٢}\text{س} \equiv \text{جتا}^{٤}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}$

٤) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} \equiv ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١$

ب) $\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} \equiv ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$

ج) $\text{ظا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} \equiv \text{ظا}^{٢}\text{س} \times \text{جا}^{٢}\text{س}$

د) $\text{جتا}^{٤}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} \equiv \text{جا}^{٤}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س}$

٥) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{جا س}$

ب) $\text{جا}^{٤}\text{س} - \text{جتا}^{٤}\text{س} \equiv ٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ١$

ج) $\dfrac{\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \equiv ١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}$

د) $\dfrac{\text{جتا س}}{\text{ظا س}(١ - \text{جا س})} \equiv ١ + \dfrac{١}{\text{جا س}}$

هـ) $\dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \dfrac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

و) $\left(\dfrac{١}{\text{جا س}} - \dfrac{١}{\text{ظا س}}\right)^{٢} \equiv \dfrac{١ - \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

ز) $\dfrac{\text{ظا س} + ١}{\text{جا س} \times \text{ظا س} + \text{جتا س}} \equiv \text{جا س} + \text{جتا س}$

ح) $\dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})} \equiv \text{ظا}^{٤}\text{س}$

٦) أثبت المتطابقة: $\dfrac{١}{\text{جتا س}} - \dfrac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} \equiv \text{ظا س}$.

٧) بيّن أن $(١ + \text{جتا س})^{٢} + (١ - \text{جتا س})^{٢} + ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$ لها قيمة ثابتة لكل قيم س.

٨) أ) اكتب العبارة $٧\text{جا}^{٢}\text{س} + ٤\text{جتا}^{٢}\text{س}$ في صورة $أ + ب\,\text{جا}^{٢}\text{س}$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) اذكر مدى الدالة $\text{د}(\text{س}) = ٧\text{جا}^{٢}\text{س} + ٤\text{جتا}^{٢}\text{س}$، حيث $٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢\pi$.

٩) أ) اكتب العبارة $٤\text{جا هـ} - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$ في صورة $(\text{جا هـ} + أ)^{٢} + ب$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) اذكر القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لـ $٤\text{جا هـ} - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$، حيث $٠ \leqslant \text{هـ} \leqslant ٢\pi$.

★★ **١٠)** إذا علمت أن $أ = \dfrac{١ - \text{جا هـ}}{٢\text{جتا هـ}}$:

أ) بيّن أن $\dfrac{١}{أ} = \dfrac{٢(١ + \text{جا هـ})}{\text{جتا هـ}}$

ب) أوجِد قيمتَي كل من جا هـ، جتا هـ بدلالة أ.

٨-٢ المزيد من المعادلات المثلثية
More trigonometric equations

يستخدم هذا الدرس المتطابقات المثلثيّة للمساعدة على حلّ معادلات مثلثية أكثر عمقًا.

مثـال ٢٤

أ برهن المتطابقة $\frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ} \equiv ٢جتا^٢ هـ - ١$

ب حلّ المعادلة $\frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ} = ٥جتا هـ - ٣$، حيث $٠° \leqslant هـ \leqslant ٣٦٠°$

الحـلّ:

أ الطرف الأيمن $\equiv \frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ}$ .... استخدم $ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ}$

$\equiv \frac{١ - \left(\frac{جا هـ}{جتا هـ}\right)^٢}{١ + \left(\frac{جا هـ}{جتا هـ}\right)^٢}$ .... اضرب كلًا من البسط والمقام في $جتا^٢ هـ$

$\equiv \frac{جتا^٢ هـ - جا^٢ هـ}{جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ}$ .... استخدم $جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١$

$\equiv جتا^٢ هـ - جا^٢ هـ$ .... استبدل $جا^٢ هـ$ بـ $(١ - جتا^٢ هـ)$

$\equiv جتا^٢ هـ - (١ - جتا^٢ هـ)$ .... بسّط.

$\equiv ٢جتا^٢ هـ - ١$ وهو الطرف الأيسر.

ب $\frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ} = ٥جتا هـ - ٣$ .... استخدم الجزئية (أ).

$٢جتا^٢ هـ - ١ = ٥جتا هـ - ٣$ .... أعد الترتيب لتحصل على معادلة تربعية بدلالة جتا هـ

$٢جتا^٢ هـ - ٥جتا هـ + ٢ = ٠$ .... حلل إلى العوامل.

$(٢جتا هـ - ١)(جتا هـ - ٢) = ٠$

إما $جتا هـ = \frac{١}{٢}$ أو $جتا هـ = ٢$ .... عند جتا هـ = ٢ لا يوجد حل للمعادلة.

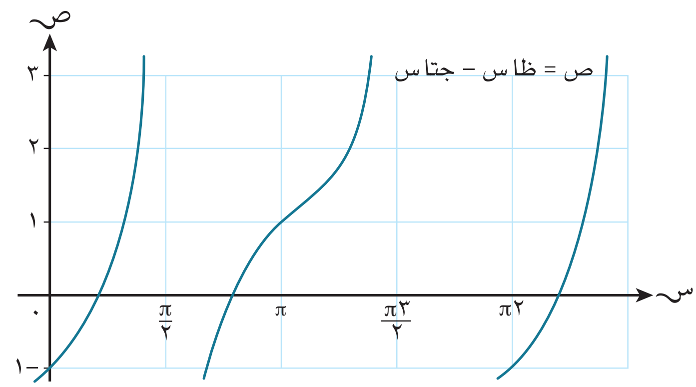
$هـ = جتا^{-١}\left(\frac{١}{٢}\right)$

إما $هـ = ٦٠°$ أو $هـ = ٣٦٠° - ٦٠°$

∴ حلول المعادلة هي: $٦٠°$ أو $٣٠٠°$

مثــال ٢٥

يبيّن الرسم الآتي جزءًا من بيان الدالة ص = ظا س − جتا س



أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ظا س − جتا س = ٠ في صورة معادلة تربيعية بدلالة جا س.

ب استخدم المعادلة التربيعية التي وجدتها في الجزئية (أ) لتحلّ المعادلة ظا س − جتا س = ٠، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

الحــلّ:

أ ظا س − جتا س = ٠ .... استبدل ظا س بـ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ − جتا س = ٠ .... اضرب الطرفَين في جتا س

جا س − جتا^{٢}س = ٠ .... استبدل جتا^{٢}س بـ (١ − جا^{٢}س)

جا س − (١ − جا^{٢}س) = ٠

جا^{٢}س + جا س − ١ = ٠

ب المعادلة التربيعية هي: جا^٢ س + جا س − ١ = ٠

باستخدام الصيغة التربيعية، حيث أ = ١، ب = ١، جـ = −١

نحصل على جا س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١^٢ - (٤)(١)(-١)}}{٢ \times ١}$

جا س = $\frac{-١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

جا س = −١,٦١٨ أو جاس = ٠,٦١٨

جا س = −١,٦١٨ لا حل لها لأن −١ ⩽ جا س ⩽ ١

جا س = ٠,٦١٨،

∴ س = جا$^{-١}$ ٠,٦١٨ = ٠,٦٦٦ ى

أو س = π − ٠,٦٦٦ = ٢,٤٨ ى

حلّا المعادلة ظا س − جتا س = ٠ هما س = ٠,٦٦٦ ى أو س = ٢,٤٨ ى

تمارين ٢-٨

١) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ في صورة ظا هـ = ك، حيث ك عدد ثابت.

ب حلّ المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

٢) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٣جا^{٢} هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٢جتا^{٢} هـ في صورة ٣ ظا^{٢} هـ + ٥ ظا هـ − ٢ = ٠

ب حلّ المعادلة ٣جا^{٢} هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٢جتا^{٢} هـ، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ١٨٠°

٣) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٨ جا^{٢} هـ + ٢جتا^{٢} هـ − جتا هـ = ٦ في صورة ٦جتا^{٢} هـ + جتا هـ − ٢ = ٠

ب حل المعادلة ٨ جا^{٢} هـ + ٢جتا^{٢} هـ − جتا هـ = ٦، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

٤) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٤جا^{٤} هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢} هـ في صورة ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ = ٠، حيث س = جا^{٢} هـ.

ب حل المعادلة ٤جا^{٤} هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢} هـ، حيث ٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π

٥) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣ في صورة جتا^{٢} هـ + ٣جتا هـ − ١ = ٠

ب حل المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

٦) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٥(٢جا هـ − جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ) في صورة ظا هـ = $\frac{١٣}{٦}$

ب حل المعادلة ٥(٢جا هـ − جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ)، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

٧) أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}} + \frac{\text{١ + جتا هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{٢}{\text{جا هـ}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}} + \frac{\text{١ + جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = ١ + ٣\,\text{جا هـ}$، حيث ٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π

٨) أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ(١ + جا هـ)}} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} - ١$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ(١ + جا هـ)}} = ١$، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

٩) أ برهن المتطابقة $\frac{١}{\text{١ + جا هـ}} + \frac{١}{\text{١ − جا هـ}} \equiv \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$

ب حل المعادلة جتا هـ $\left(\frac{١}{\text{١ + جا هـ}} + \frac{١}{\text{١ − جا هـ}}\right) = ٥$، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

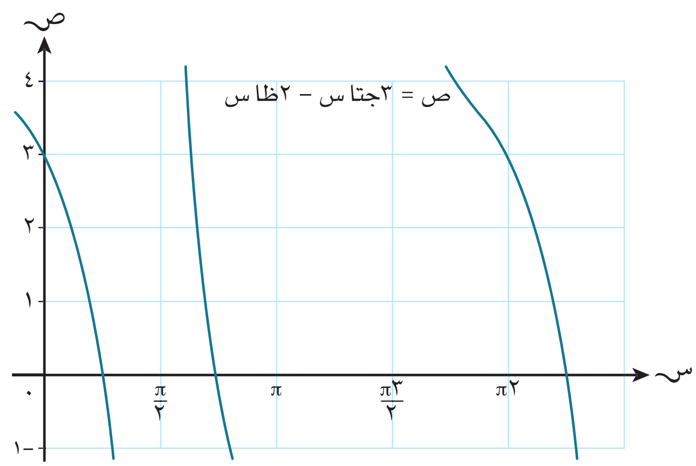
١٠) أ برهن المتطابقة $\left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^{٢} \equiv \frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$

ب حل المعادلة $\left(\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}\right)^{٢} = ٢$، حيث $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

١١) أ برهن المتطابقة $\text{جتا}^{٤}$ هـ $-$ $\text{جا}^{٤}$ هـ $\equiv$ $٢\text{جتا}^{٢}$ هـ $-$ ١

ب حل المعادلة $\text{جتا}^{٤}$ هـ $-$ $\text{جا}^{٤}$ هـ $= \frac{١}{٢}$، حيث $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

١٢) يبيّن الرسم الآتي جزءًا من التمثيل البياني للدالة ص= ٣جتا س − ٢ظا س.



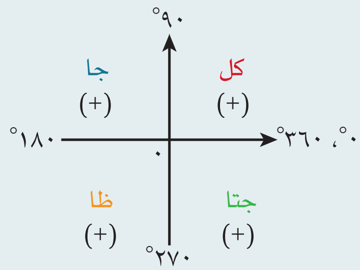
أوجِد قيم س الثلاث لأقرب ٣ أرقام معنوية حيث يقطع بيان الدالة المحور السيني.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

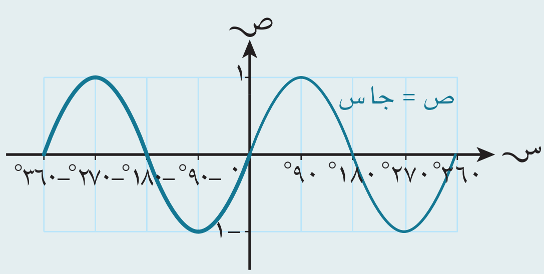
	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
هـ = ٠° = ٠ء	٠	١	٠
هـ = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
هـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
هـ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
هـ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير موجودة

الزوايا الموجبة والزوايا السالبة:



- الزوايا الموجبة هي الزوايا الخاصة المقيسة بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور السيني الموجب.
- الزوايا السالبة هي الزوايا المقيسة باتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور السيني الموجب.

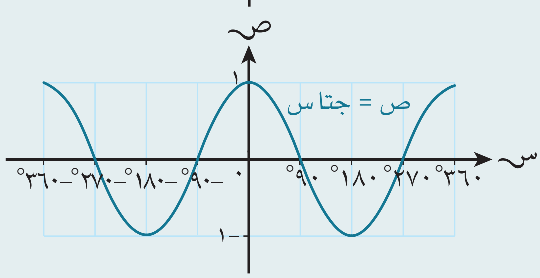
التمثيلات البيانية للدوال المثلثيّة:



بالنسبة إلى دالة الجيب:

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

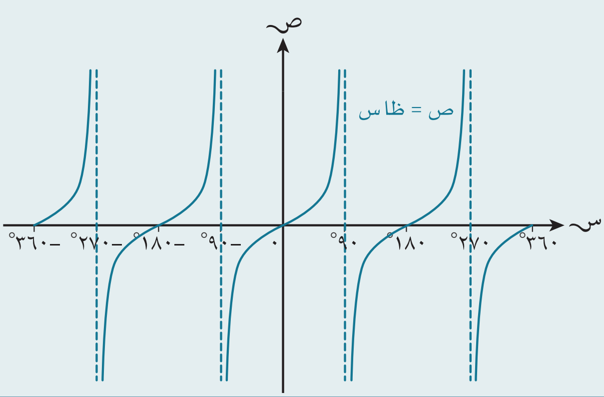
المدى: -١ ⩽ ص ⩽ ١



بالنسبة إلى دالة جيب التمام:

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: -١ ⩽ ص ⩽ ١



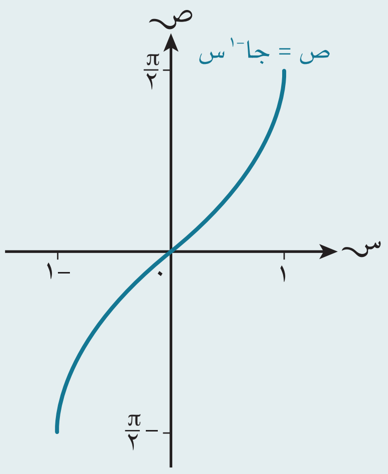
بالنسبة إلى دالة الظل:

المجال: كل الأعداد الحقيقية باستثناء المضاعفات الفردية لـ ٩٠°

المدى: كل الأعداد الحقيقية

- بيان الدالة ص = أ جا س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله أ، ومواز للمحور الصادي.
- بيان الدالة ص = جا (أ س) هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله $\frac{1}{أ}$، ومواز المحور السيني.
- بيان الدالة ص = أ + جا س هو انسحاب لبيان الدالة ص= جا س بالمتجه $\binom{0}{أ}$.
- بيان الدالة ص = جا (س + جـ) هو انسحاب لبيان الدالة ص= جا س بالمتجه $\binom{-جـ}{0}$

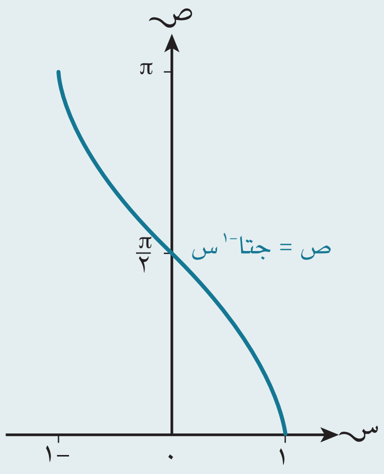
الدوال المثلثيّة العكسية:



ص = جا$^{-1}$س

المجال: $-1 \leqslant$ س $\leqslant 1$

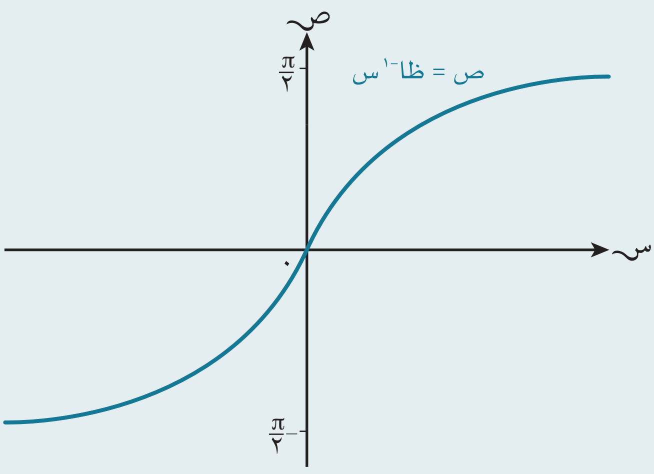
المدى: $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ جا$^{-1}$ س $\leqslant \frac{\pi}{2}$



ص = جتا$^{-1}$س

المجال: $-1 \leqslant$ س $\leqslant 1$

المدى: $0 \leqslant$ جتا$^{-1}$ س $\leqslant \pi$



ص = ظا$^{-1}$س

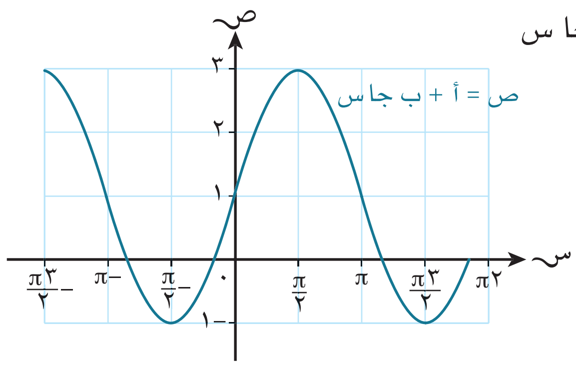
المجال: ظا س $\in$ ع

المدى: $-\frac{\pi}{2} <$ ظا$^{-1}$ س $< \frac{\pi}{2}$

المتطابقات المثلثيّة:

- ظا س $\equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$
- جا^{2} س + جتا^{2} س $\equiv 1$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية



★ **١)** يبيّن الرسم جزءًا من التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جا س
أوجِد قيمة كل من أ، ب.

★ **٢)** أوجِد قيمة س التي تحقق المعادلة جا$^{-١}$ (س − ١) = ظا$^{-١}$ ($\sqrt{٣}$).

٣) إذا علمت أن الزاوية هـ حادة، ومقيسة بالراديان، وأن جتا هـ = ك، فاكتب كل عبارة من العبارات الآتية بدلالة ك:

أ جا هـ.

ب ظا هـ.

ج جتا (π − هـ).

٤) حل المعادلة جتا$^{-١}$ (٨س^{٤} + ١٤س^{٢} − ١٦) = π

٥) حل المعادلة جا ٢س = ٥جتا ٢س، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ١٨٠°

★ **٦)** حل المعادلة $\frac{\text{١٣جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{٢ + جتا هـ}}$ + جتا هـ = ٢، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ١٨٠°

٧) حل المعادلة ٢جتا^{٢}س = ٥جا س − ١، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

★ **٨)** أ ارسم بيان الدالتَين ص = جتا ٢هـ، ص = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π

ب اكتب عدد جذور المعادلة ٢جتا ٢هـ − ١ = ٠ في الفترة ٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π

ج استنتج عدد جذور المعادلة ٢جتا ٢هـ − ١ = ٠ في الفترة ١٠π ⩽ هـ ⩽ ٢٠π

★ **٩)** أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٢ظا^{٢}هـ × جا^{٢}هـ = ١ في صورة ٢جا^{٤}هـ + جا^{٢}هـ − ١ = ٠

ب حل المعادلة ٢ظا^{٢}هـ × جا^{٢}هـ = ١، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

★ **١٠)** أ حل المعادلة ٤جا^{٢}س + ٨جتا س − ٧ = ٠، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ب أوجِد حل المعادلة ٤جا^{٢}($\frac{١}{٢}$هـ) + ٨جتا ($\frac{١}{٢}$هـ) − ٧ = ٠، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

★ **١١)** أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{١ - \text{جتا س}} \equiv ١ + \frac{١}{\text{جتا س}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{١ - \text{جتا س}} + ٢ = ٠$، حيث $٠° \leqslant$ س $\leqslant ٣٦٠°$

١٢) أ حل المعادلة $\frac{٢ - \text{جا س}}{١ + ٢\text{جا س}} = \frac{٣}{٤}$، حيث $٠ \leqslant$ س $\leqslant ٢\pi$

ب حل المعادلة جا س − ٢جتا س = ٢(٢جا س − ٣جتا س)، حيث $-\pi \leqslant$ س $\leqslant ٢\pi$

★ **١٣)** تمّ تعريف الدالة د على النحو: د: س ← ٣ − ٢ظا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$، حيث $٠ \leqslant$ س $\leqslant \pi$:

أ اذكر مدى الدالة.

ب أوجِد د$\left(\frac{٢}{٣}\pi\right)$.

ج ارسم بيان الدالة ص = د(س).

د أوجِد $\text{د}^{-١}$(س).

★ **١٤)** أ حل المعادلة ٢$\text{جتا}^٢$ هـ = ٣جا هـ، حيث $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

ب أصغر حل موجب للمعادلة ٢$\text{جتا}^٢$(ن هـ) = ٣جا (ن هـ)، حيث ن عدد صحيح موجب، هـ = ١٠°.
أوجِد قيمة ن، ثم أوجِد أكبر حل لهذه المعادلة في الفترة $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

★ **١٥)** أ بيّن أن $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جا هـ} + \text{جتا هـ}} + \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ} - \text{جتا هـ}} \equiv \frac{١}{\text{جا}^٢\text{هـ} - \text{جتا}^٢\text{هـ}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}} = ٣$، حيث $٠° \leqslant$ س $\leqslant ٣٦٠°$

★ **١٦)** أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة $\frac{٤\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}} + ١٥ = ٠$ في صورة ٤$\text{جا}^٢$هـ − ١٥جا هـ − ٤ = ٠

ب حل المعادلة $\frac{٤\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}} + ١٥ = ٠$، حيث $٠° \leqslant$ هـ $\leqslant ٣٦٠°$

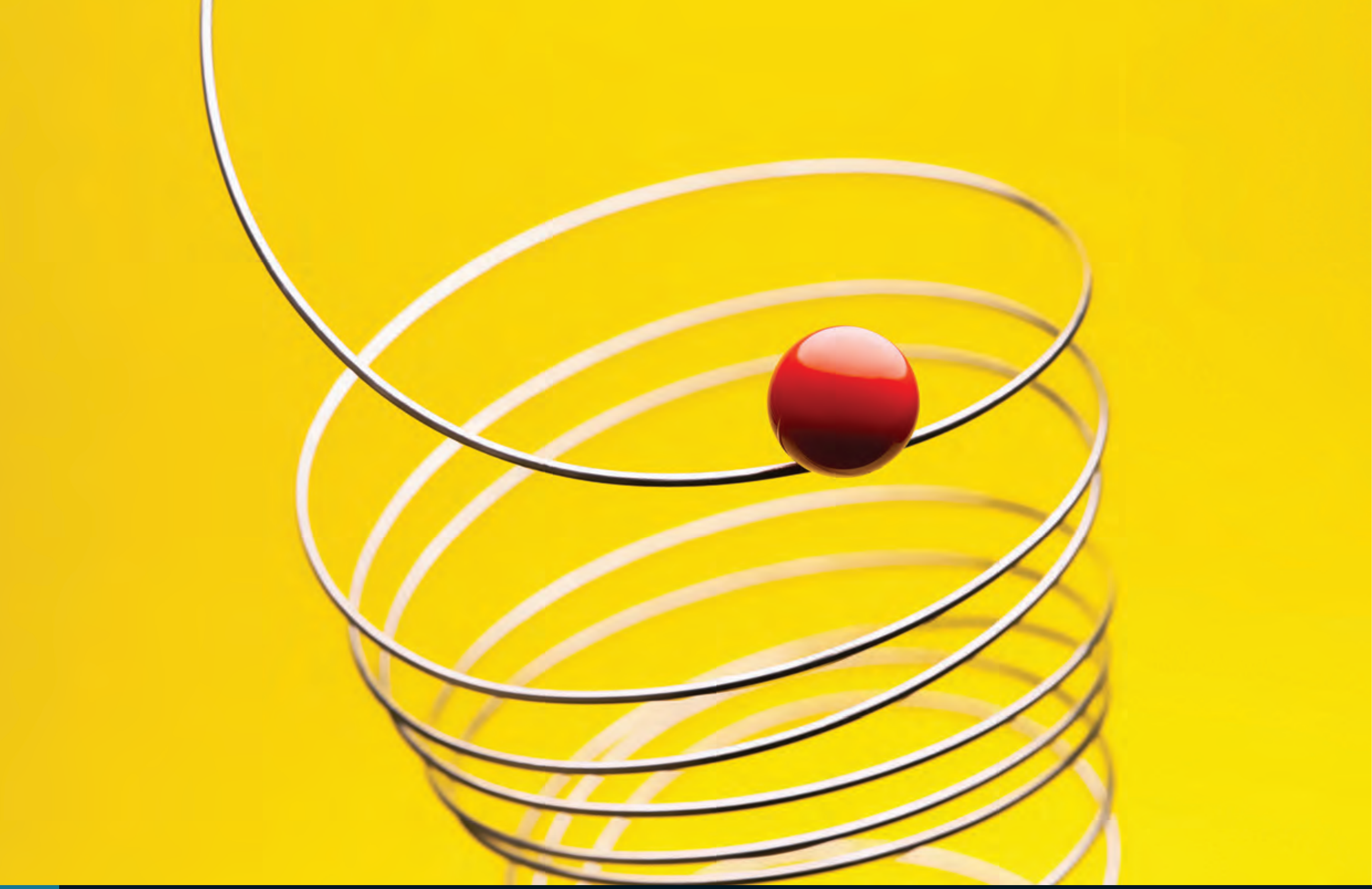
★ **١٧)** تمّ تعريف الدالة د على النحو: د: س ← ٥ + ٣جتا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$، حيث $٠ \leqslant$ س $\leqslant ٢\pi$:

أ حل المعادلة د(س) = ٧ لأقرب منزلتَين عشريتَين.

ب ارسم بيان الدالة ص = د(س).

ج لماذا توجد للدالة د (س) دالة عكسية؟ اشرح إجابتك.

د أوجِد $\text{د}^{-١}$(س).



الوحدة الثالثة

مقدمة في النهايات والاتصال

Introduction to limits and continuity

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تتعرف على مفهوم نهاية الدالة د (س) عندما س تقترب من أ عدديًّا، وبيانيًّا.

٣-٢ تتذكر وتطبق خواص النهايات.

٣-٣ تجد نهايات الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية (بسطها ومقامها كثيرة حدود)، والدوال المعرّفة بأكثر من قاعدة باستخدام خواص النهايات.

٣-٤ تفهم وتحدد باستخدام جداول القيم، وجبريًّا، وبيانيًّا مفهوم نهاية الدالة د (س) عند اللانهاية للدالة النسبية.

٣-٥ تحدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة أو على فترة مغلقة.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الحادي عشر، الوحدة الثانية	تحسب قيمة الدالة عند نقطة محددة.	١) إذا علمت أن: $هـ(س) = \frac{٢١ - ٣س + ٥س^٢ - ٢س^٣}{١ - ٤س}$، فأوجد $هـ\left(-\frac{١}{٢}\right)$.
الصف الحادي عشر، الوحدة الثانية	تطبق معرفتك بأن ناتج القسمة على صفر قيمة غير معرّفة.	٢) حدد قيمة (أو قيم) س التي تكون عندها كل دالة من الدوال الآتية غير معرّفة: أ $د(س) = \frac{١}{س}$ ب $ع(س) = \frac{س + ٥}{(س - ٢)(س + ٧)}$ ج $هـ(س) = \frac{س}{س^٢ - ٤} + \frac{١}{س - ١}$

المفردات

النهاية limit

الدالة النسبية rational function

خط التقارب الرأسي vertical asymptote

خط التقارب الأفقي horizontal asymptote

الفجوة hole

الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة piecewise function

القفزة jump

الدالة المتصلة continuous function

الدالة غير المتصلة discontinuous function

الفترة المغلقة closed interval

الاتصال continuity

لماذا ندرس النهايات والاتصال؟

يُعدّ مفهوم النهايات مفهومًا أساسيًا في موضوع التفاضل والتكامل (والذي ستدرسه لاحقًا)، وهو مفهوم بدأ التفكير فيه منذ آلاف السنين، فلقد استخدم الرياضيون الأوائل موضوع النهاية للحصول على تقريب أفضل لمساحة الدائرة، ومنها لإيجاد قيمة النسبة التقريبية 'العدد π'، فنحن بحاجة إلى التفاضل والتكامل لدراسة سلوك الدوال.

يوجد منظوران رئيسيان لتفهم سلوك الدالة:

- التركيز على نقطة محددة في فترات معيّنة.
- التفكير في سلوك الدوال على المدى الطويل (التي لا نهاية لها).

إن ملاحظة خواص الدوال، وبناء الروابط بين أنواع الدوال يساعد على التعامل مع مفاهيم متقدمة.

في هذه الوحدة سندرس نهاية دالة عند نقطة، وعند اللانهاية، كما سنقوم أيضًا بدراسة مفهوم الاتصال، وسنبحثه عند نقطة وعلى فترة مغلقة. تكون بعض الدوال غير متصلة بسبب وجود خطوط تقاربية أو فجوات أو قفزات.

٣-١ نهاية الدالة عند نقطة Limit of the function at a point

تعريف النهاية

نهاية الدالة عند نقطة limit of the function at a point: هي القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغيّر من قيمة محددة.

استكشف ١

للتأكد من أن نهاية الدالة الخطيّة د (س) = ٣س هي ١٢ عندما تقترب (تؤول) قيمة س من ٤، يمكننا إنشاء جدول لقيم الدالة عندما تقترب س من ٤ من جهة اليمين (أي عندما تتناقص لتقترب من ٤)، وعندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار (أي عندما تزداد لتقترب من ٤).

١) انسخ وأكمل الجدول أدناه، حيث قيم س تقترب من ٤ من جهة اليمين (أي أكبر من ٤):

من جهة اليمين	
س	د(س) = ٣س
٤,١	١٢,٣
٤,٠١	
٤,٠٠١	
٤,٠٠٠١	

٢) انسخ وأكمل الجدول أدناه، حيث قيم س تقترب من ٤ من جهة اليسار (أي أصغر من ٤):

من جهة اليسار	
س	د(س) = ٣س
٣,٩	١١,٧
٣,٩٩	
٣,٩٩٩	
٣,٩٩٩٩	

٣) انسخ وأكمل كل عبارة من العبارات الآتية:

أ عندما تقترب س من ٤ من جهة اليمين، تقترب قيمة د(س) أكثر فأكثر من .....

ب عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، تقترب قيمة د(س) أكثر فأكثر من .....

تبيّن نتائج استكشف ١ أنه بإمكاننا أن نجعل قيمة الدالة د(س) تقترب من ١٢ بدرجة كبيرة، وذلك بأن نجعل قيم س تقترب من ٤ من جهة اليمين، ومن جهة اليسار أكثر فأكثر.

نهاية د(س) عندما تقترب س أكثر فأكثر من ٤ تساوي ١٢

تكتب النهاية من جهة اليمين تساوي ١٢ على النحو: $\underset{س \leftarrow ٤^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١٢،

وتقرأ: نهاية د (س) عندما س تقترب من (تؤول إلى) ٤ من جهة اليمين تساوي ١٢

تكتب النهاية من جهة اليسار تساوي ١٢ على النحو: $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١٢،

وتقرأ: نهاية د (س) عندما س تقترب من (تؤول إلى) ٤ من جهة اليسار تساوي ١٢

أي أن:

$\underset{س \leftarrow ٤^+}{\text{نهـــا}}$ د(س) = $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ١٢

∵ النهايتان متساويتان من الجهتَين،

∴ النهاية موجودة وتساوي ١٢

وتكتب $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١٢

نتيجة ١

إذا كان أ، ل عددَين حقيقيَين، فإن:

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ل $\Leftrightarrow$ $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ل

وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرّفة عند س = أ.

٣-١أ نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of polynomial function

الدالة كثيرة الحدود هي: دالة تحتوي على حد واحد أو أكثر لمتغير مرفوع إلى قوة صحيحة غير سالبة.

بعض الأمثلة على الدوال كثيرات الحدود:

د(س) = ٧س − ٢،

هـ(س) = ٩ + ٣س − ٥س^{٢}،

ع(س) = س^{٥} + س^{٣} + س + ١

مثـــال ١

لتكن د(س) = س^{٢} − ٦س + ١١:

أنشئ جدولَي قيم لتبيّن أن $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

الحــلّ:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٢,١	٢,٨١
٢,٠١	٢,٩٨٠١
٢,٠٠١	٢,٩٩٨٠٠١
٢,٠٠٠١	٢,٩٩٩٨٠٠٠١

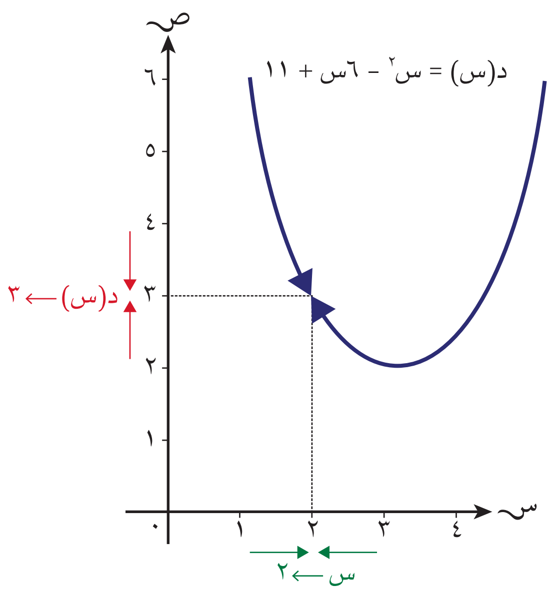
من جهة اليسار	
س	د(س)
١,٩	٣,٢١
١,٩٩	٣,٠٢٠١
١,٩٩٩	٣,٠٠٢٠٠١
١,٩٩٩٩	٣,٠٠٠٢٠٠٠١

نسجل قيم س المتناقصة لتؤول إلى ٢ من جهة اليمين، وقيم س المتزايدة لتؤول إلى ٢ من جهة اليسار.

يبيّن الجدولان أن:

- $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣
- $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣
- $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣



تمارين ٣-١أ

١) استخدم رمز النهاية لتكتب كل عبارة من العبارات الآتية:

أ) قيمة الدالة ع(س) تقترب من −٣ عندما تقترب قيمة س من ٢ من جهة اليسار.

ب) عندما تتناقص قيمة س لتقترب من ٥، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ١١

ج) تقترب ك(س) من الصفر عندما تقترب قيمة س من −١

د) عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيم الدالة د(س) تقترب من ٧، وعليه تكون د(س) تقترب من ٧ عندما تقترب س من ٤

٢) اكتب فقرة تشرح فيها معنى كل من النهايتَين الآتيتَين:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٠^+}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٢٠

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣^-}{\text{نهـــا}}$ هـ(س) = −٨

٣) انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـــا}}$ د(س) للدالة د(س) = ١٠٨ − ١٧س:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٦,١	٤,٣
٦,٠١	٥,٨٣
٦,٠٠١	
٦,٠٠٠١	

من جهة اليسار	
س	د(س)
٥,٩	٧,٧
٥,٩٩	٦,١٧
٥,٩٩٩	
٥,٩٩٩٩	

٤) انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ٩}{\text{نهـــا}}$ ك(س) للدالة ك(س) = ١٠٠ + ٥س − س^٢:

من جهة اليمين	
س	ك(س)
٩,٥	٥٧,٢٥
٩,١	
٩,٠٥	
٩,٠١	

من جهة اليسار	
س	ك(س)
٨,٥	٧٠,٢٥
٨,٩	
٨,٩٥	
٨,٩٩	

٥) أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ م(س) حيث م(س) = س^٣ − ١١س^٢ − ٧س + ٣٦

٦) أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^-}{\text{نهـــا}}$ ن(س) حيث ن(س) = ٨س − $\frac{\text{س}^٢}{٨}$

٧) أنشأ راشد جداول تبيّن أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ ت(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ ت(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

للدالة ت(س) = $\frac{٧\text{س}^٢}{١٥}$ + $\frac{\text{س}}{١٢}$ حيث أ، ب عددان صحيحان.

استخدم هذه المعلومات لتجد أصغر قيم ممكنة لـ أ، ب

٣-١ب نهاية الدالة النسبيّة Limit of a rational function

الدالة النسبيّة rational function: هي دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتين كثيرات الحدود.

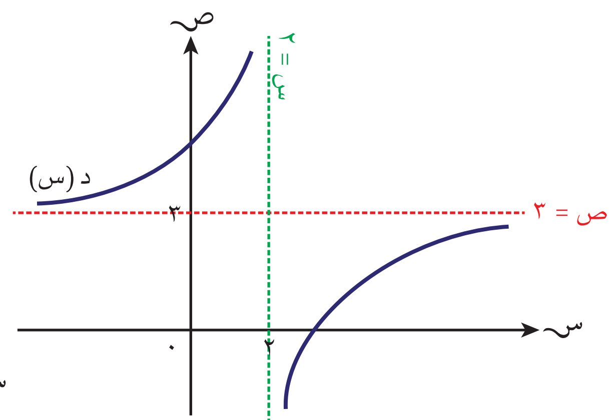
بعض الأمثلة على الدوال النسبية:

$$د(س) = \frac{٣س - ٨}{س - ٢} \quad ، \quad هـ(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} ،$$

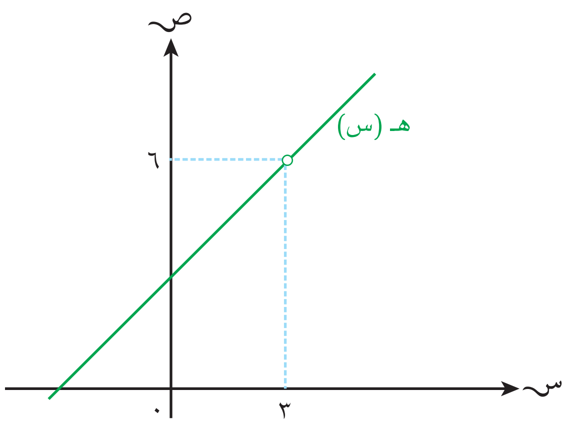
$$ع(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٩} \quad ، \quad ق(س) = \frac{٣س^{٣}}{س^{٢} + ٨}$$

استكشف ٢

فيما يأتي بيان الدالتَين $د(س) = \frac{٣س - ٨}{س - ٢}$، $هـ(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$:



د(س) غير معرفة عند س =٢، د (س) = ٣ لا حلول لها.



هـ(س) غير معرّفة عند س = ٣، هـ(س) = ٦ لا حلول لها.

لتبيّن أن الدالة $د(س) = \frac{٣س - ٨}{س - ٢}$ لا يمكن أن تساوي ٣، علينا أن نبيّن أن المعادلة د (س) = ٣ لا حلول لها.

١) بيّن أن الدالة د (س) = ٣ لا حلول لها.

لتبيّن أن الدالة $هـ(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ لا يمكن أن تساوي ٦، علينا أن نبيّن أن المعادلة د (س) = ٦ لا حلول لها.

٢) أوجد حل المعادلة هـ(س) = ٦، ثم برّر أنه غير مقبول.

٣) عند أي قيمة (أو قيم) لـ س تكون كل دالة من الدالتين الآتيتين غير معرّفة؟ وهل يوجد قيم لا يمكن لكل دالة منهما أن تكون مساوية لها أبدًا؟

أ $ع(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٩}$

ب $ق(س) = \frac{٣س^{٣}}{س^{٢} + ٨}$

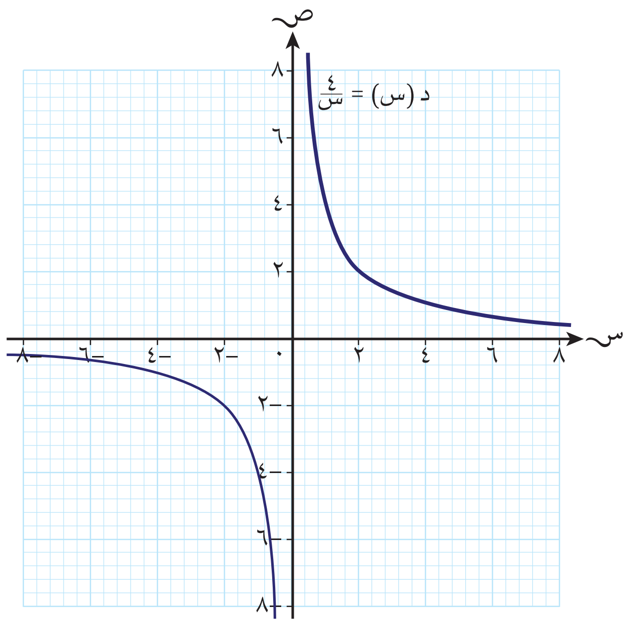
ملاحظة:

المنحنيان في بيان الدالة د (س) يقتربان أكثر فأكثر من المستقيمين المنقطين، ولكن لا يصلان إليهما أبدًا.
يسمى كل من هذين المستقيمين **بخط التقارب asymptote**، ويشير خط التقارب الرأسي إلى قيم س التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

النقطة الناقصة في منحنى الدالة هـ(س) تعرف **بالفجوة hole**.

مثال ٢

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالة د (س) = $\frac{٤}{س}$:



أ استخدم الجدولَين أدناه لتبيّن أن $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ د (س) غير موجودة.

من جهة اليمين	
س	د (س)
١	
٠,٥	
٠,٠٥	
٠,٠٠٥	

من جهة اليسار	
س	د (س)
-١	
-٠,٥	
-٠,٠٥	
-٠,٠٠٥	

ب اشرح، باستخدام الرموز، سبب عدم وجود $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س).

ج اكتب معادلتَي خطي التقارب الرأسي والأفقي.

الحــلّ:

أ

من جهة اليمين	
س	د (س)
١	٤
٠,٥	٨
٠,٠٥	٨٠
٠,٠٠٥	٨٠٠

كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليمين، فإن قيمة د (س) تكبر. يبدو أنه لا يوجد حدّ أعلى للدالة د (س).

يمكن أن نقول: عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، فإن $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ د (س) = ∞

من جهة اليسار	
س	د (س)
−١	−٤
−٠,٥	−٨
−٠,٠٥	−٨٠
−٠,٠٠٥	−٨٠٠

كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليسار، فإن قيمة د (س) تصغر (تأخذ قيمة سالبة أكبر). يبدو أنه لا يوجد حدّ أدنى للدالة د (س).

يمكن أن نقول: عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، فإن $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ د (س) = $-\infty$

ب ∵ $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ د (س) ≠ $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ د (س)

∴ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) غير موجودة

لا توجد نهاية للدالة عند الصفر لأن قيم د (س) تتناقص أكثر فأكثر كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليسار، وتزداد أكثر فأكثر كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليمين. أي لا تقترب قيم د (س) من قيمة محددة عندما تقترب س من الصفر.

ج س = ٠

ص = ٠

يوجد خط التقارب الرأسي عند قيمة س = ٠ حيث تكون نهاية الدالة غير معرّفة.

يوجد خط التقارب الأفقي عند القيمة التي لا يمكن للدالة د (س) أن تتحقق: نعرف ذلك بسبب أن المعادلة د (س) = ٠ لا حلول لها.

يمكن لمنحنيات بعض الدوال أن تتضمن "فجوات" كما رأيت سابقًا في منحنى الدالة

هـ (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

مثلًا، لتكن الدالة د (س) = $\frac{س^٢ - ٢س}{س}$

إذا حاولنا تبسيط الدالة باستخدام التحليل إلى العوامل والاختصار، فسنحصل على:

د (س) = $\frac{س (س - ٢)}{س}$ = س − ٢

إذا قمنا بذلك نكون قد أهملنا أن الدالة د (س) غير معرّفة عندما س = ٠

منحنى الدالة $ص = \frac{س^{٢} - ٢س}{س}$، والدالة ص = س − ٢ متشابهان:

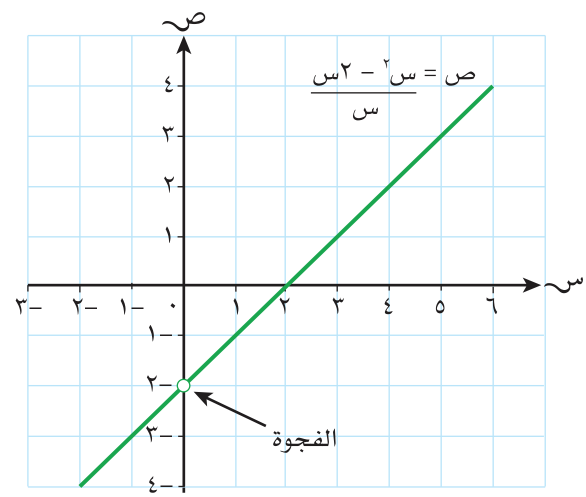
- كل منهما مستقيم.
- ميل كل منهما يساوي ١
- مقطع كل منهما من المحور الصادي يساوي −٢

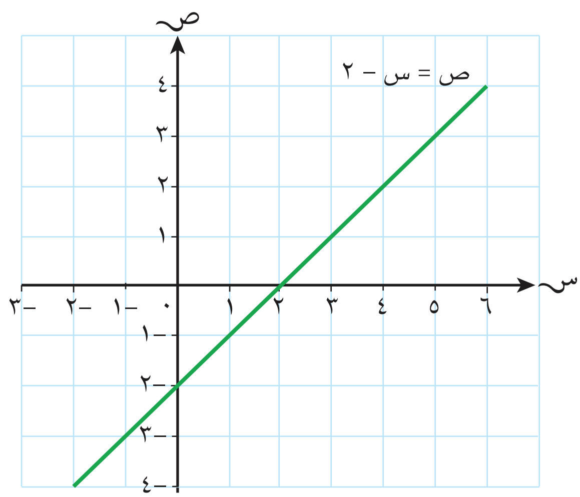
ولكن يوجد فرق واحد مهم بينهما، وهو أنه يوجد في منحنى الدالة

$د(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{س}$ فجوة عند س = ٠

يمكن إيجاد الإحداثي الصادي للفجوة بتعويض س = ٠ في معادلة المستقيم ص = س − ٢،
أي عند النقطة (٠، −٢).

قارن التمثيلين البيانيين الموضحين أدناه:





يمكن تطبيق الوضعية نفسها في الدالة $د(س) = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$

إذا استخدمنا تبسيط الدالة فسنحصل على:

$$د(س) = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢} = \frac{(٢س + ٣)(س - ٢)}{س - ٢} = ٢س + ٣$$

إذا قمنا بذلك نكون قد أهملنا أن الدالة د(س) غير معرّفة عندما س = ٢

منحنى الدالة $ص = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$، ومنحنى والدالة ص = ٢س + ٣ متشابهان:

- كل منهما مستقيم.
- ميل كل منهما يساوي ٢
- مقطع كل منهما من المحور الصادي يساوي ٣

ولكن يوجد فرق واحد مهم بينهما، وهو أنه يوجد في منحنى الدالة

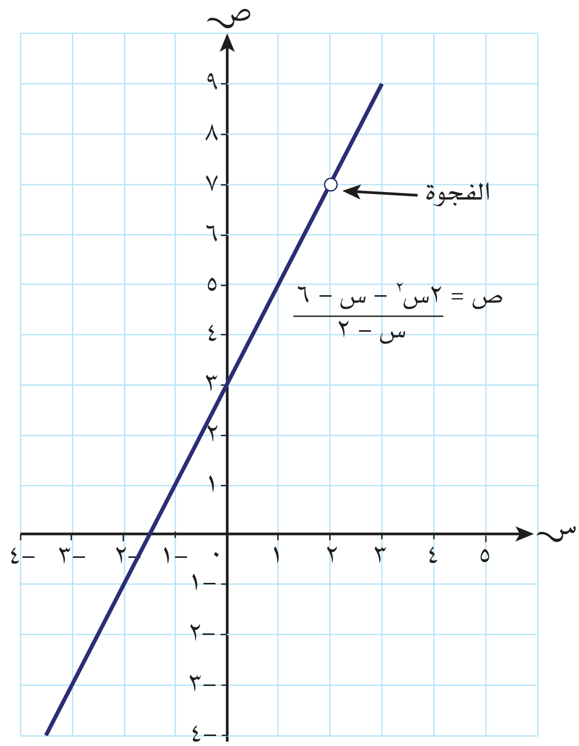
$د(س) = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$ (فجوة) عند س = ٢ لأن الدالة غير معرّفة عند س = ٢

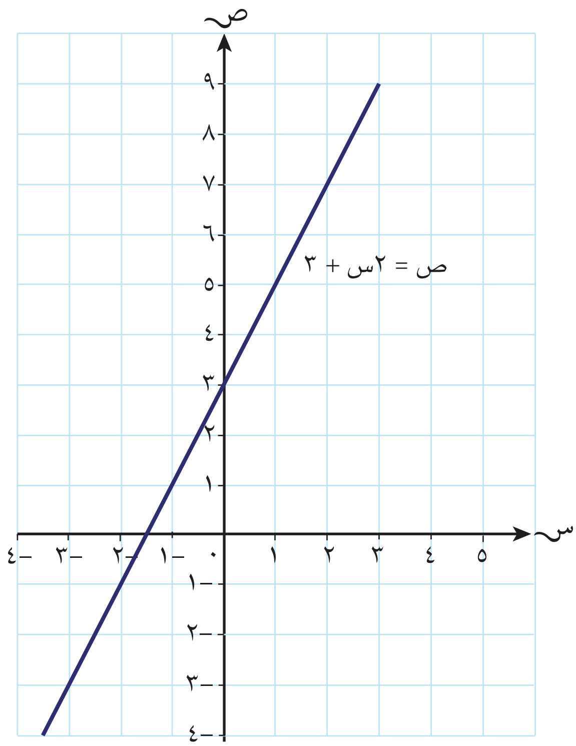
مُساعَدة

كن حذرًا عند استخدام البرمجيات الإلكترونية لرسم منحنيات الدوال النسبية. مثلًا، إذا حاولت رسم منحنى الدالة $د(س) = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$، فمن المرجح أن يظهر المستقيم ص = ٢س + ٣ من دون فجوة عند س = ٢

يمكن إيجاد الإحداثي الصادي للفجوة بتعويض $س = ٢$ في معادلة المستقيم $ص = ٢س + ٣$،
أي عند النقطة (٢، ٧).

قارن التمثيلين البيانيين الموضحين أدناه:





مثال ٣

فيما يلي جدول القيم للدالة النسبية $د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$:

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	-٣	-٢	-١	٠	١	غير معرّفة	٣	٤	٥	٦	٧

أ أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في منحنى الدالة د(س).

ب بيّن أن $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) موجودة، وأوجد قيمتها.

الحـلّ:

أ د(س) غير معرّفة عند س = ١

تكون الدالة غير معرّفة عندما يكون المقام مساويًا للصفر.

$$\frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{(س + ١)(س - ١)}{س - ١} = س + ١$$

التمثيل البياني للدالة د(س) هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم $ص = س + ١$،
مع وجود فجوة عند $س = ١$
عندما $س = ١$، $ص = ١ + ١ = ٢$

عوّض الإحداثي السيني للفجوة في معادلة المستقيم $ص = س + ١$

إحداثيات الفجوة هي (١، ٢)

ب

من جهة اليمين	
س	$د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$
١,١	٢,١
١,٠١	٢,٠١
١,٠٠١	٢,٠٠١
١,٠٠٠١	٢,٠٠٠١

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١ بالتناقص من جهة اليمين، نجد أن $\lim_{س \to ١^+} د(س) = ٢$

من جهة اليسار	
س	$د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
٠,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩

إذا جعلنا قيمة س تقترب من ١ بالتزايد من جهة اليسار، نجد أن $\lim_{س \to ١^-} د(س) = ٢$

$\lim_{س \to ١} د(س)$ موجودة لأن $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^-} د(س)$

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = ٢$

يتعامل المثال الآتي مع الدالة عندما تكون معرّفة عند س = أ، ولكن نهايتها لا تساوي قيمة الدالة عندما س = أ

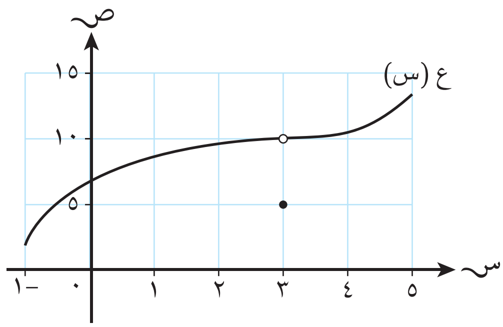
لاحظ أن الفجوة أو القفزة (واحدة منها موجودة في التمثيل البياني) تشير إلى أن النقطة غير متضمنة في التمثيل البياني وعدم وجودها يشير إلى أن النقطة متضمنة في التمثيل البياني.

مثـــال ٤

باستخدام التمثيل البياني المقابل:

أ أوجد ع (٣).

ب قدّر قيمة $\lim\limits_{س \to ٣}$ ع(س).



الحــلّ:

أ ع(٣) = ٥

عندما س = ٣، ص = ع(٣) = ٥

ب $\lim\limits_{س \to ٣^+}$ ع(س) = ١٠

عندما تقترب س من ٣ من جهة اليمين، فإن ع(س) تقترب من قيمة تساوي تقريبًا ١٠

$\lim\limits_{س \to ٣^-}$ ع(س) = ١٠

عندما تقترب س من ٣ من جهة اليسار، فإن ع(س) تقترب من قيمة تساوي تقريبًا ١٠

∴ $\lim\limits_{س \to ٣}$ ع(س) = ١٠

النهايتان من جهة اليمين و ومن جهة اليسار متساويتان،
∴ نهاية الدالة ع(س) عندما تؤول س إلى ٣ موجودة وتساوي تقريبًا ١٠

تمارين ٣-١ب

١) منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة.

أ إذا علمت أن د (س) = $\frac{٢س - ١٠}{س - ٥}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

ب إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٨س + ٢س^٢}{٤ + س}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

ج إذا علمت أن ك(س) = $\frac{س^٢ + ٣س - ١٨}{س - ٣}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة ك(س) غير معرّفة.

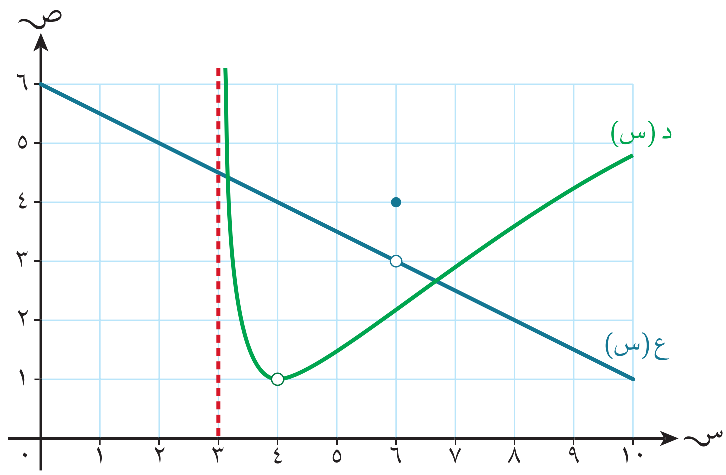
٢) إحداثيات الفجوة.

د إذا علمت أن ل(س) = $\frac{٦س^٢ - ٢س - ٢٨}{س + ٢}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة ل(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

٢) يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالتين د (س)، ع(س) على الفترة $٠ \leqslant \text{س} \leqslant ١٠$:



أ استخدم التمثيلَين البيانيَين حيث أمكن لتقدّر قيمة:

١) ع (٦)

٢) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٦}$ ع(س)

٣) د (٤)

٤) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٤}$ د (س)

ب علامَ يدلك المستقيم المنقط الذي معادلته س = ٣ حول تمثيل الدالة د(س)؟

٣) لتكن الدالة هـ (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٥}{\text{س} - ١}$

الجدولان الآتيان يبيّنان عمل أحد الطلاب الذي أراد أن يجد نهاية الدالة عندما تقترب س من ٢ من جهة اليمين، وعندما تقترب س من ٢ من جهة اليسار.

من جهة اليمين	
س	هـ(س)
٢,١	٥,١٣٧٣
٢,٠١	٥,٠١٠٤
٢,٠٠١	٥,٠٠١٠
٢,٠٠٠١	أ

من جهة اليسار	
س	هـ(س)
١,٩	٤,٩٤٣٣
١,٩٩	٤,٩٩٠٤
١,٩٩٩	٤,٩٩٩٠
١,٩٩٩٩	ب

أ استخدم الجدولَين أعلاه لتجد قيمة أ، وقيمة ب مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية.

ب عبّر عن ما تلاحظه حول قيمة $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}$ هـ(س)، و$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}$ هـ(س).

ج قدّر قيمة $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢}$ هـ(س).

٤) إذا كانت الدالة ع (س) = $\frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٤}$:

أ اشرح سبب أن الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤

ب استخدم جدولًا لتجد نهاية ع (س) عندما تقترب س إلى ٤ من:

١) جهة اليسار.

٢) جهة اليمين.

ج أعطِ سبب وجود نهاية الدالة ع(س) عند س = ٤

٥) إذا كانت الدالة د (س) = $\frac{٢س - ١}{س}$:

أ انسخ وأكمل الجدولَين الآتيَين اللذَين يبيّنان قيمة د (س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، ومن جهة اليمين:

من جهة اليمين	
س	د (س)
٠,١	
٠,٠٥	
٠,٠١	
٠,٠٠٥	
٠,٠٠١	
٠,٠٠٠٥	

من جهة اليسار	
س	د (س)
٠,١−	
٠,٠٥−	
٠,٠١−	
٠,٠٠٥−	
٠,٠٠١−	
٠,٠٠٠٥−	

ب اذكر ما إذا كان ممكنًا إيجاد أي نهاية من النهايتَين الآتيتَين، وأعطِ سببًا لكل إجابة:

١) $\lim_{س \to ٠^+}$ د (س).

٢) $\lim_{س \to ٠^-}$ د (س).

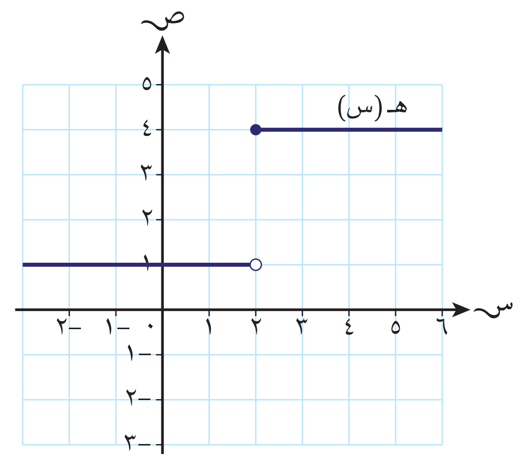
ج ماذا تستنتج عن $\lim_{س \to ٠}$ د (س)؟

٣-١ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة Limit of a piecewise function

تتكوّن الدالة **المعرّفة بأكثر من قاعدة** piecewise function، من جزأَين أو أكثر. يمكن أن يحوي منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة على مستقيمات أو منحنيات أو مزيج من الاثنين. قد يحوي أيضًا على فجوات و/أو **قفزات** jumps، وتحدث القفزات عندما تتغير قيمة الدالة بشكل كبير.

مثـال ٥

يبيّن الرسم الآتي جزءًا من منحنى الدالة هـ(س)، حيث س < ٢ أو س ⩾ ٢



أ استخدم الرسم لتقدر قيمة كلّ من:

١) $\lim\limits_{س \to -١}$ هـ(س).

٢) $\lim\limits_{س \to ٤,٧}$ هـ(س).

ب بيّن أن $\lim\limits_{س \to ٢}$ هـ(س) غير موجودة.

الحـلّ:

أ ١) $\lim\limits_{س \to -١}$ هـ(س) = ١

باستخدام منحنى الدالة يمكن أن نجد أن: $\lim\limits_{س \to -١^{+}}$ هـ(س) = ١،

$\lim\limits_{س \to -١^{-}}$ هـ(س) = ١

٢) $\lim\limits_{س \to ٤,٧}$ هـ(س) = ٤

باستخدام منحنى الدالة يمكن أن نجد أن: $\lim\limits_{س \to ٤,٧^{+}}$ هـ(س) = ٤،

$\lim\limits_{س \to ٤,٧^{-}}$ هـ(س) = ٤

ب نهــــا (س ← ٢⁺) هـ(س) = ٤

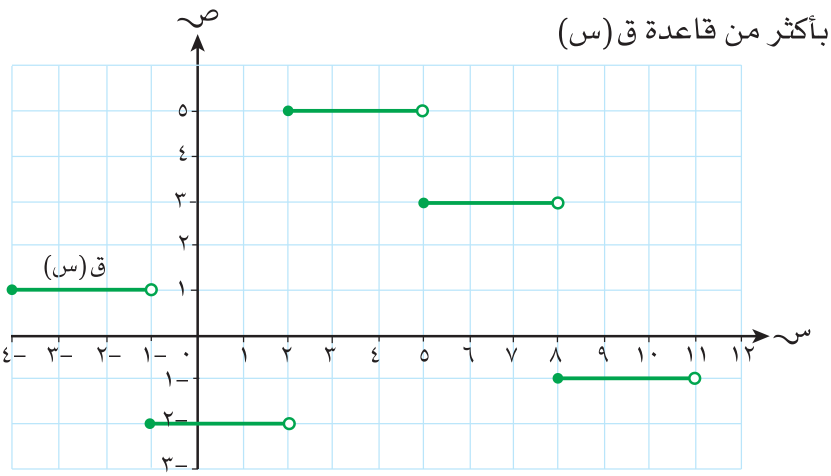
نهــــا (س ← ٢⁻) هـ(س) = ١

∵ نهــــا (س ← ٢⁺) هـ(س) ≠ نهــــا (س ← ٢⁻) هـ(س)

∴ نهــــا (س ← ٢) هـ(س) غير موجودة.

مثــال ٦

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ق(س) في المجال −٤ ⩽ س < ١١



أ أوجد قيم س حيث ق(س) > ٢

ب استخدم المنحنى لإيجاد قيمة ق(٦) − ق(−١)

ج إذا علمت أن ب إحدى القيم في مجال الدالة ق(س)، وأن نهــــا (س ← ب) ق(س) غير موجودة، فأوجد قائمة بجميع قيم ب الممكنة.

الحــلّ:

أ ٢ ⩽ س < ٨

ق(س) = ٥ عندما ٢ ⩽ س < ٥
ق(س) = ٣ عندما ٥ ⩽ س < ٨
نقوم بدمج مجموعتي قيم س.

ب ق(٦) − ق(−١) = ٣ − (−٢)
= ٥

ق(٦) = ٣
ق(−١) = −٢

ج النهايات من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساوية عند س = −١، ٢، ٥، ٨
∴ ب ∈ {−١، ٢، ٥، ٨}

تكون نهــــا (س ← ب) ق(س) غير موجودة عندما تكون النهاية من جهة اليمين والنهاية من جهة اليسار غير متساويتين، أي أن
نهــــا (س ← ب⁺) ق(س) ≠ نهــــا (س ← ب⁻) ق(س)

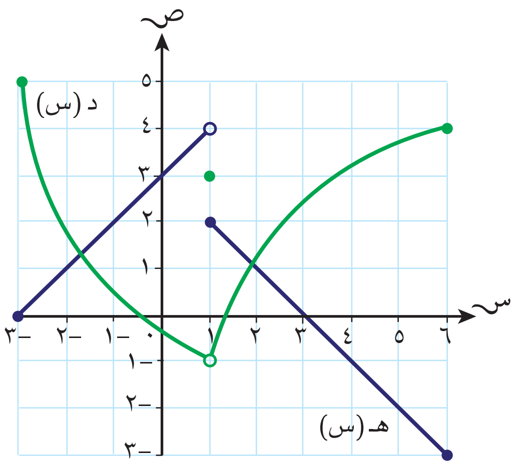
مثــال ٧

يبيّن الشكل أدناه منحنى الدالتَين المعرّفتين بأكثر من قاعدة د (س)، هـ(س) في المجال −٣ ⩽ س ⩽ ٦

أ استخدم المجال المعطى في الرسم لتجد المدى لكل مما يأتي:

١) د (س)

٢) هـ(س)



ب بيّن أن:

١) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة.

٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) غير موجودة.

ج أوجِد قيمة العدد الصحيح أ إذا علمت أن

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}$ د (س) + $\underset{\text{س} \to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ١

الحــلّ:

أ ١) −١ < د (س) ⩽ ٥

د (س) = −١ غير معرّفة
د (س) = ٥ متضمنة

٢) −٣ ⩽ هـ(س) < ٤

هـ(س) = −٣ متضمنة
هـ(س) = ٤ غير معرّفة

ب ١) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}$ د (س) = −١

$\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}}$ د (س) = −١

النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار متساويتان.

∴ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = −١ موجودة

٢) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٢

$\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٤

النهايتان من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساويتَين.

∴ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) غير موجودة.

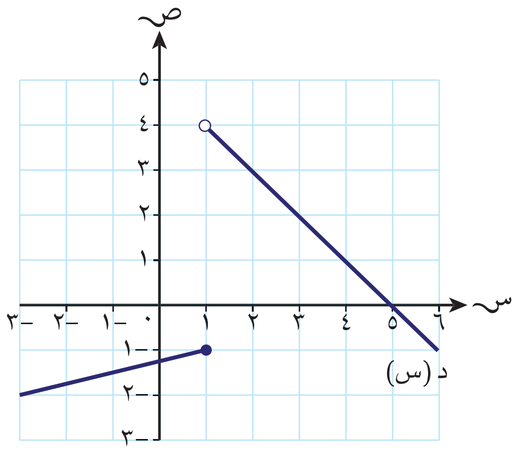
ج $\underset{\text{س} \to ٦^-}{\text{نهـا}}$ د (س) + $\underset{\text{س} \to ٦^-}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٤ + (−٣) = ١

باستخدام منحنى الدالتين:
$\underset{\text{س} \to ٦^-}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٤،
$\underset{\text{س} \to ٦^-}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = −٣

∴ أ = ٦

تمارين ٣-١ج

١) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة في المجال -٣ ⩽ س ⩽ ٦:



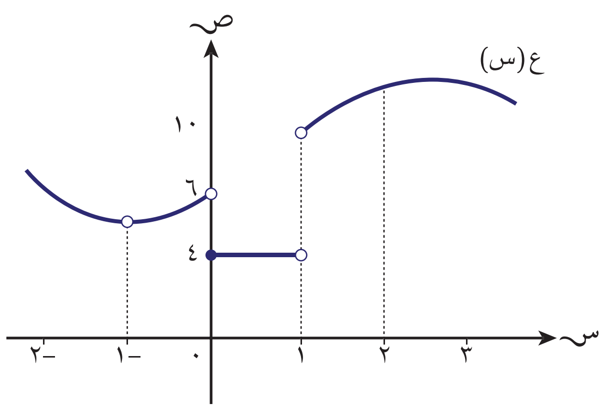
أ حدد مدى الدالة د (س) في المجال المعطى.

ب بيّن أن:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٥}$ د (س) موجودة.

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ د (س) غير موجودة.

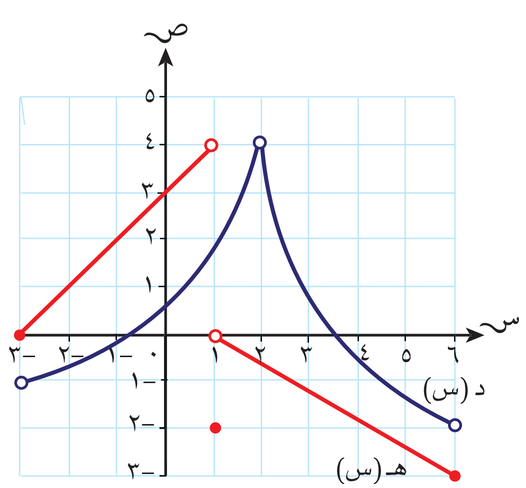
٢) يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع (س):
تمّ رسم مستقيمات رأسية لمنحنى الدالة من المحور السيني عند س = -١، س = ٠، س = ١، س = ٢



أ عند أي من القيم الأربع لـ س تكون نهاية الدالة ع (س) موجودة؟

ب لكل قيمة من قيم س غير الموجودة في إجابة الجزئية (أ)، أعطِ سبب عدم وجود نهاية الدالة ع (س) عندها.

٣) يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د (س)، هـ (س):
الدالة هـ (س) معرّفة في المجال -٣ ⩽ س ⩽ ٦



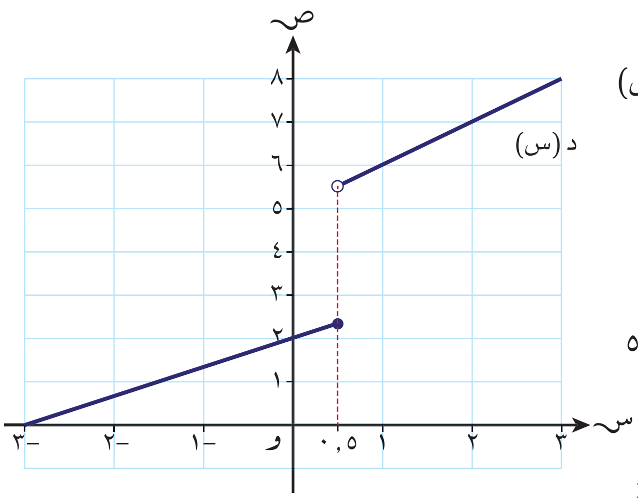
أ أوجِد مجال الدالة د (س).

ب هل $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ (س) موجودة؟ وضح إجابتك.

٤) يبيّن الشكل المقابل أجزاءً من منحنى الدالة د (س):

يمر الجزء الأول (العلوي) من بيان الدالة ص = د (س) بالنقطتَين (١، ٦)، (٣، ٨).

يمر الجزء الثاني (السفلي) من منحنى الدالة ص = د (س) بالنقطتَين (-٣، ٠)، (٠، ٢).



أ ١) بيّن أن معادلة الجزء الأول هي ص = س + ٥

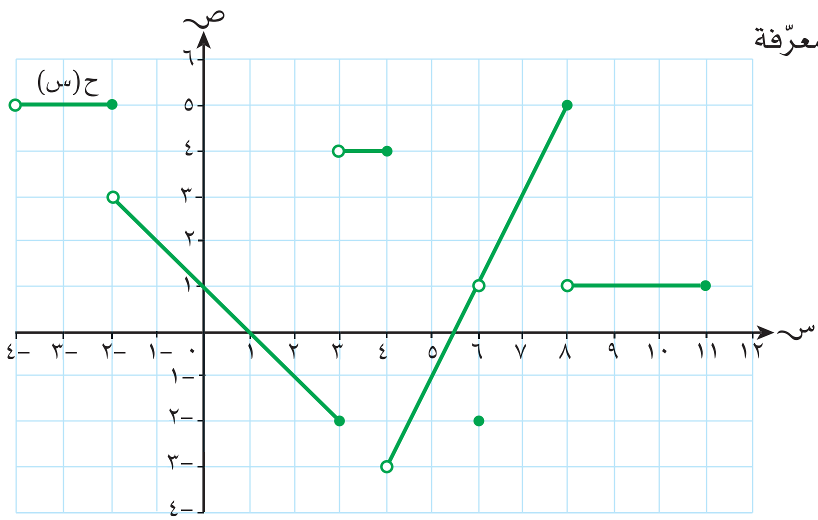
٢) أوجِد $\lim\limits_{\text{س} \to {}^{+}\text{٠,٥}}$ د (س).

ب ١) أوجِد معادلة الجزء الثاني من منحنى الدالة في صورة ص = م س +جـ.

٢) أوجِد $\lim\limits_{\text{س} \to {}^{-}\text{٠,٥}}$ د (س).

ج ما دلالة إجابتَيك في الجزئيّتَين أ (٢)، ب (٢)؟

٥) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ح(س) في المجال -٤ < س ⩽ ١١



أ أوجد مدى الدالة في المجال المعطى.

ب استخدم المنحنى لإيجاد قيمة ح(-٢)، ح (٣).

ج إذا كانت -٤ < ك < ١١،

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{ك}}$ ح(س) غير موجودة.

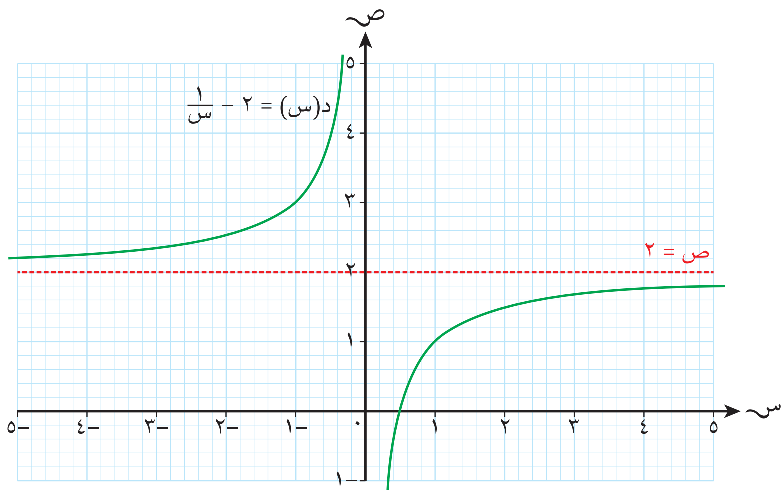
فأوجد قائمة بجميع قيم ك الممكنة.

د أوجد قيمة ل، حيث ح(ل)، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ل}}$ ح(س) كلاهما موجودتان، ولكن غير متساويتَين.

٣-٢ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س ← ±∞)
limit of a rational function at infinity

في هذا الدرس سنتعلّم ما يحدث لقيم الدالة عندما تكبر قيمة س (تصبح س أقرب إلى **موجب اللانهاية** **positive infinity**، ويعبّر عنها في صورة س ← +∞)، وعندما تصغر قيمة س (تصبح س أقرب إلى **سالب اللانهاية** **negative infinity**، ويعبّر عنها في صورة س ← −∞).

إليك مثالًا على منحنى الدالة د (س) = ٢ − $\frac{١}{س}$:



يوجد لمنحنى الدالة **خط تقارب رأسي** **vertical asymptote** عند س = ٠؛ لأن د (س) = ٢ − $\frac{١}{س}$ ليست معرّفة عند س = ٠، لذلك فإن منحنى الدالة يقترب أكثر فأكثر من خط التقارب الرأسي، ولكن لا يلمسه أبدًا.

ويوجد **خط تقارب أفقي** **horizontal asymptote** عند ص = ٢؛ لأن الدالة لا يمكن أن تساوي ٢ مهما كانت قيمة س كبيرة أو صغيرة.

∴ $\lim\limits_{س \to -\infty}$ د (س) = ٢، $\lim\limits_{س \to +\infty}$ د (س) = ٢

يمكن تأكيد ذلك في جدولَي القيم الآتيَين:

من جهة اليمين	
س	د (س) = ٢ − $\frac{١}{س}$
١	١
١٠	١,٩
١٠٠	١,٩٩
١٠٠٠	١,٩٩٩
١٠٠٠٠	١,٩٩٩٩

من جهة اليسار	
س	د (س) = ٢ − $\frac{١}{س}$
−١	٣
−١٠	٢,١
−١٠٠	٢,٠١
−١٠٠٠	٢,٠٠١
−١٠٠٠٠	٢,٠٠٠١

يظهر من الجدولَين أنه يمكن أن نجعل قيمة د (س) قريبة من ٢ بدرجة كبيرة، وذلك بأن نجعل س تأخذ قيمًا كبيرة جدًا (تقترب من +∞)، أو قيمًا صغيرة جدًا (تقترب من −∞).

مُساعَدة

توجد الخطوط التقاربية عند القيم التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

مُساعَدة

يتقاطع خط التقارب الأفقي مع المحور الصادي عند ص = ك عندما $\lim\limits_{س \to -\infty}$ د (س) = ك

النهاية تساوي ٢؛ لأن $\lim_{س \to +\infty} \frac{١}{س} = ٠$، $\lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س} = ٠$،

وعليه د (س) تقترب أكثر فأكثر من ٢ (من جهتَي اليمين واليسار).

بما أن النهايتين متساويتان من جهتَي اليمين واليسار، يمكن القول إن النهاية عند اللانهاية موجودة : $\lim_{س \to \infty}$ د (س) = ٢

تعلمت طرقًا لإيجاد قيمة النهاية عند اللانهاية منها: التمثيل البياني للدالة، وإنشاء جداول القيم. لكن يمكنك كذلك استخدام الطريقة الجبرية كالآتي:

إذا أمكن كتابة دالة في صورة دالة نسبية، **فيمكن أن نقسم كلًا من البسط والمقام على المتغير ذي القوة الأكبر في الدالة.**

نقوم بذلك لأنه كلما كبرت قيمة س فإن قيمة أكبر قوة لـ س تصبح أكثر دلالة لقيمة الدالة من استخدام القوة الصغرى لـ س.

مما سبق نجد أن $\frac{١}{س}$، $\frac{١}{س^٢}$، $\frac{١}{س^٣}$ تقترب من الصفر كلما كبرت أو صغرت قيمة س، أي $س \to \pm\infty$.

نتيجة ٢

لكل قيم ن > ٠، أ عدد حقيقي:

$$\lim_{س \to +\infty} \frac{أ}{س^ن} = ٠ ،\quad \lim_{س \to -\infty} \frac{أ}{س^ن} = ٠$$

مثـــال ٨

أوجِد كلًا مما يأتي:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ٩}{٥ - ٣س}$ **ب** $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢ + ٣}{٣س^٢ + س}$ **ج** $\lim_{س \to \infty} \frac{١٢س^٤}{س^٣ - ٧س^٤}$

الحـلّ:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ٩}{٥ - ٣س}$ أكبر قوة لـ س هي ١، لذا اقسم البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٢س}{س} + \frac{٩}{س}}{\frac{٥}{س} - \frac{٣س}{س}}$ $\lim_{س \to \infty} \frac{٩}{س} = ٠$، $\lim_{س \to \infty} \frac{٥}{س} = ٠$

$= \frac{٢ + ٠}{٠ - ٣}$

$= -\frac{٢}{٣}$

ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢ + ٣}{٣س^٢ + س}$

أكبر قوة لـ س هي ٢، لذا اقسم البسط والمقام على $س^٢$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٤ + \frac{٣}{س^٢}}{٣ + \frac{١}{س}}$

$\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢} = ٠$، $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$

$= \frac{٤ + ٠}{٣ + ٠}$

$= \frac{٤}{٣}$

ج $\lim_{س \to \infty} \frac{١٢س^٤}{س^٣ - ٧س^٤}$

أكبر قوة لـ س هي ٤، لذا اقسم البسط والمقام على $س^٤$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{١٢س^٤}{س^٤}}{\frac{س^٣}{س^٤} - \frac{٧س^٤}{س^٤}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{١٢}{\frac{١}{س} - ٧}$

$\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$

$= \frac{١٢}{٠ - ٧}$

$= - \frac{١٢}{٧}$

في الجزئيات الثلاث من مثال ٧، لاحظ النواتج الآتية:

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ٩}{٥ - ٣س} = \frac{٢}{-٣} = - \frac{٢}{٣}$

ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢ + ٣}{٣س^٢ + س} = \frac{٤}{٣}$

ج) $\lim_{س \to \infty} \frac{١٢س^٤}{س^٣ - ٧س^٤} = - \frac{١٢}{٧}$

مما سبق نلاحظ أنه عندما تتساوى أكبر قوة في البسط مع أكبر قوة في المقام، فإن ناتج النهاية يساوي النسبة بين معامل أكبر قوة في البسط، ومعامل أكبر قوة في المقام.

مثـال ٩

أ أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما س ← ∞ :

١) $د(س) = \frac{٢س - ١}{٣س^٢ + ٧}$

٢) $هـ(س) = \frac{٥س^٣ + س}{س^٢ + ٧}$

ب أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما س ← −∞ :

١) $ق(س) = \frac{٥س - ٩س^٢}{٦س^٢ + ٤}$

٢) $ع(س) = \frac{٦س^٥ + ٣س - ٥}{س - ٣س^٢ + ٨س^٦}$

٣) $م(س) = \frac{٧س^٣ - ٧}{س^٢ - ١}$

الحـلّ:

أ ١) $\lim_{س \to ∞} \frac{٢س - ١}{٣س^٢ + ٧} = \frac{٠}{٣} = ٠$

أكبر قوة لـ س هي ٢
معامل $س^٢$ في البسط هو ٠
ومعامل $س^٢$ في المقام هو ٣

٢) $\lim_{س \to ∞} \frac{٥س^٣ + س}{س^٢ + ٧} = \frac{٥}{٠}$

النهاية غير موجودة.

أكبر قوة لـ س هي ٣
معامل $س^٣$ في البسط هو ٥
ومعامل $س^٣$ في المقام هو ٠

ب ١) $\lim_{س \to -∞} \frac{٥س - ٩س^٢}{٦س^٢ + ٤} = \frac{-٩}{٦} = -\frac{٣}{٢}$

أكبر قوة لـ س هي ٢
معامل $س^٢$ في البسط هو −٩
معامل $س^٢$ في المقام هو ٦

٢) $\lim_{س \to -∞} \frac{٦س^٥ + ٣س - ٥}{س - ٣س^٢ + ٨س^٦}$

$= \lim_{س \to -∞} \frac{س^٦ + ٦س^٥ + ٣س - ٥}{س - ٣س^٢ + ٨س^٦} = \frac{٠}{٨} = ٠$

أكبر قوة لـ س هي ٥
معامل $س^٦$ في البسط هو ٦
معامل $س^٦$ في المقام هو ٨

٣) $\lim_{س \to -∞} \frac{٧س^٣ - ٧}{س^٢ - ١} = \frac{٧}{٠}$

النهاية غير موجودة.

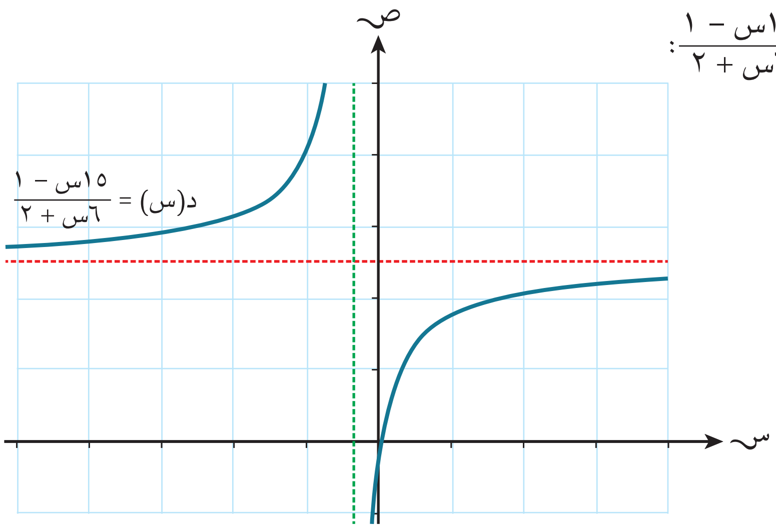
أكبر قوة لـ س هي ٣
معامل $س^٣$ في البسط هو ٣
ومعامل $س^٣$ في المقام هو ٠

لاحظ النتائج الآتية:

- **إذا كانت أعلى قوة في البسط أكبر من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ← ±∞ تكون غير موجودة.**
- **إذا كانت أعلى قوة في البسط أقل من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ← ±∞ تساوي ٠ (صفرًا).**

مثال ١٠

يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة د(س) = $\frac{١٥س - ١}{٦س + ٢}$:



أ) أوجِد معادلة كلّ مما يأتي:

١) خط التقارب الرأسي.

٢) خط التقارب الأفقي.

ب) تحقق من معادلة خط التقارب الأفقي باستخدام جدول القيم.

الحـلّ:

أ) ١) ٦س + ٢ = ٠

س = $-\frac{١}{٣}$

∴ معادلة خط التقارب الرأسي هي س = $-\frac{١}{٣}$

تكون الدالة غير معرّفة عندما يكون مقام هذه الدالة النسبية مساويًا للصفر.

٢) $\lim_{س \to +\infty} \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢} = \frac{١٥}{٦} = \frac{٥}{٢}$

$\lim_{س \to -\infty} \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢} = \frac{١٥}{٦} = \frac{٥}{٢}$

∴ معادلة خط التقارب الأفقي هي ص = $\frac{٥}{٢}$

ب

س	$د(س) = \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢}$
٠	−٠,٥
١	١,٧٥
١٠	٢,٤٠٣
١٠٠	٢,٤٩٠
١٠٠٠	٢,٤٩٩

$\lim\limits_{س \to +\infty}$ نهـا د(س) = ٢,٥

س	$د(س) = \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢}$
٠	−٠,٥
−١	٤
−١٠	٢,٦٠٣
−١٠٠	٢,٥١٠
−١٠٠٠	٢,٥٠١

$\lim\limits_{س \to -\infty}$ نهـا د(س) = ٢,٥

∴ معادلة خط التقارب الأفقي هي ص = $\frac{٥}{٢}$

للتأكد من معادلة خط التقارب الأفقي نستخدم جداول القيم لتبيان أن النهاية عند اللانهاية موجودة، وذلك بسبب

نهـا د(س) (س ← +∞) = نهـا د(س) (س ← −∞)

تمارين ٣-٢

١) أوجِد نهاية كل دالة من الدوال الآتية عند س ← ±∞:

أ) $د(س) = \frac{٧س^{٢} - ٣س}{س^{٢}}$

ب) $د(س) = \frac{١ + ٥س - ٤س^{٣}}{٢س^{٣}}$

ج) $د(س) = \frac{٩س + ٧}{٤ + ٣س}$

د) $د(س) = \frac{١٠ - ٢س}{٤س + ٣}$

هـ) $د(س) = \frac{٥٢س^{٢} + ٧س}{١٣س^{٢} - ١١}$

و) $د(س) = \frac{١٢س^{٤} + ٩}{٧س^{٣} - ٥س^{٤}}$

ز) $د(س) = \frac{٥}{س + ٢}$

ح) $د(س) = \frac{٥ + ٣س - ٥س^{٢} - ٢٤س^{٣}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$

ط) $د(س) = \frac{٤ + ٣س}{٢س^{٣}}$

ي) $د(س) = \frac{٧س^{٩}}{٣س^{٥} - ١١س^{٣} + س}$

٢) لتكن الدالة $د(س) = \frac{٤}{س} - س$:

أ) اكتب العبارة $\frac{٤}{س} - س$ في صورة نسبية.

ب) بيّن أن $\lim_{س \to \infty} \frac{٤}{س} - س$ غير موجودة.

٣) إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{١٠٠س^{٢} - ٧س}{٥ + (أس - ٣)^{٢}} = ٢٥$، فأوجِد قيم أ .

٤) إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{ت س^{٥} - ٧س^{٣}}{١٣ - \frac{س^{٥}}{٣}} = \frac{٣}{٤}$ ، فأوجِد قيمة ت.

٣-٣ خواص النهايات properties of limits

يوجد عدد من الخواص التي تساعدنا على حساب نهايات الدوال دون أن نحسبها خطوة خطوة كل مرة.

نتيجة ٣

إذا كان ك عددًا حقيقيًا، أ ينتمي إلى مجال كل من د (س)، ع (س).

وكانت $\lim\limits_{س \to أ}$ د (س)، $\lim\limits_{س \to أ}$ ع (س) موجودتَين، فإن:

١) $\lim\limits_{س \to أ} \left(ك\ د(س)\right) = ك \lim\limits_{س \to أ} د(س)$

٢) $\lim\limits_{س \to أ} \left(د(س) + ع(س)\right) = \lim\limits_{س \to أ} د(س) + \lim\limits_{س \to أ} ع(س)$

٣) $\lim\limits_{س \to أ} \left(د(س) - ع(س)\right) = \lim\limits_{س \to أ} د(س) - \lim\limits_{س \to أ} ع(س)$

٤) $\lim\limits_{س \to أ} \left(د(س) \times ع(س)\right) = \lim\limits_{س \to أ} د(س) \times \lim\limits_{س \to أ} ع(س)$

٥) $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{د(س)}{ع(س)} = \dfrac{\lim\limits_{س \to أ} د(س)}{\lim\limits_{س \to أ} ع(س)}$، $\lim\limits_{س \to أ} ع(س) \neq ٠$

٦) $\lim\limits_{س \to أ} \left(د(س)\right)^{ن} = \left(\lim\limits_{س \to أ} د(س)\right)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

٧) إذا كانت $\lim\limits_{س \to أ} د(س) > ٠$ فإن $\lim\limits_{س \to أ} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\lim\limits_{س \to أ} د(س)}$ ،

حيث ن عدد صحيح موجب.

نتائج أخرى لنهايات خاصة:

أ) $\lim\limits_{س \to أ}$ جـ = جـ، حيث جـ عدد ثابت.

ب) $\lim\limits_{س \to أ} س = أ$

ج) $\lim\limits_{س \to أ} س^{ن} = أ^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

د) $\lim\limits_{س \to أ} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب، أ > ٠

مثــال ١١

إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to ٥} د(س) = ٢$، $\lim\limits_{س \to ٥} ع(س) = ٨$، فاستخدم خواص النهايات لإيجاد كلّ من:

أ $\lim\limits_{س \to ٥} \left(د(س) - ع(س)\right)$

ب $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{ع(س)}{د(س)}$

ج $\lim\limits_{س \to ٥} \left(ع(س)\right)^{٢}$

د $\lim\limits_{س \to ٥} \sqrt[٤]{د(س) \times ع(س)}$

الحــلّ:

أ $\lim\limits_{س \to ٥} \left(د(س) - ع(س)\right) = \lim\limits_{س \to ٥} د(س) - \lim\limits_{س \to ٥} ع(س) = ٢ - ٨ = -٦$

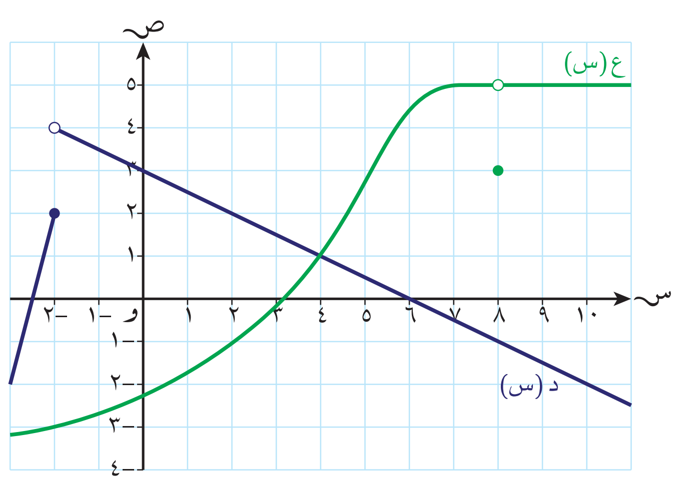
ب $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{ع(س)}{د(س)} = \lim\limits_{س \to ٥} ع(س) \div \lim\limits_{س \to ٥} د(س) = \dfrac{٨}{٢} = ٤$

ج $\lim\limits_{س \to ٥} \left(ع(س)\right)^{٢} = \left(\lim\limits_{س \to ٥} ع(س)\right)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤$

د $\lim\limits_{س \to ٥} \sqrt[٤]{د(س) \times ع(س)} = \sqrt[٤]{\lim\limits_{س \to ٥} د(س) \times \lim\limits_{س \to ٥} ع(س)} = \sqrt[٤]{٢ \times ٨} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

مثــال ١٢

يبيّن الشكل الآتي جزءًا من منحنى الدالتين د(س)، ع(س):



استخدم الشكل وخواص النهايات لتجد النهايات الآتية:

أ $\lim\limits_{س \to ١٠} \left(د(س) + ع(س)\right)$

ب $\lim\limits_{س \to ٧} \left(٤ع(س)\right)$

ج $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{ع(س)}{د(س)}$

د $\lim\limits_{س \to ٨} \left(د(س) \times ع(س)\right)$

هـ $\lim\limits_{س \to -٢} \sqrt{د(س)}$

الحـل:

أ $\underset{س \leftarrow ١٠}{نهـا} \left(د(س) + ع(س)\right) = \underset{س \leftarrow ١٠}{نهـا} د(س) + \underset{س \leftarrow ١٠}{نهـا} ع(س)$

$= -٢ + ٥$

$= ٣$

ب $\underset{س \leftarrow ٧}{نهـا} \left(٤ع(س)\right) = ٤ \times \underset{س \leftarrow ٧}{نهـا} ع(س)$

$= ٤ \times ٥$

$= ٢٠$

ج $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{ع(س)}{د(س)} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ع(س) \div \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} د(س)$

$= -١ \div ٢$

$= -\frac{١}{٢}$

د $\underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} \left(د(س) \times ع(س)\right) = \underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} د(س) \times \underset{س \leftarrow ٨}{نهـا} ع(س)$

لاحظ أن نهاية ع(س) عندما س تؤول إلى ٨ هي ٥ على الرغم من أن ع(٨) = ٣

$= -١ \times ٥$

$= -٥$

هـ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \sqrt{د(س)} = \sqrt{\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} د(س)}$

$\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{نهـا} د(س) = ٤$ ، $\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{نهـا} د(س) = ٢$

$\because \underset{س \leftarrow -٢^{+}}{نهـا} د(س) \neq \underset{س \leftarrow -٢^{-}}{نهـا} د(س)$،

$\therefore$ نهاية د(س) أو $\sqrt{د(س)}$ غير موجودة عند س = -٢

تمارين ٣-٣

١) إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ١٠، $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ك(س) = ٨، فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًا ممّا يأتي:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{هـ(س)} + \text{ك(س)}\right)$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{هـ(س)} \times \text{ك(س)}\right)$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{هـ(س)}\right)^{٢}$

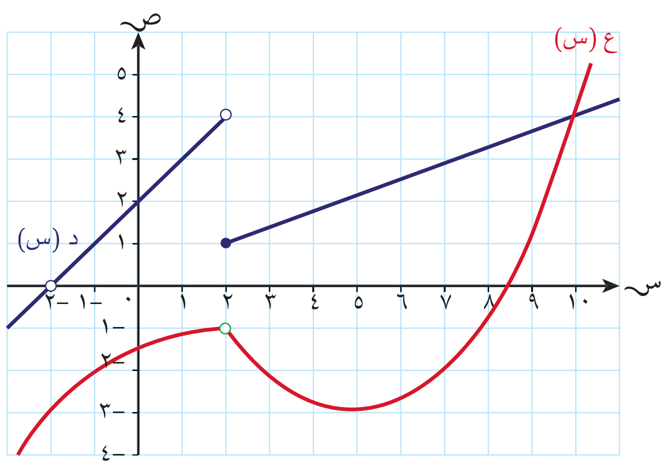
د $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٤}\sqrt{\text{٥ك(س)} \times \text{هـ(س)}}$

٢) **أ** إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣٦، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)}}{\text{ك(س)}}$ = −٤، فأوجِد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ك(س).

ب إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ م(س) = −٢، $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(\text{ن(س)}\right)^{٣}$ = −٨، فأوجِد

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \left(\text{٣م(س)} - \text{٥ن(س)}\right)$

٣) يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالتَين د(س)، ع(س):



أ استخدم الشكل لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٠}{\text{نهـا}} \left(\text{٢د(س)} - \text{٣ع(س)}\right)$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{ع(س)}\right)^{٢}}{\text{د(س)}}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \left(\text{د(س)} + \text{ع(س)}\right)^{٣}$

ب أوجِد قيمتَي أ الممكنة إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \left(\text{د(س)} - \text{ع(س)}\right) = ٣$

ج أعطِ سببًا يوضح أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{د(س)}}$ غير موجودة.

٤) إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٧,٢، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣ د(س)}}{\text{٥ ع(س)}}$ = ١,٠٨، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ع(س) موجودة،

فأوجِد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$.

٥) لتكن د(س) دالة تربيعية حيث $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٧، $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١٢، ع(س) دالة خطيّة:

أ إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$(د(س) × ع(س)) = ٣٥ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$ = ٠,٥،

فأوجِد العبارة الجبرية للدالة ع(س)، وأوجِد قيمة $\underset{\text{س} \leftarrow ١٥}{\text{نهـا}}$ ع(س).

ب ما الفرضيات التي يجب أن تقدمها لتجيب عن الجزئية (أ)؟

٦) يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالة ع(س) = $\frac{\text{١ − ت س}}{\text{٩ + ف س}}$

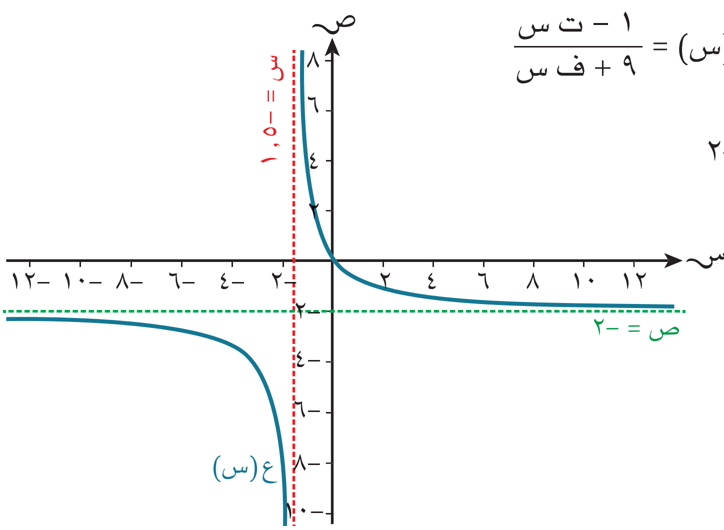
يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند

س = −١,٥، وخط تقارب أفقي عند ص = −٢

أ أوجِد قيمتَي ت، ف.

ب احسب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ (ع(س))^{٣} مقرّبة

إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



٣-٤ الاتصال Continuity

يُستخدم مصطلح اتصال في الحياة اليومية ليصِف شيئًا ينساب بسلاسة، وغير منقطع مثل: الحديث دون مقاطعة، أو وجود برنامج تلفزيوني دون إعلانات.

في الرياضيات، نستخدم كلمة 'الاتصال' لوصف متغير عشوائي يمكن أن يأخذ أي قيمة ضمن مدى محدد، وبمعنى آخر أنه لا توجد قفزات أو وثبات أو خطوط تقاربية رأسية في القيم الممكنة للمتغير ضمن مدى أو فترة زمنية محددة.

ينطبق الوصف نفسه على الدوال التي يمكن أن تكون متصلة **continuous** أو غير متصلة **discontinuous**.

يمكن بحث اتصال الدالة عند نقطة ما إذا كانت معرّفة عند قيمة محددة لـ س، أو يمكن بحث اتصالها على فترة محددة إذا كانت معرّفة لكل قيم س في تلك الفترة.

في هذا الدرس سندرس الاتصال عند نقطة، أو على فترة مغلقة (الفترة التي تتضمن نقطتَي الطرفين مثل: $-٣ \leqslant$ س $\leqslant ١٠$).

مُساعَدة

الفترة هي مجموعة أو مدى من الأعداد.
في الفترة المفتوحة، لا يتم تضمين نقاط النهاية، مثل $١ <$ س < ٥ والتي تمثل جميع الأعداد الأكبر من ١ ولكن أصغر من ٥.
أما في الفترة المغلقة، فيتم تضمين نقاط النهاية. مثل $١ \leqslant$ س $\leqslant ٥$، والتي تمثل جميع الأعداد الأكبر من أو تساوي ١ وأصغر من أو تساوي ٥

الاتصال عند نقطة

لتكون الدالة متصلة عند نقطة، يجب تحقق ثلاثة شروط كما هو موضح في النتيجة الآتية:

نتيجة ٤

تكون الدالة د (س) متصلة عند النقطة س = أ إذا –وفقط إذا– كان:

١) د (أ) موجودة

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) موجودة

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = د (أ)

لتقرر ما إذا كانت الدالة د (س) متصلة أم لا عند نقطة ما، اتبع الخطوات الآتية:

١) تحقق ممّا إذا كانت د (أ) موجودة.
إن لم تكن موجودة، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ. أما إذا كانت موجودة، فانتقل إلى الخطوة ٢

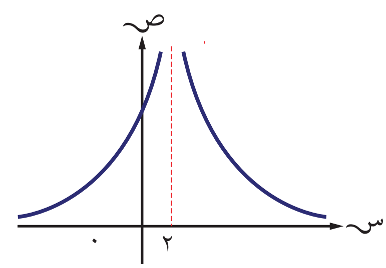
٢) تحقق ممّا إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) موجودة (قد تحتاج إلى التحقق من أن النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار).
إذا لم تكن النهاية موجودة، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ
إذا كانت النهاية موجودة، فانتقل إلى الخطوة ٣

٣) قارن بين كل من: $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س)، د(أ).
إذا كانت القيمتان غير متساويتَين، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ
إذا كانت القيمتان متساويتَين، فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

مُساعَدة

- في الشرط (١) يُقصد بـ د(أ) موجودة أي أنّ الدالة د(س) تكون معرفة عند النقطة س = أ
- يعتبر الشرط (٣) شرطًا كافيًا لإثبات الاتصال، لأنه يتضمن الشرطين (١)، (٢).

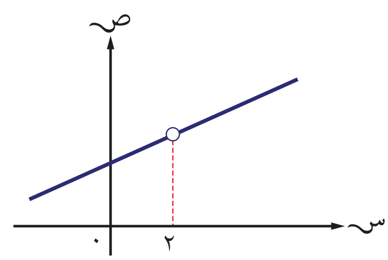
فيما يلي تمثيلات بيانية لأربع دوال غير متصلة عند س = ٢ ويرد سبب ذلك أسفل كل تمثيل بياني: يُبين التمثيل البياني خط التقارب وثقوبًا وقفزات:



د (س) غير معرّفة عند س = ٢

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة

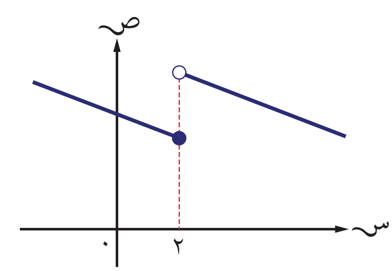
∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) ≠ د (٢)



د (س) غير معرّفة عند س = ٢

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة

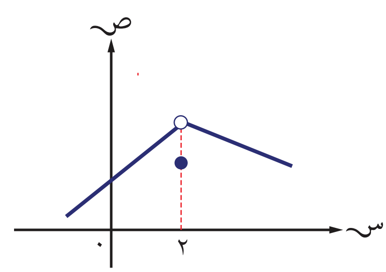
∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) ≠ د (٢)



د (س) معرّفة عند س = ٢

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة

∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) ≠ د (٢)



د (س) معرّفة عند س = ٢

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) موجودة

∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) ≠ د (٢)

الاتصال على فترة مغلقة

تكون الدالة متصلة على **الفترة المغلقة closed interval**، أ ⩽ س ⩽ ب، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في هذه الفترة. بحيث لا يحتوى منحنى الدالة على نقاط عدم اتصال، أي فجوات أو قفزات أو خطوط تقاربية رأسية.

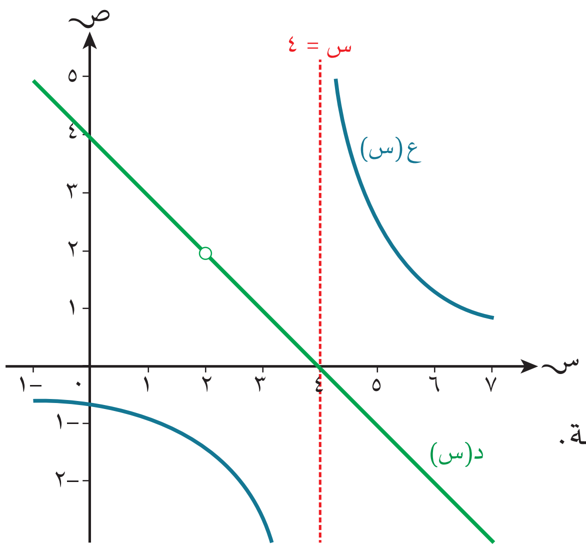
أسهل طريقة لتقرر ما إذا كانت الدالة متصلة على فترة أم لا هي رسم منحنى الدالة. إذا حققت ذلك دون أن ترفع القلم عن الورقة، فإن الدالة تكون متصلة، وأمّا إذا اضطررت أن ترفعه، فإن الدالة تكون غير متصلة على الفترة.

نتيجة ٥

تكون الدالة متصلة على الفترة أ ⩽ س ⩽ ب **إذا –وفقط إذا– كانت** متصلة عند كل النقاط في تلك الفترة.

مثــال ١٣

يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، ع(س) على الفترة −١ ⩽ س ⩽ ٧



أ حدّد أيًا من الدالتَين متصلة عند النقطة:

١) س = ١ ٢) س = ٢

ب حدّد أيًا من الدالتَين متصلة (إن وجدت) على الفترة:

١) ٠ ⩽ س ⩽ ٦ ٢) ٣ ⩽ س ⩽ ٥

ج ١) إذا علمت أن د(س) = $\frac{س^٢ - ٦س + ٨}{س - أ}$، فأوجِد قيمة أ التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

٢) إذا علمت أن ع(س) = $\frac{٣}{س + ب}$، فأوجِد قيمة ب التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

الحــلّ:

أ ١) كلا الدالتَين د(س)، ع(س) متصلة عند س = ١

د(١)، ع(١) موجودتان، والنهاية موجودة عند كل منهما. في الحالتَين قيمة الدالة تساوي النهاية عند س = ١

٢) الدالة ع(س) متصلة عند س = ٢

ع(٢) موجودة، والنهاية موجودة وقيمتها تساوي ع(٢). د(٢) غير موجودة، وذلك لوجود فجوة في منحنى الدالة.

ب ١) الدالتان د(س)، ع(س) غير متصلتَين على الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٦

د(٢)، ع(٤) غير موجودتين وذلك لوجود فجوة وخط تقارب رأسي على الترتيب. تقع النقطتان س = ٢، س = ٤ في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٦، لذا الدالتان غير متصلتَين على الفترة.

٢) الدالة د(س) متصلة على الفترة ٣ ⩽ س ⩽ ٥

الدالة د(س) متصلة على جميع نقاط الفترة. الدالة ع(س) غير متصلة على الفترة ٣ ⩽ س ⩽ ٥، لأنها غير معرّفة عند س = ٤

ج ١) ∵ د(س) غير متصلة عند س = ٢

∴ أ − ٢ = ٠، فيكون أ = ٢

الدالة د(س) غير معرّفة عند س = ٢ لأن المقام يساوي صفرًا عندها.

٢) ∵ ع(س) غير متصلة عند س = ٤

∴ ٤ + ب = ٠، فيكون ب = −٤

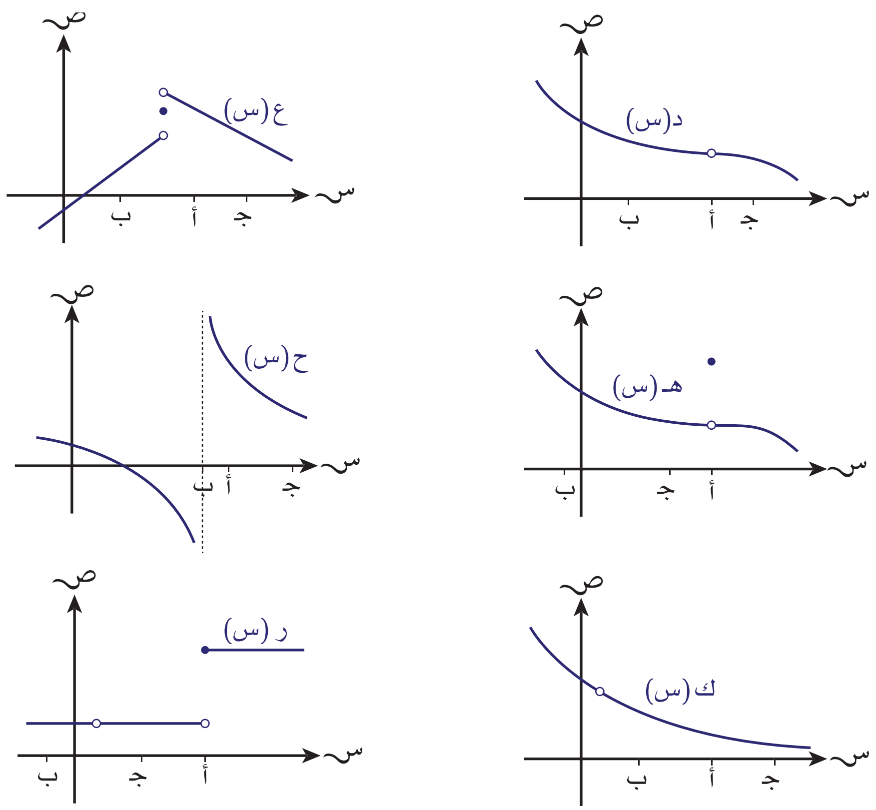
الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤ لأن المقام يساوي صفرًا عندها.

تمارين ٣-٤

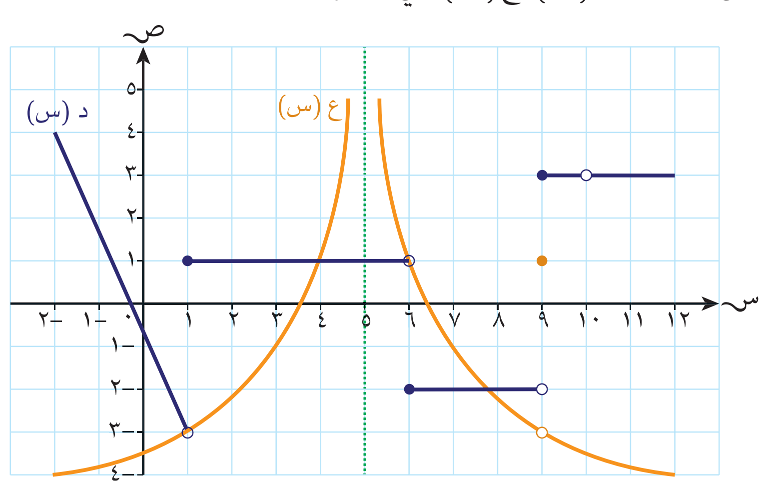
١) في كل دالة مما يأتي، حدّد فيما إذا كانت الدالة متصلة أو غير متصلة مع ذكر السبب:

أ عند س = أ .

ب على الفترة ب ⩽ س ⩽ جـ.



٢) يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، ع(س) في الفترة −٢ ⩽ س ⩽ ١٢:

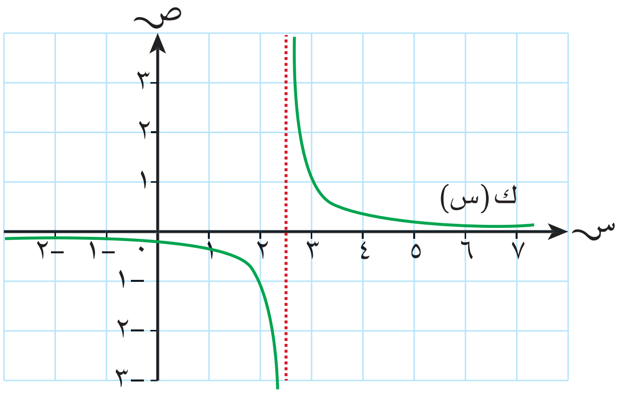


أ عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ⩽ س ⩽ ١٢ تكون الدالة ع(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ب عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة $-٢ \leqslant$ س $\leqslant ١٢$ تكون الدالة د(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ج أي الدالتَين د (س)، ع (س) متصلة على الفترة $-٢ \leqslant$ س $\leqslant ١$؟ برّر إجابتك.

٣) يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة ك(س).



أ اكتب معادلة خط التقارب الرأسي.

ب إذا علمت أن ك(س) = $\frac{١}{ت\,س + ف}$ وتمر بالنقطة (٢، −١)، فأوجِد قيمة كل من ت، ف التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

ج استخدم المنحنى لتوضح أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة $٣ \leqslant$ س $\leqslant ٧$

د بيّن أن الدالة ك(س) غير متصلة على الفترة $١ \leqslant$ س $\leqslant ٤$

هـ إذا علمت أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة $-٢ \leqslant$ س $\leqslant$ أ، فأوجِد قيمة أكبر عدد صحيح ممكن لـ أ.

٤) بيّن أن الدالة د (س) = $\frac{٤}{٢ - س}$ متصلة عند س = ١

٥) لتكن الدالة د (س) = $\frac{١}{س}$:

أ بيّن أن الدالة د (س) متصلة على الفترة $١ \leqslant$ س $\leqslant ١٠$

ب اكتب أي فترة مغلقة بحيث تكون الدالة د (س) = $\frac{١}{س}$ غير متصلة عندها.

٦) بيّن أن الدالة د (س) = $\frac{س + ٥}{س - ٨}$ متصلة على الفترة $٠ \leqslant$ س $\leqslant ٥$، وغير متصلة على الفترة $٥ \leqslant$ س $\leqslant ١٠$

٧) لتكن الدالة د (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٨س - ٢٠}$

أ بيّن أن الدالة د (س) غير متصلة على الفترة $٩ \leqslant$ س $\leqslant ١١$

ب أوجِد قيمة س السالبة بحيث تكون د (س) غير متصلة.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

نهاية الدالة عند نقطة

- إذا كانت أ، ل أعدادًا حقيقية، فإن: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \text{ل} \Leftrightarrow \underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to\text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \text{ل}$.
- لكل قيم ن > ٠، أ عدد حقيقي: $\underset{\text{س}\to+\infty}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$، $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$

خواص النهايات

إذا كان ك عددًا حقيقيًا، أ $\in$ مجال كلٍّ من د(س)، ع(س)، وكانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)}$ موجودتَين، فإن:

١) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{ك د(س)}\right) = \text{ك}\ \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

٢) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{د(س)} + \text{ع(س)}\right) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} + \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)}$

٣) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{د(س)} - \text{ع(س)}\right) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} - \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)}$

٤) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{د(س)} \times \text{ع(س)}\right) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)}$

٥) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ع(س)}} = \dfrac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)}}$، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع(س)} \neq ٠$

٦) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{د(س)}\right)^{\text{ن}} = \left(\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}\right)^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

٧) إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} > ٠$ فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{د(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

نتائج أخرى لنهايات خاصة:

أ) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{جـ} = \text{جـ}$، حيث جـ عدد ثابت

ب) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{س} = \text{أ}$

ج) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

د) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$، حيث ن عدد صحيح موجب، أ > ٠

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الاتصال

- تكون الدالة د (س) متصلة عند النقطة س = أ **إذا** -**وفقط إذا**- تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

١) د (أ) موجودة

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) موجودة

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) = د (أ)

- تكون الدالة متصلة على الفترة أ ≥ س ≥ ب، **إذا** -**وفقط إذا**- كانت متصلة عند كل النقاط في تلك الفترة.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثالثة

١) إذا كان منحنى الدالة ع(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} + ٣}$ مستقيمًا يتضمن فجوة:

أ عند أي قيمة لـ س تكون الدالة ع(س) غير معرّفة؟

ب أوجد إحداثيات الفجوة.

٢) يبيّن الجدول الآتي بعض قيم الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٢٩\text{س} + ٣٠}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤٨}$ مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية:

س	د(س)
٥,٩	٣,٨٤٢٤
٥,٩٩	٣,٩١٩٩
٥,٩٩٩	أ

س	د(س)
٦,١	٤,٠١٤٩
٦,٠١	٣,٩٣٧٢
٦,٠٠١	ب

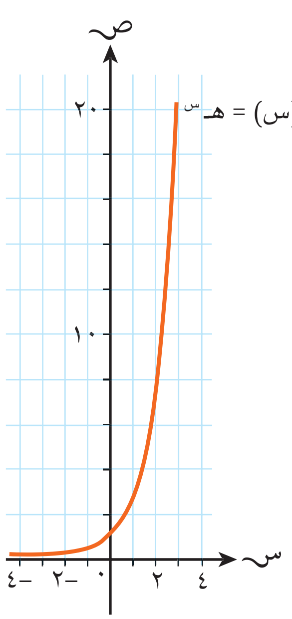
أ أوجِد قيمة كلٍّ من أ، ب مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية.

ب بيّن أن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٦}$ د(س) ≠ د(٦)

٣) رسم سيف منحنى الدالة ح(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ في الفترة $-٤ \leqslant \text{س} \leqslant ٣$

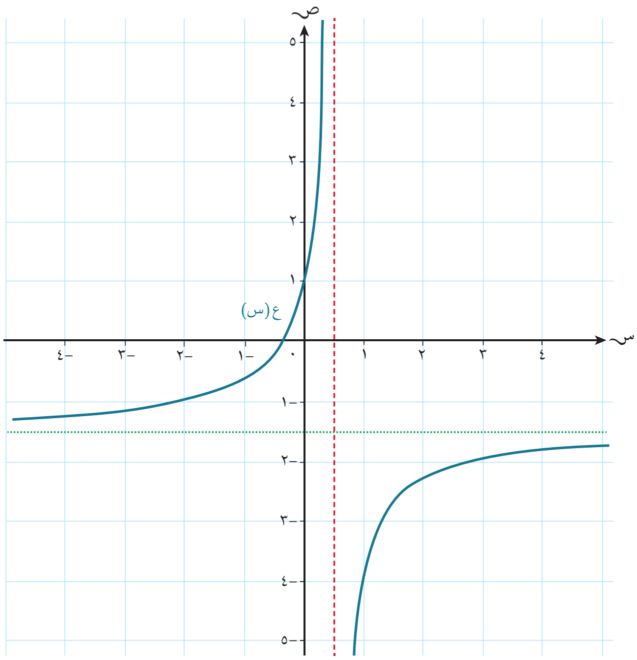
أ يدعي سيف أن الدالة متصلة على الفترة $-٤ \leqslant \text{س} \leqslant ٣$، وغير متصلة على الفترة $-٤ \leqslant \text{س} \leqslant ٤$؛ بسبب وجود خط تقارب رأسي بين س = ٣، س = ٤
هل تتفق مع سيف؟ برر إجابتك.

ب أوجِد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -\infty}$ ح(س).



مُساعَدة

تذكّر أن العدد هـ = ٢,٧١٨٢ لأقرب ٤ منازل عشرية



٤) يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع (س) حيث

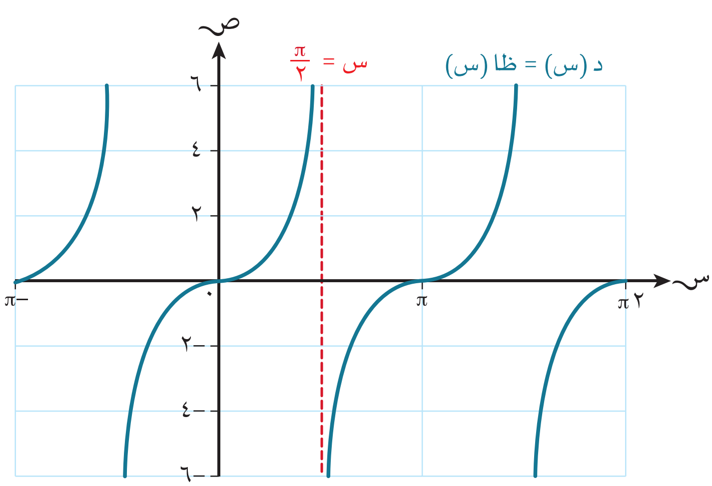
$ع(س) = \frac{٣س + ١}{١ - ٢س}$:

أ ١) بيّن أن $\lim_{س \to ٠,٥}$ ع (س) غير موجودة.

٢) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي المشار إليه بالمستقيم المنقط.

ب ١) أوجِد $\lim_{س \to \infty}$ ع (س).

٢) اكتب معادلة خط التقارب الأفقي المشار إليه بالمستقيم المنقط.



٥) يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة د (س) = ظا س.

أ علامَ يدل خط التقارب الرأسي عند س = $\frac{\pi}{٢}$؟

ب ضمن الفترة المبيّنة على الشكل يوجد خطان تقاربيان رأسيّان آخران لم يتم رسمهما على الشكل. اكتب معادلة كلّ منهما.

ج بيّن مدى صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

١) الدالة د (س) متصلة على الفترة $٠ \leqslant س \leqslant \pi$

٢) الدالة د (س) غير متصلة على الفترة $-١^{\circ} \leqslant س \leqslant ١^{\circ}$

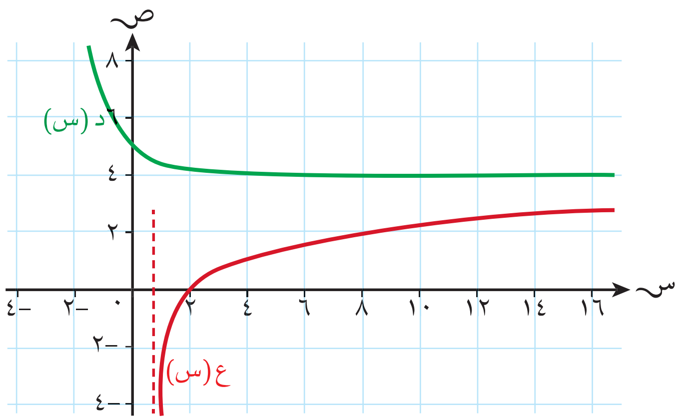
٣) منحنى الدالة ع (س) = ظا $\frac{س}{٢}$، له نقاط عدم اتصال أقل من الدالة د (س) = ظا س في الفترة $-٤\pi \leqslant س \leqslant ٤\pi$

مُساعَدة

تذكّر أنه يتم الوصول إلى ص = ظا (أس) من خلال تمدد ص = ظا س معامله $\frac{١}{أ}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني.

٦) يبيّن الشكل المقابل أجزاء من منحنى الدالتَين

د (س) = ٤ + هـ$^{-س}$، ع (س) = لط(س − ١)



أ لمنحنى الدالة د(س) خط تقارب أفقي:

١) أنشئ جدولًا، واستخدمه لتجد معادلة خط التقارب الأفقي.

٢) أوجِد قيمة ك إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to \infty}$ ك د (س) = ١

ب إذا علمت أنه لا يوجد للدالة ع (س) خط تقارب أفقي. فعلامَ يدلك $\lim\limits_{س \to \infty}$ ع(س)؟

ج اشرح كيف تعرف أنه يوجد خط تقارب رأسي للدالة ع (س) عند س = ١

د إذا علمت أن الدالتَين د (س)، ع (س) متصلتان على الفترة ٢ ⩽ س ⩽ ٤، فاستخدم التمثيل البياني لتقدّر قيمة كل مما يأتي مقربة إلى أقرب ٣ منازل عشرية:

١) $\lim\limits_{س \to ٣}$ (د (س) × ع (س))

٢) $\lim\limits_{س \to \frac{٥}{٢}} \left(\frac{ع(س)}{د(س)}\right)$

هـ أعطِ سببًا يوضح أن $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{د(س)}{ع(س)}$ غير موجودة.

الوحدة الرابعة
التفاضل
Differentiation

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تفهم (من خلال التمثيل البياني للدالة) أن ميل الدالة عند نقطة هو عبارة عن نهاية الميل لمتتالية مناسبة من المماسات عند تلك النقطة، وعلاقته بمشتقة الدالة؛ وتستخدم الصيغ د′ (س)، د″ (س)، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ص) و $\frac{\text{ء}^{٢}}{\text{ءس}^{٢}}$ (ص) أو $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ للمشتقتَين الأولى والثانية.

٤-٢ تجد وتستخدم مشتقة لدوال في الصيغة د (س) = س$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.

٤-٣ تجد وتستخدم مشتقة الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث تكون الدوال المركبة في صورة س$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.

٤-٤ تجد وتستخدم ميل المماس أو المستقيم العمودي على منحنى الدالة، أو معادلة المماس، و/أو معادلة المستقيم العمودي لدوال في الصيغة د (س) = س$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع، والطرح للدوال، وللدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.

٤-٥ تجد وتستخدم المشتقة الأولى لتحدد قيم س التي تكون عندها الدالة في الصيغة د (س) = س$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح، متزايدة، أو متناقصة.

٤-٦ تحدد النقاط الحرجة لدوال في الصيغة د (س) = س$^{\text{ن}}$ (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب في ثابت، الجمع، والطرح للدوال، وتستخدم المشتقتين الأولى والثانية لتحدد نوعها (طبيعتها).

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تستخدم قوانين الأسس لتبسيط عبارات إلى الصيغة أس^{ن}.	١) اكتب كلًا مما يأتي في الصيغة أس^{ن}: أ $٣س\sqrt{س}$ ب $٥\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ج $\frac{س}{٢\sqrt{س}}$ د $\frac{١}{٢س}$ هـ $\frac{٣}{س^{٢}}$ و $-\frac{٢س^{٢}}{٥\sqrt[٣]{س}}$
الصف التاسع، الوحدة الثالثة	تكتب $\frac{ك}{(أس + ب)^{ن}}$ في صورة ك$(أس + ب)^{-ن}$.	٢) اكتب كلًا من العبارات الآتية في صورة ك$(أس + ب)^{-ن}$: أ $\frac{٤}{(س - ٢)^{٣}}$ ب $\frac{٢}{(٣س + ١)^{٥}}$
الصف الحادي عشر، الوحدة الخامسة	تجد ميل المستقيم العمودي على مستقيم آخر.	٣) اكتب ميل المستقيم العمودي على مستقيم ميله $\frac{٢}{٣}$
الصف الحادي عشر، الوحدة الخامسة	تجد معادلة مستقيم ميله معلوم ويمر بنقطة معلومة.	٤) أوجِد معادلة مستقيم ميله ٢، ويمر بالنقطة (٢، ٥).
الصف الحادي عشر، الوحدة الثانية	تجد مجال ومدى الدالة.	٥) أ إذا كان مدى الدالة د(س) = ١٢ − ٣س هو: ٠ ⩽ د(س) ⩽ ٢٧، فأوجد مجال د(س). ب لتكن الدالة هـ (س) = س^{٢} − ٢س + ٣ معرّفة في المجال −١ ⩽ س ⩽ ٤؛ أوجد مدى هـ (س).

المفردات

التفاضل (الاشتقاق)
differentiation

الاشتقاق باستخدام المبادئ الأولية
differentiation from first principles

المشتقة الأولى
first derivative

دالة الميل
gradient function

المشتقة الثانية
second derivative

قاعدة السلسلة
chain rule

المستقيم العمودي
normal line

دالة متزايدة
increasing function

دالة متناقصة
decreasing function

نقطة انعطاف
point of inflexion

النقطة الحرجة
stationary point

النقطة العظمى
maximum point

النقطة الصغرى
minimum point

لماذا ندرس التفاضل؟

التفاضل والتكامل **calculus** هو الدراسة الرياضية للتغيّر، وله استخدامات واسعة في العلوم، والطب، والهندسة، والاقتصاد. إليك بعض الأمثلة التي يستخدم فيها التفاضل والتكامل:

- تصميم أجنحة الطائرات
- دراسة الانحلال الإشعاعي
- دراسة التغيُّر السكاني
- نمذجة النظام المالي

ستدرس في هذه الوحدة التفاضل (الاشتقاق)، وستتعلم قواعده وكيفية تطبيقها على مسائل تتضمن الميل، والمماس، والمستقيم العمودي على المماس، والدوال المتزايدة والدوال المتناقصة، والنقاط الحرجة. كما ستطبق قواعد التفاضل في المزيد من المسائل والتطبيقات، والتكامل في الفصل الدراسي الثاني.

٤-١ المشتقة وعلاقتها بالميل Derivative and its relationship with gradient

تعلمت سابقًا كيف تقدّر ميل المماس للمنحنى عند نقطة ما؛ وذلك برسم مماس مناسب، ومن ثم حساب ميل هذا المماس. تعطي هذه الطريقة إجابة تقريبية بسبب عدم دقة رسم المماس كما أنها تستغرق وقتًا طويلًا.

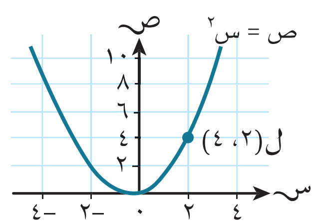
ستتعلم في هذه الوحدة طريقة لإيجاد ميل منحنى الدالة بدقة دون رسم بيان الدالة. تسمى هذه الطريقة **الاشتقاق differentiation**.

رابط الكتروني

جرّب مصدر the Calculus resources في موقع Underground Mathematics

استكشف ١

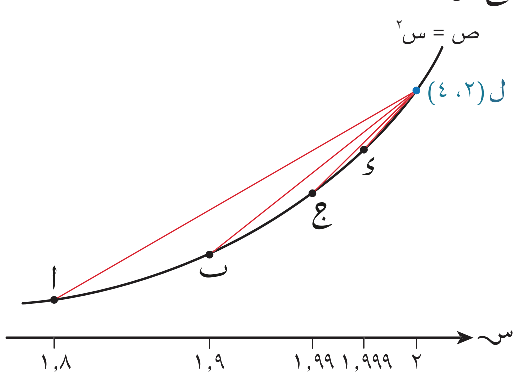
يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالة ص = س٢



١) لتكن النقطة ل(٢، ٤):

أ تقع النقاط أ(١,٨، ٣,٢٤)، ب(١,٩، ٣,٦١)، ج(١,٩٩، ٣,٩٦٠١)، ى(١,٩٩٩، ٣,٩٩٦٠٠١) على المنحنى وتقترب من النقطة ل(٢، ٤) من جهة اليسار.

١- انسخ الجدول، وأكمله مبيّنًا ميل الأوتار ل أ، ل ب، ل ج، ل ى:



الوتر	الميل
ل أ	
ل ب	
ل ج	
ل ى	

٢- انسخ العبارة الآتية حول ميل المماس للمنحنى عند نقطة ما كلما اقتربت هذه النقطة من ل، وذلك بأن تملأ القيم المناسبة في المستطيلات الفارغة:

نهـــــا (س ← □) ميل المنحنى عند ل = □

ب تقع النقاط هـ(٢,٢، ٤,٨٤)، و (٢,١، ٤,٤١)، ز(٢,٠١، ٤,٠٤٠١)، ع(٢,٠٠١، ٤,٠٠٤٠٠١) أيضًا على المنحنى، وتقترب من النقطة ل(٢، ٤) من جهة اليمين.

١- انسخ الجدول، وأكمله مبيّنًا ميل الأوتار ل هـ، ل و، ل ز، ل ع:

الوتر	الميل
ل هـ	
ل و	
ل ز	
ل ع	

٢- انسخ العبارة الآتية حول ميل المماس للمنحنى عند نقطة ما كلما اقتربت هذه النقطة من ل، وذلك بأن تملأ القيم المناسبة في المستطيلات الفارغة:

$$\lim_{س \leftarrow \square} \text{ميل المنحنى عند ل} = \square$$

ج من خلال إجاباتك على الجزئيّتَين (أ (٢))، (ب (٢))، اكتب عبارة حول ميل المماس للمنحنى عند النقطة ل.

٢) لتكن النقطة ن (−٣، ٩):

أ استخدم مجموعتَي النقاط الآتيتَين:

- ا (−٣٫٢، ١٠٫٢٤)، ب (−٣٫١، ٩٫٦١)، ج (−٣٫٠١، ٩٫٠٦٠١)، د (−٣٫٠٠١، ٩٫٠٠٦٠٠١)
- هـ (−٢٫٨، ٧٫٨٤)، و (−٢٫٩، ٨٫٤١)، ز (−٢٫٩٩، ٨٫٩٤٠١)، ح (−٢٫٩٩٩، ٨٫٩٩٤٠٠١).

لتبيّن المعلومات حول ميل المماس للمنحنى عند نقطة ما كلما اقتربت النقاط من النقطة ن.

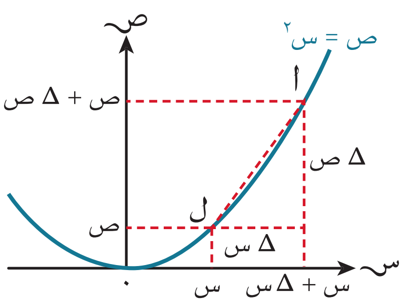
ب احسب نهاية ميل المنحنى ص = س^{٢} عند النقطة ن، أي عند س = −٣

٣) استخدم جداول البيانات Excel لتكتشف نهاية الميل عند نقاط أخرى تقع على منحنى الدالة ص = س^{٢}

٤) هل يمكنك اقتراح صيغة عامة لميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} عند النقطة (أ، أ^{٢})؟ كم سيكون الميل عند النقطة (س، س^{٢})؟

يمكن برهنة الصيغة العامة لميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} عند النقطة (س، س^{٢}) جبريًا.

افترض أن النقطة ل (س، ص) تقع على منحنى الدالة ص = س^{٢}، وأن النقطة ا قريبة من النقطة ل كما هو موضح بالرسم الآتي:



إحداثيات النقطة ا (س + Δ س، ص + Δ ص)، حيث تمثل Δ س كمية تغيّر صغيرة في قيمة س، Δ ص كمية تغيّر صغيرة في قيمة ص.

يمكن أن نكتب إحداثيات النقطتَين ل، ا في صورة (س، س^{٢})، (س + Δ س، (س + Δ س)^{٢}) على الترتيب.

رابط الكتروني

توجد طرق أخرى للتفكير في ميل المنحنى. جرّب المصادر الآتية على الموقع Zooming in and Mapping a derivative

مُساعَدة

يستخدم الرمز اليوناني Δ ليشير إلى تغيّر طفيف في الكمية.

ميل الوتر ل ا = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{(س + \Delta س)^٢ - س^٢}{(س + \Delta س) - س}$

$= \frac{س^٢ + ٢س \Delta س + (\Delta س)^٢ - س^٢}{\Delta س}$

$= \frac{٢س \Delta س + (\Delta س)^٢}{\Delta س}$

$= ٢س + \Delta س$

كلما اقتربت Δ س من الصفر (٠)، فإن النقطة ا تقترب من النقطة ل، ويقترب ميل الوتر ل ا من قيمة محددة. نسمي هذه القيمة ميل المماس للمنحنى عند النقطة ل،

وفي هذه الحالة، فإن ميل مماس المنحنى يساوي ٢س.

ميل المماس للمنحنى عند النقطة ل = $\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، $\Delta س \neq ٠$

$= \lim_{\Delta س \to ٠} (٢س + \Delta س) = ٢س$

تُسمى عملية إيجاد ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة اشتقاقًا.

ستتعلم في هذه الوحدة بعض قوانين اشتقاق الدوال دون أن تحسب ميل الأوتار

تُسمى عملية حساب الميل باستخدام نهاية ميول الأوتار **الاشتقاق باستخدام المبادئ الأولية** **differentiation from first principles**.

المشتقة الأولى

يوجد العديد من الصيغ (الرموز) التي يمكن استخدامها للتعبير عن الاشتقاق، مثل $\frac{ءص}{ءس}$، دَ (س)، $\frac{ء}{ءس}$ (ص) (وغيرها مثل ص′، صً والتي لن تستخدم في هذه الوحدة)

إذا كانت ص دالة، فإن كلًا من $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء}{ءس}$ (ص) تعبّر عن **المشتقة الأولى** **first derivative** لـ ص بدلالة س. يمكن القول أيضًا بأن دَ (س) هي مشتقة د (س). وفقًا لذلك، يوجد العديد من الطرق التي يمكن التعبير من خلالها عن مشتقة الدالة. فمثلًا إذا:

١) كان ص = $س^٢$، فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

٢) كان د (س) = $س^٢$، فإن دَ (س) = ٢س

٣) $\frac{ء}{ءس}(س^٢) = ٢س$

هل تعلم؟

أن العالمَين قوتفرايد ويلهلم ليبنتز (Gottfried Wilhelm Leibniz) وإسحق نيوتن (Isaac Newton) هما من طوّرا التفاضل والتكامل الحديث الذي نستخدمه اليوم. استخدم ليبنتز الصيغة $\frac{ءص}{ءس}$ للدلالة على المشتقة، واستخدم نيوتن بدلًا من $\frac{ءص}{ءس}$ الرمز صً، بينما استخدم الصيغة دَ (س) العالم لاجرانج (Lagrange).

إذا كان ص = د (س)، فإن $\frac{\text{ىص}}{\text{ىس}}$ أو د′ (س) تمثل **دالة ميل مماس المنحنى gradient function**.

دالة ميل المماس للمنحنى هي دالة يمكننا التعويض فيها عن قيم س لنجد ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى.

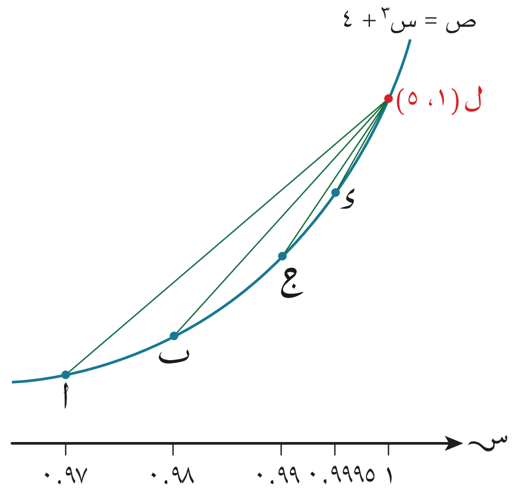
الميل عند أي نقطة على المنحنى هو نفسه ميل المماس للمنحنى على تلك النقطة.

كما سبق ورأينا في استكشف ١، فإن ميل المماس للمنحنى على النقطة ل هو نهاية ميل سلسلة من الأوتار مرسومة من النقطة ل إلى نقطة ثانية عندما تقترب النقطة الثانية أكثر فأكثر من النقطة ل.

مثـــال ١

يبيّن الرسم أدناه سلسلة من الأوتار مرسومة من النقطة ل (١، ٥) إلى النقاط الأربع أ، ب، ج، ى الواقعة على المنحنى ص = $\text{س}^{٣}$ + ٤

إحداثيات هذه النقاط هي أ (٠,٩٧، ٤,٩١٢٦٧٣)، ب (٠,٩٨، ٤,٩٤١١٩٢)، ج (٠,٩٩، ٤,٩٧٠٢٩٩)، ى (٠,٩٩٥، ٤,٩٨٥٠٧٤٨٧٥).



أ أوجد ميل كل وتر من الأوتار ل أ، ل ب، ل ج، ل ى.

ب استخدم سلسلة من ميول الأوتار في الجزئية (أ) لتقدر قيمة ميل مماس المنحنى عند النقطة ل.

الحـل:

أ

الوتر	الميل
ل أ	$\frac{٥ - ٤,٩١٢٦٧٣}{١ - ٠,٩٧} = ٢,٩١٠٩$
ل ب	$\frac{٥ - ٤,٩٤١١٩٢}{١ - ٠,٩٨} = ٢,٩٤٠٤$
ل ج	$\frac{٥ - ٤,٩٧٠٢٩٩}{١ - ٠,٩٩} = ٢,٩٧٠١$
ل ء	$\frac{٥ - ٤,٩٨٥٠٧٤٨٧٥}{١ - ٠,٩٩٥} = ٢,٩٨٥٠٢٥$

تم وضع ميول الأوتار في الجدول.

ب ميل مماس المنحنى عند النقطة ل يساوي ٣

تقترب الميول من ٣ كلما اقتربت النقاط من ل.

تمارين ٤-١

١) تقع النقاط أ (٠، ٠)، ب (٠,٥، ٠,٧٥)، ج (٠,٨، ١,٤٤)، ء (٠,٩٥، ١,٨٥٢٥)، هـ (٠,٩٩، ١,٩٧٠١)، ن (١، ٢) على منحنى الدالة ص = د(س).

أ انسخ الجدول الآتي وأكمله لتبيّن ميل كل وتر من الأوتار ج ن، ء ن، هـ ن:

الوتر	أ ن	ب ن	ج ن	ء ن	هـ ن
الميل	٢	٢,٥			

ب استخدم الجدول لتتوقع قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١

٢) استخدم سلسلة من ميل الأوتار المناسبة لتجد ميل المماس لمنحنى كل دالة من الدوال الآتية عند النقطة المعطاة:

أ ص = $س^٤$، عند (١، ١)

ب ص = $س^٤$ − ٢س + ٣، عند (٠، ٣)

ج ص = ٢$\sqrt{س}$، عند (٤، ٤)

د ص = $\frac{١٢}{س}$، عند (٢، ٦)

٣) تقع النقطة ل (س، $س^٣$) على منحنى الدالة ص = $س^٣$، وتقع النقطة أ $\left(س + \Delta س، (س + \Delta س)^٣\right)$ على المنحنى أيضًا وقريبة من النقطة ل.

ميل الوتر ل أ = $\frac{(س + \Delta س)^٣ - س^٣}{(س + \Delta س) - س}$

فكّ الأقواس، وبسّط لتجد ميل المماس للمنحنى عند نقطة معيّنة على المنحنى بالاعتماد على نهاية الميل عندما تقترب Δ س من الصفر.

٢-٤ مشتقة دالة القوة Differentiation of power functions

نعرف أن $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٢}) = ٢س$، وأن $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٣}) = ٣س^{٢}$. ماذا تلاحظ؟

ماذا عن $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٤})$، $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٥})$، $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٦})$ ؟

النتائج هي: $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٤}) = ٤س^{٣}$ ، $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٥}) = ٥س^{٤}$ ، $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٦}) = ٦س^{٥}$

توصلنا النتائج أعلاه إلى القاعدة العامة لاشتقاق دالة القوة:

نتيجة ١

$\frac{ى}{ى\,س}(س^{ن}) = ن\,س^{ن-١}$، ن عدد حقيقي.

قد تجد من السهل أن تذكر النتيجة على النحو:

'اضرب المعامل في القوة ن، واطرح واحدًا من القوة ن'.

فمثلًا:

إذا كانت $ص = س^{٢}$ ، فإن $\frac{ى\,ص}{ى\,س} = ٢ \times س^{٢-١} = ٢س$

إذا كانت $ص = س^{٣}$ ، فإن $\frac{ى\,ص}{ى\,س} = ٣ \times س^{٣-١} = ٣س^{٢}$

مثال ٢

أوجِد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ $ص = س^{٧}$

ب $د(س) = \frac{١}{س^{٢}}$

ج $د(س) = \sqrt{س}$

د $ص = ٢$

الحل:

أ $\frac{ى}{ى\,س}(س^{٧}) = ٧س^{٧-١}$ ...... اضرب المعامل ١ في القوة ٧ ثم اطرح ١ من القوة ٧

$= ٧س^{٦}$

ب $\frac{ى}{ى\,س}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right) = \frac{ى}{ى\,س}(س^{-٢})$ ...... اكتب $\frac{١}{س^{٢}}$ في صورة $س^{-٢}$

$= -٢س^{-٢-١}$ ...... اضرب المعامل ١ في القوة −٢ ثم اطرح ١ من القوة −٢

$= -٢س^{-٣}$

$= -\frac{٢}{س^{٣}}$

ج $د(س) = \sqrt{س}$ ⋯⋯ اكتب $\sqrt{س}$ في صورة $س^{\frac{1}{2}}$

$د(س) = س^{\frac{1}{2}}$ ⋯⋯ اضرب المعامل ١ في القوة $\frac{1}{2}$ ثم اطرح ١ من القوة $\frac{1}{2}$

$د'(س) = \frac{1}{2} س^{\frac{1}{2} - 1}$

$= \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{س}}$

د $ص = ٢$ ⋯⋯ اكتب ٢ في صورة $٢س^{٠}$

$ص = ٢س^{٠}$ ⋯⋯ اضرب المعامل ٢ في القوة ٠ ثم اطرح ١ من القوة صفر.

$\frac{ءص}{ءس} = ٠ س^{٠ - ١}$

$= ٠$

نستنتج من الجزئية (د) في مثال ٢ النتيجة الآتية:

نتيجة ٢

إذا كانت $ص = جـ$، فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$، حيث جـ عدد ثابت.

قاعدة مشتقة ضرب عدد ثابت في دالة

لإيجاد مشتقة ضرب عدد ثابت في دالة، يمكنك استخدام النتيجة الآتية:

نتيجة ٣

$\frac{ء}{ءس}(ك د(س)) = ك \times \frac{ء}{ءس}(د(س))$، حيث ك عدد ثابت.

قاعدة مشتقة جمع وطرح دالتين

لإيجاد مشتقة جمع، وطرح دالتَين يمكنك استخدام النتيجة الآتية:

نتيجة ٤

$\frac{ء}{ءس}(د(س) \pm ع(س)) = \frac{ء}{ءس}(د(س)) \pm \frac{ء}{ءس}(ع(س))$

مثــال ٣

أوجِد مشتقة الدالة د(س) = $٣س^٤ - \frac{١}{٢س^٢} + \frac{٤}{\sqrt{س}} + ٥$ بدلالة س.

الحــلّ:

$\frac{ء}{ءس}\left(٣س^٤ - \frac{١}{٢س^٢} + \frac{٤}{\sqrt{س}} + ٥\right) = \frac{ء}{ءس}\left(٣س^٤ - \frac{١}{٢}س^{-٢} + ٤س^{-\frac{١}{٢}} + ٥\right)$

$= ٣ \times \frac{ء}{ءس}\left(س^٤\right) - \frac{١}{٢} \times \frac{ء}{ءس}\left(س^{-٢}\right) + ٤ \times \frac{ء}{ءس}\left(س^{-\frac{١}{٢}}\right) + \frac{ء}{ءس}(٥)$

$= ٣\left(٤س^٣\right) - \frac{١}{٢}\left(-٢س^{-٣}\right) + ٤\left(-\frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}}\right) + ٠$

$= ١٢س^٣ + س^{-٣} - ٢س^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ١٢س^٣ + \frac{١}{س^٣} - \frac{٢}{\sqrt{س^٣}}$

مثــال ٤

أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س(٢س − ١)(س + ٣) عند النقطة (١، ٤).

الحــلّ:

ص = س(٢س − ١)(س + ٣) .... فكّ الأقواس وبسّط.

ص = $٢س^٣ + ٥س^٢ - ٣س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^٢ + ١٠س - ٣$

عندما س = ١، فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٦(١)^٢ + ١٠(١) - ٣$

$= ١٣$

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١، ٤) هو ١٣

مثـــال ٥

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = أ $\text{س}^{٤}$ + ب $\text{س}^{٢}$ + س يساوي ٣ عند س = ١، ويساوي −٥١ عند س = −٢، فأوجِد قيمتَي أ، ب.

الحـــلّ:

ص = أ $\text{س}^{٤}$ + ب $\text{س}^{٢}$ + س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤أ $\text{س}^{٣}$ + ٢ب س + ١

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ عند س = ١

∴ ٤أ $(١)^{٣}$ + ٢ب (١) + ١ = ٣

٤أ + ٢ب = ٢

٢أ + ب = ١ .... (١)

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٥١ عند س = −٢

∴ ٤أ $(−٢)^{٣}$ + ٢ب (−٢) + ١ = −٥١

−٣٢أ − ٤ب = −٥٢

٨أ + ب = ١٣ .... (٢)

بطرح (١) من (٢) نحصل على:

٦أ = ١٢

∴ أ = ٢

عوّض بدل أ = ٢ في المعادلة (١) لتحصل على:

٤ + ب = ١

∴ ب = −٣

المشتقة الثانية

إذا تمّ اشتقاق ص بدلالة س، فستحصل على المشتقة الأولى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

وإذا تمّ اشتقاق $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بدلالة س، فستحصل على $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ وتكتب عادة في صورة $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$.

تُسمى $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ **المشتقة الثانية** **second derivative** لـ ص بدلالة س.

وإذا تمّ اشتقاق د(س) بدلالة س، فستحصل على دالة المشتقة الأولى د′(س). وبالمثل إذا تمّ اشتقاق د′(س) بدلالة س، فستحصل على المشتقة الثانية د″(س).

مُساعَدة

ستستخدم المشتقة الثانية لاحقًا في هذه الوحدة لإيجاد النقاط الحرجة.

مثال ٦

إذا كانت ص = س^٣ + ٣س^٢ − ٩س + ٢، فأوجد:

أ $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$

ب مجال قيم س عندما تكون $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ سالبة.

الحلّ:

أ ص = س^٣ + ٣س^٢ − ٩س + ٢ ← أوجِد اشتقاق ص بدلالة س لتجد المشتقة الأولى.

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣س^٢ + ٦س − ٩ ← أوجِد اشتقاق $\frac{ء ص}{ء س}$ بدلالة س لتجد المشتقة الثانية.

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ٦س + ٦

ب $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ٦س + ٦

∵ $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ سالبة

∴ ٦س + ٦ < ٠ ← حل المتباينة $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ < ٠

٦س < −٦

س < −١

مثال ٧

إذا علمت أن د(س) = (٢س^٢ − ٥)(س + ١)، فأوجِد:

أ د″(س)

ب مجال قيم س عندما تكون د″(س) موجبة.

الحلّ:

أ د(س) = (٢س^٢ − ٥)(س + ١)

د(س) = ٢س^٣ + ٢س^٢ − ٥س − ٥

د′(س) = ٦س^٢ + ٤س − ٥ ← أوجِد د′(س) بدلالة س.

د″(س) = ١٢س + ٤ ← أوجِد د″(س) بدلالة س.

ب د″(س) = ١٢س + ٤

∵ د″(س) موجبة

∴ ١٢س + ٤ > ٠ ← حل المتباينة د″(س) > ٠

١٢س > −٤

س > −$\frac{١}{٣}$

تمارين ٤-٢

١) أوجِد المشتقة الأولى بدلالة س لكل ممّا يأتي:

أ $د(س) = س^{٥}$ ب $د(س) = س^{٩}$ ج $د(س) = س^{-٤}$ د $د(س) = \frac{١}{س}$

هـ $د(س) = ٨$ و $د(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ز $د(س) = س^{٣} \times س^{٢}$ ح $د(س) = \frac{س^{٥}}{س^{٢}}$

٢) أوجِد $د'(س)$ لكل ممّا يأتي:

أ $د(س) = ٢س^{٤}$ ب $د(س) = ٣س^{٥}$ ج $د(س) = \frac{س^{٦}}{٢}$

د $د(س) = \frac{٣}{س}$ هـ $د(س) = \frac{٥}{٣س^{٢}}$ و $د(س) = -٢$

ز $د(س) = \frac{٤س}{\sqrt{س}}$ ح $د(س) = \frac{٢س\sqrt{س}}{٣س^{٣}}$

٣) أوجِد $\frac{ى ص}{ى س}$ لكل ممّا يأتي:

أ $ص = ٥س^{٢} - س + ١$ ب $ص = ٢س^{٣} + ٨س - ٤$ ج $ص = ٧ - ٣س + ٥س^{٢}$

د $ص = (س + ٥)(س - ٤)$ هـ $ص = (٢س^{٢} - ٣)^{٢}$ و $ص = \frac{٢س - ٥}{س^{٢}}$

ز $ص = ٧س^{٢} - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}$ ح $ص = ٣س + \frac{٥}{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ط $ص = \frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}$

٤) أوجِد قيمة $\frac{ى ص}{ى س}$ لكل منحنى عند النقطة المعطاة:

أ $ص = س^{٢} + س - ٤$ عند $(١، -٢)$

ب $ص = ٥ - \frac{٢}{س}$ عند $(٢، ٤)$

ج $ص = \frac{٣س - ٢}{س^{٢}}$ عند $(-٢، -٢)$

٥) أوجِد $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ لكل ممّا يأتي:

أ $ص = (٢س - ٥)(س + ٣)$

ب $ص = \frac{٢س + ٣س^{٢} - ٥س^{٣}}{س}$

ج $ص = (٢س - ٥)(س + ٣)$

٦) إذا علمت أن $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ للدالة $ص = س^{٣} - ٢س^{٢}$ سالبة، فأوجِد مجال قيم س.

٧) أوجِد د$''$(س) لكل ممّا يأتي:

أ د(س) = ٣س^{٥} − ٨س^{٣} + ٤

ب د(س) = ٧ − $\frac{١}{س}$

ج د(س) = $\frac{٥}{س^{٢}}$ − $\frac{٣}{٢س^{٥}}$

٨) إذا علمت أن د (س) = ٣س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$س^{٣}، فأوجِد مجال قيم س بحيث تكون د$''$(س) موجبة.

٩) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س − ٥)(س + ٤) عند النقطة (٣، ٧).

١٠) إذا علمت أن س ص = ١٢، س $\neq$ ٠، فأوجِد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢

١١) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٥س^{٢} − ٨س + ٣ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

١٢) أوجِد إحداثيات النقاط على منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س − ٨ التي يكون عندها الميل يساوي ٩

١٣) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٥س − ١٠}{س^{٢}}$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

١٤) يتقاطع منحنى الدالة ص = س^{٢} − ٤س − ٥ مع المستقيم ص = ١ − ٣س عند النقطتَين ا، ب، أوجِد:

أ إحداثيات النقطتَين ا، ب.

ب ميل المماس للمنحنى عند كل من النقطتَين ا، ب.

١٥) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = أس^{٢} + ب س عند النقطة (٣، −٣) يساوي ٥، فأوجِد قيمتَي ا، ب.

١٦) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٧ عند النقطة (١، ٥) يساوي −٥، فأوجِد قيمتَي ا، ب.

١٧) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = أس + $\frac{ب}{س^{٢}}$ يساوي ١٦ عند س = ١، ويساوي −٨ عند س = −١، فأوجِد قيمتَي ا، ب.

١٨) إذا علمت أن ميل مماس منحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٣ يساوي صفرًا عند س = ١، وعند س = ٦، فأوجِد قيمتَي ا، ب.

١٩) إذا علمت أن ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ٣٦س + ٥، فأوجِد مجال قيم س بحيث $\frac{ءص}{ءس}$ < ٠

٢٠) إذا علمت أن ص = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} − ٦س − ٩، فأوجِد مجال قيم س بحيث $\frac{ءص}{ءس}$ $\geqslant$ ٠

رابط الكتروني

جرّب المصادر الآتية على الموقع underground mathematics

- Slipper slope
- Gradient match

٢١) إذا علمت أن معادلة منحنى الدالة ص = ٣س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س − ٥، فبيّن أن ميل مماس المنحنى لا يمكن أن يكون سالبًا أبدًا.

٢٢) إذا علمت أن ص = (٣س − ٥)(٢س + ٧)، فبيّن أن $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$ عدد ثابت.

٢٣) إذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ + س^{٢} وأن س > ٠، فأوجِد قيمة س عندما د″(س) = ٢٦

٢٤) أوجد المشتقة الثانية عند النقطة المحددة في كل مما يأتي:

أ) ص = (س^{٢} + ٣)(٥ − ٢س) عند س = ١

ب) ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١}{\text{س}}$ عند س = ٢

ج) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + $\frac{١}{٢}$س^{٢} عند س = ٨

٢٥) إذا علمت ان د(س) = س^{٤} − ب س^{٢} وأن د′(١) = ٧، فأوجِد قيمة د″(−١).

٢٦) إذا علمت أن د(س) = ١٨ + س^{٢} − $\frac{٣}{\text{س}^{٢}}$، س ≠ ٠، فأوجِد مجال قيم س عندما د″(س) ⩾ ٠

٤-٣ قاعدة السلسلة Chain rule

لإيجاد مشتقة الدالة $ص = (٥س + ٣)^{٦}$، يمكن أن نفكّ الأقواس، ثم نجد مشتقة كل حد على حدة، ولكن هذه الطريقة تستغرق وقتًا طويلًا، لذا توجد طريقة أكثر فاعلية تساعدنا على إيجاد المشتقة دون أن نفك الأقواس كما في المثال الآتي:

افترض أن $ع = ٥س + ٣$، فتصبح $ص = (٥س + ٣)^{٦}$ في صورة $ص = ع^{٦}$

هذا يعني أن ص تغيرت من دالة بدلالة س إلى دالة بدلالة ع؛ وعليه يمكن اشتقاق الدالة $ص = (٥س + ٣)^{٦}$ باستخدام **قاعدة السلسلة chain rule** كما في النتيجة الآتية:

رابط الكتروني

جرّب المصدر chain mapping على الموقع underground mathematics

نتيجة ٥

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

مثـــال ٨

أوجِد مشتقة الدالة $ص = (٣س - ٢)^{٧}$

الحـــلّ:

$ص = (٣س - ٢)^{٧}$

افترض أن $ع = ٣س - ٢$ فيكون $ص = ع^{٧}$

$\frac{ءع}{ءس} = ٣$ و $\frac{ءص}{ءع} = ٧ع^{٦}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ .... استخدم قاعدة السلسلة.

$= ٧ع^{٦} \times ٣$ .... استبدل ع بـ $٣س - ٢$ لأن ص هي أيضًا دالة بدلالة س، أي أنها مشتقة بدلالة س، وليست دالة بدلالة ع

$= ٧(٣س - ٢)^{٦} \times ٣$

$= ٢١(٣س - ٢)^{٦}$

١٥٢

مع الممارسة ستتمكن من القيام بذلك ذهنيًا كما في الخطوات الآتية:

اعتمد على 'ما هو داخل القوس' في $(٣س - ٢)^{٧}$ وهو $٣س - ٢$

لتجد اشتقاق $(٣س - ٢)^{٧}$ اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: اضرب معامل القوسَين في القوة واطرح واحدًا من القوة ٧: $٧(٣س - ٢)^{٦}$

الخطوة ٢: اشتق ما بداخل القوسَين: ٣

الخطوة ٣: اضرب العبارتَين الناتجتَين: $٢١(٣س - ٢)^{٦}$

نتيجة ٦

إذا كانت $ص = (د(س))^{ن}$، فإن $\frac{ءص}{ءس} = ن(د(س))^{ن-١} \times د'(س)$.

مثــال ٩

أوجِد مشتقة الدالة ص = $\frac{٢}{(٣س^{٢} + ١)^{٥}}$

الحــلّ:

ص = $\frac{٢}{(٣س^{٢} + ١)^{٥}}$ = ٢$(٣س^{٢} + ١)^{-٥}$

افترض أن ع = ٣$س^{٢}$ + ١ فيكون ص = ٢$ع^{-٥}$

$\frac{ء ع}{ء س}$ = ٦س و $\frac{ء ص}{ء ع}$ = −١٠$ع^{-٦}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء س}$ ······ استخدم قاعدة السلسلة.

= −١٠$ع^{-٦}$ × ٦س ······ استبدل ع بـ ٣$س^{٢}$ + ١

= −١٠$(٣س^{٢} + ١)^{-٦}$ × ٦س

= − $\frac{٦٠س}{(٣س^{٢} + ١)^{٦}}$

طريقة بديلة:

اكتب $\frac{٢}{(٣س^{٢} + ١)^{٥}}$ في صورة ٢$(٣س^{٢} + ١)^{-٥}$

الخطوة ١: −١٠$(٣س^{٢} + ١)^{-٦}$ اضرب معامل القوسين ٢ في القوة −٥ واطرح واحدًا من القوة −٥

الخطوة ٢: ٦س ······ أوجد اشتقاق ما بداخل القوسين، ٣$س^{٢}$ + ١

الخطوة ٣: اضرب العبارتَين الناتجتَين: −٦٠س$(٣س^{٢} + ١)^{-٦}$ = − $\frac{٦٠س}{(٣س^{٢} + ١)^{٦}}$

مثــال ١٠

يمر منحنى الدالة ص = $\sqrt{أس + ب}$ بالنقطة (١٢، ٤)، وميله عند هذه النقطة يساوي $\frac{١}{٤}$ أوجِد قيمة كل من أ، ب.

الحــلّ:

ص = $\sqrt{أس + ب}$ ······ عوّض بدل س = ١٢، ص = ٤

٤ = $\sqrt{١٢أ + ب}$ .... (١)

ص = $(أس + ب)^{\frac{١}{٢}}$ ······ اكتب $\sqrt{أس + ب}$ في صورة $(أس + ب)^{\frac{١}{٢}}$

افترض أن ع = أس + ب فيكون ص = $ع^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{ء ع}{ء س}$ = أ و $\frac{ء ص}{ء ع}$ = $\frac{١}{٢}$ $ع^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء س}$ ······ استخدم قاعدة السلسلة.

= $\frac{١}{٢}$ $ع^{-\frac{١}{٢}}$ × أ

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{أ}}{٢\sqrt{\text{أس} + \text{ب}}}$ ..... عوّض بدل س = ١٢، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٤}$

$\frac{١}{٤} = \frac{\text{أ}}{٢\sqrt{١٢\text{أ} + \text{ب}}}$

$٢\text{أ} = \sqrt{١٢\text{أ} + \text{ب}}$ .... (٢)

بحل المعادلتَين (١)، (٢) ينتج: ٢أ = ٤

∴ أ = ٢

عوّض بدل أ = ٢ في المعادلة (١) لتحصل على:

$٤ = \sqrt{٢٤ + \text{ب}}$ .... ربّع الطرفَين.

١٦ = ٢٤ + ب

∴ ب = −٨

مُساعَدة

بإمكانك حل المعادلتين بتربيع الطرفين، وقد تظهر لك بعض القيم المرفوضة.

قاعدة السلسلة باستخدام صيغة الدالة

نعرف أنه إذا كانت ص = $(\text{د(س)})^{\text{ن}}$،

فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن$(\text{د(س)})^{\text{ن} - ١}$ × د′(س).

وعليه يمكننا إيجاد مشتقة الدوال المركبة في صورة (د ∘ هـ)(س) عندما تكون د(س) دالة قوة.

إذا كانت د(س) = $(٣\text{س} + ١)^{٥}$،

فإن د′(س) = ٥$(٣\text{س} + ١)^{٤}$ × ٣ = ١٥$(٣\text{س} + ١)^{٤}$

من جهة ثانية، وبصورة عامة مشتقة الدالة المركبة (د ∘ هـ) (س) هي ناتج ضرب (د′ ∘ هـ)(س) في هـ′(س)، حيث إن (د′ ∘ هـ)(س) هي بدورها دالة مركبة، وأن هـ′(س) هي مشتقة الدالة هـ(س)، والموضحة في النتيجة الآتية:

نتيجة ٧

مشتقة الدالة ع(س) = (د ∘ هـ)(س) هي ع′(س) = (د′ ∘ هـ)(س) × هـ′(س).

كما أن ع′(س) هي دالة ميل مماس منحنى الدالة (د ∘ هـ)(س).

كما يمكن كتابة مشتقة ع(س) في صورة ع′(س) = (د(هـ(س)))′ = د′(هـ(س)) × هـ′(س)

مثال ١١

إذا علمت أن ع(س) = (د ∘ هـ)(س)، حيث د (س) = ٢س^{٣}، هـ(س) = ٩س^{٢} + ٧:

أ أوجِد ع′(س).

ب أكّد الناتج في الجزئية (أ) بإيجاد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت ص = ٢(٩س^{٢} + ٧)^{٣}

الحلّ:

أ ع′(س) = د′(هـ(س)) × هـ′(س)

= ٦(٩س^{٢} + ٧)^{٢} × ١٨س

= ١٠٨س (٩س^{٢} + ٧)^{٢}

لإيجاد ع′(س)، استخدم:

- مشتقة هـ(س)، أي هـ′(س) = ١٨س
- مشتقة د (س)، أي د′(س) = ٦س^{٢}
- الدالة المركبة حيث تطبق د′(س) على هـ(س).

ب ص = ٢(٩س^{٢} + ٧)^{٣}

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء هـ}}$ × $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء س}}$

لتكن هـ = ٩س^{٢} + ٧، بحيث إن ص = ٢هـ^{٣}

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء س}}$ = ١٨س، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء هـ}}$ = ٦هـ^{٢}

= ٦هـ^{٢} × ١٨س

= ١٠٨س × هـ^{٢}

= ١٠٨س (٩س^{٢} + ٧)^{٢}

تأكد من الناتج في الجزئية (أ).

∴ إذا كانت ص = هـ(س)، فإن

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = هـ′(س) = ١٠٨س (٩س^{٢} + ٧)^{٢}

ويمكنك حل المثال ذهنيًا.

مُساعَدة

إذا استخدمنا القاعدة الموجودة في نتيجة ٨، يمكننا إيجاد مشتقة الدالة (د ∘ هـ)(س) باستخدام هـ(س)، د′(س)، هـ′(س) فقط. من غير الضروري إيجاد الدالة المركبة (د ∘ هـ)(س) أولًا.

نستنتج من مثال ١١ أنه يمكن إيجاد الناتج باستخدام قاعدة السلسلة بأكثر من طريقة.

عليك دائمًا تقديم الناتج النهائي باستخدام الرموز نفسها المستخدمة في السؤال.

مثال ١٢

لتكن الدالة ع(س) = ٣(٥س^{٢} − ٧س)^{٢}، أوجد:

أ دالتَين د (س)، هـ(س) علمًا بأن ع(س) = (د ∘ هـ)(س).

ب ع′(س).

الحلّ:

أ د (س) = ٣س^{٢}

هـ(س) = ٥س^{٢} − ٧س

يعني ذلك أن:

ع(س) = (د ∘ هـ)(س) = د (هـ(س))

= ٣(٥س^{٢} − ٧س)^{٢}

ب د(س) = ٣س^{٢} ، هـ(س) = ٥س^{٢} − ٧س ←أوجِد مشتقة كل من د (س)، هـ(س)

د′(س) = ٦س ، هـ′(س) = ١٠س − ٧

ع′(س) = ((د′ ∘ هـ)(س)) × هـ′(س)

= ٦(٥س^{٢} − ٧س) × (١٠س − ٧) ←الدالة المركبة د′(هـ(س)) = ٦(هـ (س)) = ٦(٥س^{٢} − ٧س).

= ٦س (٥س − ٧) (١٠س − ٧) ←عبّر عن المشتقة في صورة ضرب لنواتجها.

مثـــال ١٣

إذا علمت أن الدالة ع(س) = ٤$\sqrt{٦س^{٢} - ١٤}$، فأوجِد:

أ ع′(س).

ب ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ع(س) عند س = $\sqrt{٥}$

الحـــلّ:

أ د (س) = ٤س$^{\frac{١}{٢}}$ ، هـ(س) = ٦س^{٢} − ١٤ ←حدّد د (س)، هـ(س)

د′(س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ ، هـ′(س) = ١٢س ←أوجِد د′(س)، هـ′(س)

لتكن ع(س) = (د ∘ هـ)(س): ←د′(هـ (س)) = $\frac{٢}{\sqrt{هـ(س)}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٦س^{٢} - ١٤}}$

ع′(س) = (د′(هـ (س))) × هـ′(س)

= $\frac{٢}{\sqrt{٦س^{٢} - ١٤}}$ × ١٢س

= $\frac{٢٤س}{\sqrt{٦س^{٢} - ١٤}}$

أو بإمكانك إيجاد المشتقة ع′(س) ذهنيًا بشكل مباشر.

ب ع′($\sqrt{٥}$) = $\frac{٢٤\sqrt{٥}}{\sqrt{٦ × ٥ - ١٤}}$ = $\frac{٢٤\sqrt{٥}}{٤}$ = ٦$\sqrt{٥}$ ←عوض بدل س = $\sqrt{٥}$ في دالة الميل، ع′(س) = $\frac{٢٤س}{\sqrt{٦س^{٢} - ١٤}}$

تمارين ٤-٣

١) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بدلالة س:

أ $ص = (س + ٤)^{٦}$ ب $ص = (٢س + ٣)^{٨}$ ج $ص = (٣ - ٤س)^{٥}$ د $ص = \left(\frac{١}{٢}س + ١\right)^{٩}$

هـ $ص = \frac{(٥س - ٢)^{٨}}{٤}$ و $ص = ٥(٢س - ١)^{٥}$ ز $ص = ٢(٤ - ٧س)^{٤}$ ح $ص = \frac{١}{٥}(٣س - ١)^{٧}$

ط $ص = (س^{٢} + ٣)^{٥}$ ي $ص = (٢ - س^{٢})^{٨}$ ك $ص = (س^{٢} + ٤س)^{٣}$ ل $ص = \left(س^{٢} - \frac{٥}{س}\right)^{٥}$

٢) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بدلالة س:

أ $ص = \frac{١}{س + ٢}$ ب $ص = \frac{٣}{س - ٥}$ ج $ص = \frac{٨}{٣ - ٢س}$ د $ص = \frac{١٦}{س^{٢} + ٢}$

هـ $ص = \frac{٤}{(٣س + ١)^{٦}}$ و $ص = \frac{٣}{٢(٣س + ١)^{٥}}$ ز $ص = \frac{٨}{س^{٢} + ٢س}$ ح $ص = \frac{٧}{(٢س^{٢} - ٥س)^{٧}}$

٣) أوجِد مشتقة كلّ ممّا يأتي بدلالة س:

أ $ص = \sqrt{س - ٥}$ ب $ص = \sqrt{٢س + ٣}$ ج $ص = \sqrt{٢س^{٢} - ١}$ د $ص = \sqrt{س^{٣} - ٥س}$

هـ $ص = \sqrt[٣]{٥ - ٢س}$ و $ص = ٢\sqrt{٣س + ١}$ ز $ص = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٥}}$ ح $ص = \frac{٦}{\sqrt[٣]{٢ - ٣س}}$

٤) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = (٢س - ٣)^{٥}$ عند النقطة (٢، ١).

٥) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = \frac{٦}{(س - ١)^{٢}}$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

٦) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = س - \frac{٣}{س + ٢}$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٧) أوجِد إحداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى الدالة $ص = \sqrt{س^{٤} - ١٠س + ٢٦}$ يساوي صفرًا.

٨) إذا علمت أن منحنى الدالة $ص = \frac{أ}{ب س - ١}$ يمر بالنقطة (٢، ١)، وميله عند هذه النقطة يساوي $-\frac{٣}{٥}$، فأوجِد قيمتَي أ، ب.

٩) دالة معادلتها $ص = (٣س - ٢)^{٤}$، حدد ما إذا كانت $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ موجبة، أو صفرًا، أو سالبة عند $س = \frac{١}{٢}$

١٠) إذا علمت أن $ع(س) = ٤\sqrt{٤س^{٢} + ٥}$، فأوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ع(س) عند س = −١

١١) لتكن الدالتان د (س) = $\sqrt{٤س - ١}$، هـ(س) = ١ − ٢س^{٢}:

أ بيّن أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (هـ ∘ د)(س) عدد ثابت.

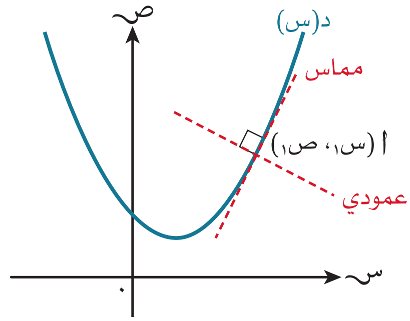
ب أوجِد ميل المماس للمنحنى ص = (هـ ∘ د)(س) عند س = $\frac{١}{٢}$

١٢) إذا علمت أن الدالة ع(س) = $\sqrt{\frac{٢س - ١}{س}}$، فأوجِد:

أ ع$'$(س).

ب قيمة ك عندما يكون ميل المماس لمنحنى الدالة ع(س) عند س = $\frac{٢}{٣}$ يساوي ك$\sqrt{٢}$

٤-٤ المماس والعمودي tangent and normal



يبيّن الشكل المقابل المماس لمنحنى الدالة د (س)، والعمودي عليه عند النقطة أ (س$_1$، ص$_1$)، فإذا كانت قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة أ تساوي م، فيمكنك إيجاد معادلة المماس عند النقطة أ وفقًا للنتيجة الآتية:

نتيجة ٨

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة أ (س$_1$، ص$_1$) هي:

ص − ص$_1$ = م(س − س$_1$)، حيث م ميل المماس (المشتقة عند النقطة أ).

يُسمى المستقيم الذي يصنع زاوية قائمة مع المماس عند النقطة أ **بالعمودي normal** عند أ، وبما أن ناتج ضرب ميلَي مستقيمَين متعامدَين يساوي −١، فإن ميل العمودي = − $\frac{١}{م}$، ويمكنك إيجاد معادلة العمودي وفقًا للنتيجة الآتية:

نتيجة ٩

معادلة العمودي على المماس للمنحنى عند النقطة أ (س$_1$، ص$_1$) هي:

ص − ص$_1$ = − $\frac{١}{م}$(س − س$_1$)

إذا كان م = ٠، فإن المماس يكون أفقيًا، وتكون معادلته ص = ص$_1$؛ وعليه يكون العمودي رأسيًا، ومعادلته س = س$_1$.

مثـــال ١٤

أوجِد معادلتَي المماس، والعمودي لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٢} + $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$ − ٩ عند س = ٢

الحـــلّ:

ص = ٢س^{٢} + ٨س$^{-٢}$ − ٩ .... اكتب الدالة التي يجب اشتقاقها، ثم أوجِد مشتقتها الأولى.

أولًا: نوجد ميل المماس عند س = ٢

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤س − ١٦س$^{-٣}$

د′(٢) = ٤(٢) − ١٦(٢)$^{-٣}$ = ٦ .... أوجِد ميل المماس عندما س = ٢

ثانيًا: نوجد قيمة ص عندما س = ٢،

فإن ص = ٢(٢)^{٢} + ٨(٢)$^{-٢}$ − ٩ = ١، .... أوجِد الإحداثي الصادي للنقطة الواقعة على المنحنى عندما س = ٢

∴ النقطة هي (٢، ١).

∵ المماس يمر بالنقطة (٢، ١)، وميله ٦، فتكون معادلته:

$$\text{ص} - ١ = ٦(\text{س} - ٢)$$

$$\text{ص} = ٦\text{س} - ١١$$

∵ العمودي يمر بالنقطة (٢، ١)، وميله $-\frac{١}{٦}$ فتكون معادلته:

$$\text{ص} - ١ = -\frac{١}{٦}(\text{س} - ٢)$$

$$\text{س} + ٦\text{ص} = ٨$$

مثال ١٥

إذا علمت أن معادلة منحنى الدالة $\text{ص} = (٤ - \sqrt{\text{س}})^٣$، وكان العمودي عند النقطة ل(٤، ٨) يتقاطع مع العمودي عند النقطة ن(٩، ١) في النقطة م، فأوجد إحداثيات النقطة م.

الحـلّ:

$$\text{ص} = (٤ - \sqrt{\text{س}})^٣$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(٤ - \sqrt{\text{س}})^٢ \left(-\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\right) = -\frac{٣(٤ - \sqrt{\text{س}})^٢}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

عندما س = ٤، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{٣(٤ - \sqrt{٤})^٢}{٢\sqrt{٤}} = -٣$

عندما س = ٩، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{٣(٤ - \sqrt{٩})^٢}{٢\sqrt{٩}} = -\frac{١}{٢}$

ميل المماس عند (٤ ، ٨)

ميل المماس عند (٩، ١)

معادلة العمودي عند النقطة ل، والذي يمر بالنقطة (٤، ٨)، وميله $\frac{١}{٣}$:

$$\text{ص} - ٨ = \frac{١}{٣}(\text{س} - ٤)$$

$$٣\text{ص} = \text{س} + ٢٠ \ldots\ldots (١)$$

معادلة العمودي عند النقطة ن، والذي يمر بالنقطة (٩، ١)، وميله ٢:

$$\text{ص} - ١ = ٢(\text{س} - ٩)$$

$$\text{ص} = ٢\text{س} - ١٧ \ldots\ldots (٢)$$

بحلّ المعادلتَين (١)، (٢):

$$٣(٢\text{س} - ١٧) = \text{س} + ٢٠$$

$$\text{س} = ١٤{,}٢$$

عندما س = ١٤,٢، فإن $\text{ص} = ٢(١٤{,}٢) - ١٧ = ١١{,}٤$

∴ م(١٤,٢، ١١,٤)

تمارين ٤-٤

١) أوجِد معادلة المماس لكل منحنى من المنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة:

أ) ص = س^{٢} − ٣س + ٢ عند (٣، ٢).

ب) ص = (٢س − ٥)^{٤} عند (٢، ١).

ج) ص = $\frac{س^{٣} - ٥}{س}$ عند (−١، ٦).

هـ) ص = ٢$\sqrt{س - ٥}$ عند (٩، ٤).

٢) أوجِد معادلة العمودي لكل منحنى من المنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة:

أ) ص = ٣س^{٣} + س^{٢} − ٤س + ١ عند (٠، ١).

ب) ص = $\frac{٣}{\sqrt[٣]{س + ١}}$ عند (−٢، −٣).

ج) ص = (٥ − ٢س)^{٣} عند (٣، −١).

د) ص = $\frac{٢٠}{س^{٢} + ١}$ عند (٣، ٢).

٣) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = $\frac{٨}{(س + ٢)^{٢}}$ يمر بالنقطة ا $\left(٢، \frac{١}{٢}\right)$، فأوجد:

أ) معادلة مماس المنحنى عند النقطة ا.

ب) معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة ا.

٤) إذا كانت معادلة منحنى الدالة ص = ٥ − ٣س − ٢س^{٢}:

أ) بيّن أن معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (−٢، ٣) هي س + ٥ص = ١٣

ب) أوجِد إحداثيات النقطة الثانية التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى.

٥) العمودي على المنحنى الذي معادلته ص = س^{٣} − ٥س + ٣ عند النقطة (−١، ٧) يقطع محور الصادات في النقطة ل. أوجِد إحداثيات النقطة ل.

٦) مماسا المنحنى الذي معادلته ص = ٥ − ٣س − س^{٢} عند النقطة (−١، ٧)، والنقطة (−٤، ١) يتقاطعان في النقطة ل. أوجِد إحداثيات النقطة ل.

٧) إذا علمت أن العمودي على المنحنى الذي معادلته ص = ٤ − ٢$\sqrt{\text{س}}$ عند النقطة ل (١٦، −٤) يقطع محور السينات في النقطة ن، فأوجِد:

أ معادلة العمودي ل ن.

ب إحداثيات النقطة ن.

٨) معادلة منحنى الدالة ص = ٢س − $\frac{١٠}{\text{س}^{٢}}$ + ٨:

أ أوجِد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

ب بيّن أن العمودي على المنحنى عند النقطة (١، ٠) يتقاطع مع محور الصادات في النقطة $\left(٠، \frac{١}{٢٢}\right)$.

٩) إذا علمت أن العمودي على المنحنى الذي معادلته ص = $\frac{٦}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ عند النقطة (٣، ٦) يتقاطع مع محور السينات في النقطة ل، ويتقاطع مع محور الصادات في النقطة ن، فأوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ل ن.

١٠) إذا علمت أن معادلة المنحنى ص = س^{٥} − ٨ س^{٣} + ١٦س، والعمودي على المنحنى عند النقطة ل (١، ٩) والمماس للمنحنى عند النقطة ن (−١، −٩) يتقاطعان في النقطة م، فأوجِد إحداثيات م.

١١) إذا علمت أن معادلة منحنى الدالة ص = ٢($\sqrt{\text{س}}$ − ١)^{٢} + ٢، وأن العمودي عند النقطة ل (٤، ٤) والعمودي عند النقطة ن (٩، ١٨) يتقاطعان في النقطة م، فأوجِد إحداثيات النقطة م.

١٢) منحنى معادلته ص = ٣س + $\frac{١٢}{\text{س}}$، يمر بالنقطتَين ا(٢، ١٢)، ب(٦، ٢٠)، والمماسَان المرسومَان عند النقطتَين ج، ء الواقعتَين على المنحنى يوازيان المستقيم ا ب. أوجِد:

أ إحداثيات النقطتَين ج، ء.

ب معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة ج ء.

١٣) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = س (س − ١) (س + ٢) يتقاطع مع محور السينات في النقاط و (٠، ٠)، ا(١، ٠)، ب(−٢، ٠)، والعمودَين على المنحنى عند النقطتَين ا، ب يتقاطعان في النقطة ج، فأوجِد إحداثيات النقطة ج.

١٤) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = $\frac{٥}{٢ - ٣\text{س}}$ يمر بالنقطة ل (−١، ١)، فأوجِد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ل، وقياس الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات.

١٥) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = $\frac{١٢}{٢\text{س} - ٣}$ − ٤ يقطع محور السينات في النقطة ل، وأن مماس المنحنى عند النقطة ل يقطع محور الصادات في النقطة ن، فأوجد ل ن.

١٦) إذا علمت أن العمودي على منحنى الدالة ص = ٢س^{٢} + ك س − ٣ عند النقطة (٣، −٦) يوازي المستقيم س + ٥ ص = ١٠، فأوجِد:

أ قيمة ك.

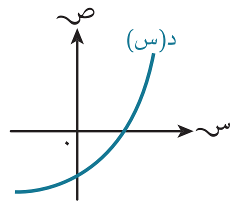
ب إحداثيات النقطة الثانية التي يتقاطع فيها العمودي والمنحنى.

رابط الكتروني

جرّب مصدر المماس أو العمودي [the Tangent or normal resource]() على الموقع Underground mathematics

٤-٥ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة Increasing and decreasing functions

استكشف ٢



أ يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة د (س).

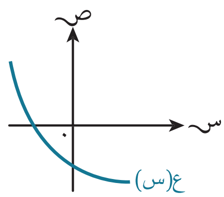
١) أكمل العبارتَين الآتيتَين حول الدالة د (س):

"كلما ازدادت قيمة س، فإن قيمة ص ......"

"إشارة ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى تكون دائمًا ......"

٢) ارسم تمثيلات بيانية أخرى تحقق هاتَين العبارتَين.

هذا النوع من الدوال يسمى **الدوال المتزايدة increasing functions**.



ب يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع (س).

١) أكمل العبارتَين الآتيتَين حول الدالة ع (س):

"كلما ازدادت قيمة س، فإن قيمة ص ......"

"إشارة ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى تكون دائمًا ......"

٢) ارسم تمثيلات بيانية أخرى تحقق هاتَين العبارتَين.

هذا النوع من الدوال يسمى **الدوال المتناقصة decreasing functions**.

رابط الكتروني

جرّب choose your families على الموقع underground mathematics

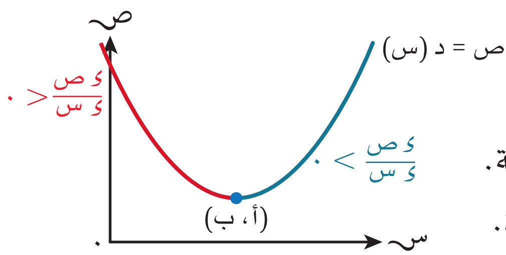
بعد إنجاز استكشف ٢، نلاحظ أن: **الدالة المتزايدة** د (س) هي الدالة التي تزداد فيها قيمة د (س) كلما ازدادت قيمة س، ويعني ذلك أن د (أ) $>$ د (ب) عندما أ $>$ ب.

وبالمثل **الدالة المتناقصة** د (س) هي الدالة التي تتناقص فيها قيمة د (س) كلما ازدادت قيمة س، أو د (أ) $<$ د (ب) عندما أ $>$ ب.

إذا كان ميل المماس عند نقطة على المنحنى موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة عند تلك النقطة.

وبالمثل، إذا كان ميل المماس عند نقطة على المنحنى سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة عند تلك النقطة.

انظر إلى منحنى الدالة ص = د (س) المبيّنة في الشكل المقابل.



يمكننا تقسيم منحنى الدالة إلى جزأَين.

إلى يسار س = أ، يكون ميل المماس للمنحنى سالبًا، وتكون الدالة متناقصة.

إلى يمين س = أ، يكون ميل المماس للمنحنى موجبًا، وتكون الدالة متزايدة.

عند س = أ يكون ميل المماس للمنحنى مساويًا الصفر. وتكون الدالة غير متناقصة، وغير متزايدة.

يؤدي ذلك إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ١٠

تكون الدالة ص = د (س):

- متزايدة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس} > ٠$
- متناقصة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس} < ٠$
- غير متناقصة، وغير متزايدة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

مثال ١٦

أوجِد مجموعة قيم س بحيث تكون الدالة ص = ٨ − ٣س − $س^٢$ متناقصة.

الحلّ:

ص = ٨ − ٣س − $س^٢$ .... اكتب الدالة وأوجد مشتقتها الأولى.

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٣ − ٢س

تكون ص متناقصة عندما تكون $\frac{ءص}{ءس} < ٠$ .... تكون الدالة متناقصة عندما تكون دالة ميل المنحنى سالبة.

−٣ − ٢س < ٠ .... عند الضرب بـ −١، اعكس رمز المتباينة للوصول إلى ٣ + ٢س > ٠

٢س > −٣

س > $-\frac{٣}{٢}$

مثــال ١٧

إذا علمت أن الدالة د (س) = ٤س^{٣} − ١٥س^{٢} − ٧٢س − ٨، فأوجِد:

أ د$'$(س).

ب مجال قيم س بحيث تكون د (س) متزايدة.

ج مجال قيم س بحيث تكون د (س) متناقصة.

الحــلّ:

أ د (س) = ٤س^{٣} − ١٥س^{٢} − ٧٢س − ٨

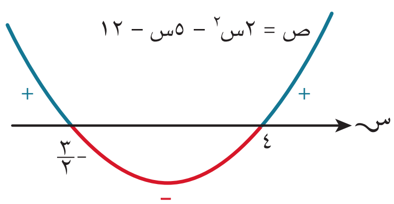
د$'$(س) = ١٢س^{٢} − ٣٠س − ٧٢

ب عندما تكون د$'$(س) > ٠ تكون د (س) متزايدة.

١٢س^{٢} − ٣٠س − ٧٢ > ٠ ⋯ تكون الدالة متزايدة عندما تكون دالة ميل المنحنى موجبة.

٢س^{٢} − ٥س − ١٢ > ٠ ⋯ اقسم على ٦، ثم حلل إلى العوامل حتى يصبح رسم منحنى الدالة ممكنًا.

(٢س + ٣) (س − ٤) > ٠



من خلال الرسم نجد أن:

س < $-\frac{٣}{٢}$ ، س > ٤

ج عندما تكون د$'$(س) < ٠ تكون د (س) متناقصة.

∴ $-\frac{٣}{٢}$ < س < ٤

مثــال ١٨

إذا كانت د (س) = $\frac{٥}{٢س - ٣}$ ، حيث س > $\frac{٣}{٢}$

فأوجِد د$'$(س)، وحدد ما إذا كانت د (س) دالة متزايدة، أو متناقصة، أو غير ذلك.

الحــلّ:

د (س) = $\frac{٥}{٢س - ٣}$ ⋯ اكتب الدالة في صورة دالة قوة.

= ٥(٢س − ٣)$^{-١}$ ⋯ طبّق الاشتقاق باستخدام قانون السلسلة.

د$'$(س) = −٥(٢س − ٣)$^{-٢}$(٢)

= $-\frac{١٠}{(٢س - ٣)^{٢}}$

∵ س > $\frac{٣}{٢}$، فإن (٢س − ٣)^{٢} > ٠ لكل قيم س > $\frac{٣}{٢}$.

∴ د$'$(س) < ٠ لكل قيم س في مجال الدالة د (س).

∴ د (س) دالة متناقصة.

تمارين ٤-٥

١) أوجِد مجموعة قيم س عندما تكون كل دالة ممّا يأتي متزايدة:

أ د(س) = س^{٢} − ٨س + ٢

ب د(س) = ٢س^{٢} − ٤س + ٧

ج د(س) = ٥ − ٧س − ٢س^{٢}

د د(س) = س^{٣} − ١٢س^{٢} + ٢

هـ د(س) = ٢س^{٣} − ١٥س^{٢} + ٢٤س + ٦

و د(س) = ١٦ + ١٦س − س^{٢} − س^{٣}

٢) أوجِد مجموعة قيم س عندما تكون كل دالة ممّا يأتي متناقصة:

أ د(س) = ٣س^{٢} − ٨س + ٢

ب د(س) = ١٠ + ٩س − س^{٢}

ج د(س) = ٢س^{٣} − ٢١س^{٢} + ٦٠س − ٥

د د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ٥

هـ د(س) = −٤٠س + ١٣س^{٢} − س^{٣}

و د(س) = ١١ + ٢٤س − ٣س^{٢} − س^{٣}

٣) أوجِد قيم س عندما تكون د(س) = $\frac{١}{٦}$(٥ − ٢س)^{٣} + ٤س متزايدة.

٤) إذا كانت د(س) = $\frac{٤}{١ - ٢س}$، حيث س ⩽ ١، فأوجِد د$'$(س)، وحدّد ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو غير ذلك.

٥) إذا كانت د(س) = $\frac{٥}{(س + ٢)^{٢}}$ − $\frac{٢}{س + ٢}$، حيث س ⩾ ٠، فأوجِد د$'$(س)، وحدّد ما إذا كانت الدالة متزايدة، متناقصة، أو غير ذلك.

٦) إذا كانت د(س) = (٢س + ٥)^{٢} − ٣، حيث س ⩾ ٠، فأوجِد د$'$(س) واذكر سبب أن الدالة متزايدة.

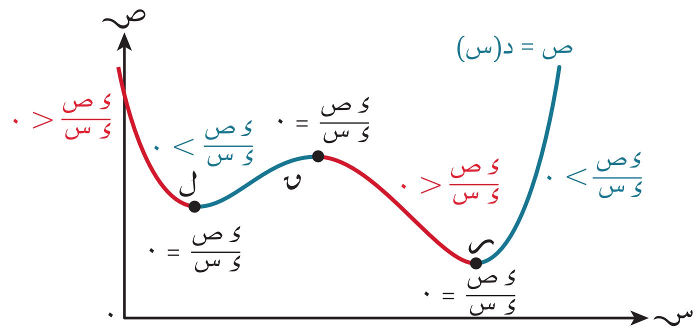
٧) بيّن أن د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س}$ متزايدة.

٨) إذا علمت أن الدالة د(س) = $\frac{٢}{س^{٤}}$ − س^{٢}، حيث س > ٠، فبيّن أن د(س) متناقصة.

٩) ينتج مصنع س سلعة كل يوم. وكانت دالة الربح ع(س) = ٢س^{٣} − ٨١س^{٢} + ٨٤٠س، أوجِد عدد السلع (س) المنتجة التي يتناقص فيها الربح.

٤-٦ النقاط الحرجة Stationary points

يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالة ص = د (س):



يبيّن الجزءان الحمراوان في المنحنى أن ميل المماس للمنحنى سالب (لأن د (س) دالة متناقصة)، ويبيّن الجزءان الزرقاوان أن ميل المماس للمنحنى موجب (لأن د (س) دالة متزايدة). ميل المماس للمنحنى يساوي صفرًا عند النقاط ل، ن، م.

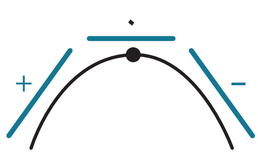
النقطة الحرجة Stationary point للدالة المعرّفة على الفترة المفتوحة: هي النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق (لا توجد مشتقة) أو المشتقة عندها تساوي صفرًا، في هذا المنهج سيتم التطرق إلى النقاط الحرجة التي عندها المشتقة تساوي صفرًا فقط.

النقطة التي يكون عندها الميل يساوي صفرًا تسمى بالنقطة الحرجة أو نقطة التحول، وتنقسم إلى:

١٦٨

النقاط العظمى Maximum points

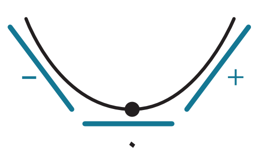
تسمى النقطة الحرجة ن **بالنقطة العظمى**؛ لأن قيمة ص فيها أكبر من قيم ص في النقاط القريبة منها.



في النقطة العظمى يكون:

- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$
- ميل المماس للمنحنى موجبًا إلى يسارها، وسالبًا إلى يمينها (أي يكون منحنى الدالة متزايدًا يسار النقطة، ومتناقصًا يمين النقطة).

النقاط الصغرى Minimum points

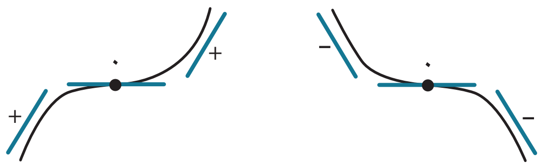


تسمى النقطتان الحرجتان ل، م **نقاطًا صغرى**.

في النقطة الصغرى يكون:

- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$
- ميل المماس للمنحنى سالبًا إلى يسارها وموجبًا إلى يمينها (أي يكون منحنى الدالة متناقصًا يسار النقطة ومتزايدًا يمين النقطة).

نقاط الانعطاف Points of inflexion



يوجد نوع ثالث من النقاط الحرجة يُسمى **نقطة الانعطاف**.

عند نقطة الانعطاف يكون:

- $\frac{ءص}{ءس} = ٠$
- يتغير الميل $\left\{ \begin{array}{l} \text{من موجب إلى صفر ثم إلى موجب،} \\ \text{أو} \\ \text{من سالب إلى صفر ثم إلى سالب.} \end{array} \right.$
- نقطة الانعطاف ليست نقطة عظمى ولا نقطة صغرى.

المشتقة الأولى والنقاط الحرجة

يمكننا إيجاد طبيعة النقطة الحرجة من خلال معرفة الميل إلى جانبَي النقطة، وبمسافة قريبة منها يسمى ذلك **اختبار المشتقة الأولى** **first derivative test**.

مثـــال ١٩

أوجِد النقاط الحرجة لمنحنى الدالة $ص = س^{٣} - ١٢س + ٥$، وحدد نوع كل منها وارسم بيانها موضحًا النقاط الحرجة.

الحـــلّ:

$ص = س^{٣} - ١٢س + ٥$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} - ١٢$

لتجد النقاط الحرجة:

$\frac{ءص}{ءس} = ٠$ .... الميل عند النقطة الحرجة يساوي صفرًا.

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$ .... اقسم على ٣، ثم حلل إلى العوامل.

$س^{٢} - ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٢) = ٠$

$س = -٢$ أو $س = ٢$

لتحديد إحداثيات النقاط الحرجة نعوض في الدالة ص:

عند $س = -٢$، تكون $ص = (-٢)^{٣} - ١٢(-٢) + ٥ = ٢١$

عند $س = ٢$، تكون $ص = (٢)^{٣} - ١٢(٢) + ٥ = -١١$

∴ النقطتان الحرجتان هما: $(-٢، ٢١)$، $(٢، -١١)$.

يتم تحديد الإحداثي الصادي للنقاط الحرجة بالتعويض عن قيم س في الدالة ص.

لتحديد نوع النقطتَين $(-٢، ٢١)$، $(٢، -١١)$:

س	-١,٩	-٢	-٢,١
$\frac{ءص}{ءس}$	$٣(-١,٩)^{٢} - ١٢$ وهو مقدار سالب.	٠	$٣(-٢,١)^{٢} - ١٢$ وهو مقدار موجب.
شكل المماس	\	—	/
شكل المنحنى			

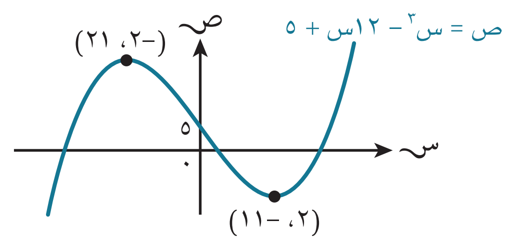
مُساعَدة

اختر النقاط التي لا تزيد عن ٠,١ وحدة من النقطة الحرجة.

س	٢,١	٢	١,٩
$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$	٣(٢,١)^{٢} − ١٢ وهو مقدار موجب.	٠	٣(١,٩)^{٢} − ١٢ وهو مقدار سالب.
شكل المماس			
شكل المنحنى			

وعليه تكون (−٢، ٢١) نقطة عظمى، (٢، −١١) نقطة صغرى.

رسم منحنى الدالة ص = س^{٣} − ١٢س + ٥ كالآتي:



المشتقة الثانية والنقاط الحرجة

تعلمت في الدرس ٤−٢ رمز المشتقة الأولى $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$، ورموز المشتقة الثانية $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)$، أو $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$، وقد تمّ الاشتقاق باستخدام المبادئ الأولية حيث استخدم الرمز Δ ليشير إلى تغير طفيف في القيمة.

تعطي المشتقة الأولى مقياسًا يبيّن كيف تتغير قيمة الدالة ص بدلالة قيمة س.

نقول إن المشتقة الأولى $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ هي معدل تغير ص بدلالة س.

وبالمثل **المشتقة الثانية second derivative** هي معدل تغير $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ بدلالة س.

نقول إن المشتقة $\frac{\text{ى}}{\text{ى س}}\left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)$ أو $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$ هي معدل تغير $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ بدلالة س.

إذا كانت المشتقة الأولى:

- موجبة تكون الدالة متزايدة.
- صفرًا تكون للدالة نقطة حرجة (دون تغيير).
- سالبة تكون الدالة متناقصة.

إذا كانت المشتقة الثانية:

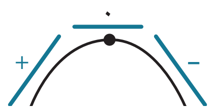
- موجبة تكون دالة الميل متزايدة.
- صفرًا يكون لدالة الميل نقطة حرجة (دون تغيير).
- سالبة تكون دالة الميل متناقصة.

تذكير

تعلمت سابقًا كيف تجد المشتقة الثانية. وفي هذا الدرس ستتعلم كيف تستخدم المشتقة الثانية لتحديد نوع النقطة الحرجة.

تستخدم المشتقة الثانية لتحديد نوعية النقاط الحرجة (أي النقطة الحرجة العظمى أو النقطة الحرجة الصغرى)، ويسمى ذلك (**اختبار المشتقة الثانية**).

ففي الشكل أدناه : افترض أنك تتحرك من اليسار إلى اليمين على المنحنى حيث تمر بنقطة عظمى.



كلما تحركت من اليسار إلى اليمين ينقص الميل لأنه يتغير من موجب إلى صفر، ثم إلى سالب.

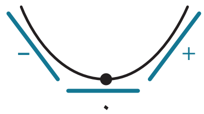
وحيث إن $\frac{ى ص}{ى س}$ تتناقص كلما ازدادت س، فإن معدل تغير الميل $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ يكون سالبًا.

يؤدي ذلك إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ١١

تكون النقطة الحرجة نقطة عظمى إذا كانت $\frac{ى ص}{ى س} = ٠$، $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} < ٠$

وفي الشكل أدناه: افترض أنك تتحرك من اليسار إلى اليمين على المنحنى حيث تمر بنقطة صغرى.



كلما تحركت من اليسار إلى اليمين يزداد الميل لأنه يتغير من سالب إلى صفر، ثم إلى موجب.

وحيث إن $\frac{ى ص}{ى س}$ تتزايد كلما ازدادت س فإن معدل تغير الميل $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ يكون موجبًا.

يؤدي ذلك إلى النتيجة الآتية:

نتيجة ١٢

تكون النقطة الحرجة نقطة صغرى إذا كانت $\frac{ى ص}{ى س} = ٠$، $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} > ٠$

في الحالات التي تكون فيها $\frac{ى ص}{ى س} = ٠$، $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}} = ٠$ لا يمكن تحديد نوع النقطة الحرجة باستخدام اختبار المشتقة الثانية، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى على طرفي النقطة الحرجة لمعرفة نوعها.

مثــال ٢٠

أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة د (س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$ ، واستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحدد نوع النقاط الحرجة.

الحــلّ:

د (س) = $\frac{س^{٢} + ٩}{س}$ = س + ٩س$^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ١ − ٩س$^{-٢}$ = ١ − $\frac{٩}{س^{٢}}$

تكون النقاط الحرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

١ − $\frac{٩}{س^{٢}}$ = ٠

س^{٢} − ٩ = ٠

(س + ٣)(س − ٣) = ٠

س = −٣ أو س = ٣

عندما س = −٣، تكون ص = $\frac{(-٣)^{٢} + ٩}{-٣}$ = −٦

عندما س = ٣، تكون ص = $\frac{٣^{٢} + ٩}{٣}$ = ٦

النقاط الحرجة هي (−٣، −٦)، (٣، ٦).

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ١٨س$^{-٣}$ = $\frac{١٨}{س^{٣}}$

عندما س = −٣، تكون $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{١٨}{(-٣)^{٣}}$ $<$ ٠

عندما س = ٣، تكون $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = $\frac{١٨}{٣^{٣}}$ $>$ ٠

∴ (−٣، −٦) هي نقطة عظمى، (٣، ٦) هي نقطة صغرى.

مثــال ٢١

أ بيّن أن منحنى الدالة ص = س^{٤} + ٤س^{٣} − ٦ له نقطة حرجة عند س = ٠

ب بيّن أنه من المستحيل تحديد نوع النقطة الحرجة عند س = ٠ باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

ج استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد طبيعة النقطة الحرجة عند س = ٠

الحــلّ:

أ ص = س^{٤} + ٤س^{٣} − ٦ .... أوجِد المشتقة الأولى.

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤س^{٣} + ١٢س^{٢}

عندما س = ٠، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ × (٠)^{٣} + ١٢ × (٠)^{٢} = ٠ .... بيّن أن المشتقة الأولى تساوي ٠ عند س = ٠

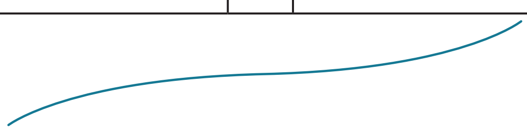
ب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤س^{٣} + ١٢س^{٢} .... أوجِد المشتقة الثانية.

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢س^{٢} + ٢٤س

عندما س = ٠، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ١٢ × (٠)^{٢} + ٢٤ × ٠ = ٠

∵ المشتقة الثانية تساوي ٠، فإن اختبار المشتقة الثانية غير حاسم بالنسبة إلى طبيعة النقطة الحرجة.

ج

س	٠,١	٠	−٠,١
$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$	٤(٠,٠١)^{٣} + ١٢(٠,١)^{٢} = ٠,١٢٤ وهو مقدار موجب	٠	٤(−٠,١)^{٣} + ١٢(−٠,١)^{٢} = ٠,١١٦ وهو مقدار موجب
شكل المماس			
شكل المنحنى			

لمنحنى الدالة ص= س^{٤} + ٤س^{٣} − ٦ نقطة انعطاف عند س = ٠، وهي النقطة (٠، −٦).

تمارين ٤-٦

١) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة لكل من المنحنيات الآتية، وحدد نوع كل نقطة منها. ارسم كل دالة موضحًا النقاط الحرجة:

أ) ص = س^{٢} − ٤ س + ٨

ب) ص = (٣ + س)(٢ − س)

ج) ص = س^{٣} − ١٢س + ٦

د) ص = ١٠ + ٩س − ٣س^{٢} − س^{٣}

هـ) ص = س^{٤} + ٤س − ١

و) ص = (٢س − ٣)^{٣} − ٦س

مُساعَدة

استخدم أحد البرمجيات لرسم الدوال المعطاة في هذا التمرين.

٢) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة لكل من المنحنيات الآتية، وحدد نوع كل نقطة منها:

أ) ص = $\sqrt{\text{س}}$ + $\frac{٩}{\sqrt{\text{س}}}$

ب) ص = ٤س^{٢} + $\frac{٨}{\text{س}}$

ج) ص = $\frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{\text{س}}$

د) ص = س^{٣} + $\frac{٤٨}{\text{س}}$ + ٤

هـ) ص = ٤$\sqrt{\text{س}}$ − س

و) ص = ٢س + $\frac{٨}{\text{س}^{٢}}$

٣) إذا كانت ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢}}$. فأوجِد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$، ثم اشرح سبب عدم وجود نقطة حرجة للمنحنى.

٤) إذا علمت أن ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ٣٦س + ك، فأوجد:

أ) الإحداثي السيني للنقطتَين الحرجتَين على المنحنى.

ب) قيمتَي ك عندما يكون للمنحنى نقطة حرجة تقع على محور السينات.

٥) إذا علمت أن لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + أس^{٢} − ٩س + ٢ نقطة عظمى عند س = −٣، فأوجِد:

أ) قيمة أ.

ب) مجال قيم س عندما تكون الدالة متناقصة.

٦) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س − ٣٠ يمر بالنقطة (٤، ٢)، وله نقطة حرجة عند س = ٣، فأوجِد:

أ) قيمتَي أ، ب.

ب) إحداثيات النقطة الحرجة الأخرى، وحدد نوعها.

٧) إذا علمت أنه لا يوجد لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب س − ٣٠ نقاط حرجة، فبيّن أن أ^{٢} $<$ ٦ب.

٨) إذا علمت أن ص = ١ + ٢س + $\frac{\text{ك}^{٢}}{٢\text{س} - ٣}$، حيث ك عدد موجب، فأوجِد قيمة س بدلالة ك عندما يكون للمنحنى عندها نقاط حرجة، وحدد نوع كل منها.

٩) أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة لمنحنى الدالة $ص = س^{٤} - ٤س^{٣} + ٤س^{٢} + ١$، وحدد نوع كل منها، ثم ارسم المنحنى موضحًا النقاط الحرجة.

١٠) يوجد لمنحنى الدالة $ص = س^{٣} + أس^{٢} + ب$ نقطة حرجة عند (٤، −٢٧):

- **أ** أوجِد قيمتَي أ، ب.
- **ب** حدد نوع النقطة الحرجة (٤، −٢٧).
- **ج** أوجِد إحداثيات النقاط الحرجة الأخرى على المنحنى، وحدد نوع كل منها.
- **د** أوجِد إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى التي يكون لدالة الميل عندها قيمة صغرى، وأوجِد هذه القيمة الصغرى.

١١) يوجد لمنحنى الدالة $ص = أس + \frac{ب}{س^{٢}}$ نقطة حرجة عند (٢، ١٢).

- **أ** أوجِد قيمتَي أ، ب.
- **ب** حدد نوع النقطة الحرجة (٢، ١٢).
- **ج** أوجِد باستخدام البرمجيات الحاسوبية مجال قيم س عندما يكون منحنى الدالة $ص = أس + \frac{ب}{س^{٢}}$ متزايدًا.

١٢) يوجد لمنحنى الدالة $ص = س^{٢} + \frac{أ}{س} + ب$ نقطة حرجة عند (٣، ٥).

- **أ** أوجِد قيمتَي أ، ب.
- **ب** حدد نوع النقطة الحرجة (٣، ٥).
- **ج** أوجِد باستخدام البرمجيات الحاسوبية مجال قيم س عندما يكون منحنى الدالة $ص = س^{٢} + \frac{أ}{س} + ب$ متناقصًا.

١٣) يوجد لمنحنى الدالة $ص = ٢س^{٣} + أس^{٢} + ب\,س + ٧$ نقطة حرجة عند (٢، −١٣).

- **أ** أوجِد قيمتَي أ، ب.
- **ب** أوجِد إحداثيات النقطة الحرجة الثانية الواقعة على المنحنى.
- **ج** حدد نوع النقطتَين الحرجتَين.
- **د** أوجِد إحداثيات النقطة الواقعة على المنحنى، والتي يكون عندها لدالة الميل قيمة صغرى، وأوجِد هذه القيمة الصغرى.

رابط الكتروني

جرّب المصادر الآتية على الموقع underground mathematics

- Floppy hair https://undergroundmathematics.org/floppy hair
- Two-way calculus https://undergroundmathematic s.org/two calculus-
- Curvy cubics https://undergroundmathematics.org/curvy cubics
- Can you find… curvy cubics edition https://undergroundmathematics.org/can you find… curvy cubics edition

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

ميل المماس لمنحنى الدالة

- تمثل $\frac{ءص}{ءس}$ ميل المماس للمنحنى ص = د(س)
- إذا كانت ص = جـ، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ حيث جـ عدد ثابت.

قواعد الاشتقاق

- $\frac{ء}{ءس}$(سⁿ) = ن $س^{ن-١}$، حيث ن عدد حقيقي.
- إذا كانت ص = ج، حيث ج عدد ثابت، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠
- $\frac{ء}{ءس}$(ك د(س)) = ك × $\frac{ء}{ءس}$ (د(س))، حيث ك عدد ثابت.
- $\frac{ء}{ءس}$(د(س) ± ع(س)) = $\frac{ء}{ءس}$ (د(س)) ± $\frac{ء}{ءس}$ (ع(س))
- $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

إذا كانت ص = $(د(س))^{ن}$، فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ن$(د(س))^{ن-١}$ × د′(س)، وكانت د(س) = $(هـ(س))^{ن}$،

فإن د′(س) = ن$(هـ(س))^{ن-١}$ × هـ′(س).

مشتقة الدالة ع(س) = (د ∘ هـ)(س) هي ع′(س) = ((د′ ∘ هـ)(س)) × هـ′(س).

كما أن ع′(س) هي دالة ميل مماس منحنى (د ∘ هـ)(س).

المماس والعمودي

إذا كانت قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة ($س_١$، $ص_١$) تساوي م فإن:

- معادلة المماس عند النقطة المعطاة هي ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)
- معادلة العمودي عند النقطة المعطاة هي ص − $ص_١$ = −$\frac{١}{م}$(س − $س_١$)

المشتقة الثانية

- $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

الدوال المتزايدة و الدوال المتناقصة

- تكون الدالة ص = د(س) متزايدة على فترة معطاة لـ س إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ > ٠
- تكون الدالة ص = د(س) متناقصة على فترة معطاة لـ س إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ < ٠
- تكون الدالة غير متزايدة، وغير متناقصة على فترة معطاة لـ س إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

النقاط الحرجة

- توجد النقاط الحرجة لمنحنى دالة ما عندما تكون $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

اختبار المشتقة الأولى للنقاط العظمى والنقاط الصغرى

عند النقطة العظمى يكون:

- $\frac{ءص}{ءس} = ٠$
- الميل موجبًا إلى يسار النقطة العظمى، وسالبًا إلى يمينها.

عند النقطة الصغرى يكون:

- $\frac{ءص}{ءس} = ٠$
- الميل سالبًا إلى يسار النقطة الصغرى، وموجبًا إلى يمينها.

عند نقطة الانعطاف يكون:

$\frac{ءص}{ءس} = ٠$

- يتغير الميل
  - من موجب إلى صفر ثم إلى موجب،
  - أو
  - من سالب إلى صفر ثم إلى سالب.
- نقطة الانعطاف ليست نقطة عظمى ولا نقطة صغرى.

اختبار المشتقة الثانية للنقاط العظمى والنقاط الصغرى

- تكون النقطة الحرجة نقطة عظمى، إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ و $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} < ٠$
- تكون النقطة الحرجة نقطة صغرى، إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ و $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} > ٠$
- إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ و $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٠$، فعندها نستخدم اختبار المشتقة الأولى فقط لتحديد نوع النقطة الحرجة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) أوجِد مشتقة ص = $\frac{\text{٣س}^{٥} - ٧}{\text{٤س}}$ بدلالة س.

٢) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٨}{\text{٤س} - ٥}$ عند س = ٢

٣) إذا علمت أن ص = ٣س^{٣} − ٣س^{٢} + س − ٧، فبيّن أن ميل المماس للمنحنى لن يكون سالبًا أبدًا.

٤) إذا علمت أن ص = (٣ − ٥س)^{٣} − ٢س، فأوجِد كل من $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$.

٥) أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{١٥}{\text{س}^{٢} - \text{٢س}}$ عند س = ٥

٦) إذا علمت أن العمودي على منحنى الدالة ص = ٥$\sqrt{\text{س}}$ عند ل(٤، ١٠) يتقاطع مع محور السينات في النقطة ى، فأوجِد:

أ) معادلة العمودي ل ى.

ب) إحداثيات النقطة ى.

٧) لتكن ص = ٥س + $\frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$:

أ) أوجِد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

ب) بيّن أن العمودي على المنحنى في النقطة (٢، ١٣) يتقاطع مع محور السينات في النقطة (٢٨، ٠).

٨) إذا علمت أن العمودي على منحنى الدالة ص = $\frac{١٢}{\sqrt{\text{س}}}$ عند النقطة (٩، ٤) يتقاطع مع محور السينات في النقطة ل، ومحور الصادات في النقطة ى. فأوجد إحداثيات النقطتَين ل، ى.

٩) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = س (س − ٣) (س − ٥) يتقاطع مع محور السينات في النقاط و (٠، ٠)، ا (٣، ٠)، ب (٥، ٠) وأن مماسَي المنحنى عند النقطتين ا، ب يتقاطعان في النقطة ع، فأوجِد إحداثيات النقطة ع.

١٠) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = $\frac{٢}{(\text{س} - ٣)^{٢}}$ وأن المنحنى يمر بالنقطة ا(٤، ٢)، فأوجِد:

أ) معادلة مماس المنحنى عند النقطة ا.

ب) معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة أ.

١١) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٣ − $\frac{١٠}{\text{س}}$ يمر بالنقطة ل(٥، ١):

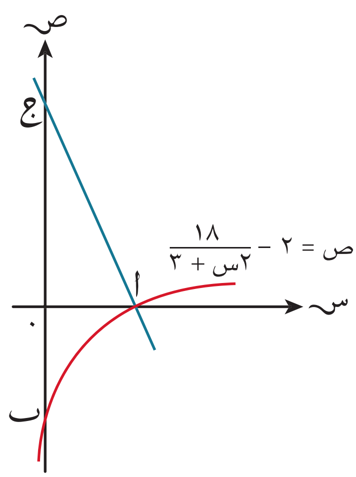
أ) بيّن أن معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة ل هي: ٥س + ٢ص = ٢٧

ب) يتقاطع العمودي مع المنحنى مرة أخرى عند النقطة ى. أوجِد إحداثيات ى.

١٢) إذا علمت أن منحنى الدالة ص = ٣س − $\frac{٤}{س}$، يمر بالنقطتَين أ (١، −١)، ب (٤، ١١)، وأن المماس عند كل من النقطتَين ج، ء يوازي القطعة المستقيمة أ ب، فأوجِد معادلة العمودي المنصف للقطعة المستقيمة ج ء.

١٣) يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة ص = ٢ − $\frac{١٨}{٢س + ٣}$، حيث يقطع محور السينات في النقطة أ، ومحور الصادات في النقطة ب.
العمودي على منحنى الدالة عند النقطة أ يتقاطع مع محور الصادات في النقطة ج.

بيّن أن معادلة المستقيم أ ج هي: ٩س + ٤ص = ٢٧



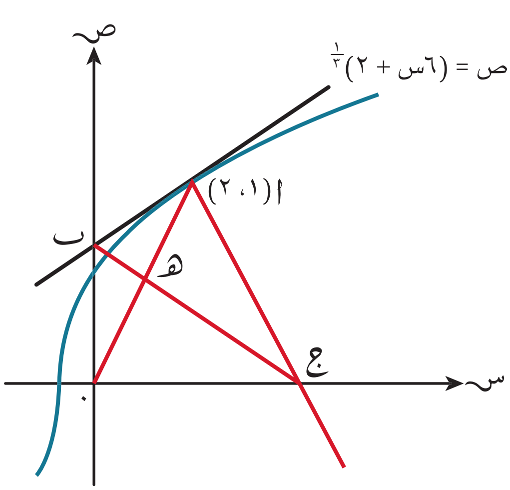
١٤) ليكن ص = ٣ + ٤س − س^{٢}:

أ) بيّن أن معادلة العمودي على المنحنى ص عند النقطة (٣، ٦) هي ٢ص = س + ٩

ب) إذا علمت أن العمودي عند النقطة (٣، ٦) يتقاطع مع محوري الإحداثيات في النقطتَين أ، ب، فأوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.

ج) أوجِد إحداثيات النقطة التي يتقاطع فيها العمودي مع المنحنى مرة أخرى.

١٥) يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ص = (٦س + ٢)$^{\frac{١}{٣}}$، النقطة أ (١، ٢) الواقعة عليه. يقطع مماس المنحنى عند النقطة أ محور الصادات في النقطة ب، كما أن العمودي على المنحنى عند النقطة أ يقطع محور السينات في النقطة ج.



أ) أوجِد معادلة المماس أ ب، ومعادلة العمودي أ ج.

ب) يتقاطع المستقيمان و أ، ب ج في النقطة هـ، أوجِد إحداثيات النقطة هـ، وحدد ما إذا كانت هـ نقطة منتصف القطعة المستقيمة و أ أو لا.

١٦) بيّن أنه يوجد نقطة حرجة لمنحنى الدالة $ص = ٢٧س - \frac{٤}{(س + ٢)^{٢}}$ عند $س = -\frac{٨}{٣}$، وحدد نوعها.

١٧) إذا علمت أن معادلة منحنى الدالة $ص = \frac{٨}{س} + ٢س$، فأوجِد:

أ $\frac{ى ص}{ى س}$ ، $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$.

ب إحداثيات النقاط الحرجة، وحدد نوع كل منها، مبررًا ذلك.

١٨) ليكن منحنى الدالة $ص = س^{٣} + س^{٢} - ٥س + ٧$، فأوجِد:

أ مجموعة قيم س عندما يكون ميل المماس للمنحنى أقل من ٣

ب إحداثيات النقطتَين الحرجتَين على المنحنى، وحدد نوع كل منها.

١٩) ليكن منحنى الدالة $ص = س^{٣} + ع س^{٢}$ حيث ع عدد موجب:

أ بيّن أن نقطة الأصل هي نقطة حرجة، وأوجِد إحداثيات النقطة الحرجة الأخرى بدلالة ع.

ب حدد نوع كل نقطة حرجة.

ج إذا كانت $ص = س^{٣} + ع س^{٢} + ع س$ منحنى لدالة آخرى، فأوجِد قيم ع عندما لا توجد للمنحنى نقاط حرجة.

مصطلحات علمية

أ

الاشتقاق باستخدام المبادئ الأولية Differentiation from first principals: طريقة لإيجاد ميل مماس المنحنى باستخدام نهاية ميول الأوتار. (ص ١٤١)

ت

التفاضل (الاشتقاق) Differentiation: طريقة لإيجاد مشتقة أو ميل مماس منحنى الدالة. (ص ١٣٩)

خ

خط التقارب Asymptote: مستقيم مرسوم بجانب المنحنى يشير إلى قيمة لم يتم تعريف الدالة عندها. (ص ٥٧)

الخط العمودي Normal: المستقيم الذي يصنع زاوية قائمة مع المماس عند نقطة على المنحنى. (ص ١٥٩)

د

الدالة الدورية Periodic function: دالة تتكرر قيمها في فترات أو دورات منتظمة. (ص ٥٥)

دالة القوة Power function: دالة تتضمن مجاميع أو فروقات لمضاعفات $س^{ن}$، مثل $٣س^{٢}$ أو $٤س^{٣} - ٥س + س^{-١} - ٧$ (ص ١٤٤)

الدالة المتزايدة Increasing function: هي الدالة التي تزداد فيها قيمة د(س) كلما ازدادت قيمة س، ويكون الميل عندها موجبًا دائمًا. (ص ١٦٤)

الدالة المتناقصة Decreasing function: هي الدالة التي تتناقص فيها قيمة د (س) كلما ازدادت قيمة س، ويكون الميل عندها سالبًا دائمًا. (ص ١٦٤)

الدالة المثلثية العكسية Inverse trigonometric function: هي الدالة التي تعكس ما تقوم به الدالة د (س) ويرمز إليها بالرمز $د^{-١}$ (س)، وتختص بالدوال ص = جا س، ص= جتا س، ص = ظا س. (ص ٦٨)

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة Piecewise function: دالة يتضمن منحناها مستقيمات أو منحنيات أو مزيج من الاثنين، وقد يحتوي أيضًا على فجوات و/أو قفزات. (ص ١١٠)

الدالة النسبية Rational function: دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتَين كثيرات الحدود. (ص ١٠١)

الدالة كثيرة الحدود Polynomial function: دالة تحتوي على حد واحد أو أكثر لمتغير مرفوع إلى قوة صحيحة غير سالبة. (ص ٩٩)

دالة ميل مماس المنحنى Gradient function: دالة يمكننا التعويض فيها عن قيم س لنجد ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى. (ص ١٤٢)

الدورة Period: طول موجة واحدة أو المسافة بين قمتَين أو قاعَين متتاليَين في الدالة الدورية. (ص ٥٥)

ر

الراديان Radian: قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة المرسومة فيها الزاوية، ويرمز إليها بالرمز (ء). (ص ٢٠)

الربع Quadrant: يُقسم المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع (حول محور السينات والصادات). (ص ٤٣)

ز

زاوية الأساس (Principal angle) أو **الزاوية المرجعية (Reference angle)**: الزاوية الحادة الناتجة والمحصورة مع محور السينات، أو هي الزاوية التي تقع في مدى الدالة المثلثية العكسية. (ص ٤٥، ٦٩)

س

السعة Amplitude: المسافة بين أعلى (أو أدنى) نقطة والمحور الأفقي الذي يتوسط القيمتَين في الدالة الدورية، أو نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى في دورة واحدة. (ص ٥٥)

غ

غير متصلة Discontinuous: تكون الدالة غير متصلة إذا احتوى منحناها على فجوات أو قفزات أو خطوط تقارب أو إذا لم يكن ممكنًا رسم منحناها دون رفع القلم عن الورقة. (ص ١٢٧)

ف

الفترة المغلقة Closed interval: مجموعة من الأعداد تتضمن نقطتَي الطرفَين. (ص ١٢٨)

الفجوة Hole: نقطة ناقصة في منحنى الدالة تشير إلى أن قيم الدالة تكون عندها غير معرّفة. (ص ١٠٢)

ق

قاعدة السلسلة Chain rule: قاعدة حساب مشتقة مركبة من دالتَين أو أكثر. (ص ١٥٢)

القطاع الدائري Sector: جزء من دائرة يتحدد بنصفَي قطرَين والقوس المحصور بينهما. (ص ٢٤)

القطعة الدائرية Segment: جزء من الدائرة يتحدد بوتر وقوس على المحيط. (ص ٢٤)

القفزة Jump: خاصيّة بيانية تحصل عندما تتغير قيمة الدالة بشكل كبير. (ص ١١٠)

القوس Arc: جزء من محيط الدائرة. (ص ٢٤)

م

متصلة Continuous: تكون الدالة متصلة إذا لم يحتوي منحناها على أي فجوات أو قفزات أو خطوط تقارب أو إذا أمكن رسم منحناها دون رفع القلم عن الورقة. (ص ١٢٧)

المتطابقة Identity: علاقة تتحقق بجميع القيم الحقيقية للمتغير. (ص ٨٤)

المشتقة الأولى First derivative: يرمز إليها د′(س) أو $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$، وهي قياس الميل عند أي نقطة على المنحنى. (ص ١٤١)

المشتقة الثانية Second derivative: يرمز إليها د″(س) أو $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$؛ عبارة نحصل عليها عند اشتقاق المشتقة الأولى للدالة ويمكن استخدامها لتحديد نوع النقاط الحرجة الواقعة على المنحنى. (ص ١٤٧، ١٧٠)

المماس Tangent: مستقيم يلامس المنحنى عند نقطة.

ن

نقطة الانعطاف Point of inflexion: نقطة على المنحنى يتغيّر عندها اتجاه الانحناء. (ص ١٦٩)

النقطة الحرجة (Stationary point) أو نقطة التحول **(Turning point)**: نقطة على المنحنى يساوي الميل أو المشتقة عندها صفرًا، أو تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق. (ص ١٦٦)

النقطة الصغرى Minimum point: نقطة على المنحنى تكون قيمة ص فيها أصغر من قيم ص في النقاط القريبة منها. (ص ١٦٨)

النقطة العظمى Maximum point: نقطة على المنحنى تكون قيمة ص فيها أكبر من قيم ص في النقاط القريبة منها. (ص ١٦٨)

النهاية Limit: نهاية الدالة هي القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغيّر من قيمة محددة. (ص ٩٧)

النهاية عند اللانهاية Limit at infinity: القيمة التي تقترب إليها الدالة عندما تأخذ س قيمًا كبيرة جدًا (س ← +∞) أو تأخذ قيمًا صغيرة جدًا (س ← −∞). (ص ١١٥)

و

الوتر Chord: قطعة مستقيمة طرفاها نقطتان على محيط الدائرة. (ص ٢٤)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Getty Images; Kobby Dagan/Shutterstock; ALEXEY FILATOV/Shutterstock; PM Images/Getty Images; Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٦٥٨٠ / ٢٠٢٣

طبع بمطبعة عمان ومكتبتها المحدودة ش.م.م هاتف : ٢٤٤٤٦١٦٠ (٩٦٨)

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om