سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الثاني عشر

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات البحتة

للصف الثاني عشر

الطبعة الثانية ١٤٣٦ هـ - ٢٠١٥م

حضرة صاحب الجلالة السلطان قابوس بن سعيد المعظم

قائمة المحتويات

• الفصل الدراسي الأول :

المحتويات

• الفصل الدراسي الثاني :

المحتويات

تقديم

الحمد لله نحمده تمام الحمد، ونصلي ونسلم على خير خلقه سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين..وبعد.

تحرص وزارة التربية والتعليم على تجويد العملية التعليمية من خلال إرساء قواعد منظومة تعليمية متكاملة تلبي احتياجات البيئة العمانية وتتناسب مع متطلباتها الحالية.

وبعد مراجعة النظام التعليمي للسلطنة وقياس مستوى أدائه وتحديد أهم التحديات التي تواجهه، قامت وزارة التربية والتعليم بإعادة ترتيب أولوياتها، وتنظيم جهودها لإحداث التطوير بما يتماشى مع توجهات السلطنة ورؤيتها المستقبلية، حيث جرى تطوير الأهداف العامة للتربية، والخطة الدراسية التي أولت اهتماما أكبر للمواد العلمية وتدريس اللغات، واستحدثت مواد دراسية جديدة لمواكبة المستجدات على صعيدي تكنولوجيا المعلومات واحتياجات سوق العمل من المهارات، هذا فضلا عن التطوير الذي أدخل على أساليب واستراتيجيات تدريس المناهج الدراسية التي أصبحت تعنى بالمتعلم باعتباره محور العملية التعليمية التعلمية.

إن النقلة النوعية التي نشهدها حاليا في العملية التعليمية أحدثت الكثير من التغييرات الجذرية ، فجاءت الكتب الدراسية متسمة بالحداثة والمرونة، والتوافق في موضوعاتها مع مستويات أبنائنا الطلبة والطالبات، وخصائص نموهم العقلي والنفسي، وثقافتهم الاجتماعية، واهتمت بالجوانب المهارية والفنية والرياضة البدنية تحقيقا لمبدأ أصيل من مبادئ فلسفة التربية في السلطنة الداعي إلى بناء الشخصية المتكاملة للفرد، وعززت دور المتعلم في عملية التعلم من خلال إكسابه مهارات التعلم الذاتي والتعلم التعاوني، ولم يعد الكتاب المدرسي بما يحويه من معارف ومهارات وقيم واتجاهات إلا دليلا يسترشد به الطالب للوصول إلى ما تختزنه مصادر المعلومات المختلفة كالمراجع المكتبية ومصادر التعلم الإلكترونية الأخرى من معارف، وعلى الطالب القيام بعملية البحث والتقصي للوصول إلى ما هو أعمق وأشمل. فإليكم أبنائي وبناتي الطلاب والطالبات نقدم هذا الكتاب راجين أن يجد عين الاهتمام منكم، ويكون لكم خير معين؛ لتحقيق ما نسعى إليه من تقدم ونماء هذا الوطن المعطاء تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان قابوس بن سعيد المعظم حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية
وزيرة التربية والتعليم

مقدمة

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة

يسر وزارة التربية والتعليم أن تضع بين يديك هذا الكتاب من مادة الرياضيات البحتة المقررة لطلاب الصف الثاني عشر ، ويتكون من ست وحدات هي :

الفصل الدراسي الأول :

١) النهايات والاتصال .

٢) التفاضل وتطبيقاته .

٣) الهندسة التحليلية للدائرة .

الفصل الدراسي الثاني :

٤) التكامل وتطبيقاته .

٥) الاحتمال والإحصاء .

٦) القطوع المخروطية .

وقد تم اختيار هذه الموضوعات بعناية نظرا للاهتمام العالمي بها من جهة ولما لها من أثر بالغ في تنمية القدرات العقلية في تحليل المواقف وتفسيرها ، وحل المشكلات ، إضافة لإمكانية الاستفادة منها في بعض مناحي الحياة وفي المساعدة على تعلم بعض العلوم الأخرى من جهة أخرى ، كما أنها تأتي بشكل تطور طبيعي لما سبق لك أن درسته في السنوات السابقة واستكمالا له وذلك لمساعدتك على متابعة دراستك الجامعية.

وانطلاقا من الأسس التربوية بأن التعلم يزداد عمقا وأصالة عندما يتفاعل المتعلم مع المادة التعليمية ، ويكون عنصرا مشاركا في العملية التعلمية التعليمية ومستفيدا من خبرات زملائه ، فقد تم بناء المادة اعتمادا على أنشطة هادفة تقوم أنت وزملاؤك بتنفيذها بشكل فردي أو مجموعات لتستخلص فكرة أو نتيجة تقوم بفحصها وتمحيصها من خلال بعض التدريبات والأسئلة التي أعدت لهذه الغاية ، والتي ربما تثريها أنت بمساعدة معلمك

بإعطاء المزيد من الأسئلة ذات الارتباط المباشر بحياتك اليومية على النتيجة التي تم التوصل اليها.

لذا نهيب بك عزيزي الطالب/عزيزتي الطالبة بضرورة قراءة المادة العلمية في الكتاب قراءة واعية تقف من خلالها على معاني المفردات والمصطلحات والعبارات، وتربط النتائج بالأسباب ، خاصة وإن للرياضيات لغة خاصة بها يشترط إتقانها، وهي كذلك مادة تراكمية لا يتم تعلمها بمعزل عما سبق لك تعلمه، الأمر الذي يستدعي التعاون مع زملائك والاهتمام بما يقدمه لك المعلم من متطلبات سابقة تلزم للتعلم الجديد.

كما نهيب بكم الاستعانة بكل ما هو متاح لك في مكتبة المدرسة أو مركز مصادر التعلم أو شبكة المعلومات العالمية (الإنترنت)، إن كان ذلك ممكنا، للوقوف على كل ما هو جديد في هذه الموضوعات، لأن التعلم ليس مجرد حفظ للمعلومات وإنما كيف تتعامل معها وتستفيد منها.

وأخيرا يجب أن نتذكر أن مادة الرياضيات من الأهمية بمكان بحيث لا غنى لأي شخص عنها، ولا غنى لأي موضوع عنها، وتزداد أهميتها باستمرار ولذا فهي تستحق العناية، والتأني والجهد الذي يبذل لأجلها.

والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل

المؤلفون

١

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

Limits & Continuity

الأهداف

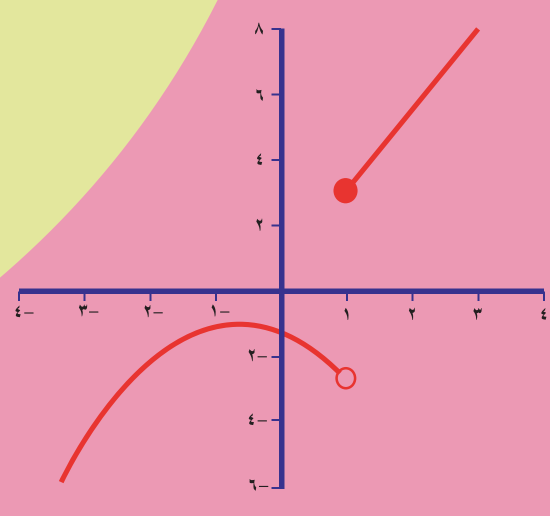
١ تعريف مفهوم نهاية الدالة وإيجادها.

٢ تعرف نظريات النهايات وإيجاد قيم نهايات مختلفة.

٣ تعريف الاتصال وتطبيقات عليه.

٤ تعرف نظريات الاتصال.

٥ إيجاد نقاط عدم الاتصال (الانفصال) ووصفها.



نهاية الدالة

Limit of the function

نهاية دالة عند نقطة Limit of a Function at a Point

في كثير من المسائل نحتاج لمعرفة سلوك دالة عندما تقترب س من ٢ ولكن لا تساوي ٢ ، أي أننا نبحث عن القيم التي تأخذها الدالة عندما تقترب س قربًا كبيرًا من العدد ٢ ، ثم نلاحظ بعد ذلك ما يحدث للقيم المناظرة للدالة .

نشاط ١ : إيجاد مساحة مثلث

الأدوات : ورقة رسم بياني

الخطوات:

١ ارسم بيان الدالة ص = $\frac{-٤س}{٣}$ + ٤ ، س $\leqslant$ ٠

٢ حدد المنطقة المثلثة المحصورة بين الدالة ص، والمحور السيني والمحور الصادي.

٣ سمِّ رؤوس هذه المنطقة ، وأوجد مساحتها .

٤ اسقط من منتصف الوتر عمودًا على المحور السيني، ثم أوجد مساحة المثلث الناتج .

٥ اسقط من الوتر عمودًا آخر على يسار العمود الأول ، ثم أوجد مساحة المثلث الناتج .

٦ اسقط أعمدة أخرى على يسار الأعمدة السابقة بحيث تكون المسافة بين آخر عمود والمحور الصادي قريبة جدًّا من الصفر. ماذا تلاحظ ؟

٧ ما العلاقة بين مساحة المثلث الناتج و مساحة المثلث المحصور بين المحورين والمستقيم ؟

٨ لعلك لاحظت أنه كلما اقترب العمود من المحور الصادي، كانت مساحة المثلث الناتج تقترب من مساحة المثلث الأصلي.

إذا رمزنا لمساحة المثلث الناتج بالرمز م(س)، وأعطينا المسافة بين العمود النازل من الوتر والمحور الصادي الرمز س ، فإن من الممكن التعبير عن ذلك رياضيًّا بالآتي: نهاية الدالة م(س) عندما س تؤول إلى الصفر هي مساحة المثلث المحصور بين بيان الدالة ومحور السينات ومحور الصادات . ويعبر عن ذلك رمزيًّا:

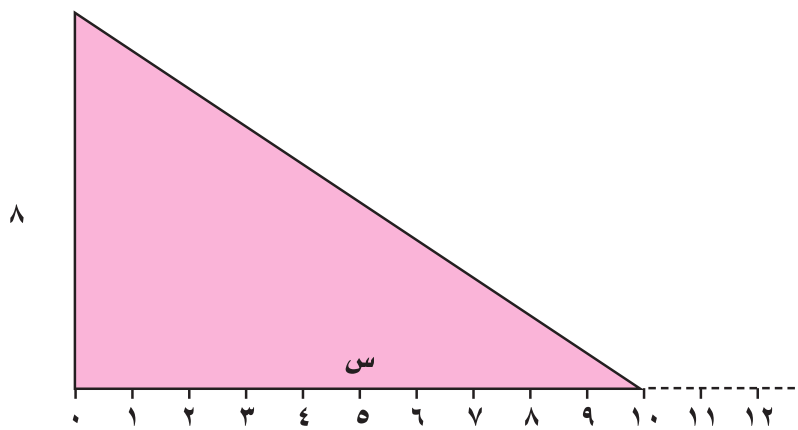
$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ م(س) = ٦ (لماذا) ؟

تدريب ١

إذا كان ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ، س ⩾ ٠ فأوجد مساحة المنطقة المحصورة كما في النشاط عندما س ⟵ .

مثال ١

مثلث ارتفاعه ٨سم وطول قاعدته س سم . أوجد مساحته عندما س تؤول إلى ١٠ .



الحل

المساحة = م(س) = $\frac{١}{٢}$ × س × ٨ = ٤س

∴ المساحة = $\lim\limits_{س \to ١٠}$ م(س) = ٤ × ١٠

= ٤٠سم^{٢}

تدريب ٢

أوجد مساحة المثلث من المثال السابق عندما س تؤول إلى ١٥

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

نشاط ٢ : « النهاية »

إذا عبرنا عن سرعة جسم بالعلاقة ع(ن) = ٢ن +١

١ أكمل الجدول (١) ثم ادرس قيم الدالة ع(ن) عندما تأخذ ن قيما قريبة جدا من العدد الحقيقي ٣ من اليمين أي قيم أكبر من ٣. فماذا تلاحظ ؟

٢ أكمل الجدول (٢) ثم ادرس قيم الدالة ع عندما تأخذ ن قيما قريبة من العدد الحقيقي ٣ من اليسار أي قيم أصغر من ٣. فماذا تلاحظ ؟

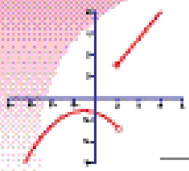
جدول (١)		جدول (٢)	
ن	ع(ن)	ن	ع(ن)
٣,٥	....	٢,٥	....
٣,١	....	٢,٩	....
٣,٠١	....	٢,٩٩	....
٣,٠٠١	....	٢,٩٩٩	....
٣,٠٠٠٠١ ↓ ٣	↓	٢,٩٩٩٩٩ ↓ ٣	↓ ......
ن تقترب من ٣ من اليمين		ن تقترب من ٣ من اليسار	

٤ قارن النتائج التي توصلت إليها مع نتائج زملائك.

- لعلك لاحظت من جدول (١): أن قيم ن > ٣

وأنه كلما اقتربت ن من العدد ٣ من اليمين تقترب ع(ن) من العدد ٧ ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

$\underset{ن \leftarrow ٣^+}{\text{نهــا}}$ ع(ن) = ٧ وتقرأ نهاية الدالة ع(ن) عندما ن تؤول إلى ٣ من اليمين هي ٧ .



● بالمثل من جدول (٢): أن قيم ن $>$ ٣

وكلما اقتربت ن من العدد ٣ من اليسار ، تقترب ع(ن) من العدد ٧ .

ونعبر عن ذلك رياضيًّا: $\underset{\text{ن} \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ع(ن) = ٧ وتقرأ نهاية الدالة ع(ن) عندما ن تؤول إلى ٣ من اليسار هي ٧.

أيضًا لاحظ أن نهـــاع(ن) = $\underset{\text{ن} \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ع(ن) = ٧

وهذا يعني أن ع(ن) معرفة على فترة تحتوي العدد ٣ ، وبحيث لا يكون العدد ٣ أحد طرفي الفترة ، أي إذا كانت ع(ن) معرفة على الفترة] جـ ، ى [فإن ٣ $\in$] جـ ، ى [

أيضًا لاحظ أن : $\underset{\text{ن} \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ع(ن) = $\underset{\text{ن} \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ع(ن) = ٧

تعريف

إذا كانت د(س) معرفة على الفترة] جـ ، ى [وكانت ا $\in$] جـ ، ى [

فإن نهاية د(س) عندما س ⟵ ا تساوي ل إذا وفقط إذا كانت نهايتاها من اليمين ومن اليسار عند س ⟵ ا متساويتين وكل منهما تساوي ل .

وتكتب بالرموز :

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل $\longleftrightarrow$ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل

تدريب ٣

ادرس $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ س^٢ + ١

مثال ٢

تدحرجت كرة على طريق مائل بحيث كان بعدها بالأمتار عن نقطة البداية بعد ن ثانية :

ف(ن) = ٤ ن^٢ + ٣ن

أوجد نهاية الدالة ف(ن) عندما تقترب ن من ٤ ثوانٍ .

الحل

سنبحث عن نهاية الدالة ف(ن) عندما تقترب ن من ٤

جدول (١)		جدول (٢)	
ن	ف(ن)	ن	ف(ن)
٤,٧	١٠٢,٤٦	٣,٤٦	٥٣,٤٦
٤,٢	٨٣,١٦	٣,٨	٦٩,١٦
٤,١	٧٩,٥٤	٣,٩	٧٢,٥٤
٤,٠١	٧٦,٣٥٠٤	٣,٩٩	٧٥,٦٥٠٤
٤,٠٠٠١	٧٦,٠٠٣٥٠٠٠٤	٣,٩٩٩٩	٧٥,٩٩٦٥٠٠٠٤
ن تقترب من ٤ من اليمين		ن تقترب من ٤ من اليسار	

نلاحظ أن:

$\underset{ن \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ف(ن) = ٧٦

$\underset{ن \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ف(ن) = ٧٦

$\underset{ن \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ف(ن) = $\underset{ن \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ف(ن)

$\therefore$ $\underset{ن \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ف(ن) = ٧٦

من هذا المثال نلاحظ أن $\underset{ن \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ف(ن) موجودة .

مثال ٣

إذا كانت :

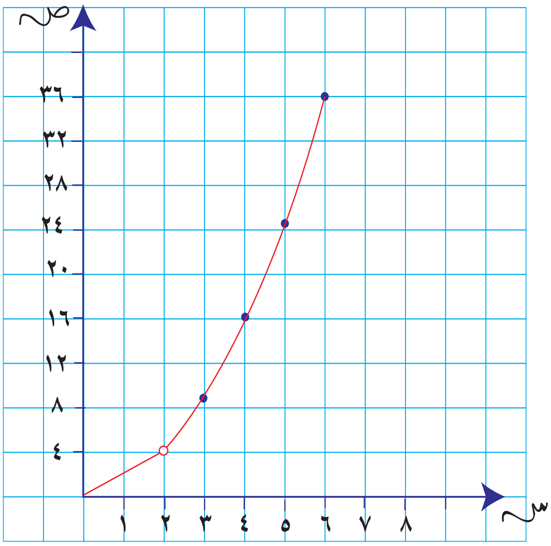
د(س) = { ٢ س ، ٠ ≤ س < ٢
 { س^{٢} ، س > ٢

أ) ادرس $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب) أوجد قيمة د(٢)

الحل

أ) بيان هذه الدالة يوضح في الشكل:



$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ٤$

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ٤$

$\therefore \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ د(س) = ٤$

ب) لاحظ أن قيمة د(٢) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س=٢

نتيجة

إن وجود نهاية الدالة عندما س ← ٯ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٯ، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = ٯ فهذا لا يعني وجود النهاية .

تدريب ٤

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{س + ٣} &، س \neq -٣ \\ ك &، س = -٣ \end{cases}$

وكان د(-٣) = $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـــا}}\ د(س)$

فأوجد قيمة ك .

تمارين &

مسائل (١)

١ اذا كانت طائرة تلقي رزما من المساعدات الطبية على إحدى المناطق المنكوبة باستخدام المظلات، وكانت سرعة هبوط الرزمة تعطى بالعلاقة الآتية $ع(ن) = ٢٤,٦١ \left(١ - (٠,٣٧٢)^{ن}\right)$ حيث ن تمثل الزمن بالثانية. عبر عن سرعة هبوط الرزمة عندما تؤول ن إلى ٥ ث باستخدام النهايات.

٢ بعد حقن مريض السرطان ببعض المضادات، وجد أن سرعة انتشار المرض بعد ن من الساعات يعطى بالعلاقة الآتية : $ت(ن) = \frac{٤ن}{ن^{٢} + ١}$.
عبر عن انتشار السرطان في جسم المريض عندما تؤول ن إلى ٢٤ ساعة باستخدام النهايات.

٣ أوجد النهاية لكل من الدوال الآتية عندما $س \longrightarrow ﻡ$

أ) $د(س) = س + ١٢ ،\ ﻡ = -٢$

ب) $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & ،\ س \leqslant ١ \\ ٣ & ،\ س > ١ \end{cases}$ $\quad ﻡ = ١$

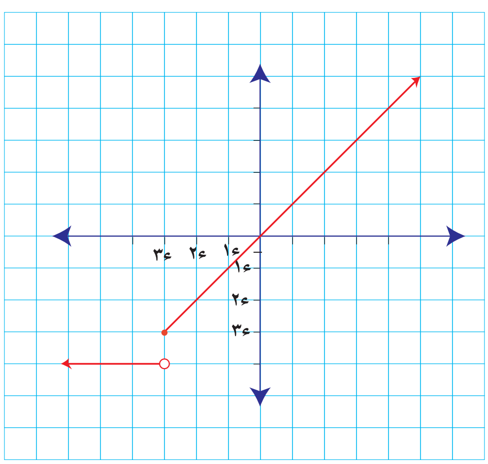
جـ) $د(س) = \begin{cases} س & ،\ س > ٠ \\ -س & ،\ س < ٠ \end{cases}$ $\quad ﻡ = ٠$

٤ أوجد كلاً من:

أ) $\lim\limits_{س \to ٥} س$

ب) $\lim\limits_{س \to ٥} س^{٢}$

جـ) $\lim\limits_{س \to ٥} س^{٤}$



٥ الشكل المقابل يمثل بيان الدالة د(س)

أوجد كلاً من :

$\lim\limits_{س \to -٣^{-}} د(س)$ ، $\lim\limits_{س \to -٣^{+}} د(س)$ ، $\lim\limits_{س \to -١} د(س)$ ، $\lim\limits_{س \to ٣} د(س)$

نظريات في النهايات

عندما يراد إيجاد النهاية عند نقطة فإن أسلوب استخدام النهاية من اليمين ومن اليسار يحتاج إلى وقت وجهد، وهي خطوات تتكرر في كل سؤال، ولعله من المناسب استخدام بعض النظريات التي تختصر لنا تلك الخطوات للوصول إلى نفس النتيجة.

نشاط ١ : نهاية دالة

الأدوات: ورقة رسم بياني، مسطرة، قلم، بطاقات عليها بعض الدوال المختلفة (ثابتة، درجة أولى، مجموع دالتين، ...) بحيث يكون مجال كل منها محددًا مثل [أ ، ب] .

الخطوات:

١ قم بسحب بطاقة واطلب إلى زميلك تمثيل الدالة بيانيًّا، ثم حدد على الدالة نقطة، واطلب إليه إيجاد النهاية عندها.

٢ تناوب أنت وزميلك في العمل حتى تنتهي جميع البطاقات.

٣ قارن نتائج مجموعتك مع نتائج المجموعات الأخرى، وتناقشوا فيها إذا كان هنالك اختلاف.

٤ بناءً على ما توصلت إليه أجب عما يلي:

أ) هل يوجد نهاية للدالة د(س) = جـ (الثابتة) عند كل نقطة في مجالها ؟ وضح إجابتك

ب) هل يوجد نهاية للدالة الحدودية من الدرجة الأولى د(س) = أس عند أيَّة نقطة في مجالها ؟ وضح إجابتك.

جـ) هل يوجد نهاية للدالة من النوع د(س) = $س^{٢}$ ، $س^{٣}$ ، ... عند أيَّة نقطة في مجالها ؟ وضح إجابتك.

د) هل يوجد نهاية للدالة الحدودية د(س) = $أ_{١}س^{ن} + أ_{٢}س^{ن-١} + \cdots + أ$ عند أيَّة نقطة في مجالها ؟ وضح إجابتك.

هـ) هل يوجد نهاية للدالة د(س) = هـ (س) . م (س) عند أيَّة نقطة في مجالها ؟

تدريب ١

استخدم ما توصلت إليه في النشاط أعلاه في إيجاد :

أ) $\lim\limits_{س \to أ}$ جـ حيث جـ(عدد ثابت)

ب) $\lim\limits_{س \to ٣}$ (٣س − ٥)

جـ) $\lim\limits_{ن \to ٣}$ (٢ن + ١)

لعله من المناسب أن نلخص ما يمكن التوصل إليه بالنظرية التالية :

نظرية (١):

١) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{ل}$ فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ}) = \text{ل}$ ، $\text{أ} \in \mathbb{ح}$ ، $\text{ل} \in \mathbb{ح}$

٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ موجودة وكان ك عددًا حقيقيًّا فإن :

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ك}.\text{د}(\text{س}) = \text{ك}\ \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$$

٣) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{ب}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}-١}\text{س}^{\text{ن}-١} + \dots + \text{ب}_{١}\text{س} + \text{ب}_{٠}$ ، $\text{ن} \in \mathbb{ص}^{+} + ٠$

فإن $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$ حيث $\text{أ} \in \mathbb{ح}$

إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{م}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{ن}$ فإن :

٤) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{د}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) \pm \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{م} \pm \text{ن}$

٥) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{د}(\text{س}).\text{هـ}(\text{س})) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) . \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{م}.\text{ن}$

٦) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

٧) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{د}(\text{س})} = \sqrt{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})} = \sqrt{\text{م}}$ ، $\text{م} \geqslant ٠$ ، $\text{د}(\text{س}) \geqslant ٠$

مثال ١

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + \dfrac{٣\text{س} - ٢}{\text{س} - ٥}$ ، فأوجد $\underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الحل

$$\underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٨\ \underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٣} - ٥\ \underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} + \dfrac{\underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ (٣\text{س} - ٢)}{\underset{\text{س}\to٧}{\text{نهـا}}\ (\text{س} - ٥)}$$

$$= ٢٧٤٤ - ٢٤٥ + \dfrac{١٩}{٢} = ٢٥٠٨{,}٥$$

تدريب ٢

أ) أوجد $\underset{\text{س}\to٥}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥)$

ب) أوجد $\underset{\text{س}\to-٣}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٢} - ٩)$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = س + ١ ، هـ(س) = س − ١ ، فأوجد ما يلي :

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (د(س) + ٢هـ(س))

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) × هـ(س)

الحل

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (د(س) + ٢هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (س + ١) + $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ٢(س − ١)

= (٢ + ١) + ٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (س − ١)

= ٣ + ٢ (٢ − ١)

= ٣ + ٢ = ٥

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) × هـ(س) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (س + ١) × $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (س − ١)

= ٢ × ٠ = ٠

تدريب ٣

بيِّن أن : $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ ٢π س^{٢} = $\frac{\pi}{٢}$ $\underset{س \leftarrow ٢\pi}{\text{نهـا}}$ س^{٢}

مثال ٣

وجدت إحدى الشركات أنها كلما أنفقت س من الريالات للدعاية لمنتجها، يكون ربحها حسب العلاقة:

ر(س) = −٠,٢ س^{٢} + ٣٠ س + ١٠٠، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ ريال.

الحل

الربح = $\underset{س \leftarrow ١٠٠}{\text{نهـا}}$ (−٠,٢ س^{٢} + ٣٠ س + ١٠٠)

= −٢٠٠٠ + ٣٠٠٠ + ١٠٠ = ١١٠٠ ريال عماني

تدريب ٤

إذا كانت $هـ(س) = س - \frac{١}{٤}س^{٢}$ تمثل دالة النقص في عدد الوحدات من قطع الحاسب الآلي في مخزن . احسب عدد الوحدات الناقصة عندما تقترب س من ٤٠٠ وحدة .

مثال ٤

إذا كان $د(س) = |س|$ ، $س \in ح$ فابحث إمكانية وجود نهاية عند كل نقطة في مجالها.

الحل

$$د(س) = \begin{cases} س &، \quad س \geqslant ٠ \\ -س &، \quad س < ٠ \end{cases}$$

$د(س) = س$ دالة حدودية يوجد نهاية عند كل $س > ٠$

$د(س) = -س$ دالة حدودية يوجد نهاية عند كل $س < ٠$

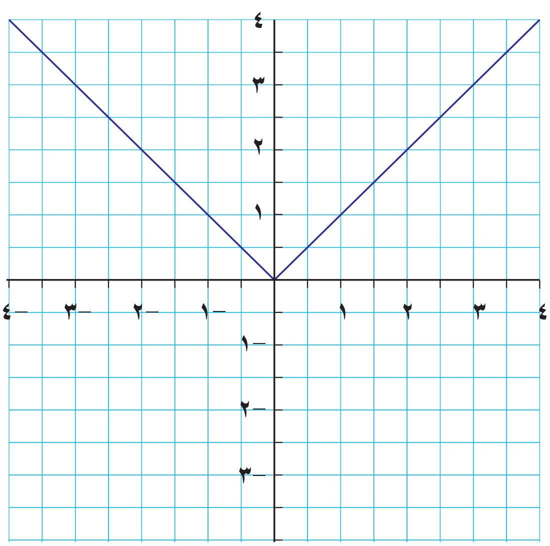
الآن نبحث النهاية عند $س = ٠$

$$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهــا}}\ د(س) = \underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهــا}}\ س = \text{صفر}$$

$$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهــا}}\ د(س) = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهــا}}\ (-س) = \text{صفر}$$

$$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}\ س = \text{صفر}$$

للدالة $د(س) = |س|$ نهاية عند جميع قيم $س \in ح$



تدريب ٥

أوجد:

أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}\ |س - ٣|$

ب) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{|س|}{س}$

جـ) $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}}\ |س + ٤|$

مثال ٥

حددت الجهات المختصة قيمة إيجار كل سيارة بناءً على المسافة بالكيلومترات التي تقطعها السيارة المستأجرة وفقًا للعلاقة التالية:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢٠٠ \\ ١ + ٠{,}٠٢\,\text{س} & ، \quad ٢٠٠ < \text{س} \leqslant ٥٠٠ \\ ٧ + ٠{,}٠١\,\text{س} & ، \quad \text{س} > ٥٠٠ \end{cases}$$

حيث ق(س) الأجرة بالريالات ، س المسافة بالكيلومترات. فاحسب، باستخدام النهايات، الأجرة في الحالات التالية:

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢٠٠} \text{ق}(\text{س})$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠} \text{ق}(\text{س})$

الحل

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢٠٠^-} \text{ق}(\text{س}) = ٥$ ريال

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢٠٠^+} \text{ق}(\text{س}) = ٥$ ريال

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٢٠٠} \text{ق}(\text{س}) = ٥$ ريال

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠^-} \text{ق}(\text{س}) = ١١$ ريال

$\lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠^+} \text{ق}(\text{س}) = ١٢$ ريال

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠^-} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠^+} \text{ق}(\text{س})$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٥٠٠} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

لاحظ أن أجرة السيارة = ٥ ريالات إذا كانت المسافة أقل من ٢٠٠ كم، وهذه الأجرة تصبح ريالاً + ٢٠ بيسة لكل كيلو زيادة في الحدود من ٢٠٠ كم إلى ٥٠٠ كم، ثم بعد ذلك تكون ٧ريالات + ١٠ بيسات لكل كيلو زيادة .

مثال ٦

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = [-\frac{١}{٢}\,\text{س}]$ ، حيث $\text{س} \in [-٢ ، ٤]$. فأوجد :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$

الحل

طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{|-\frac{١}{٢}|} = ٢$

معامل س : سالب

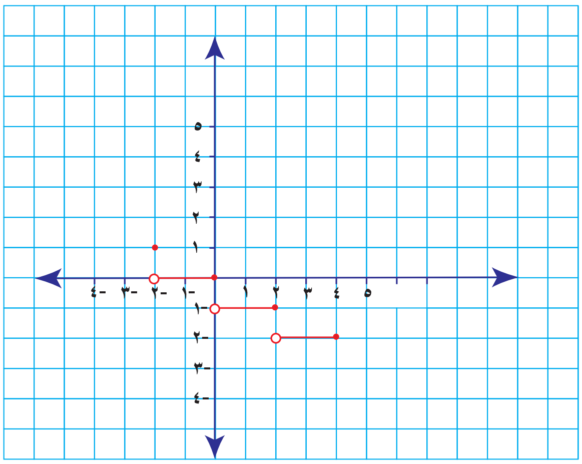
$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \quad \text{س} = -٢ \\ ٠ & ، \quad -٢ < \text{س} \leqslant ٠ \\ -١ & ، \quad ٠ < \text{س} \leqslant ٢ \\ -٢ & ، \quad ٢ < \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

من الرسم :

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـــا}}$ د(س) = −٢ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـــا}}$ د(س) = −١

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) غير موجودة

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ د(س) = −١



تدريب ٦

أ) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ب}}{\text{نهـــا}}$ [٥ − س] ، س ∈]٠ ، ٣[

ب) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٤}}{\text{نهـــا}}$ [٢س + ٣] ، س ∈]٠ ، ٢[

تدريب ٧

من المثال رقم ٦ أكمل الجدول الآتي ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه :

أ) ما النقاط التي لا توجد عندها نهاية ؟

ب) ما النقاط التي توجد عندها نهاية ؟

جـ) ما نوع النقاط لكل من (أ) ، (ب) بالنسبة لكل فترة جزئية ؟

م	$\underset{\text{س} \leftarrow \text{م}}{\text{نهـــا}}$ د(س)
−٢	
٢	
−١	
١	
٣	
$-\frac{١}{٢}$	
$\frac{١}{٤}$	
$\frac{٧}{٢}$	

ملاحظة :

. النقاط التي على طرفي الفترة الجزئية في دالة صحيح العدد لا يوجد عندها نهاية .

. النقاط التي تكون بين طرفي الفترة الجزئية في دالة الصحيح يوجد عندها نهاية .

مثال ٧

أوجد :

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 4}$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{4\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 4}\right)^4$

الحل

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \dfrac{4\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{4\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 + 4}\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16}$

ملاحظة :

في أحيان عديدة إذا تم التعويض مباشرة في الدالة النسبية، فإن النتيجة ستكون واحدة مما يأتي :

أ) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ وهذه كمية غير معرفة وتكون عندها النهاية ما لانهاية وتكتب ∞ .

ب) $\dfrac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ وتكون النهاية عندها تساوي صفرًا .

جـ) $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذه قيمة غير معلومة ، ويعود السبب عادة إلى وجود عامل مشترك بين البسط والمقام يجعل كلاً منهما صفرًا ، ويسمى العامل الصفري ، وتكمن عملية التغلب على هذه الصعوبة بالتخلص من هذا العامل .

مثال ٨

أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2 - 6\text{س} + 10}{(\text{س} - 2)^2}$

الحل

$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}} = \dfrac{\text{س}^2 - 6\text{س} + 10}{(\text{س} - 2)^2} = \dfrac{2^2 - 6 \times 2 + 10}{(2 - 2)^2} = \dfrac{2}{0} = \infty$

مثال ٩

أوجد $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٤ - ٨س^٢ + ١٦}{س^٢ + ٢س + ٤}$

الحل

$$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٤ - ٨س^٢ + ١٦}{س^٢ + ٢س + ٤} = \dfrac{(-٢)^٤ - ٨(-٢)^٢ + ١٦}{(-٢)^٢ + ٢(-٢) + ٤} = \dfrac{٠}{٤} = ٠$$

تدريب ٨

أوجد :

أ) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \sqrt{س + ٤}$

ب) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٣ - س}{س}}$

ج) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}$

مثال ١٠

أوجد $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س - ١} - \sqrt{٣}}{س - ٤}$

الحل

التعويض المباشر يجعل المقدار يساوي $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا يدل على وجود العامل الصفري بين البسط والمقام .

وللتوصل للعامل الصفري سنلجأ إلى الضرب في مرافق البسط .

$$\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س - ١} - \sqrt{٣}}{س - ٤} = \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س - ١} - \sqrt{٣}}{س - ٤} \times \dfrac{\sqrt{س - ١} + \sqrt{٣}}{\sqrt{س - ١} + \sqrt{٣}}$$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س - ١ - ٣}{(س - ٤)(\sqrt{س - ١} + \sqrt{٣})}$ وبالقسمة على س − ٤ والتعويض

$= \dfrac{١}{٢\sqrt{٣}}$ تذكر أن س $\neq$ ٤ وإنما قريبة جدًّا منها .

تدريب ٩

أوجد ما يلي :

أ) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س}$

ب) $\underset{ن \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{ن} + ١}{ن - ١}$

تمارين &

مسائل (٢)

١ أوجد كلا مما ياتي:

أ) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (٣\text{س} + ٧)$

ب) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$

ز) $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س} - \pi}{\text{س} + \pi}}$

جـ) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^٢ + ٢)(\text{س} + ٣)$

ح) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٥\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٣}$

د) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}{|\text{س} - ١|}$

ط) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٥} - \sqrt{٥}}{\text{س}}$

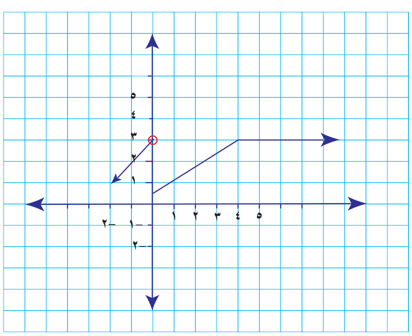
هـ) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - ٤} - \sqrt{٦ - \text{س}}}{\text{س} - ٥}$

ي) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(\text{س} + ٣)^٢}$

و) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{١}{٣}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س} - ٣}\right)$

ك) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ + |\text{س}|}{\text{س}^٢ - |\text{س}|}$

٢ الرسم التالي يمثل بيان إحدى الدوال. من الرسم أوجد:



أ) $\underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

ب) $\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

جـ) $\underset{\text{س} \to ٤^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٤^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

٣ إذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ٢$ ، $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = ٧$ ، فأوجد:

أ) $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} (٣\,\text{د}(\text{س}) + ٢\,\text{هـ}(\text{س}))$

ب) $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

جـ) $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} ٤\,\text{هـ}(\text{س})$

٤ مجمل مبيعات شركة بالمليون ريال تعطى بالعلاقة $م(ن) = ٢\sqrt{ن + ١٠}$ ، حيث $م(ن)$ مجمل المبيعات بالريال، ن الزمن بالأشهر، أوجد مجمل مبيعات الشركة بعد قرابة الخمسة أشهر .

٥ إذا كانت السعرات الحرارية اللازمة لرفع ١ غم من سائل من -٤٠° سيليزية إلى $س^{\circ}$ سيليزية يعطى بالعلاقة:

$$د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{٢}س & ، \quad -٤٠ \leqslant س < ٠ \\ س + ١٠ & ، \quad ٠ \leqslant س \end{cases}$$

أوجد:

أ) $\lim\limits_{س \to -١٠} د(س)$

ب) $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$

جـ) $\lim\limits_{س \to ٧٠} د(س)$

٦ إذا كانت التكلفة بالريالات لإزالة س ٪ من تلوث أصاب البحر بسبب ناقلة نفط تعطى بالعلاقة الآتية :

$ك(س) = \frac{٧٣٠٠٠٠٠س}{١٠٠ - س}$ ، أوجد:

أ) $\lim\limits_{س \to ٥٠} ك(س)$

ب) $\lim\limits_{س \to ١٠٠} ك(س)$

٧ أوجد $\lim\limits_{س \to م} \frac{\sqrt{س - ن} - \sqrt{م - ن}}{س - م}$ حيث $٠ < ن < م$

٨ إذا كانت $د(س) = \frac{|س + ٣|}{س + ٣} + ٥$ ، فأوجد $\lim\limits_{س \to -٣} د(س)$

٩ إذا كانت $د(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{|س + ٥|}$ ، فأوجد كلا من :

أ) $\lim\limits_{س \to -٢} د(س)$ ب) $\lim\limits_{س \to -٥} د(س)$ جـ) $\lim\limits_{س \to ٤} د(س)$

١٠ أوجد $\lim\limits_{س \to ١} ٢س + \frac{س}{\sqrt{س^٢}}$

١١ ابحث نهاية الدالة $هـ(س) = \frac{[\frac{١}{٢}س + ١]}{|س + ٢|}$ ، عند النقطة $س = -٢$

نهاية الدالة عند اللانهائية

Limit of the Function at Infinity

في كثيرمن التطبيقات الرياضية نحتاج لمعرفة سلوك د(س) عندما س $\longleftarrow \infty$ أو س $\longleftarrow -\infty$ ولتوضيح ذلك سنقوم بهذا النشاط :

نشاط ١ :

الأدوات: قطعة نقدية ورقية فئة ١ ريال عماني

خطوات العمل:

١ قسم الريال على أعضاء مجموعتك. كم نصيب كل واحد منهم ؟

٢ قسم الريال على عدد طلاب فصلك. كم نصيب كل واحد منهم ؟

٣ قسم الريال على عدد طلاب مدرستك. هل تستطيع ذلك ؟

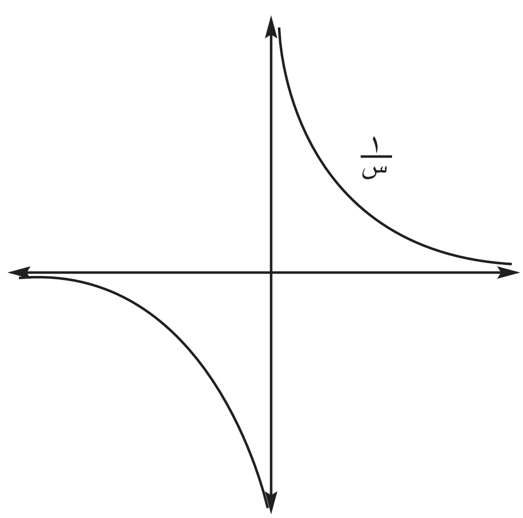
٤ قسم الريال على عدد سكان سلطنة عمان. هل تستطيع ذلك؟ ولماذا ؟

لعلك لاحظت من النشاط السابق أن نصيب كل شخص يقل كلما ازداد عدد الأشخاص .

فإذا رمزنا لعدد الأشخاص بالرمز س، فسيكون نصيب كل شخص $\frac{١}{\text{س}}$

كلما اقتربت س من ∞ اقترب $\frac{١}{\text{س}}$ من الصفر.

ونعبر عن ذلك رياضيًّا: $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} =$ صفر



تدريب ١

أوجد $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}}$

نتيجة

$\underset{\text{س} \to \mp\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = ٠$

مثال ١

أوجد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}}$ د(س) ، إذا كانت د(س) $= \frac{٨٠٠٠٠ \text{س}^٢ + ٥٠٠}{\text{س}^٢ + ١٠٠٠}$

الحل

بالتعويض المباشر نحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (وهي كمية غير معينة) لذلك نلجأ إلى القسمة على $\text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن أكبر أس للمتغير س في الدالة .

∴ نقسم كلاً من البسط والمقام على $\text{س}^{٢} \neq ٠$

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٨٠٠٠٠\,\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \frac{٥٠٠}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \frac{١٠٠٠}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٨٠٠٠٠ + \frac{٥٠٠}{\text{س}^{٢}}}{١ + \frac{١٠٠٠}{\text{س}^{٢}}} = \frac{٨٠٠٠٠ + ٠}{١ + ٠} = ٨٠٠٠٠$$

تدريب ٢

أوجد $\lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{١٠٠ + ٤٥\text{ن}}{١ + ٠٫٠٠٥\text{ن}}$

مثال ٢

يتحرك جسيم على خط مستقيم طبقًا للعلاقة : $\text{ف}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}^{٤} + ٦\text{ن}^{٣} + ٩\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن}}{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \neq ٠$.

أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما $\text{ن} \longleftarrow \infty$

الحل

أ) $\lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\text{ن}^{٤} + ٦\text{ن}^{٣} + ٩\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن}}{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

بالتعويض المباشر نحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ وهي كمية غير معينة

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{ن}^{٤}$ ، حيث $\text{ن}^{٤} \neq ٠$

$$\lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{\frac{\text{ن}^{٤}}{\text{ن}^{٤}} + \frac{٦\text{ن}^{٣}}{\text{ن}^{٤}} + \frac{٩\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٤}} + \frac{٤\text{ن}}{\text{ن}^{٤}}}{\frac{\text{ن}}{\text{ن}^{٤}}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{١ + \frac{٦}{\text{ن}} + \frac{٩}{\text{ن}^{٢}} + \frac{٤}{\text{ن}^{٣}}}{\frac{١}{\text{ن}^{٣}}}$$

$$= \frac{١ + ٠ + ٠ + ٠}{٠} = \frac{١}{٠} = \infty$$ لماذا؟

∴ المسافة غير معروفة .

∴ النهاية غير موجودة .

تدريب ٣

أوجد قيمة $\left(\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \frac{٣}{س + ١}\right) \right)^{٢}$

نتيجة

تكون $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \dots}{ب_{م} س^{م} + ب_{م-١} س^{م-١} + \dots}$ تساوي :

١) $\dfrac{أ_{ن}}{ب_{م}}$ ، إذا كان $ن = م$

٢) صفر ، إذا كان $ن < م$

٣) $\pm \infty$ ، إذا كان $ن > م$

مثال ٣

أوجد ما يلي : أ) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٥}}\right)$ ب) $\underset{س \to \pm\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٣}}{س^{٢} + ١}$

الحل

أ) سنستخدم طريقة عندما س $\to -\infty$ وهي بوضع سَ = − س وعندها سَ $\to \infty$

$\therefore \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٥}}\right) = \underset{سَ \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٧}{سَ} - \frac{٢}{سَ^{٤}} - \frac{٥}{سَ^{٥}}\right)$

$= (١ + ٠ - ٠ - ٠) = ١$

$\therefore \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٥}}\right) = ١$

ب) نجد أولا : $\underset{س \to +\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٣}}{س^{٢} + ١}$

من النتيجة أعلاه ، نلاحظ أن : $ن > م$ (درجة البسط أكبر من درجة المقام)

$\therefore \underset{س \to +\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٣}}{س^{٢} + ١} = +\infty$

نجد ثانيا : $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٣}}{س^{٢} + ١} = \underset{سَ \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢سَ^{٣}}{سَ^{٢} + ١} = -\infty$

تدريب ٤

أوجد $\underset{س \to \pm\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤س - ١}{\sqrt{س^{٢} + ٢}}$

تمارين &

مسائل (٣)

١ أوجد كلاً مما يأتي :

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{3س + 3}{3س - 2}$

ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^4 - 2س^3}{س^2 + 2س}$

جـ) $\lim_{س \to \infty} \frac{8س^3 + 1 - (س^2 - 4)}{س^5 + 3 + (س^4 + 1)}$

د) $\lim_{س \to \infty} \frac{(س + 3)(2س + 9)}{(س + 1)(س + 4)}$

هـ) $\lim_{ن \to \infty} \frac{(3ن^2 + 1)(3ن - 1)}{3ن^3 - 4ن}$

و) $\lim_{س \to +\infty} \sqrt{س^2 + س} - س$

ز) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^3 + 2008}{2007 - 2س^3}$

ح) $\lim_{س \to -\infty} \frac{|س|}{3س - 1}$

٢ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{س^ن + 5}{3س^2 + 1} = \frac{1}{3}$ فما قيمة ن ؟

٣ إذا كانت $د(س) = \frac{ل\,س}{س + م}$ وكانت $\lim_{س \to -2} د(س) = 1$ ، $\lim_{س \to \infty} د(س) = 2$ ، أوجد قيمتي ل ، م

٤ إذا كانت $د(س) = \frac{2س - \sqrt{س^2 - 4}}{س + 7}$ فاثبت أن $\lim_{س \to -\infty} د(س) = 3 \times \lim_{س \to +\infty} د(س)$

٥ يتحرك جسم وفقًا للعلاقة : $ف(ن) = \frac{1 + 0{,}5ن^3 + 4ن^2 - 0{,}1ن}{ن + 1}$ حيث ف (ن) مقدرة بالمتر ، ن بالدقيقة .

أوجد $\lim_{ن \to \infty} ف(ن)$

الاتصال

Continuity

راقب مؤشر السرعة أثناء قيادة السائق للسيارة ، و أجب عما يلي :

١) هل تزداد السرعة من لحظة انطلاقها حتى بلوغها السرعة القصوى ؟

٢) أقفزت السرعة أم أنها مرت بجميع السرعات من البداية حتى السرعة القصوى ؟

٣) عند توقف السيارة هل مرت السرعة بجميع السرعات من السرعة القصوى إلى الصفر؟

لعلك لاحظت أن السرعة مرت بجميع السرعات من الصفر إلى السرعة القصوى ، ومن السرعة القصوى إلى الصفر،أي أن دالة السرعة متصلة. ولكي نفهم معنى الاتصال رياضيًّا سنقوم بالنشاط الآتي :

نشاط ١ :

الأدوات : ورقة رسم بياني، أدوات هندسية.

الخطوات :

١ ارسم منحنى الدوال : $د_١(س) = ١$ ، $د_٢(س) = س^٢ + ١$ ، $هـ_١(س) = \frac{س^٢}{س}$ ، $هـ_٢(س) = \frac{١}{س}$. بحيث يكون مجال كل دالة [−٢ ، ٢] .

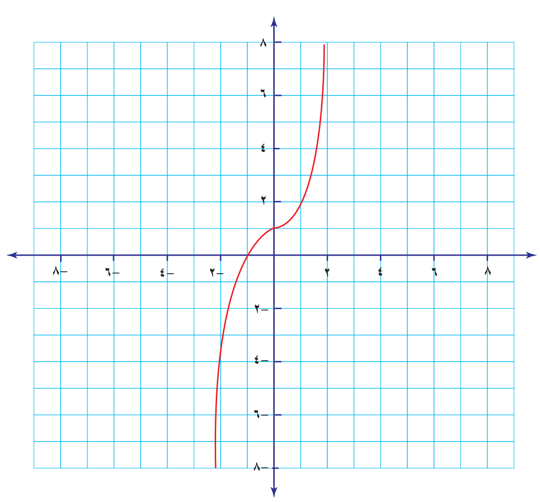
٢ اذكر بعض خواص تلك الدوال في الرسم .

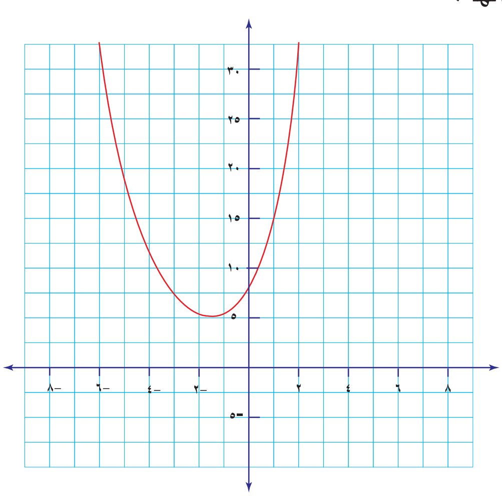
٣ حرك القلم على منحنى كل دالة من نقطة إلى أخرى بدون رفع سن القلم . ماذا تلاحظ ؟

٤ قارن النتائج التي توصلت إليها مع زملائك .

لعلك لاحظت أنه عندما رسمنا الدوال $د(س) = ١$ ، $د(س) = س^٢ + ١$ أمكننا الرسم دون رفع سن القلم عن الورقة التي نرسم عليها،أي أن منحنى الدالة يكون خاليًّا من الوثبات والثقوب، ومثل هذه الدوال تكون متصلة على مجالها.

❖ الأشكال التالية توضح منحنيات لدوال متصلة على مجالها .

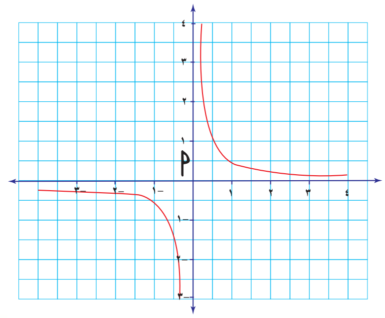


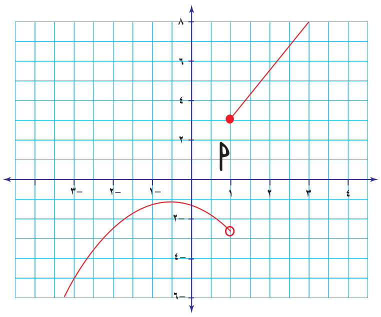


بينما بعض الدوال لا يمكننا رسمها بدون رفع سن القلم مثل $هـ_{١}(س) = \frac{س^{٢}}{س}$ ، $هـ_{٢}(س) = \frac{١}{س}$

أي منحنى الدالة فيه بعض الثقوب أو الوثبات .

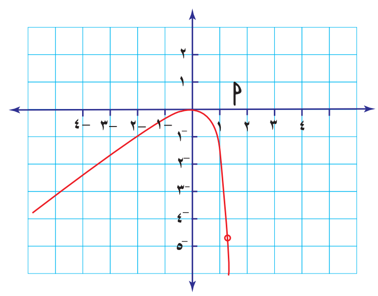
❖ الأشكال التالية لدوال غير متصلة عند س = ﺃ



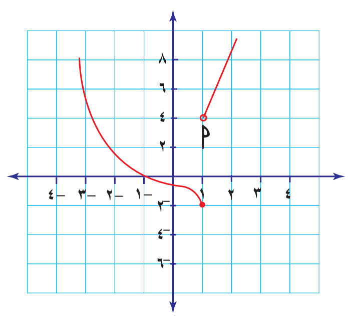


اتصال دالة عند نقطة continuity of a Function at a Point

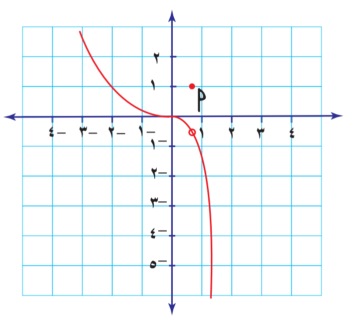
لاحظ الأشكال التالية ثم أجب عما يأتي :



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

أ) في كل من الأشكال أوجد نهاية الدالة عند س = ﺃ إن أمكن، وكذلك قيمة الدالة عند س = ﺃ إن أمكن أيضًا ثم قارن بين القيمتين .

ب) من (أ) استنتج سبب عدم اتصال الدالة د(س) عندالنقطة حيث س = ﺃ في كل شكل .

لعلك لاحظت أن سبب عدم اتصال الدالة د(س) في الشكل (١) هو أن د(ﺃ) غير موجودة .

وسبب عدم اتصال الدالة د(س) في الشكل (٢) هو $\lim\limits_{س \leftarrow ﺃ}$ د(س) غير موجودة ، وأما في الشكل (٣) لأن :

$$د(ﺃ) \neq \lim\limits_{س \leftarrow ﺃ} د(س)$$

حاول أن تضع تعريفًا للدالة المتصلة عند نقطة من خلال هذه الملاحظات .

تدريب ١

ارسم منحنى الدالة ق (س) = [س] في الفترة [٠ ، ٣] وحدد الفترات التي تكون فيها ق(س) متصلة ونقاط الانفصال.

تعريف

> تكون الدالة د(س) متصلة عند س = أ إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) = د(أ)

يمكننا القول بأن د(س) متصلة عند س = أ إذا تحقق :

أ) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) موجودة .

ب) د(أ) موجودة .

جـ) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) = د(أ)

مثال ١

مدرسة لتعليم قيادة السيارات تحسب أجرة تعليم كل فرد على عدد الساعات التي يتعلمها الفرد، وتعطى بالعلاقة التالية:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢٠ &، \quad ٠ < س \leqslant ٥ \\ ١٧ + ٠,٦ \, س &، \quad ٥ < س \leqslant ١٥ \\ ٢٢ + ٠,٣ \, س &، \quad س > ١٥ \end{cases}$$

حيث ق(س) أجرة التعليم بالريالات و س عدد الساعات التي يتعلمها الفرد .

أ) ابحث اتصال الدالة عند س = ٥

ب) ابحث اتصال الدالة عند س = ١٥

الحل

أ) د(٥) = ٢٠

$$\left.\begin{matrix} \underset{س \leftarrow ٥^-}{\text{نهـــا}} ق(س) = ٢٠ \\ \underset{س \leftarrow ٥^+}{\text{نهـــا}} ق(س) = ٢٠ \end{matrix}\right\} \therefore \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} ق(س) = ٢٠$$

د(٥) = $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

∴ ق(س) متصلة عند س = ٥

ب) د(١٥) = ٢٦

$\underset{س \leftarrow ١٥^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٢٦

$\underset{س \leftarrow ١٥^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٢٦,٥

∴ $\underset{س \leftarrow ١٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصلة عند س = ١٥

تدريب ٢

إذا كان الإنفاق الشهري بالريالات لـ س كيلووات من الكهرباء يعطى بالعلاقة التالية :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٠,٠١ س} & ، \quad \text{٠} < \text{س} \leqslant \text{٣٠٠٠} \\ \text{٠,٠١٥(س − ٣٠٠٠) + ٣٠} & ، \quad \text{س} > \text{٣٠٠٠} \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند س = ٣٠٠٠

مثال ٢

ابحث اتصال د(س) = $|$س − ٢$|$ ، حيث س = ٢

الحل

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س − ٢} & ، \quad \text{س} \geqslant \text{٢} \\ \text{−(س − ٢)} & ، \quad \text{س} < \text{٢} \end{cases}$$

د(٢) = صفر

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}^-} \text{د(س) = صفر} \\ \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}^+} \text{د(س) = صفر} \end{array} \right. \quad \therefore \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} \text{د(س)} = \text{٠}$$

$$\text{د(٢)} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} \text{د(س)} = \text{صفر}$$

∴ د(س) متصلة عند س = ٢

تدريب ٣

ابحث اتصال د(س) = $|$س − ٢$|$ ، حيث س = ٥

مثال ٣

إذا كانت :

$$\text{ص} = \frac{\text{٥٠س − ٥س}^{\text{٢}}}{\text{١٠ − س}} \quad ، \quad \text{س} \neq \text{١٠}$$

أعد تعريف الدالة ص لتصبح متصلة عند س = ١٠

الحل

لكي تكون د(س) متصلة عند س = ١٠ لا بد أن يكون د(١٠) = $\underset{س \to ١٠}{\text{نهـــا}}$ د(س)

$$\underset{س \to ١٠}{\text{نهـــا}} د(س) = \underset{س \to ١٠}{\text{نهـــا}} \frac{٥س(١٠ - س)}{١٠ - س} = ٥٠$$

∴ د(١٠) = ٥٠

$$ص = \begin{cases} \dfrac{٥٠س - ٥س^{٢}}{١٠ - س} & ، \quad س \neq ١٠ \\ ٥٠ & ، \quad س = ١٠ \end{cases}$$

مثال ٤

إذا كانت د(س) دالة متصلة عند س = ٠ و متصلة عند س = ١ وكانت :

$$د(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ١ & ، \quad س \leqslant ٠ \\ أس^{٢} + ب & ، \quad ٠ < س < ١ \\ ٢س + ١ & ، \quad س \geqslant ١ \end{cases}$$

فأوجد قيمة كل من أ، ب

الحل

∵ د(س) متصلة عند س = ٠

∴ $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـــا}} د(س) = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـــا}} د(س) = ١$

٠ + ب = ٣ × ٠ + ١

∴ ب = ١

∵ د(س) متصلة عند س = ١

∴ $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـــا}} د(س) = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـــا}} د(س) = ٣$

٣ = أ + ب

∵ ب = ١

∴ أ + ١ = ٣

∴ أ = ٢

تمارين &

مسائل (٤)

ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقاط المبينة للأسئلة (١) ، (٢) :

١ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ & ، \quad \text{س} \leqslant ١ \\ ٣\text{س} & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$ ، $\text{س} = ١$

٢ $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \quad \text{س} \geqslant ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س} - ٢} & ، \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$ ، $\text{س} = ٢$

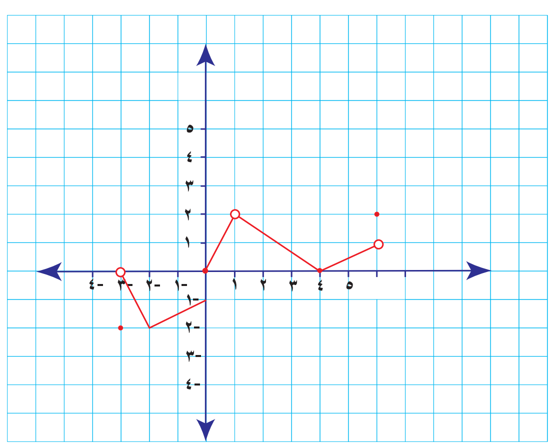
٣ إذا كانت الدالة :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{م} + \text{ب س}^{٢} & ، \quad \text{س} > ١ \\ ٣ & ، \quad \text{س} = ١ \\ ٢\text{ب} - \text{م س} & ، \quad \text{س} < ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فأوجد قيم كل من م ، ب

٤ إذا كانت $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣}$ ،حدد قيم س التي تكون عندها الدالة غير متصلة ، ثم أعد تعريفها بحيث تصبح متصلة عند هذه القيم .

٥ أوجد نقط الانفصال للشكل المقابل ، موضحا سبب ذلك :



٦ ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقط المبينة لكل منها :

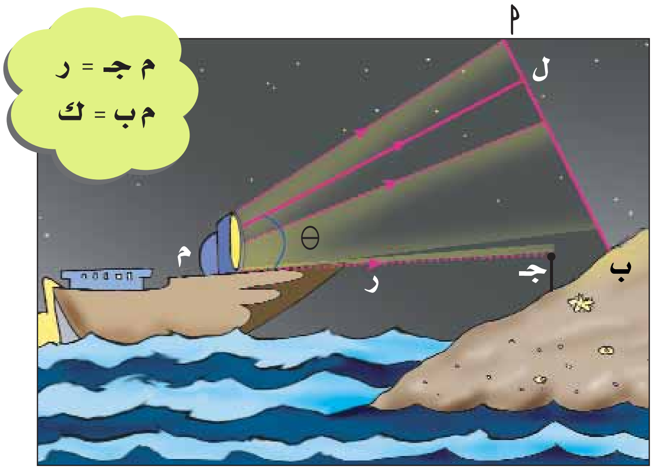
أ) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} \neq ٣ \\ ١ & ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$ ، س = ٣

ب) $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \dfrac{[\text{س} + ١]}{\text{س} + ١} & ، \quad \text{س} \neq -١ \\ ٠ & ، \quad \text{س} = -١ \end{cases}$ (عند س = −١)

٧ أوجد قيمة ل التي تجعل الدالة $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س} - ٢} & ، \quad \text{س} \neq ٢ \\ \text{ل} & ، \quad \text{س} = ٢ \end{cases}$

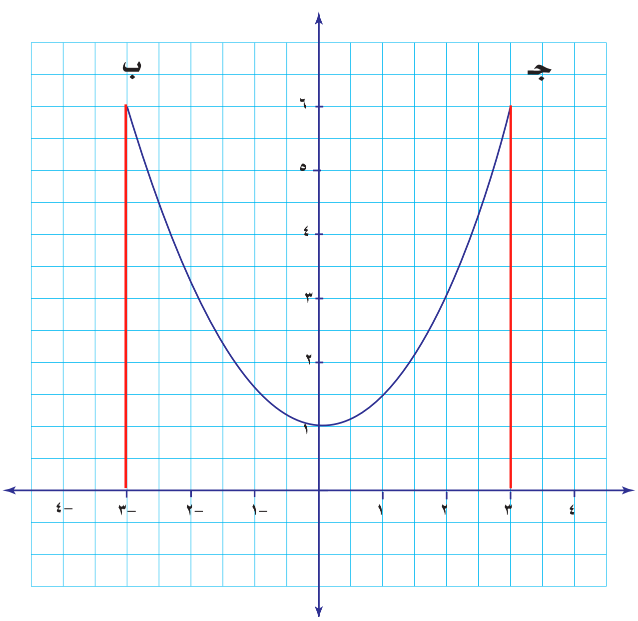
متصلة عند س = ٢

اتصال دالة على فترة Continuity of a Function on Interval



يوضح الشكل المقابل مركبا «م» ثابتا في البحر يضيء نقطة على حافة الشاطئ بواسطة شعاع ضوئي . المسافة م ل هي دالة للزاوية المتغيرة «θ» ، التي تتغير بصفة مستمرة عندما يتغير موقع ل على الخط أ ب ، وعند مرور الشعاع الضوئي بالنقطة جـ(أي تنعدم θ) تقفز المسافة م ل من ك إلى ر .

❖ لاحظ أن الشعاع لا يضيء ب عندما يضيءجـ ؛ لأن ب ، جـ ، م على استقامة واحدة . ووجود حاجز عند جـ من خلال هذا التطبيق الحياتي ، هل توجد نقاط في الفترة من أ إلى ب لا يمر عليها الشعاع الضوئي؟



يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة :

$د(س) = س^{٢} + ١$

لاحظ أنك إذا وضعت رأس القلم عند ب، وسرت على المنحنى باتجاه جـ، فإنك ستصل إلى هذه النقطة دون أن ترفع سن القلم لذلك يقال للمنحنى أنّه متصل في الفترة [ب ، جـ].

∴ لكي تكون الدالة د(س) متصلة على الفترة [ب ، جـ] لا بد أن تكون متصلة عند جميع النقاط في تلك الفترة عدا نقاط الطرفين حيث يكتفى بالاتصال من جهة واحدة .

أي أن $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$ لكل أ $\in$] ب ، جـ [من التعريف

ولكن من نظرية (١) إذا كانت د(س) حدودية معرفة على ح فإن $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$ لكل أ $\in$ ح .

ومما سبق يمكن التوصل للنظرية الآتية :

نظرية (٢)

١) الدالة الحدودية المعرفة على [أ، ب] تكون متصلة على جميع نقاط]أ ، ب[

٢) تكون الدالة د(س) متصلة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت :

أ) د(س) متصلة على الفترة]أ ، ب[

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^{+}}$ د(س) = د(أ) ، $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ب}^{-}}$ د(س) = د(ب)

مثال ١

إذا كان متوسط أعداد ذبابة الفاكهة في منطقة ما يعبر عنه بالعلاقة الآتية :

م(ن) = ٠,٢٥ن^{٢} + ٣ن + ١ حيث ن عدد الأسابيع .

فابحث اتصال الدالة م(ن) على مجالها .

الحل

∵ م(ن) دالة حدودية مجالها $ح^{+}$. لماذا؟

∴ م(ن) متصلة على مجالها (نظرية ٢)

تدريب ١

ابحث اتصال الدالة هـ(س) = ٣ − س − س^{٢} في الفترة [−٤ ، ٤].

لعلك في يوم من الأيام مررت بجسر وتأملت فيه. فستجد أن هذا الجسر لا بد أن يتضمن بعض الفجوات (نقاط انفصال) لكي تسمح بالتمدد، وهكذا تصمم خطوط السكة الحديدية .

تدريب ٢

إذا كان دخل إحدى شركات بيع الحواسيب بالريال تعطى بالعلاقة :

د(س) = ٢٠٠س − ٠٫١س^{٢} ، ٠ ⩽ س ⩽ ٢٠٠٠ حيث س عدد الحواسيب المباعة .

ابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها .

مثال ٢

ابحث اتصال د(س) على مجالها فيما يأتي:

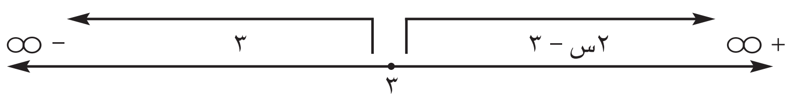
أ) د(س) = س + | س − ٣ |

ب) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} & ، \quad \text{س} \geqslant ١ \end{cases}$

الحل

أ) د(س) = $\begin{cases} \text{س} + (\text{س} - ٣) & ، \quad \text{س} \geqslant ٣ \\ \text{س} - (\text{س} - ٣) & ، \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$

د(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} \geqslant ٣ \\ ٣ & ، \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$



أولاً : ابحث الاتصال] − ∞ ، ٣[

د(س) = ٣ دالة ثابتة

∴ د(س) متصلة على]− ∞ ، ٣ [

ثانيًا: ابحث اتصال] ٣ ، ∞[

د(س) = ٢س − ٣ دالة حدودية

∴ د(س) متصلة على] ٣ ، ∞[

ثالثًا: عند س = ٣

١) د(٣) = ٣

٢) $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(٣)

∴ د(س) متصلة عند س = ٣

من أولاً وثانيًا وثالثًا د(س) متصلة على ح .

ب) د(س) = { س^{٢} + س + ١ ، س < ١ ؛ ٣س ، س ≥ ١ }

أولاً: الفترة]-∞ ، ١[

د(س) = س^{٢} + س + ١ حدودية

∴ د (س) متصلة على]-∞ ، ١[

ثانيًا: الفترة]١ ، ∞[

د(س) = ٣س حدودية

∴ د(س) متصلة على]١ ، ∞[

ثالثًا: عند س = ١

١) د(١) = ٣

٢) $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ٣س = ٣

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + س + ١) = ٣

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(١) = ٣

∴ د(س) متصلة عند س = ١

من أولاً وثانيًا وثالثًا د(س) متصلة على ح .

نظرية (٣)

إذا كانت د(س) ، هـ(س) متصلتين على الفترة [أ ، ب] فإن :

١) د(س) ± هـ(س) متصلتين على [أ ، ب]

٢) د (س). هـ (س) متصلة على [أ ، ب]

٣) $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ متصلة على [أ ، ب] ، هـ (س) ≠ ٠

٤) $\sqrt{\text{د(س)}}$ متصلة ، د(س) ⩾ ٠

مثال ٣

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ على]٠ ، ١[

الحل

الدالة د(س) دالة نسبية حيث البسط حدودية متصلة على]٠ ، ١[.

أصفار دالة المقام هي ٢ ، -٢ ∌]٠ ، ١[

∴ المقام ≠ ٠ في]٠ ، ١[

∴ د(س) متصلة على]٠ ، ١[

تدريب ٣

ابحث اتصال الدالة ق(س) = $\frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}{\text{س}^{٢} + ٩}$ على مجالها .

مثال ٤

أوجد قيمة م التي تجعل د(س) متصلة على مجالها ، حيث :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} \neq ٣ \\ \text{م} & ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$

الحل

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{د(س)} = \text{د(٣)}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = \text{ر} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{(\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{(\text{س} - ٣)}} = \text{ر}$

$٣ + ٣ = \text{ر}$

$\therefore \boxed{\text{ر} = ٦}$

تدريب ٤

أوجد قيمة ب التي تجعل ق(س) متصلة على مجالها حيث :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{س} - \text{ب}} & \text{، س} \neq \text{ب} \\ \cdot & \text{، س = ب} \end{cases}$$

تمارين &

مسائل (٥)

ابحث اتصال الدالة المعطاة على مجالها للأسئلة ١ – ٣ :

١ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢}{س^٢ - س - ٦} & ، س \neq -٢ ، س \neq ٣ \\ \dfrac{١}{٥} & ، س = -٢ \\ ٧ & ، س = ٣ \end{cases}$

٢ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + \dfrac{س^٢ - ١}{س + ١} & ، س \neq -١ \\ ٢ & ، س = -١ \end{cases}$

٣ $د(س) = \begin{cases} س^٢ - س + ٣ & ، ٠ < س < ١ \\ [س + ٢] & ، ١ \leqslant س < ٢ \\ س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

٤ إذا كان عدد أفراد أسرة ما يزداد وفقا للعلاقة الآتية :

$د(س) = \dfrac{س^٢ - ١٤س - ٧٢}{س^٢ - ٣٦}$ ، س > صفر حيث د(س) عدد أفراد الأسرة بعد س من السنوات، فأجب عما يلي :

أ) أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة .

ب) ارسم بيان الدالة د(س) بعد إعادة تعريفها .

٥ إذا كانت $د(س) = \dfrac{س^٣ + ٧}{س^٢ - أس + ٤}$ أوجد قيم أ التي تجعل الدالة د(س) متصلة على ح .

٦ إذا كانت القيمة الشهرية د(س) بالريالات لفاتورة الماء تعطى بالعلاقة :

$د(س) = \begin{cases} ٢٨ & ، ٠ < س \leqslant ٢٠ \\ ٢٨ + ٠٫١ (س - ٢٠) & ، س > ٢٠ \end{cases}$

حيث س عدد جالونات الماء المستهلكة . ابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها.

٧ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٧س + ٢} - \sqrt{٦س + ٤}}{س - ٢} & ، س \neq ٢ ، س \geqslant \dfrac{-٢}{٧} \\ ل & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة على مجالها ، فأوجد قيمة ل .

تمارين &

مسائل عامة

أوجد النهايات للأسئلة ١ـ١٠ :

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٢س} - ٢}{س^{٢} - ٤}$

٣ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{١ + س} + ١}{\sqrt{١ - س} - ١}$

٤ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٩} - ١٦\sqrt{٢}}{\sqrt{٨ - س}\ \sqrt{س}}$

٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٢} + ٤ - س}{س + ٣}$

٦ $\underset{س \to -\infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٤س^{٣} - ٢س^{٢}}{س^{٦} + س^{٤}}$

٧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} + ١} - \sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt[٥]{س^{٥} + ٣} + \sqrt[٤]{س^{٤} + ١}}$

٨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{|٣ - س|}{٤س - ١}$

٩ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{١}{س - ٢} - \dfrac{٤}{س^{٢} - ٤} \right)$

١٠ $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{هـ(س) - هـ(-١)}{س + ١}$

عندما $هـ(س) = \dfrac{١}{س}$

١١ ابحث اتصال الدالة المعطاة على مجالها في كل مما ياتي :

أ) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٤}{س - ١} & ، \quad ١ < س \leqslant ٢ \\ ٢س - ١ & ، \quad ٢ < س \leqslant ٥ \end{cases}$

ب) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٤}{س - ٢} & ، \quad س < ١ \\ ٣س + ٢ & ، \quad س \geqslant ١ \end{cases}$

١٢ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س}^{٢} & ، \quad ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ \text{س} - ٤ & ، \quad ٢ < \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$

فأوجد :

أ) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ‏ ‏ ‏ ب) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

جـ) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ‏ ‏ ‏ د) $\underset{\text{س} \to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

١٣ أوجد ك التي تجعل $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} + \text{ك}}{٢\text{س} - ٦}$ موجودة .

١٤ إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س}^{٢} + ٧)\text{س}^{\text{ن}}}{٣\text{س} - ٦} = \dfrac{٢}{٣}$ فما قيمة ن ؟

١٥ أوجد قيمة م ، ك التي تجعل د(س) متصلة على مجالها ، حيث :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ١ & ، \quad \text{س} < ٠ \\ \text{م}\,\text{س} + \text{ك} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \sqrt{\text{س} + ٨} & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

١٦ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س} + ٤}}{\text{س}}$ ، فهل يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند س = ٠ ؟ وضح إجابتك .

١٧ إذا كانت الدالة ق(س) معرفة $\text{ح} \longrightarrow \text{ح}$ ، ومتصلة على ح بحيث : ق(٠) = ٠ ، ابحث عن دالة ق (س) بحيث : $\text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ق}(\dfrac{١}{\text{س}}) = ١$ لكل $\text{س} \in \text{ح} - \{٠\}$ ثم أجب عما يلي:

أ) احسب ق(١).

ب) أوجد $\underset{\text{س} \to +\infty}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$.

الوحدة الثانية

٢

التفاضل وتطبيقاته

Differentiation

الأهداف

١ تعريف كل من : (التغير، متوسط معدل التغير، معدل التغير) وتطوير طريقة عامة لإيجاد كل منها .

٢ إيجاد مشتقة دالة معطاة باستخدام تعريف المشتقة .

٣ استخدام التفسير الهندسي والفيزيائي لمفهوم المشتقة (الميل - والسرعة - والتسارع) .

٤ بحث العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق .

٥ استنباط قاعدة عامة لإيجاد ($\frac{دص}{دس}$) عندما تكون ص = س^{ن} واستخدامها .

٦ إيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين أو أكثر .

٧ إيجاد مشتقة خارج قسمة دالتين .

٨ اشتقاق الدوال المركبة (قانون السلسلة أو التعويض) .

٩ إيجاد مشتقة الدوال الضمنية .

١٠ إيجاد المشتقات العليا .

١١ إيجاد ميل المماس وميل الخط العمودي عليه لمنحنى و إيجاد معادلة كل منهما .

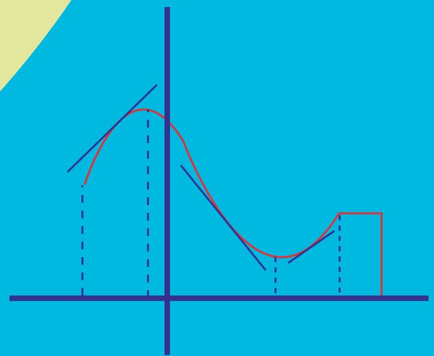
١٢ حل مسائل وتطبيقات حول المعدلات الزمنية المرتبطة .

١٣ تحديد فترات التزايد والتناقص .

١٤ تعريف النقاط الحرجة وإيجادها .

١٥ تحديد طبيعة النقاط الحرجة (البحث عن القيم القصوى المحلية والمطلقة) .

١٦ حل مسائل وتطبيقات حول القيم القصوى المحلية .



الاشتقاق

Differentiation

التغير

استعن بالجدول الآتي في الإجابة عن الأسئلة التي تليه :

التقرير السنوي لحركة البضائع السلعية المفرغة في ميناء السلطان قابوس بالأطنان للأعوام ٢٠٠٠، ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ م

السلع (س)	السنوات		
	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢
مواد غذائية	٦٦٣,٣	٧١٠,٣	٧٦٣,٦
مواد بناء	٦٦٦٣,٣	٢٧٥,٢	٣٣١,٧

١) أوجد مقدار الفرق لكل من المواد الغذائية، ومواد البناء بين عامي ٢٠٠١م و ٢٠٠٢م .

٢) أوجد متوسط الفرق لكل من المواد الغذائية، ومواد البناء بين عامي ٢٠٠١م و ٢٠٠٢م .

٣) ابحث عن تسمية أخرى لمقدار الفرق وعن تسمية أخرى لمتوسط الفرق .

مثال ١

تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث يكون بعدها ف عن نقطة البداية بعد ن معرفا بالدالة ف(ن) = ٨ ن - ن^{٢} حيث ف مقاسة بالكيلومتر ، ن مقاسة بالساعة، فإذا تغيرت ن من ٤ إلى ٦ فأوجد ما يلي :

١) موقع النقطة عندما ن = ٤   ٢) موقع النقطة عندما ن = ٦

٣) مقدار التغير في الزمن (Δن)   ٤) مقدار التغير في المسافة المقطوعة (Δف)

٥) متوسط معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ (السرعة المتوسطة)

الحل

١) ف(٤) = ٣٢ - ١٦ =١٦كم   ٢) ف(٦) = ٤٨ - ٣٦ = ١٢كم

٣) Δن = ٦- ٤ = ٢ ساعة   ٤) Δف = ١٢- ١٦ = - ٤كم

٥) متوسط معدل تغيرالمسافة بالنسبة للزمن = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = - ٢ كم / ساعة

تعريف

إذا كانت د(س) دالة وكانت س$_١$ ، س$_٢$ قيمتين في مجال هذه الدالة، فإن مقدار التغير في س عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_٢$ يرمز له بالرمز Δ س ويقرأ دلتا س حيث Δ س = س$_٢$ ـ س$_١$ ، ومقدار التغير في ص يرمز له بالرمز Δ ص ويقرأ دلتا ص حيث Δ ص = ص$_٢$ ـ ص$_١$ = د(س$_٢$) ـ د(س$_١$).

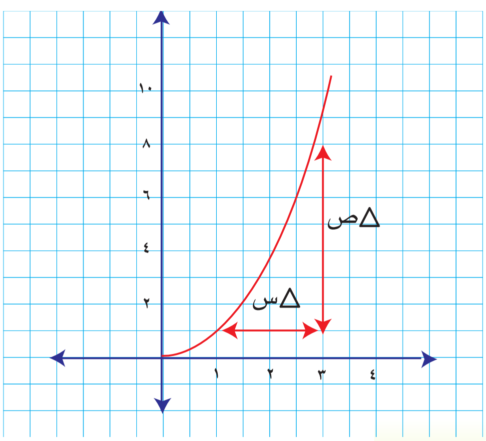
وتسمى نسبة مقدار التغير في ص إلى مقدار التغير في س بمتوسط معدل تغير ص بالنسبة إلى س ويرمز لها بالرمز $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

حيث $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{د(س_١ + \Delta س) - د(س_١)}{\Delta س}$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = س^٢ معرفة على الفترة] ٠ ، ∞ [وتغيرت قيمة س من ١ إلى ٣ فأوجد :

Δس ، Δص ، $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، ارسم منحنى هذه الدالة موضحا عليه Δ س ، Δ ص .



الحل

د (١) = ١ ، د (٣) = ٩

Δس = س$_٢$ ـ س$_١$ = ٣ ـ ١ = ٢

Δص = ص$_٢$ ـ ص$_١$ = د (٣) ـ د (١) = ٩ ـ ١ = ٨

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٨}{٢} = ٤$

المشتقة (معدل التغير) Derivative (a rate of change)

لدراسة منحنى الدالة ص = س^٢ + ١ في] ٠ ، ∞ [

انقل الجدول التالي إلى كراستك ثم أكمله (مع إمكانية الاستعانة بالآلة الحاسبة)

س$_١$	س$_٢$	Δس	د(س$_١$)	د(س$_٢$)	Δص	$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$
٢	٢,١					
٢	٢,٠١	٠,٠١	٥	٥,٠٤٠١	٠,٠٤٠١	٤,٠١
٢	٢,٠٠١					
٢	٢,٠٠٠١					

ادرس الجدول السابق . ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١) هل الدالة ص = س^{٢} + ١ متصلة في $[\,٠ ، \infty\,]$ ؟

٢) ماذا تتوقع لـ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ عندما Δس $\longleftarrow$ الصفر ؟

٣) هل أخذ فترات مختلفة يغير النتيجة ؟ وضح إجابتك .

إذا فرضنا أن Δس = هـ فأوجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$ ، ماذا تلاحظ ؟

وحيث إن التغير هنا لحظي أي في فترة متناهية في الصغر، فإننا نكتب معدل التغير بدلا من متوسط معدل التغير .

أي أن : معدل التغير يساوي نهاية متوسط معدل التغير عندما Δ س تقترب من الصفر .

تدريب ١

إذا كانت ص = س^{٢} + س فأوجد :

١) متوسط معدل التغير للدالة بين س = ٣ ، س = ٥

٢) دالة متوسط معدل التغير (افرض Δ س = هـ)

٣) دالة معدل التغير

٤) معدل التغير عند س = ٢

تعريف

إذا كانت الدالة د متصلة في الفترة] أ ، ب [فإن :

$\underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$ تسمى معدل تغير الدالة د أو بمشتقة الدالة د

عند كل س $\in$] أ ، ب [ويرمز لها بالرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ وتقرأ " **دال ص دال س** " أو " **دال ص على دال س** " .

أي إن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$.

مجال $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ هو جميع قيم س التي تكون عندها النهاية موجودة .

ملاحظة : يرمز للمشتقة عند النقطة (س ، ص) بأحد الرموز التالية :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (د (س)) ، صَ ، دَ (س)

كما يرمز للمشتقة عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بالرموز التالية :

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \text{س}_{١}}$ ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{د}(\text{س}))_{\text{س} = \text{س}_{١}}$ ، دَ (س$_{١}$)

مثال ٣ كانت $\text{ص} = ٣\text{س}^٢ + ٥$. فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ،وما قيمتها عند $\text{س} = ٢$ ؟

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س + هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(\text{س} + \text{هـ})^٢ + ٥ - (٣\text{س}^٢ + ٥)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^٢ + ٦\text{س هـ} + ٣\text{هـ}^٢ + ٥ - ٣\text{س}^٢ - ٥}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦\text{س هـ} + ٣\text{هـ}^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (٦\text{س} + ٣\text{هـ})$$

$$= ٦\text{ س}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = ٢} = ٦ \times ٢ = ١٢$$

مثال ٤ بالون كروي الشكل بالهواء . أوجد معدل تغير مساحة سطحه بالنسبة إلى طول نصف القطر، عندما نصف القطر يساوي ٥سم ، علمًا بأن مساحة سطح الكرة $= ٤ \pi \text{ نق}^٢$ حيث نق هو نصف قطر الكرة .

الحل يفرض أن مساحة سطح البالون الكروي هي م

$$\text{م} = ٤ \pi \text{ نق}^٢$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(نق + هـ)} - \text{د(نق)}}{\text{هـ}}$$

$$\left(\frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}}\right)_{\text{نق} = ٥} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(٥ + هـ)} - \text{د(٥)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤\pi(٥ + \text{هـ})^٢ - ٤\pi(٥)^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤\pi(٢٥ + ١٠\text{هـ} + \text{هـ}^٢) - ١٠٠\pi}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٠٠\pi + ٤٠\pi\text{ هـ} + ٤\pi\text{ هـ}^٢ - ١٠٠\pi}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}(٤٠\pi + ٤\pi\text{ هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (٤٠\pi + ٤\pi\text{ هـ})$$

$$= ٤٠\pi \text{ سم}^٢$$

ملاحظات :

١. إذا وجدت مشتقة للدالة عند س = س. حيث س. $\in$]أ ، ب[فإن د قابلة للاشتقاق عند س. وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة من نقاط الفترة]أ،ب[، فإن الدالة د قابلة للاشتقاق في الفترة . وكذلك إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة]−∞ ، ∞[، فإن الدالة قابلة للاشتقاق عند كل القيم الحقيقية .

٢. إذا كانت $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{د(س. + هـ) - د(س.)}{هـ}$ غير موجودة فإننا نقول إن الدالة ليست لها مشتقة عند س. أو غير قابلة للاشتقاق عند س.

مثال ٥

إذا كانت الدالة د معرفة كالتالي :

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{عندما } س \leqslant ١ \\ ٢س & \text{عندما } س > ١ \end{cases} ،$$

فابحث قيمة مشتقة الدالة عند النقطة س = ١.

الحل

المطلوب بحث وجود :

$$دَ(١) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$$

المشتقة اليمنى = $دَ(١^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

(لاحظ أن : هـ $\longrightarrow ٠^+ \Longleftarrow$ ١ + هـ $> ١ \Longleftarrow$ د(س) = ٢س)

$$\therefore دَ(١^+) = \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٢(١ + هـ) - ٢(١)}{هـ}$$

$$= \lim\limits_{هـ \to ٠^+} \frac{٢ + ٢هـ - ٢}{هـ}$$

$$= \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢ \qquad (١)$$

المشتقة اليسرى = $\text{دَ}\,(١^{-}) = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

(لاحظ أن : $\text{هـ} \longrightarrow ٠^{-} \Longleftarrow ١ + \text{هـ} < ١ \Longleftarrow \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$)

$\therefore\ \text{دَ}\,(١^{-}) = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\left[(١+\text{هـ})^{٢} + ١\right] - (١+١)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ١ - ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} (٢ + \text{هـ}) = ٢$ (٢)

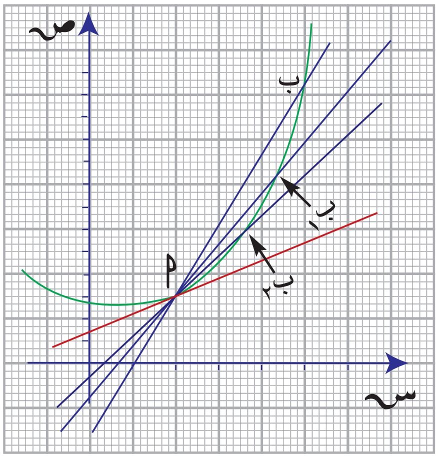
ومن (١) ، (٢) نستنتج أن : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$ موجودة وقيمتها تساوي ٢ .

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ وقيمة مشتقتها عند هذه النقطة تساوي ٢ .

تدريب ٢

أوجد مشتقة الدالة ص = أ س + ب عند أي نقطة (س ، ص) حيث أ ، ب عددان حقيقيان ثابتان .

التفسير الهندسي للمشتقة



الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د(س)

ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١) أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عن طريق إحداثيات النقطتين أ ، ب.

٢) ما علاقة ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بمتوسط معدل التغير؟

٣) هل يتغير الميل إذا انتقلت ب إلى ب١ ، ب٢ مع ثبات النقطة أ؟

٤) أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}_2}$.

٥) ما علاقة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ بمنحنى الدالة عندما تؤول النقطة ب إلى النقطة أ (Δ س ⟵ صفر) ؟

٦) كرر العمل مع منحنيات أخرى .

تدريب ٣ إذا كانت د(س) = ٣س − ٢ فأوجد ميل المماس عند النقطة (٤ ، ١٠) .

نتيجة

لأي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لمنحنى الدالة د(س) في أ، ب عندما تؤول النقطة ب إلى النقطة أ يصبح $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسا لمنحنى الدالة د(س) عند س = أ، وعندها تكون المشتقة = ميل المماس.

∴ $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س + هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$ = ميل المماس عند النقطة (س ، ص).

مثال ٦ إذا علمت أن د(٣) = −١ ، دَ(٣) = ٥ ، فأوجد معادلة المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي ٣ .

الحل

النقطة التي إحداثيها السيني يساوي ٣ هي (٣ ، −١)

ميل المماس عند النقطة (٣ ، −١) = ٥ ... لماذا ؟

معادلة المماس هي : ص + ١ = ٥ (س − ٣)

ص − ٥س + ١٦ = ٠

التفسير الفيزيائي للمشتقة :

ذكرنا سابقًا أن السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ (معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن) .

- افرض أن موقع جُسَيم ما على خط مستقيم يتحدد بالعلاقة ف= د(ن) ، موقع الجسيم عند اللحظة $ن_1$: $ف_1$ = د($ن_1$)، موقع الجسيم عند اللحظة $ن_2$: $ف_2$ = د($ن_1$ + هـ) ، (حيث هـ مقدار التغير في الزمن) .
- اكتب السرعة المتوسطة للجسيم خلال الفترة $ن_1$ إلى $ن_1$ + هـ .
- أوجد نهاية السرعة المتوسطة للجسيم عندما هـ تقترب من الصفر .
- ماذا نُسمي نهاية السرعة المتوسطة للجسيم عندما هـ تقترب من الصفر ؟

تدريب ٤

تتدحرج كرة على طريق مائل بحيث تكون المسافة التي قطعتها بالأقدام عن نقطة البداية بعد ن ثانية بالعلاقة ف = $\frac{٩}{٢}$ $ن^٢$ + ٣ن . متى تكون سرعة الكرة تساوي ٣٠ قدما لكل ثانية ؟

نتيجة

السرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن .

أي أن ع(ن) = $\underset{\Delta ن \to ٠}{نهـا} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{ف(ن + هـ) - ف(ن)}{هـ} = \frac{ءف}{ءن}$

كذلك :

التسارع ت يُعرف بأنه معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن .

$\therefore$ ت(ن) $= \underset{\Delta ن \to ٠}{نهـا} \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ءع}{ءن}$

مثال ٧

يتحرك جسيم وفق دالة المسافة $ف(ن) = ٧ن + ٣ن^{٢}$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني .

أ) أوجد السرعة اللحظية ثم أوجد سرعته عند ن = ٤ .

ب) أوجد التسارع اللحظي عندما ن = ٤

الحل

أ) $ع = \underset{\Delta ن \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ف(ن + هـ) - ف(ن)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left[٧(ن + هـ) + ٣(ن + هـ)^{٢} - (٧ن + ٣ن^{٢})\right]}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧ن + ٧هـ + ٣ن^{٢} + ٦ن\,هـ + ٣هـ^{٢} - ٧ن - ٣ن^{٢}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧\,هـ + ٦ن\,هـ + ٣هـ^{٢}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{هـ\left[٧ + ٦ن + ٣هـ\right]}{هـ}$

$\therefore ع(ن) = ٧ + ٦ن$

$ع(٤) = ٧ + ٦(٤) = ٣١$ م/ث

ب) $ت = \underset{\Delta ن \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ع(ن + هـ) - ع(ن)}{هـ}$

التسارع (عندما ن = ٤) $= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ع(٤ + هـ) - ع(٤)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧ + ٦(٤ + هـ) - ٣١}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧ + ٢٤ + ٦هـ - ٣١}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦هـ}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} ٦ = ٦$ م/ث^{٢}

تدريب ٥

يتحرك جسيم على خط مستقيم بسرعة ع حسب العلاقة $ع = ن^{٢} + ٣ن + ٥$سم/ث أوجد معدل التغير في ع . ثم أوجد قيمة هذا المعدل عند ن = ٧ ثوان .

العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

Relationship between continuity and differentiability

نشاط ١ : العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

الأدوات: مجموعة من البطاقات مكتوب عليها دوال: ثابتة، حدودية، نسبية، مطلقة، معرفة بقاعدتين.

الخطوات:

١ اختر إحدى البطاقات عشوائيا.

٢ حدد مجال الدالة الموجودة على البطاقة ثم ارسم رسما تخطيطيا للدالة .

٣ ابحث اتصال الدالة على مجالها .

٤ خذ أي نقطة تكون عندها الدالة متصلة وأخرى لا تكون عندها الدالة متصلة، وابحث عن قيمة المشتقة عندها إن وجدت .

٥ تناوب أنت وأفراد المجموعة حتى تكملوا البطاقات .

٦ سجل جميع الملاحظات التي توصلت إليها أنت وزملاؤك وأجب عن الأسئلة التالية:

١) هل للدالة مشتقة عند نقاط الانفصال؟

٢) هل للدالة مشتقة عند جميع نقاط الاتصال ؟

٣) ما شكل منحنى الدالة المتصلة التي لا تكون قابلة للاشتقاق ؟

٤) اكتب جميع النتائج التي توصلت إليها .

تدريب ٦

وضح إن كان لكل من الدوال التالية مشتقة عند جميع النقاط المشار إليها :

أ) د(س) = ٥ عند س = ٣

ب) د(س) = ٣س – ٥ عند س = –١

ج) د(س) = |س – ٢| عند س = ٢

د) د(س) = √(س – ١) عند س = –١

نتيجة

١. إذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق عند نقطة فإنها تكون متصلة عند تلك النقطة ، وإذا كانت د(س) قابلة للاشتقاق على فترة فإنها تكون متصلة على تلك الفترة .

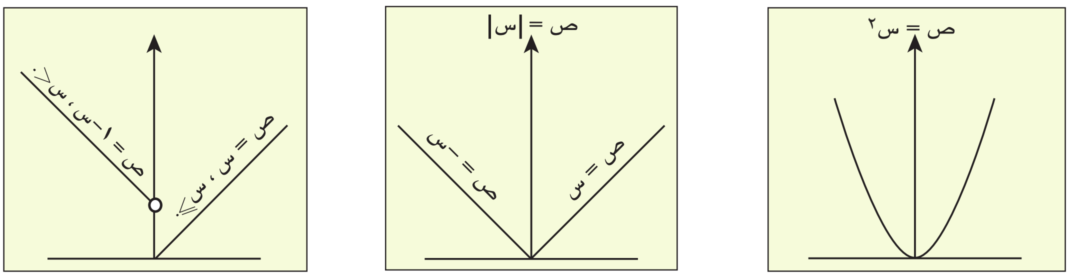
٢. اتصال الدالة عند النقطة ضروري حتى تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة لكنه غير كاف .

٣. الدالة الثابتة والدالة الحدودية متصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح ،أو أي فترة جزئية منها .

٤. الدالة النسبية متصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح − {أصفار المقام} ،أو أي فترة جزئية منها .

٥. الدالة الجذرية التربيعية هـ(س) تكون قابلة للاشتقاق على مجالها .

في الشكل التالي ثلاثة أمثلة توضح الاحتمالات الممكنة عند س = ٠ (أو أي نقطة أخرى) .



دالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند س = صفر

دالة متصلة وغيرقابلة للاشتقاق عند س = صفر

دالة غير متصلة وغيرقابلة للاشتقاق عند س = صفر

مثال ٨

بين سبب عدم قابلية الدالة د(س) للاشتقاق عند س=١ إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} \text{٥ − ٢س ،} & \text{س} < \text{١} \\ \text{٣س}^{\text{٢}} \text{ ،} & \text{س} \geq \text{١} \end{cases}$$

الحل

سوف نبحث أولا اتصال الدالة عند س=١ ... لماذا ؟

$\lim_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{٣س}^{\text{٢}} = \text{٣} \times \text{١} = \text{٣}$

$\lim_{\text{س} \to \text{١}^-} \text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^-} (\text{٥ − ٢س}) = \text{٥ − ٢} = \text{٣}$

$\because \lim_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to \text{١}^-} \text{د(س)} = \text{٣}$

$\therefore \lim_{\text{س} \to \text{١}} \text{د(س)} = \text{٣}$

$\because \lim_{\text{س} \to \text{١}} \text{د(س)} = \text{د(١)} = \text{٣}$

$\therefore$ د(س) متصلة عند س = ١

ثانيا : نبحث الاشتقاق عند س = ١

$$\text{دَ}(١)^{+} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣(١+\text{هـ})^{٢} - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣ + ٦\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢} - ٣}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٦\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} (٦ + ٣\text{هـ}) = ٦$$

$$\text{دَ}(١)^{-} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٢(١+\text{هـ}) - ٣}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٢ - ٢\text{هـ} - ٣}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{-٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٢$$

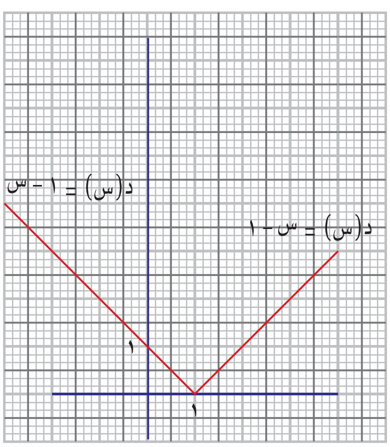
∴ $\text{دَ}(١)^{+} \neq \text{دَ}(١)^{-}$ (المشتقة من اليمين ≠ المشتقة من اليسار)

∴ د(س) غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

تدريب ٧

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) = |س − ١|

بين سبب عدم قابلية الدالة د(س) للاشتقاق عند س = ١



مسائل (١)

١ إذا كان د(س) = ٢ وتغيرت س من ٥ إلى ٥,٢ ، فأوجد :

أ) مقدار التغير في د(س) .

ب) متوسط معدل التغير .

ج) معدل التغير عندما س = ٣ .

٢ إذا كانت د(س) = م س + ٥ وكانت $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٧ عندما تتغير قيمة س من ٢ إلى ٣، فأوجد قيمة م .

٣ تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تظل محتفظة بشكلها . احسب متوسط معدل التغير في محيطها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,١ ، ثم احسب معدل التغير في محيطها عندما يكون طول ضلعها ٢٠ .

٤ استخدم التعريف لإيجاد مشتقات الدوال التالية - إن وجدت - وحدد مجال المشتقة ثم احسب قيمتها عند النقطة المعطاة:

أ) د(س) = ٢س + ٣ عند س = ٢

ب) د(س) = $س^{٢}$ + ٢س عند س = ٥

جـ) د(س) = $س^{٢}$ − ٥ عند س = ١

٥ إذا كان عدد سكان قرية يعطى بالعلاقة ح(ن) = ٣٠٠٠٠ + ٦ $ن^{٢}$ حيث ن الزمن بالسنوات، فأوجد معدل النمو عندما ن = ٢

٦ إذا كانت ص = $س^{٢}$ + س ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ وما قيمتها عند س = ٢ ؟

٧ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = $س^{٢}$ − ٣س عند أي نقطة، ثم أوجد ميل المماس عند س = ١

٨ تتحرك نقطة ما بحيث تكون دالة المسافة هي ف(ن) = $ن^{٢}$ + ٢ ، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني فأوجد كلا مما يلي :

أ) السرعة المتوسطة في الفترة [٢ ، ٣] .

ب) السرعة عند أي لحظة .

جـ) التسارع المتوسط في الفترة [٢ ، ٣] .

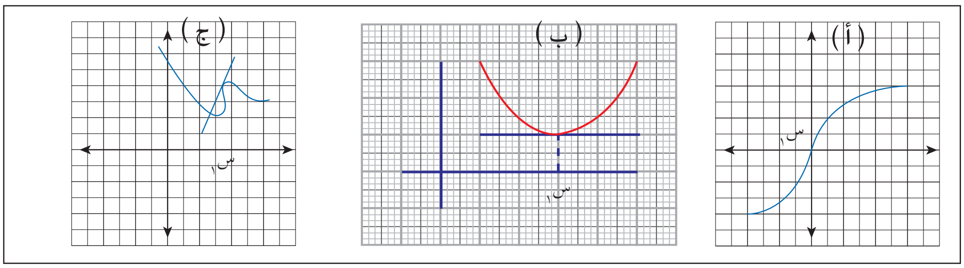
د) التسارع عند أي لحظة .

٩ أوجد تسارع الجسيم الذي يتحرك وفق دالة السرعة ع (ن) = ٣ن + ٥ عند أي لحظة، ثم أوجد تسارعه عند ن = ١ .

١٠ تتمدَّد كرة معدنية بالحرارة ، أوجد معدل تغير حجمها بالنسبة لطول نصف قطرها ، ثم احسب هذا المعدل عندما يكون طول نصف القطر ٧سم . علما بأن حجم الكرة يُعطى ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

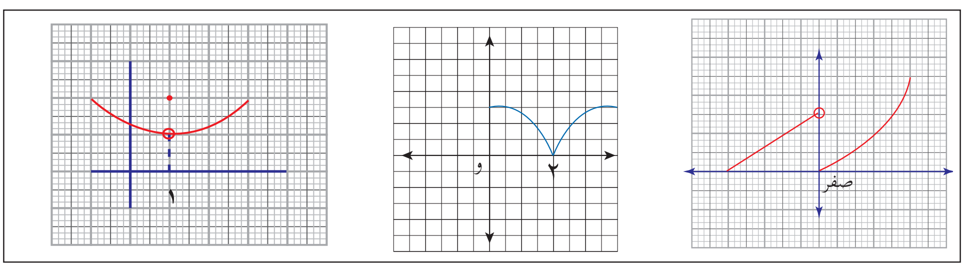
١١ قدّر قيم المشتقة عند النقطة س$_{١}$ في كل من الأشكال الآتية :

(المشتقة > صفر، المشتقة < صفر ، المشتقة = صفر، المشتقة غير موجودة) .



١٢ اذكر سبب عدم قابلية الدوال في الأشكال التالية للاشتقاق عند النقطة الموضحة فوق كل شكل .

أ) عند س = ٠   ب) س = ٢   ج) عند س = ١



١٣ بين سبب عدم قابلية الدالة د (س) للاشتقاق عند س = ٠، حيث:

د (س) = { ٣س + ٥   عندما   س ≥ صفر
            ٤س − ٣   عندما   س < صفر

١٤ إذا كان منحنى الدالة د(س) من الدرجة الأولى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) وكانت دَ(٣) = ٥

فأوجد نهـــا$_{هـ ← ٠}$ د(س) .

قواعد الاشتقاق

Rules of differentiation

نشاط ١ : مشتقة س^ن

الأدوات : بطاقات مكتوب عليها الدوال التالية :

د(س) = س   د(س) = س^٢   د(س) = س^٣   د(س) = س^٤

الخطوات :

١. تختار مجموعتك إحدى البطاقات .
٢. استخدام قانون تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة .
٣. تقوم كل مجموعة بعرض نتيجة عملها .
٤. إذا كانت د(س) = س^١٠٠ ، فما دَ(س) ؟
٥. إذا كانت د(س) = س^ن ، فما دَ(س) ؟

تدريب ١

إذا كانت هـ(س) = س^-٧ . فأوجد هـَ(س) .

> **نظرية :** إذا كانت د(س) = س^ن ، حيث ن ∈ ح فإن دَ(س) = ن س^ن-١

البرهان : دَ(س) = $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س+هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\left[\binom{ن}{٠} س^{ن} هـ^{٠} + \binom{ن}{١} س^{ن-١} هـ^{١} + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} هـ^{٢} + \ldots + \binom{ن}{ن} س^{٠} هـ^{ن}\right] - س^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^{ن} + ن س^{ن-١} هـ^{١} + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} هـ^{٢} + \ldots + هـ^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن س^{ن-١} هـ + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} هـ^{٢} + \ldots + هـ^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ\left(ن س^{ن-١} + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} هـ + \ldots + هـ^{ن-١}\right)}{هـ}$$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \left(\text{ن س}^{\text{ن}-١} + \binom{\text{ن}}{٢} \text{س}^{\text{ن}-٢} \text{هـ} + \dots \text{هـ}^{\text{ن}-١} \right)$

$= \text{ن س}^{\text{ن}-١}$

وهو المطلوب إثباته

مثال ١

أوجد دَ(س) لكل مما يلي :

١) $\text{د(س)} = \text{س}^{٩}$ ٢) $\text{د(س)} = \text{س}^{-٤}$

٣) $\text{د(س)} = \text{س}^{\frac{١}{٤}}$ ٤) $\text{د(س)} = \text{س}^{٠,٣}$

الحل

١) $\text{دَ(س)} = ٩\text{س}^{٩-١} = ٩\text{س}^{٨}$ ٢) $\text{دَ(س)} = -٤\text{س}^{-٤-١} = -٤\text{س}^{-٥}$

٣) $\text{دَ(س)} = \frac{١}{٤}\text{س}^{\frac{١}{٤}-١} = \frac{١}{٤}\text{س}^{-\frac{٣}{٤}}$ ٤) $\text{دَ(س)} = ٠,٣\,\text{س}^{٠,٣-١} = ٠,٣\,\text{س}^{-٠,٧}$

نظريات الاشتقاق

١) إذا كانت $\text{د(س)} = \text{أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ ، فإن $\text{دَ(س)} = ٠$ (مشتقة الدالة الثابتة = ٠) .

٢) إذا كانت $\text{د(س)} = \text{س}$ ، فإن $\text{دَ(س)} = ١$

٣) إذا كانت $\text{د(س)} = \text{جـ} \times \text{ق(س)}$ حيث $\text{جـ} \in \text{ح}$، قَ(س) موجودة، فإن $\text{دَ(س)} = \text{جـ} \times \text{قَ(س)}$.

٤) إذا كانت ق ،ك دالتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة ما وكانت $\text{د(س)} = \text{ق(س)} \pm \text{ك(س)}$، فإن $\text{دَ(س)} = \text{قَ(س)} \pm \text{كَ(س)}$.

يمكن تعميم النظرية رقم ٤ لأي عدد من الدوال ، ونعبر عن ذلك بقولنا : إن مشتقة المجموع الجبري لأي عدد من الدوال القابلة للاشتقاق هي المجموع الجبري لمشتقات تلك الدوال .

برهان نظرية (٢):

$\text{دَ(س)} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د(س + هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{س + هـ} - \text{س}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} ١ = ١$ وهو المطلوب إثباته .

تدريب ٢

استخدم قانون تعريف المشتقة في إثبات بقية النظريات السابقة .

مثال ٢

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ اذا كانت

$\text{ص} = ٣\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢} + ١$

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٣\,\text{س}^{٤}) - \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٢\,\text{س}^{٣}) + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(٤\,\text{س}^{٢}) + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(١)$$

$$= ١٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} + \text{صفر}$$

$$= ١٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س}$$

مثال ٣

أوجد دَ(س) لكل من الدوال التالية :

أ) $\text{د(س)} = \sqrt{٣}$ ب) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ج) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٥}}}$ د) $\text{د(س)} = \frac{١}{٦}\,\text{س}^{٣}$

الحل

أ) $\text{دَ(س)} = \text{صفر}$

ب) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \Longleftarrow \text{صَ} = \frac{٢}{٣} \times \text{س}^{\frac{٢}{٣}-١} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{-١}{٣}}$

جـ) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{-٣}{٥}} \Longleftarrow \text{صَ} = \frac{-٣}{٥} \times \text{س}^{\frac{-٣}{٥}-١} = \frac{-٣}{٥}\,\text{س}^{\frac{-٨}{٥}}$

د) $\text{دَ(س)} = \frac{١}{٦} \times ٣\text{س}^{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢}$

تدريب ٣

إذا كانت $\text{د(س)} = \text{س}^{٨} + ٥\,\text{س}$ فأوجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

مشتقة حاصل ضرب دالتين وقسمتهما

(Derivative of a product and a quotient)

إذا كانت د(س) = هـ(س) × ك(س)

وكانت هـ(س) = (٣ س^{٢} − ١) ، ك(س) = (س + ٦) ، فأوجد ما يلي :

١) د(س) ، دَ(س)   ٢) هـَ(س) ، كَ(س)

٣) هـَ(س) × ك(س) + كَ(س) × هـ(س)   ٤) هل هناك علاقة بين دَ(س) ونتيجة الخطوة ٣ ؟

٥) جرب مع دوال أخرى واستخلص نتيجة .

> **نظرية :** إذا كان كل من الدالتين هـ(س) ، ك(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س وكانت
>
> د(س) = هـ(س) × ك(س) فإن :
>
> دَ(س) = هـَ(س) × ك(س) + كَ(س) × هـ(س)
>
> = مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

مثال ٤

إذا كانت د(س) = (س^{٢} + ٣) (٢س^{٣} − ٥) فأوجد دَ(س)

الحل

دَ(س) = ٢س (٢س^{٣} −٥) + ٦ س^{٢} (س^{٢} + ٣) = ٤س^{٤} −١٠س + ٦ س^{٤} + ١٨س^{٢}

= ١٠س^{٤} + ١٨س^{٢} −١٠س

تدريب ٤

إذا كانت د(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ك(س)}}$ ، وكانت هـ(س) = س^{٣} −٢٧ ، ك(س) = س − ٣

أ) أوجد د(س) ، دَ(س)

ب) تحقق من أن دَ(س) = $\frac{\text{ك(س)} \times \text{هـَ(س)} - \text{هـ(س)} \times \text{كَ(س)}}{[\text{ك(س)}]^{2}}$ ، س ≠ ٣

جـ) استخدم دوال أخرى وتحقق من صحة هذه القاعدة .

نظرية : إذا كان كل من الدالتين هـ(س) ، ك(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س، وكانت

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$$ حيث ك(س) $\neq$ صفرًا فإن

$$\text{دَ}(\text{س}) = \frac{\text{ك}(\text{س}) \times \text{هـَ}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) \times \text{كَ}(\text{س})}{[\text{ك}(\text{س})]^{٢}}$$

$$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{[\text{المقام}]^{٢}}$$

مثال ٥

أوجد مشتقة الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٩}$

الحل

$$\text{دَ}(\text{س}) = \frac{١(\text{س} - ٩) - \text{س}(١)}{(\text{س} - ٩)^{٢}}$$

$$= \frac{-٩}{(\text{س} - ٩)^{٢}}$$

تدريب ٥

أوجد مشتقة الدالة في المثال السابق وذلك باستخدام التعريف .

تدريب ٦

اثبت أن المماس للمنحنى $\text{ص} = \frac{٩\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ عند النقطة (٢ ، −٦) يكون عموديا على المستقيم س + ٥ص + ١١ = ٠ ثم أوجد معادلة ذلك المماس .

قاعدة السلسلة Chain rule

نشاط ٢ :

(د ٥ هـ)$'$(س) هي مشتقة (د ٥ هـ)(س)

الأدوات بطاقات مكتوب عليها مجموعة من الدوال كالآتي :

د (س) = س^{٢} + ١
هـ (س) = ٥ س

د(س) = ٢س^{٢} + ٥
هـ (س) = ١ - ٢س

الخطوات:

١ اختر بطاقة من البطاقات الموجودة .

٢ أوجد (د ٥ هـ) (س) واشتق الناتج بالنسبة للمتغير س .

٣ أوجد دَ(س) ، دَ (هـ (س)) ، هـَ (س) .

٤ أوجد دَ (هـ (س)) × هـَ (س) ، وقارن الجواب بالنتيجة في ٢

٥ كرر العمل مع بطاقات أخرى .

٦ اكتب النتيجة التي توصلت اليها .

تدريب ٧

استخدم النتيجة التي توصلت إليها في إيجاد مشتقة (د ٥ هـ) (س) إذا كانت :

د(س) = ٣س^{٢}+١ ، هـ (س) = ٢س + ١

نظرية :
إذا كانت هـ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة س ، وكانت د دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة هـ (س) ،فإن الدالة المركبة (د ٥ هـ) (س) إن وجدت تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة س وتعطى مشتقتها بالقاعدة (د ٥ هـ)$'$(س) = د$'$(هـ (س)) × هـ$'$ (س) ، وتسمى هذه القاعدة بقاعدة السلسلة .

مثال ٦

إذا كانت ق(س) = س^{٢} + ٣ ، هـ(س) = س^{٣} + ٤ فأوجد (ق ٥ هـ)$'$ (س) باستخدام قاعدة السلسلة .

الحل

(ق ∘ هـ)´ (س) = قَ(هـ(س)) . هـَ(س)

أولا: نجد قَ(س) :

قَ(س) = ٢س ومنها قَ(هـ(س)) = ٢(س^{٣} + ٤) = ٢س^{٣} + ٨

ثانيًا: نجد هـَ(س) :

هـَ(س) = ٣س^{٢}

∴ (ق ∘ هـ)´ (س) = (٢س^{٣} + ٨) (٣س^{٢}) = ٦س^{٥} + ٢٤س^{٢}

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت ص = ق (ع) ، ع = هـ (س)

فإن ص = ق (هـ (س)) = (ق ∘ هـ) (س)

وبناء على النظرية السابقة فإن

$\frac{ءص}{ءس}$ = (ق ∘ هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) · هـَ(س)

= قَ(ع) · هـَ(س)

= $\boxed{\frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}}$

مثال ٧

إذا كان ص = ٣ع^{٢} + ٧ ، ع = ٤س + ٥ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ باستخدام قاعدة السلسلة

الحل

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ = ٦ع × ٤ = ٦ (٤س + ٥) × ٤ = ٩٦س + ١٢٠

تدريب ٨

في المثال السابق أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عن طريق إيجاد ص كدالة في س

نتيجة

إذا كانت د(س) = (هـ (س))^{ن} فإن دَ(س) = ن (هـ(س))$^{ن-١}$ × هـَ (س)

مثال ٨

إذا كانت ص = $(٣\text{س}^{٢} + ٤)^{١٠}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

أولا : باستخدام قاعدة السلسلة :

افرض أن : ع = ٣س^{٢} + ٤ ، ص = ع^{١٠} .

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= ١٠\text{ع}^{٩} \times ٦\text{س}$$

$$= ١٠(٣\text{س}^{٢} + ٤)^{٩} \times ٦\text{س}$$

$$= ٦٠\text{س}(٣\text{س}^{٢} + ٤)^{٩}$$

ثانيًا : باستخدام النتيجة :

$$\text{ص} = (٣\text{س}^{٢} + ٤)^{١٠}$$

$$\text{صَ} = ١٠(٣\text{س}^{٢} + ٤)^{٩} \times ٦\text{س}$$

$$= ٦٠\text{س}\ (٣\text{س}^{٢} + ٤)^{٩}$$

تدريب ٩

١) إذا كانت هـ(س) = س^{٣} ، ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ + ١ ، س $\geqslant$ ٠

فأوجد (هـ ٥ ق)$'$(س) باستحدام قاعدة السلسلة .

٢) إذا كانت ص = $\left(\frac{١}{\text{س}^{٢} + ٤}\right)^{٦}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

نشاط ٣ : (الإشتقاق الضمني)

الأدوات : مجموعة من البطاقات تحتوي على علاقات غير صريحة كالبطاقات الآتية :

س ص - ٥ص - ٣س = ٢

٢ص^{٢} ـ ٥ س ص^{٢} = ٣س^{٢}

الخطوات

١. اختر بطاقة من البطاقات الموجودة .
٢. حول العلاقة الموجودة على البطاقة إلى علاقة صريحة تكون فيها ص بدلالة س إن أمكن .
٣. اشتق العلاقة في الخطوة رقم ٢ بالنسبة للمتغير س عن طريق قواعد الاشتقاق التي درستها .
٤. ابحث عن طريقة تساعدك في إيجاد مشتقة هذه العلاقة دون اللجوء إلى عملية التحويل التي تتعذر في بعض الأحيان .

تعريف

تسمى العلاقة التي لاتعطى فيها ص بدلالة س صراحة علاقة ضمنية بين س ، ص

مثال ٩

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للعلاقة الضمنية ٤ص = ٣ س ص + ١

الحل

الطريقة الأولى : حوِّل العلاقة الضمنية إلى علاقة صريحة إن أمكن

٤ص − ٣س ص = ١ ⟸ ص (٤ − ٣س) = ١ ⟸ ص = $\frac{١}{(٤ - ٣\text{س})}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{(٤ - ٣\text{س})^{٢}}$

الطريقة الثانية : نشتق طرفي العلاقة الضمنية بالنسبة للمتغير س

تذكر أن مشتقة س بالنسبة لـ س هي $\frac{\text{ءس}}{\text{ءس}}$ = ١ ومشتقة ص بالنسبة لـ س هي $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٤ص) = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣س ص) + $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (١)

٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٣ ص + ٣س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)

(٤ − ٣س) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ص ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\text{ص}}{(٤ - ٣\text{س})}$ ويمكنك التعويض عن ص = $\frac{١}{٤ - ٣\text{س}}$ للحصول على نفس الجواب في الطريقة الأولى .

تدريب ١٠

أ) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للعلاقة $س^٢ - ٣س ص - ص^٢ = ٤$

ب) إذا كانت $ص = ٥س^٢ع$ أوجد $\frac{ء ص}{ء ع}$

مثال ١٠

أوجد النقطة (النقاط) التي يكون عندها المماس للمنحنى $ص^٢ = ٢س^٣$ عموديا على المستقيم $٤س - ٣ص + ١ = ٠$

الحل ميل المماس للمنحنى $= \frac{ء ص}{ء س}$

$$ص^٢ = ٢س^٣$$

$$\frac{ء}{ء س}(ص^٢) = \frac{ء}{ء س}(٢س^٣)$$

$$٢ص \quad \frac{ء ص}{ء س} = ٦س^٢$$

$$\therefore \quad \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣س^٢}{ص}$$

ميل المستقيم $٤س - ٣ص + ١ = ٠$ يساوي $\frac{٤}{٣}$

$$\therefore \quad \frac{٣س^٢}{ص} = \frac{-٣}{٤}$$ (المماس عمودي على المستقيم)

$$\therefore \quad ١٢س^٢ = -٣ص$$

$$ص = -٤س^٢$$

بالتعويض في معادلة المنحنى:

$$(-٤س^٢)^٢ = ٢س^٣$$

$$١٦س^٤ = ٢س^٣$$

$$٨س^٤ - س^٣ = ٠$$

$$س^٣(٨س - ١) = ٠ \quad \Longleftarrow \quad س = ٠ \text{ أو } س = \frac{١}{٨}$$

النقاط التي يكون عندها المماس عموديا على المستقيم هي $(٠ ، ٠)$ ، $(\frac{١}{٨} ، -\frac{١}{١٦})$، تهمل النقطة (٠،٠) لماذا؟

تدريب ١١

أوجد قيم أ ، ب للمنحنى $س^٢ص + أ ص^٢ = ب$ إذا علمت أن النقطة (١ ، ١) تقع على المنحنى ، ومعادلة المماس عند النقطة (١ ، ١) هي $٤س + ٣ص = ٧$

لتكن ص = $\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + ٥$ أوجد ما يلي :

١) مشتقة ص واكتبها صَ أو $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

٢) مشتقة صَ واكتبها صً أو $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$

٣) مشتقة صً واكتبها صٌ أو $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}}$

تعريف

> عند اشتقاق الدالة ص = د (س) مرتين بالتتابع نحصل على المشتقة الثانية ويرمز لها بالرموز صً ، دً (س) ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$
>
> وثلاث مرات بالتتابع تسمى المشتقة الثالثة ويرمز لها بالرموز صٌ ، دٌ (س) ، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}}$
>
> وعدد ن من المرات بالتتابع تسمى المشتقة النونية ويرمز لها بالرمز $\text{ص}^{(\text{ن})}$ ، $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{ن}}}$

مثال ١١

إذا كانت ص = $\text{س}^{٣}$ + ٥ س فأوجد $\frac{\text{ء}^{٥}\text{ص}}{\text{ء س}^{٥}}$.

الحل

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣\,\text{س}^{٢} + ٥ \Longleftarrow \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} = ٦\text{س} \Longleftarrow \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}} = ٦ \Longleftarrow \frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ء س}^{٤}} = ٠ \Longleftarrow \frac{\text{ء}^{٥}\text{ص}}{\text{ء س}^{٥}} = ٠$

مثال ١٢

إذا كانت دالة حركة جسيم تعطى بالعلاقة ف (ن) = ٥ $\text{ن}^{٣}$ + ٤ $\text{ن}^{٢}$ فأوجد ما يلي :

أ) السرعة اللحظية ع(ن)

ب) التسارع اللحظي ت(ن)

الحل

أ) ع(ن) = فَ(ن) = ١٥ $\text{ن}^{٢}$ + ٨ ن

ب) ت(ن) = عَ (ن) = ٣٠ ن + ٨ = فً (ن)

تدريب ١٢

أوجد أ) دً(٣) إذا كانت د(س) = $٣\text{س}^{٤} - ٢$

ب) $\left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}\right|_{\text{س} = ١}$ إذا كانت ص = $٦\text{س}^{٧} - ٤\text{س}^{٢}$

جـ) $\left.\frac{\text{ء}}{\text{ء س}^{٤}}(\text{س}^{-٣})\right|_{\text{س} = ١}$

تمارين &

مسائل (٢)

١ أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

أ) د(س) = $س^{٤}$

ب) د(س) = $س^{-٣}$

جـ) د(س) = $\sqrt{س}$

د) د(س) = (٣س + ١) (٢س − ١)

هـ) د (ن) = $\frac{ن^{٢} + ٢ن}{ن}$ ، ن ≠ الصفر

٢ إذا كانت د(س) = $س^{٣}$ + ٣س فأوجد دَ(٣)

٣ إذا كانت د(س) = $س^{٣}$ + ٢$س^{٢}$ + ٥ فأوجد قيم س التي تجعل دَ(س) = ٠

٤ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = ٣$س^{٢}$ + ٦ عند س = ١

٥ تتدحرج كرة على طريق مائل بحيث تكون المسافة ف المقطوعة بالأمتار بعد ن من الثواني على النحو ف = $ن^{٢}$ + ٣ن ، فمتى تكون سرعتها اللحظية تساوي ٣١ م/ث ؟ ثم أوجد التسارع عند تلك اللحظة .

٦ في أحد المصانع كانت دالة الربح هي ص = ٥ $س^{٤}$ − ١٠٠ ، حيث س عدد الوحدات المنتجة في وحدة الزمن . احسب $\frac{ءص}{ءس}$

٧ إذا كان ق(٢) = ٣ ، كَ(٢) = −١ ، هـ(س) = ٦ق(س) + ك(س) ، فأوجد هـَ(٢)

٨ إذا كانت ق ، ك دالتين قابلتين للاشتقاق وكانت :

ق(٢) = ٤ ، قَ(٢) = ١ ، ك(٢) = ٣ ، كَ(٢) = −٢

وكانت هـ (س) = ق (س) × ك(س) فأوجد هـَ(٢)

٩ عند إعطاء دواء معين لمريض ما وقياس رد الفعل الناتج بملاحظة التغيرات الفسيولوجية وجد أن شدة رد الفعل (ص) تتوقف على الكمية المعطاة س من الدواء المستخدم وتعطى بالعلاقة ص = $س^{٢}$ (٢ − س) . احسب :

أ) معدل التغير في شدة رد الفعل عند أي كمية .

ب) معدل التغير في شدة رد الفعل عند س = ١ ملليجرام.

١٠ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي :

أ) $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٥\text{ع}$ ، $\text{ع} = ٢\text{س} + ١$

ب) $\text{ص} = \left(\frac{٣\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢} - ١}\right)^{١٠}$

جـ) $\text{ص} = (\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣)^{٤} \, (٢\text{س} + ٣)^{٥}$

د) $٢\sqrt{\text{ص}} = \text{س}^{٢} - ٣$

١١ إذا كان $\text{ص} = ٢\text{ع} + ٥$ ، $\text{ع} = \text{أ}\,\text{س}^{٢} - ٤$ وكان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣٦\text{س}$، فأوجد قيمة أ.

١٢ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، فأوجد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(٢)$.

١٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي :

أ) $٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٥} = ٣\text{ص} + ٨$

ب) $\text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢} = ٩$

١٤ أوجد ميل المماس للمنحنى $\text{س}^{٢}\text{ص} = ٣$ عند النقطة (١ ، ٣) .

١٥ أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية :

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٢\text{س} - ٧$

ب) $\text{ص} = (٣\text{س}^{٢} + ٥)^{٤}$

١٦ إذا كانت $\text{س} = \text{ن}^{٣} + ٧$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٢} + ١$ فأوجد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عندما ن = ١

١٧ إذا كانت $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)(\text{س} - ٢)$ ، $\text{ع} = (\text{س} + ٧)(\text{س} - ٢)$

فأثبت أن $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} - \frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}} + ٦ = ٦\text{س}$

١٨ أوجد :

أ) $\text{ص}''(٢)$ عندما $\text{ص} = ٧\text{س}^{٤} + ٦\text{س}^{٣} + ٢$

ب) $\left.\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}\right|_{\text{س} = -١}$ عندما $\text{ص} = \frac{٦}{\text{س}^{٤}}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

(Related rates)

إن مسائل المعدلات الزمنية تعد من المسائل الحيوية في تطبيقات الاشتقاق ، ففي هذا النوع من المسائل يتم استخدام معادلة تربط متغيرين أو أكثر لإيجاد معدل تغير أحدهما معتمدًا على معدل تغير الآخر .

فعندما تتعرض صفيحة معدنية دائرية مثلا لمصدر حراري فإنها تتمدد ، أي يزداد طول نصف قطرها ، وكذلك تزداد مساحة سطحها تبعا لذلك ،وهذه الزيادة سواء أكانت في طول نصف القطر أم في مساحة السطح تتغير بتغير زمن تعرض الصفيحة لهذا المصدر الحراري ، فإذا رمزنا لطول نصف قطر الصفيحة بالرمز نق ولمساحة سطحها بالرمز م فإن :

$\frac{\text{ى نق}}{\text{ى ن}}$ تمثل معدل تغير نصف قطر الصفيحة بالنسبة للزمن .

$\frac{\text{ى م}}{\text{ى ن}}$ تمثل معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة للزمن .

ومن العلاقة بين نق ، م نستطيع أن نوجد علاقة بين $\frac{\text{ى نق}}{\text{ى ن}}$ ، $\frac{\text{ى م}}{\text{ى ن}}$ بحيث إذا علم أحدهما أمكن معرفة الآخر .

مثال ١

صفيحة معدنية دائرية تتمدد بالحرارة بمعدل منتظم ، فإذا كان معدل زيادة طول نصف قطرها ٠,٠٢ سم / ثانية فاحسب معدل زيادة مساحة سطحها عندما يكون طول نصف قطرها ١٤سم .

الحل

نفرض أن طول نصف القطر = نق وأن مساحة السطح = م

$\frac{\text{ى نق}}{\text{ى ن}}$ = ٠,٠٢ سم / ثانية ، المطلوب إيجاد $\frac{\text{ى م}}{\text{ى ن}}$ عندما نق = ١٤ سم

العلاقة بين م ، نق هي م = π نق^{٢}

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن ، $\frac{\text{ى م}}{\text{ى ن}}$ = ٢ π نق . $\frac{\text{ى نق}}{\text{ى ن}}$

∴ $\frac{\text{ى م}}{\text{ى ن}}$ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ٠,٠٢ = ١,٧٦ سم^{٢}/ث

تدريب ١

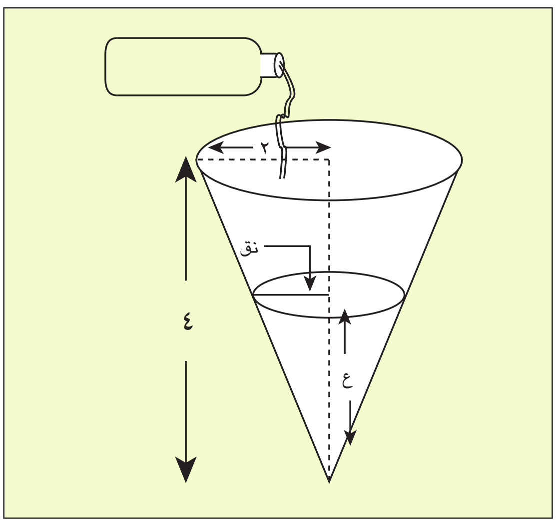
سلم طوله ١٣ مترًا يرتكز بطرفه أ على حائط رأسي، وطرفه ب على أرض أفقية، فإذا تحرك الطرف ب مبتعدا عن الحائط بسرعة مقدارها ١٢م/ث، فأوجد سرعة الطرف أ عندما يكون الطرف ب على بعد ٥م من الحائط .

مثال ٢

يُصَبُّ دواء سائل في قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٢سم وارتفاعه ٤سم ، كما في الشكل أدناه . فإذا كان معدل انسياب السائل في القمع هو ٣سم مكعب في الثانية ، فما معدل ارتفاع مستوى السائل في القمع عندما يكون:

(أ) ارتفاع السائل سنتيمترًا واحدًا ؟

(ب) ارتفاع السائل سنتيمترين ؟



الحل

المتغيرات المطلوبة لحل المسألة هي :

ن = الزمن بالثواني .

ع = ارتفاع عمود السائل في القمع بالسنتيمترات عند أي لحظة ن .

ح = حجم السائل في القمع بالسنتيمترات المكعبة عند أي لحظة ن .

العلاقة الرئيسة التي تربط متغيرات المسألة هي :

$$ح = \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^٢ ع \qquad (١)$$

والمطلوب إيجاد $\frac{ءع}{ءن}$ عندما ع = ١ ، ع = ٢ :

الآن نجد العلاقة بين ع ، نق لنجعل المعادلة (١) في متغيرين فقط ، وذلك من خلال تشابه المثلثات .

$$\therefore \frac{\text{نق}}{٢} = \frac{ع}{٤} \Longleftarrow \text{نق} = \frac{١}{٢} ع \qquad (٢)$$

وبالتعويض من (٢) في (١) ينتج أن :

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\left(\frac{١}{٢}\text{ع}\right)^{٢}.\text{ع} = \frac{\pi}{١٢}\text{ع}^{٣} \qquad (٣)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ن نجد أن :

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi}{١٢}(٣)\text{ع}^{٢}.\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\pi}{٤}\text{ع}^{٢}.\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \Leftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٤}{\pi\text{ع}^{٢}}\,\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} \qquad (٤)$$

وبما أن معدل انسياب السائل في القمع هو ٣ سنتيمترات مكعبة في الثانية فإن :

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٣ \qquad (٥)$$

وبالتعويض من (٥) في المعادلة (٤) ينتج أن :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٤}{\pi\text{ع}^{٢}} \times ٣ = \frac{١٢}{\pi\text{ع}^{٢}} \qquad (٦)$$

(أ) عندما ع = ١ فإن :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{١٢}{\pi} \approx ٣,٨٢ \text{سم/ثانية} .$$

(ب) عندما ع = ٢ فإن :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{١٢}{\pi \times ٤} \approx ٠,٩٥ \text{ سم/ثانية} .$$

لاحظ أن الجواب في (أ) أكبر من الجواب في (ب) ... لماذا ؟

التزايد والتناقص Increasing and decreasing

انقل الجدول التالي إلى كراستك ، ثم أكمل الفراغات الموجودة فيه عن طريق العلاقة د(س) = س −١ والعلاقة هـ(س) = ١ − س، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها .

س	٤	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣	−٤
د(س)									
هـ(س)									

١) ماذا يحدث لقيم د(س) عندما تتزايد قيم س أو تتناقص ؟

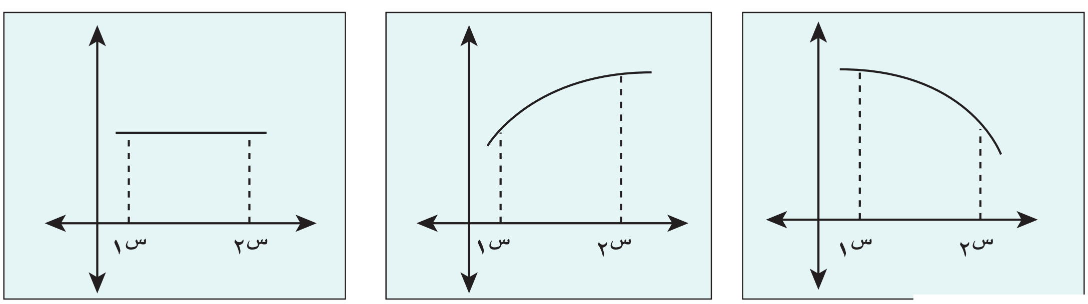
٢) ماذا يحدث لقيم هـ (س) عندما تتزايد قيم س أو تتناقص ؟

٣) ارسم منحنى كل من الدالتين د(س) ، هـ (س) .

٤) اكتب النتيجة التي توصلت إليها .

تدريب ٢

بناء على النتيجة التي توصلت إليها ابحث تزايد وتناقص الدوال الممثلة في كل شكل من أشكال الدوال الآتية :



تعريف

إذا كانت د(س) معرفة على فترة ، فإن الدالة د(س) تكون :

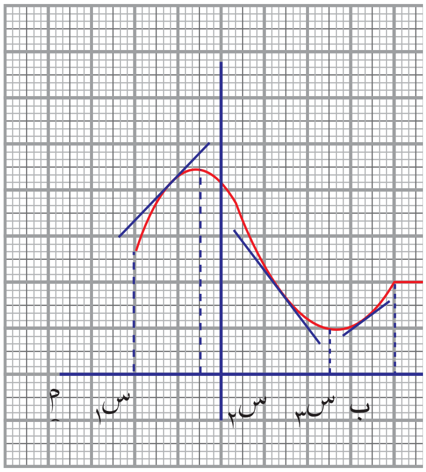
١) متزايدة إذا كان د(س$_1$) < د(س$_2$) لكل س$_1$ < س$_2$ في هذه الفترة .

٢) متناقصة إذا كان د(س$_1$) > د(س$_2$) لكل س$_1$ < س$_2$ في هذه الفترة .

٣) ثابتة إذا كان د (س$_1$) = د (س$_2$) لكل س$_1$ ، س$_2$ في هذه الفترة .

استخدام المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة

انقل الجدول التالي إلى كراستك ، ثم أكمله بالاستعانة بالشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه .



الفترة	وضع المماس عند أي نقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	إشارة دَ(س)	سلوك بيان الدالة
]أ ، س$_1$[	يصنع زاوية حادة	موجبة	متزايدة
]س$_1$ ، س$_2$[			
]س$_2$ ، س$_3$[			
]س$_3$ ، ب[			

١) ما العلاقة بين إشارة مشتقة الدالة وتزايد الدالة أو تناقصها ؟

٢) سجل ملاحظاتك واكتب النتائج التي توصلت إليها .

نظرية : اختبار المشتقة الأولى first derivative test

لتكن د(س) دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[، فإن الدالة د(س) تكون :

١) متزايدة على]أ ، ب[إذا كانت دَ(س) > ٠ $\forall$ س $\in$]أ ، ب[

٢) متناقصة على]أ ، ب[إذا كانت دَ(س) < ٠ $\forall$ س $\in$]أ ، ب[

٣) ثابتة على]أ ، ب[إذا كانت دَ(س) = صفر $\forall$ س $\in$]أ ، ب[

مثال ٣

عين فترات التزايد و فترات التناقص للدالة د(س) = س٣ − س٢ + ٥

الحل

د(س) = س٣ − س٢ + ٥ ⟸ د َ(س) = ٣س٢ − ٢س

نبحث إشارة دَ (س)

نضع دَ(س) = ٠ ⟸ ٣ س٢ − ٢س = ٠ ⟸ س (٣ س − ٢) = ٠ ⟸ س = ٠ أو س = $\frac{٢}{٣}$

إشارة دَ(س)	+	−	+
اطراد الدالة	د متزايدة ↗	د متناقصة ↘	د متزايدة ↗

∴ دَ(س) > ٠ لكل س ∈] $\frac{٢}{٣}$ ، ∞ [∪] −∞ ، ٠ [

∴ د(س) متزايدة في الفترة] $\frac{٢}{٣}$ ، ∞ [∪] −∞ ، ٠ [أو ح − [٠ ، $\frac{٢}{٣}$]

∴ دَ(س) < صفر لكل س ∈] ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ [

∴ د(س) متناقصة في الفترة [٠ ، $\frac{٢}{٣}$]

تدريب ٣

عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) = ٦س − س٢

مثال ٤

ادرس اطراد الدالة :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما } \text{س} \leqslant ٠ \\ ١ & \text{عندما } ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ٣ & \text{عندما } \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$$

الحل

$$\text{دَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{عندما } \text{س} < ٠ \\ ٠ & \text{عندما } ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢ & \text{عندما } \text{س} > ٢ \end{cases}$$

∵ دَ(س) = ٢س < ٠ ∀ س ∈]−∞ ، ٠[

فإن الدالة متناقصة في الفترة]−∞ ، ٠[،

∵ دَ(س) = ٠ س ∈]٠ ، ٢[،

فإن الدالة ثابتة في الفترة [٠ ، ٢] .

دَ(س) = ٢ > ٠ في الفترة]٢ ، ∞[،

فإن الدالة متزايدة في الفترة [٢ ، ∞[.

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي :

	∞	٢	٠	−∞
إشارة دَ(س)	+		دَ(س) = ٠	−
اطراد الدالة	متزايدة		ثابتة	متناقصة

مسائل (٣)

١) صفيحة معدنية على شكل مثلث متطابق الضلعين طول قاعدته ٨ سم وارتفاعه يساوي ضعف طول قاعدته ، فإذا كان طول قاعدته يزداد بالتسخين بمعدل ٠,٠٤ سم / ثانية فأوجد :

أ) معدل الزيادة في مساحة سطح الصفيحة .

ب) معدل التغير في طول كل من الضلعين المتطابقين .

٢) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها ، أوجد معدل تغير حجمها عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم وارتفاعها يتغير بمعدل ٠,٠١ سم / ثانية .

٣) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل وطول قطر قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ٦ سم يتسرب من رأسه الماء بمعدل ٨ سم^{٣} / دقيقة . ما سرعة هبوط سطح الماء في الإناء عندما يكون ارتفاع الماء فيه ٣ سم ؟

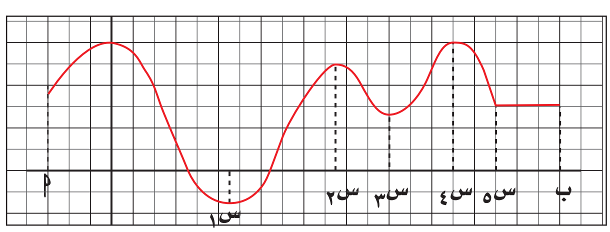
٤) تبحر السفينة أ متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٢ كم / ساعة ، وفي نفس اللحظة تبحر السفينة ب على بعد ٦٤ كم جنوب أ متجهة نحو الشرق بسرعة ٢٤ كم / ساعة . أوجد معدل تغير المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من بدء إبحارهما.

٥) يجري متسابق طوله متران بسرعة ١٠ متر / ثانية في طريق أفقي مبتعدا عن مصباح يرتفع عن الأرض بمقدار ٣,٢ متر. أوجد معدل تغير طول ظل الرجل على الأرض.

٦) تتحرك نقطة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} - ٥س + ٣ص = ٦$ ، وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن ن عند النقطة (١ ، ٢) يساوي ٣ . أوجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن ن .

٧) بالون كروي يزداد حجمه بمعدل ٢٠ سم^{٣} / ثانية . أوجد معدل التغير في طول نصف قطره ومساحته عندما يكون طول نصف قطره يساوي ٣ سم .

٨) ادرس الدالة د(س) في الشكل التالي، ثم عين جميع الفترات التي تكون فيها الدالة (متزايدة، متناقصة ، ثابتة).



٩) عين فترات التزايد وفترات التناقص للدوال التالية :

أ) $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س$

ب) $د(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$ ، $س \neq -١$

جـ) $د(س) = \frac{س}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

د) $د(س) = \begin{cases} -٣س + ٥ & ، س < -١ \\ ٥ & ، -١ \leq س \leq ١ \\ -س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

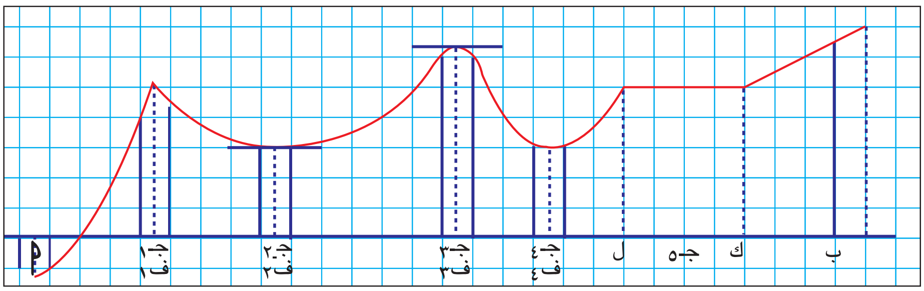
هـ) $د(س) = س \left| س - ٢ \right|$

القيم القصوى

تُشكل منحنيات الكثير من الدوال ارتفاعات وانخفاضات . تسمى قمة كل مرتفع بالقيمة العظمى المحلية ، كما يسمى قعر كل منخفض بالقيمة الصغرى المحلية . لاحظ أن قمة أعلى جبل في منطقتك ليس شرطًا أن تكون أعلى قمة في الأرض، كذلك أن أدنى نقطة في منطقتك قد لا تكون أدنى نقطة عن مستوى الأرض .

أولاً : القيم القصوى المحلية Local extreme

أكمل الجدول التالي بالاستعانة بالشكل ثم أجب عن الأسئلة التالية :



الفترات المفتوحة	قيمة س	قيمة الدالة عند س		قيمة المشتقة	طبيعة المنحنى قبل النقطة	طبيعة المنحنى بعد النقطة
		أكبر ما يمكن	أقل ما يمكن			
ف١	جـ١	✓	–	غير موجودة	متزايد	متناقص
ف٢	جـ٢					
ف٣	جـ٣					
ف٤	جـ٤					
]ل ، ك[	جـ٥					

١. ادرس العلاقة بين قيمة الدالة عند قيم س المختلفة (جـ١ ، جـ٢ ، جـ٣ ، جـ٤ ، جـ٥)، وقيمة المشتقة وطبيعة المنحنى قبل وبعد القيم المذكورة .

٢. متى تكون قيمة الدالة أكبر ما يمكن عند س = س. ؟ ماذا يمكن أن تسمي هذه القيمة ؟

٣. متى تكون قيمة الدالة أقل ما يمكن عند س = س. ؟ ماذا يمكن أن تسمي هذه القيمة ؟

تدريب ١

مثِّل الدالة د(س) = س٢ بيانيًا . وحدد إن كان لمنحنى د(س) قيم عظمى أو قيم صُغرى .

تعريف

١) يقال أن للدالة د قيمة عُظمى محلية (Local maximum) عند $س_{٠}$. إذا كانت د($س_{٠}$) $\geqslant$ د(س) لكل س في فترة مفتوحة تحوي $س_{٠}$.

٢) يقال أن للدالة د قيمة صغرى محلية (Local minimum) عند $س_{٠}$. إذا كانت د($س_{٠}$) $\leqslant$ د(س) لكل س في فترة مفتوحة تحوي $س_{٠}$.

٣) لتكن جـ في مجال الدالة د فإننا نسمي النقطة (جـ ، د(جـ)) نقطة حرجة إذا كانت دَ(جـ) = ٠ أو دَ(جـ) غير موجودة .

مثال ١

أوجد النقاط الحرجة في مجال الدالة :

د(س) = $٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥$

الحل

د(س) حدودية فهي متصلة وقابلة للاشتقاق على ح

دَ(س) = $٦س^{٢} - ٦س$

دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ $٦س^{٢} - ٦س = ٠$

٦س(س − ١) = ٠ $\Leftarrow$ س = ١ أو س = ٠

لإيجاد النقاط الحرجة نعوّض في الدالة د(س)

$\therefore$ النقاط الحرجة هي (٠ ، ٥) (١ ، ٤)

تدريب ٢

أوجد معادلة منحنى الحدودية من الدرجة الثانية الذي يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، −١٢) وله نقطة حرجة عند س = ٢

مثال ٢

عين النقط الحرجة للدالة د(س) = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س

ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة وقارنها مع القيم الحرجة واكتب استنتاجك .

الحل

د(س) متصلة وقابلة للاشتقاق لكل قيم س في ح ، دَ(س) = ٣س^{٢} − ١٨ س + ٢٤

نضع دَ(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ = ٠ ⟸ س^{٢} − ٦ س + ٨ = ٠

(س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⟸ س = ٢ أو س = ٤

توجد نقطتان حرجتان عند س = ٢ ، س = ٤

د(٢) = (٢)^{٣} − ٩ × (٢)^{٢} + ٢٤ × ٢ = ٢٠ ، د(٤) = (٤)^{٣} − ٩ × (٤)^{٢} + ٢٤ × ٤ = ١٦

النقطتان هما (٢ ، ٢٠) ، (٤ ، ١٦)

نبحث إشارة دَ(س) حول كل من س = ٢ ، س = ٤

−∞ ٢ ٤ ∞

إشارة دَ(س)	+	−	+
اطراد الدالة	د متزايدة	د متناقصة	د متزايدة

من الجدول عند س = ٢ توجد قيمة عظمى محلية هي د(٢) = ٢٠

وعند س = ٤ توجد قيمة صغرى محلية هي د(٤) = ١٦

نظرية :

إذا كان للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة جـ ،

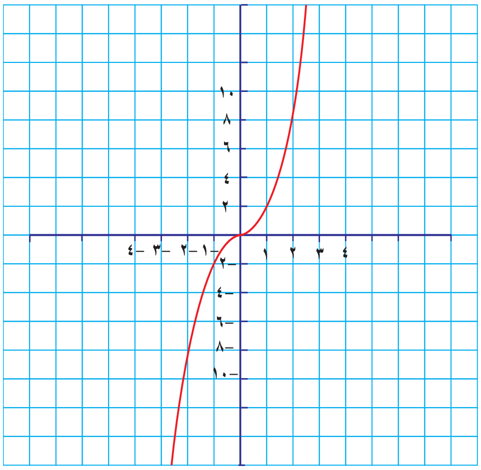
فإنه إما دَ(جـ) = ٠ أو إمَّا دَ(جـ) غير موجودة.

تدريب ٣

إذا كانت د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س + ٢ ، س ∈ [٠ ، ٥]

أوجد قيم س التي تُوجد عندها نقاط حرجة للدالة د(س) ، ثم حدد نوع هذه النقاط (عظمى محلية، صغرى محلية).

نشاط ١ :



ادرس منحنى الدالة د(س) = س^{٣} ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

١) أوجد مجال د(س) .

٢) حدد طبيعة منحنى د(س) من حيث التزايد والتناقص .

٣) هل هناك نقاط حرجة ؟ وهل تستطيع تحديد نوعها إن وجدت ؟

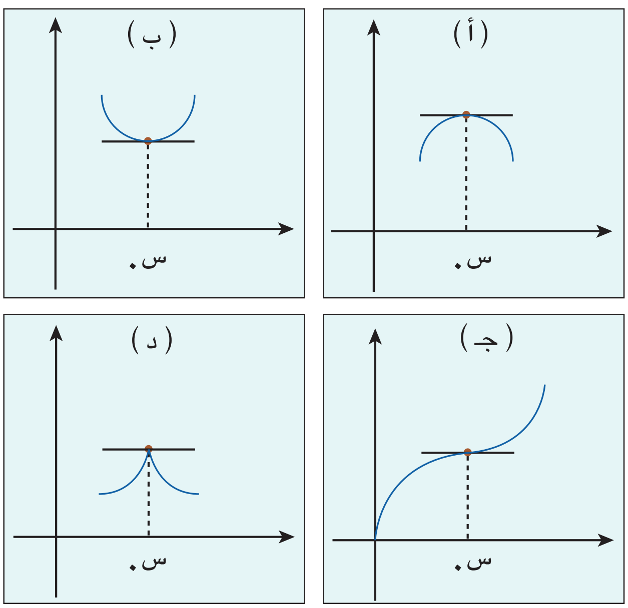
٤) هل كل نقطة حرجة تمثل قيمة عظمى أو صغرى محلية ؟

٥) اكتب النتيجة التي توصلت إليها .

٦) ارسم دوال تحقق النتيجة التي توصلت إليها . ناقش ذلك مع زملائك .

تدريب ٤

أكمل الجدول التالي ، وذلك بالاستعانة بالأشكال المقابلة



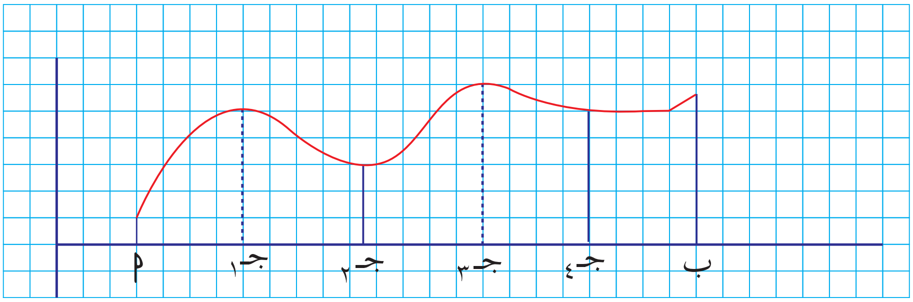
الشكل	(س. ، د(س.)) نقطة حرجة	د(س.) قيمة قصوى
أ	✓	✓
ب		
جـ		
د		

نتيجة

ليس من الضرورة أن توجد عند النقاط الحرجة قيم عظمى محلية أو قيم صغرى محلية.

ثانيا: القيم القصوى المطلقة Absolute extreme

ادرس الشكل التالي ثم أجب عن الأسئلة التالية :



عين قيمة س التي تكون عندها قيمة د(س) أكبر قيمة ، وقيمة س التي تكون عندها قيمة د(س) أصغر قيمة لهذه الدالة في [ٵ ، ب] .

تعريف

لتكن د(س) دالة معرفة على الفترة [ٵ ، ب] ، ولتكن جـ ∈ [ٵ ، ب] :

١- تكون د(جـ) قيمة عظمى مطلقة للدالة د(س) إذاكانت د(جـ) ⩾ د(س) لكل س ∈ [ٵ ، ب].

٢- تكون د(جـ) قيمة صغرى مطلقة للدالة د(س) إذا كانت د(جـ) ⩽ د(س) لكل س ∈ [ٵ ، ب]

مثال ٣

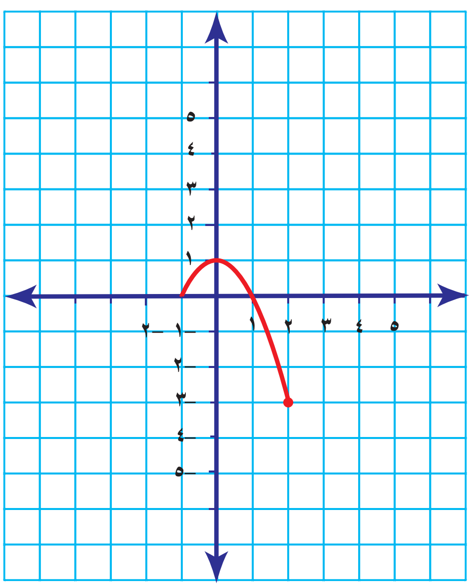
أوجد القيم القصوى للدالة، وحدد نوعها

د(س) = ١ − س٢ حيث س ∈ [−١ ، ٢]

الحل

نرسم بيان الدالة بأخذ قيم للمتغير س في الفترة [−١ ، ٢]

س	−١	٠	١	٢
د(س)	٠	١	٠	−٣



من الشكل نلاحظ أن :

١) د(٢) ⩽ د(س) لكل س ∈ [−١ ، ٢]

∴ عند س = ٢ توجد قيمة صغرى مطلقة هي د(٢) = −٣

٢) د (٠) ⩾ د(س) لكل س ∈ [−١ ، ٢]

∴ عند س = ٠ توجد قيمة عظمى مطلقة هي د(٠) = ١

. هل د(٠) = ١ تمثل قيمة عظمى محلية ؟ لماذا ؟

تدريب ٥

أوجد القيم العظمى والقيم الصُغرى المحلية والمطلقة للدالة :

$د(س) = س - ٣س^{\frac{١}{٣}}$ في الفترة [−١ ، ٨] ، وارسم رسما توضيحيا لبيان الدالة .

اختبار المشتقة الثانية (Second dirivative test) في تحديد القيم القصوى المحلية

نشاط ٢ :

١) أوجد المشتقة الأولى للدالة $د(س) = \frac{س^٢}{٣س - ٢}$ ، وحدد النقاط الحرجة .

٢) أوجد دً(٠) ، دً($\frac{٤}{٣}$) وحدد إشارة المشتقة الثانية عند كلّ منهما .

٣) ما نوع القيمة الحرجة عند س = ٠ ؟ وما إشارة المشتقة الثانية عندها ؟

٤) ما نوع القيمة الحرجة عند س = $\frac{٤}{٣}$ ؟ وما إشارة المشتقة الثانية عندها ؟

٥) هل تستطيع أن تستنتج علاقة بين قيم س التي تجعل دَ(س) = صفر، وبين إشارة المشتقة الثانية عندها في تحديد أنواع القيم القصوى المحلية ؟

٦) هل تستطيع تحديد نوع القيمة الحرجة عند س = $\frac{٢}{٣}$ (صفر المقام)؟

٧) اختبر تزايد وتناقص الدالة حول س = $\frac{٢}{٣}$. ماذا تلاحظ ؟

نظرية :

إذا كانت جـ نقطة حرجة للدالة د (س) حيث دَ(جـ) = ٠ فإنه

أ) إذا كانت دً(جـ) > ٠ فإن للدالة د(س) قيمة صغرى محلية عند س = جـ

ب) إذا كانت دً(جـ) < ٠ فإن للدالة د(س) قيمة عظمى محلية عند س = جـ

مثال ٤

استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة

د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ١

الحل

دَ(س) = ٣س^{٢} − ٦ س

نضع دَ(س) = ٠ $\Longleftarrow$ ٣س^{٢} − ٦س = ٠

س^{٢} − ٢س = ٠ $\Longleftarrow$ س(س − ٢) = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٠ ، س = ٢

توجد نقطتان حرجتان عند س = ٠ ، س = ٢

دً(س) = ٦س − ٦

عند س = ٠ $\Longleftarrow$ دً(٠) = −٦ $<$ صفر

$\therefore$ عند س = صفر توجد قيمة عظمى محلية هي د(٠) = ١

عند س = ٢ $\Longleftarrow$ دً(٢) = ١٢ − ٦ = ٦ $>$ صفر

$\therefore$ عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية هي د(٢) = −٣

تدريب ٦

عين القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة د(س) = س^{٦} + ١

تطبيقات عملية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية Application of local extrema

في العديد من مشكلات الحياة العملية التي تصاغ في قالب رياضي يكون الهدف هو الحصول على أكبر أو أصغر قيمة لمتغير ما، مثل الحصول على أكبر ربح أو أكبر مساحة أو أقل حجم أو أقل تكلفة أو ...... إلخ ولاشك أن حساب التفاضل يعطينا أسلوبا ناجحا لحل مثل هذه المشكلات بعد تحويل صياغتها العملية واللفظية إلى صياغة رمزية رياضية .

مثال ٥

في أحد المصانع يراد صناعة خزان قاعدته مربعة وبدون غطاء بحيث يتسع لأربعة أمتار مكعبة من الماء ، في حين تتكلف المادة التي يصنع منها الخزان ٥ ريالات للمتر المربع الواحد . أوجد أبعاد الخزان التي تجعل تكلفته أقل ما يمكن .

الحل

اتبع الخطوات الآتية :

١) حدد المتغيرات المعطاة ، وضع رموزًا لها

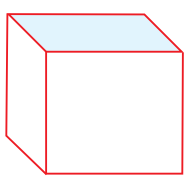
طول ضلع القاعدة = ل ، الارتفاع = ع ، الحجم = ح ، التكلفة = ك ، مساحة الأوجه = هـ

٢) استخدم المعلومات المعطاة في كتابة العلاقات ، وتوصل إلى علاقة تتضمن المتغيرين المطلوبين فقط

حجم الخزان $= ل^٢ ع = ٤ \Longleftarrow ع = \frac{٤}{ل^٢}$

مساحة أوجه الخزان الخمسة $هـ = ل^٢ + ٤ ل ع = ل^٢ + \frac{١٦}{ل}$

التكلفة $ك = ٥ (ل^٢ + \frac{١٦}{ل})$



٣) اشتق العلاقة بالنسبة للمتغير المستقل ل وساوِ النتيجة بالصفر.

$\frac{ءك}{ءل} = ٥ \times ٢ ل - \frac{٨٠}{ل^٢} = ٠ \Longleftarrow ل^٣ = ٨ \Longleftarrow ل = ٢ ، ع = ١$

٤) تحقق باستخدام المشتقة الثانية

$\frac{ء^٢ك}{ءل^٢} = ١٠ + \frac{١٦٠}{ل^٣}$

عند $ل = ٢$ تكون $\frac{ء^٢ك}{ءل^٢} > ٠$ فهي قيمة صغرى.

$\therefore$ التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون أبعاد الخزان هي $ل = ٢$ م ، $ع = ١$م

مثال ٦

مصنع للأجهزة الإلكترونية يكسب ٣٠ ريالا في كل جهاز ،عندما يكون إنتاجه الشهري ٥٠ جهازًا، فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن المصنع يعطي خصمًا تصاعديًّا على الأجهزة الزائدة مقداره ٥٠٠ بيسة لكل جهاز إضافي . (إذا كان عدد الأجهزة الإضافية ٣ أجهزة يكون الخصم ١,٥ ريال لكل جهاز) . أوجد عدد الأجهزة التي ينتجها المصنع في الشهر لتحقيق أكبر ربح ممكن .

الحل

نفرض أن مقدار الربح (المكسب) = م(س) ، عدد الأجهزة الزائدة س

م (س) = ١٥٠٠ + س (٣٠ − ٠,٥ س)

= ١٥٠٠ + ٣٠س − ٠,٥س^{٢}

مَ(س) = ٣٠ − س

نضع مَ(س) = صفر ⟸ ٣٠ − س = ٠ ⟸ س = ٣٠

مً(س) = −١

∴ مً(٣٠) = −١ < صفر

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٣٠

∴ عدد الأجهزة الزائدة = ٣٠ جهازًا

لكي يحقق المصنع أكبر ربح لابد أن يكون عدد الأجهزة المباعة = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ جهازا .

تدريب ٧

حوض لتربية الأسماك على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته هما س ، ص وارتفاعه ٢م وحجمه ٢٠٠م^{٣} ، نريد تبليطه من الداخل، فإذا كانت تكاليف المتر المربع من الجوانب ٣ ريالات ومن القاعدة ٥ ريالات ، فأوجد أبعاد الحوض لتكون تكاليف التبليط أقل ما يمكن .

مسائل (٤)

١ إذا كانت د(س) معرفة على ح وكانت دَ(س) = $\frac{س - ٥}{س^{٢} + ١}$

فما قيمة س التي تُوجد عندها قيمة حرجة ؟

٢ إذا كانت د(س) = ٣س^{٣} + ⍴ س^{٢}

فأوجد قيمة ⍴ إذا كان للدالة د(س) قيم حرجة عند س = -١

٣ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د(س)

إذا كانت د(س) = ٤س - س^{٢} ، س ∈ [٠ ، ٣]

٤ أوجد النقط الحرجة لكل من الدوال الآتية :

⍴) د(س) = س^{٢} - س - ١٢

ب) د(س) = س^{٣} (س - ١)^{٢}

٥ عن طريق اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥ س +١٠

٦ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} + ⍴ س + ب لها نقطة حرجة عند س = ٢ ، د(٢) = ١

فأوجد قيمة كل من ⍴ ، ب ثم بين نوع النقطة (٢ ، ١)

٧ عين النقط الحرجة للدالة د(س) = $\frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} + ١}$

واختبر كلا منهما من حيث وجود قيم عظمى أو صغرى محلية عندها .

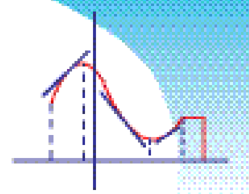
٨ مكتبة تبيع ٢٠٠ كتاب من نوع واحد ، وتكسب في الكتاب الواحد ٣ ريالات ، فإذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا القدر فإن المكتبة تعطي خصمًا تصاعديا يقل بمقدار ١٠ بيسات لكل كتاب زيادة. أوجد عدد الكتب التي تبيعها المكتبة لتحقيق أكبر ربح ممكن .

٩ ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كان محيط الملعب ٢٤٠٠ م، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن .

١٠ صحيفة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها، فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورق وأسفلها ١ سم ، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فأوجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

١١ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة فإذا كان محيط النافذة ٥ أمتار .
فأوجد بعدي المستطيل بحيث تسمح النافذة بدخول أكبر كمية من الضوء .

١٢ أوجد عددين موجبين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ، مع العلم بأن مجموع العددين ٣٠.



تمارين &

مسائل عامة

١ أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

أ) $د(س) = (٣س^{٢} + ٢س)\,(س^{٤} + ١)$

ب) $د(س) = (س - ٢)^{-٢}$

ج) $د(س) = \dfrac{\frac{١}{٥س} - ١}{\frac{٢}{س^{٢}} + ١}$ ، $س \neq ٠$

د) $د(س) = \dfrac{|س|}{س}$ ، $س \neq ٠$

٢ إذا كانت $ق(س) = ٤س^{٢} + ٣$ ، $هـ(س) = ٤س + ١$ ، فأوجد $(ق \circ هـ)'(س)$.

٣ أوجد معادلة المماس للمنحنى $٢س\,ص = س^{٢} + ص$ عند النقطة (١ ، ١) الواقعة على المنحنى.

٤ إذا كانت $ص^{٢} = \dfrac{س}{س + ١}$ فاثبت أن $\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{ص^{٣}}{٢س^{٢}}$

٥ إذا كان $ص^{٢} = س(١ - س)$ فاثبت أن $ص\,ص'' + ص'^{٢} + ١ =$ صفر

٦ بين قابلية أو عدم قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = |س^{٢}|$ عند $س = ٠$

٧ أوجد نقاط المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ التي يكون ميل المماس عندها يساوي -٢٧ .

٨ إذا كانت $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س$ فأوجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت)

٩ إذا كانت $س = ع^{٢} + ٢ع$ ، $ص = ٢ع^{٣} - ٦ع$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٩$

فأوجد قيمة ع حيث $ع > ٠$

١٠ مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت ويساوي ١٣سم يزداد طول أحد ضلعي القائم بمعدل ٣سم/دقيقة. أوجد معدل التغير في طول الضلع الثاني عند اللحظة التي يكون فيها طول الضلع الأول ٥ سم.

١١ مصنع ينتج س من أجهزة الراديو في اليوم فإذا كانت التكاليف الكلية لهذه الأجهزة تساوي $(\frac{١}{٤} س^{٢} + ٢٥س + ٢٥)$ ريالا ويباع الجهاز الواحد بسعر $(١٠٠ - \frac{١}{٢} س)$ ريال ، فأوجد الإنتاج اليومي من الأجهزة ليكون المكسب أكبر ما يمكن أوجد قيمة هذا المكسب .

١٢ صفيحة من المعدن مثلثة الشكل طول ارتفاعها $\frac{٢}{٣}$ طول قاعدتها تتمدد بالحرارة . أوجد طول القاعدة عندما يكون معدل زيادة طول القاعدة ٠,٠٣ سم / ث ومعدل زيادة المساحة ٠,١٥ سم^{٢} / ث .

٣

الوحدة الثالثة

الهندسة التحليلية للدائرة

Circle

الأهداف

١ تعريف الدائرة من خلال مفهوم المحل الهندسي.

٢ إيجاد معادلة الدائرة بمعلومية المركز وطول نصف القطر.

٣ إيجاد إحداثيات المركز وطول نصف القطر لدائرة علمت معادلتها.

٤ تعيين وضع نقطة بالنسبة للدائرة.

٥ تعيين وضع مستقيم بالنسبة للدائرة.

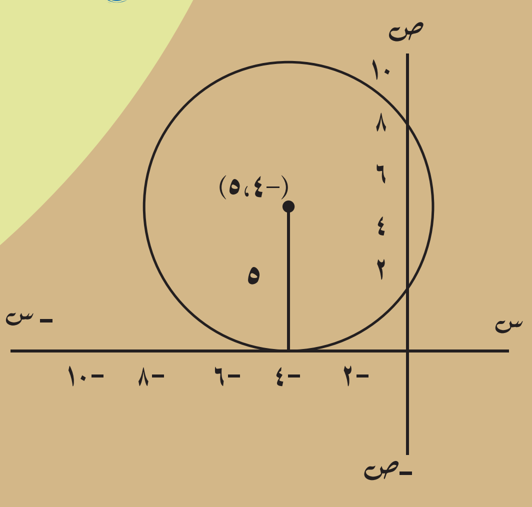
٦ التعرف على الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

٧ تعيين معادلة دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي.

٨ إيجاد معادلة دائرة علم إحداثيات نقطتي نهاية قطر فيها.

٩ إيجاد معادلة دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة.

١٠ إيجاد معادلة المماس للدائرة عند إحدى نقاطها.



المحل الهندسي

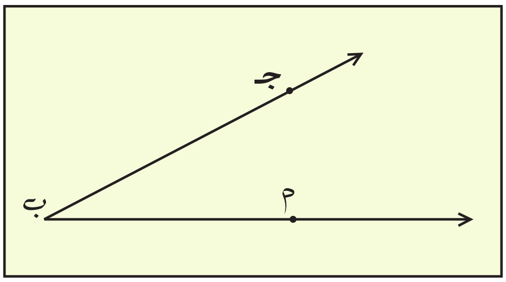
نشاط ١ : تحديد الموقع

الخطوات

أ) ١ حدد نقطتين على الأرض بعيدتين بعض الشيء (٢متر مثلاً) أ ، ب.

٢ اطلب إلى زميلك أن يقف في منتصف المسافة بينهما، ثم اطلب إليه أن يسير بحيث يبقى بعده عن النقطة أ مساويًّا لبعده عن النقطة ب .

٣ حدد شكل الطريق الذي يسلكه.



ب) ١ ارسم زاوية على أرض الغرفة مثل أ ب̂ جـ.

٢ اطلب إلى زميلك أن يقف عند رأس الزاوية (ب̂) ،ثم اطلب إليه أن يسير بحيث يبقى بعده عن الضلع أب مساويًّا لبعده عن الضلع ب جـ .

٣ صف مسار زميلك.

جـ) ارسم على دفترك مستقيمين متوازيين، ثم ابحث عن مجموعة نقاط يكون بعد كل منها عن المستقيم الأول يساوي بعدها عن المستقيم الثاني ثم صف موقع هذه النقاط.

من التجربة الأولى تلاحظ أن زميلك سيسير في خط مستقيم ينصف القطعة أب ويكون عموديًّا عليها.ولهذا نقول: الموقع الهندسي أو المحل الهندسي لزميلك أثناء سيره هو مستقيم ينصف أب ويكون عمودياً عليها.

تدريب ١

أ) ما المحل الهندسي لزميلك الذي يسير ليبقى على بعدين متساويين عن ضلعي زاوية ؟

ب) ما المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين؟

وعادة ما يطلب معادلة مسار النقطة وتسمى بمعادلة المحل الهندسي.

تعريف

يسمى مسار نقطة متحركة تحت شروط معينة بالمحل الهندسي للنقطة وبمعنى آخر المحل الهندسي للنقطة هو مجموعة الأماكن التي تتواجد فيها النقطة أثناء حركتها.

مثال ١

أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوى، بحيث يكون بعدها عن النقطة م (٠،٠) نصف بعدها عن النقطة (-١،٢) .

الحل

∴ نفرض أن النقطة هي ب (س،ص)، وباستخدام قانون البعد بين نقطتين

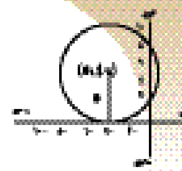
$$\text{ب م} = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}} \quad , \quad \text{ب أ} = \sqrt{(\text{س} + ١)^{2} + (\text{ص} - ٢)^{2}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}} = \frac{١}{٢} \sqrt{(\text{س} + ١)^{2} + (\text{ص} - ٢)^{2}}$$

$$\therefore \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = \frac{١}{٤} (\text{س}^{2} + ٢\text{س} + ١ + \text{ص}^{2} - ٤\text{ص} + ٤)$$

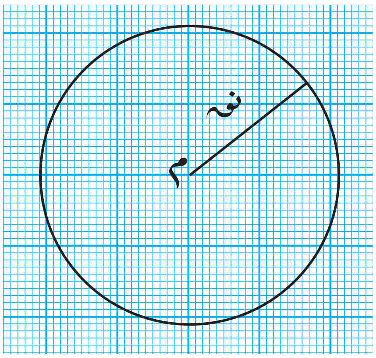
$$٣\text{س}^{2} + ٣\text{ص}^{2} = ٢\text{س} - ٤\text{ص} + ٥$$

∴ معادلة المحل الهندسي للنقطة هو $٣\text{س}^{2} + ٣\text{ص}^{2} - ٢\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = ٠$



الدائرة

لقد سبق أن تعرفت إلى الدائرة على أنها مجموعة النقاط التي تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة ، أو أنها المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تبقى على بعد ثابت من نقطة ثابتة.



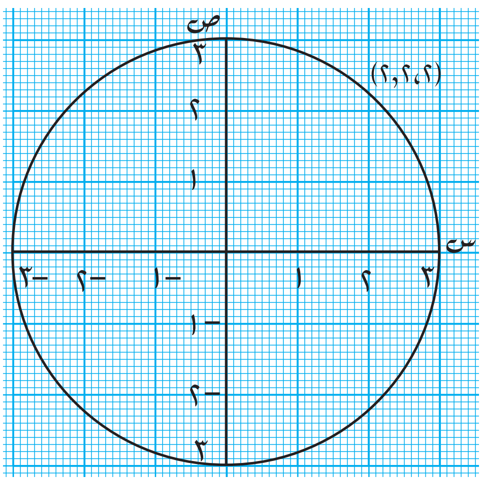
اعتمد على أحد التعريفين السابقين، وأجب عما يلي:

أ) ماذا يسمى البعد الثابت ؟

ب) ماذا تسمى النقطة الثابتة ؟

جـ) هل عدد النقاط محدود ؟ وضح إجابتك

نشاط ٢ : معادلة الدائرة.



الأدوات : ورق رسم بياني ، فرجار ، مسطرة ، قلم

الخطوات :

١ ارسم دائرة على ورق الرسم البياني وليكن مركزها نقطة الأصل وبنصف قطر محدد.

٢ اختر نقطة على الدائرة واستخدم المسطرة لتحديد الإحداثيات.

٣ ابحث عن علاقة بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي مع نصف قطر الدائرة.

٤ اطلب إلى زميلك أن يختار نقطة أخرى ويجد العلاقة أيضًا.

٥ تناوب أنت وزميلك في العمل لتحصلوا على (٦-٨) نقاط ثم أجب عما يلي:

أ) هل العلاقة ثابتة لجميع النقاط التي إخترتها ؟

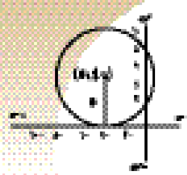
ب) إذا كانت إحداثيات نقطة على الدائرة هي (س ، ص)، فما الصيغة الرمزية للعلاقة ؟

تدريب ٢

أ) استخدم العلاقة التي توصلت إليها وحدد أيًّا من النقاط التالية تقع على دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ٥سم.

(٣،٤) ، (-٣،-٤) ، (٢،٣) ، (٥،٢).

ب) اكتب المعادلة الرياضية للدائرة.



نظرية:

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي نق هي : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

المعطيات: دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها نق

المطلوب: إيجاد معادلة الدائرة.

البرهان:

بما إن الدائرة عبارة عن مسار نقطة (س،ص) تتحرك في المستوى بحيث يبقى بعدها عن المركز (٠،٠) يساوي طول نصف القطر

$$\therefore \sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}} = نق$$

$\therefore$ $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$ هي معادلة الدائرة المطلوبة.

مثال ٢

أ) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ٦سم.

ب) تحقق إن كانت النقطة (٣،٤) واقعة على الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$.

الحل

أ) معادلة الدائرة هي $س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦$ من النظرية

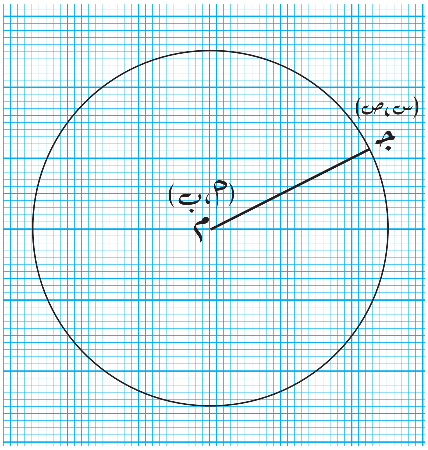
ب) نعوض إحداثيات النقطة

$٩ + ١٦ = ٢٥ = نق^{٢}$ $\therefore$ النقطة تقع على الدائرة

تدريب ٣

إذا كانت محطة رصد الزلازل تقيس بعد مركز الزلزال عن المحطة فقط. وقاست إحدى المحطات بعد مركز زلزال ما فكان ٥٠كم، فحدد أين يمكن أن تبحث عن مركز الزلزال، مقترحًا طريقة لتحديد المركز بدقة.

معادلة دائرة مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها (نق)



تتبع الأسلوب السابق نفسه، لهذا جد المسافة $\overline{\text{جـ م}}$ وساوها بنصف القطر نق.

$$\text{جـ م} = \sqrt{(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2} = \text{نق}$$

$$\therefore \; (\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 = \text{نق}^2$$

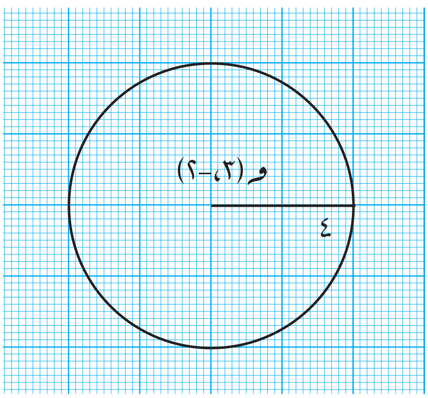
وهي معادلة دائرة مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها (نق)

وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

مثال ٣

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٣،-٢) ونصف قطرها = ٤ بالصورة القياسية .

الحل



نفرض نقطة على الدائرة (س،ص) ونجد المسافة بينها وبين المركز (٣،-٢)

$$\text{المسافة} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2}$$

لكن هذه المسافة هي نصف قطر الدائرة (نق)

$$\therefore \; \sqrt{(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2} = \text{نق} = ٤$$

وبتربيع الطرفين

$$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2 = ١٦$$

تدريب ٤

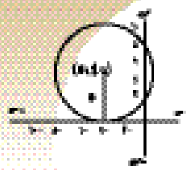
أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٣،٥) ونصف قطرها ٧ بالصورة القياسية.

تعريف

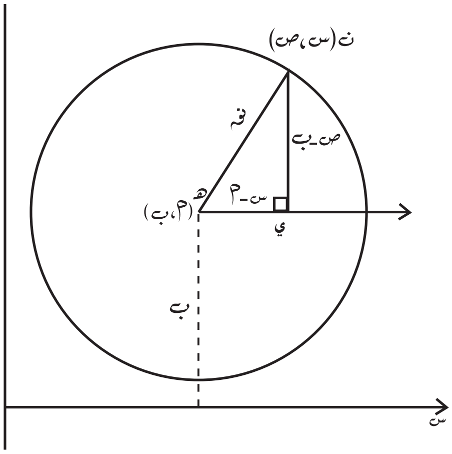
تسمى صورة المعادلة $(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 = \text{نق}^2$ حيث (أ ، ب) إحداثيات المركز، نق هو نصف القطر بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة .

تدريب ٥

قال سالم بما أن معادلة الدائرة هي $(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 = \text{نق}^2$، فإن بالإمكان أخذ الجذر التربيعي للطرفين بالصورة $(\text{س} - \text{أ}) + (\text{ص} - \text{ب}) = \text{نق}$ لنحصل على صورة مكافئة ، بينما قال عبدالله إن الصورة الثانية ليست مكافئة للأولى. فأي الرأيين توافق ولماذا ؟



الصورة العامة لمعادلة الدائرة



ارسم دائرة بأي نصف قطر (نق) ومركزها النقطة هـ(م ، ب).

باستخدام قانون البعد بين النقطتين أو باستخدام قاعدة فيثاغورس

في المثلث القائم ن ي هـ تجد

نق^2 = (س − م)^2 + (ص − ب)^2 وهو ما تم الحصول عليه سابقًا.

أي أن : س^2 − ٢ م س + م^2 + ص^2 − ٢ب ص + ب^2 = نق^2

وبتجميع الحدود س^2 + ص^2 − ٢ م س − ٢ب ص + م^2 + ب^2 − نق^2 = ٠

ويمكن كتابة المعادلة بالصورة العامة التالية:

> س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠
> حيث ل = − م، ك = −ب ، جـ = ل^2 + ك^2 − نق^2،
> ل ، ك ، جـ اعداد حقيقية ، ومركزها (−ل ، −ك)

أجب عن الأسئلة الآتية:

١) ما درجة معادلة الدائرة؟

٢) هل يختلف معامل س^2 عن معامل ص^2 ؟

٣) هل هنالك حد يجمع بين س ، ص ؟ بمعنى هل هنالك حد يحتوي على س ص ؟

٤) هل يمكن أن تكون معاملات س^2 ، ص^2 سالبة ؟

تدريب ٦

بين من خلال إجابتك عن الأسئلة السابقة أيًّا من المعادلات التالية تمثل دائرة مع ذكر السبب.

أ) س^2 −٢س + ص^2 + ص − ٥ = ٠

ب) س^2 + ص^2 − ٣س ص + ٤ = ٠

جـ) ٢س^2 + ٣س^2 − ٦س + ٧ص + ١٠ =٠

د) ٣س^2 + ٣ص^2 − ٦س + ٩ص − ٢٥ =٠

هـ) − س^2 − ص^2 + ٤س − ٨ص + ١٠ = ٠

نتيجة

تمثل المعادلة دائرة إذا تحققت الشروط التالية :

١) تربيعية في س ، ص

٢) معامل س^2 يساوي معامل ص^2

٣) معامل س ص يساوي صفر

٤) نق $\geq$ صفر ، وفي حالة نق = ٠ تكون الدائرة عبارة عن نقطة.

مثال ٤

أوجد إحداثيات المركز وطول نصف القطر للدائرة التي معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} − س + ٢ص + ١٢ = ٠

الحل

إحداثيات المركز هي (−ل ، −ك) = ($\frac{١}{٢}$ ، −١)

نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − جـ = $\frac{١}{٤}$ + ١ − ١٢ $<$ ٠ ∴ لا توجد دائرة تمثل المعادلة

تدريب ٧

اعتمد على العلاقة بين كل من ل ، ك ، جـ ، نق مستفيدًا من المثال السابق، وبيِّن متى لا تكون المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠ تمثل دائرة.

مثال ٥

بين أنه لايمكن استخدام الصيغة (−ل ، −ك) لإيجاد مركز الدائرة

٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٦س + ١٢ص + ٨ = ٠ واذكر السبب

الحل

إذا استخدمت القاعدة السابقة، فإن إحداثيات المركز ستكون (٣،−٦)

ونصف القطر نق = $\sqrt{٩ + ٣٦ - ٨}$ = $\sqrt{٣٧}$

ولكن معادلة الدائرة التي مركزها (٣،−٦) ونصف قطرها $\sqrt{٣٧}$ هي:

(س − ٣)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} = ٣٧

أي س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ١٢ص + ٨ = ٠ وهذه تختلف عن المعادلة المعطاة.

تدريب ٨

اكتب المعادلة في المثال السابق بحيث يكون معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١ ثم أكمل الحل.

نتيجة

يمكن استخدام المركز = (−ل،−ك) ، نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − جـ فقط في حالة أن تكون معاملات س^{٢} ، ص^{٢} تساوي ١ من خلال قسمة جميع حدود المعادلة على معامل س^{٢}

تحويل الصورة العامة لمعادلة الدائرة إلى الصورة القياسية

مثال ٦

حول معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} −٤س + ١٢ص + ٣٠ = ٠ إلى الصورة القياسية ثم أوجد إحداثيات المركز ، وطول نصف القطر.

الحل

أعد كتابة المعادلة كالتالي:

س^{٢} − ٤س + ص^{٢} + ١٢ص = −٣٠   وضح ما قمت به .

أكمل المربع لكل من الحدود التي تحتوي س ، وتلك التي تحتوي ص.

س^{٢} − ٤س + ٤ + ص^{٢} + ١٢ص + ٣٦ = ٤٠−٣٠ ، فسِّر هذه الخطوة.

(س −٢)^{٢} + (ص +٦)^{٢} = ١٠ ، فسِّر.

∴ هذه هي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة السابقة.

إحداثيات المركز (٢ ، −٦) ، ونصف القطر = $\sqrt{١٠}$

تدريب ٩

تحقق باستخدام ل ، ك ، جـ ، نق في المعادلة العامة للمثال السابق بأن الإجابات التي تم التوصل إليها صحيحة.

مثال ٧

أوجد إحداثيات مركز الدائرة وطول نصف قطرها إذا كانت معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٦ص + ٢٥ = ٠   واعط وصفا لمنحنى الشكل.

الحل

س^{٢} − ٨س + ص^{٢} + ٦ص = −٢٥

س^{٢} − ٨س + ١٦ + ص^{٢} + ٦ص + ٩ = ٠

(س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٠

∴ المركز (٤ ، −٣) ونصف القطر = ٠

∴ الدائرة عبارة عن نقطة

ماذا لو استبدل العدد ٢٥ في المعادلة الأصلية بالعدد ٢٦ ؟

تمارين &

مسائل (١)

١ أوجد معادلة الدائرة في كل من الحالات التالية:

أ) إحداثيات المركز (٢،٣) ونصف القطر يساوي ١ ب) إحداثيات المركز (-٣،٤)ونصف القطر يساوي ٥

جـ) إحداثيات المركز ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ونصف القطر يساوي $\frac{٢}{٣}$ د) إحداثيات المركز (٠،-٥) ونصف القطر يساوي ٥

هـ) إحداثيات المركز (٣،٠) ونصف القطر يساوي $\sqrt{٢}$ و) إحداثيات المركز (-$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$) ونصف القطر يساوي $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

٢ أوجد إحداثيات المركز ونصف القطر لكل من الدوائر التالية:

أ) س^٢ + ص^٢ + ٤س – ٦ص + ١٢ = ٠ ب) س^٢ + ص^٢ – ٢س – ٤ص + ١ = ٠

جـ) ٢س^٢ + ٢ص^٢ + س + ص = ٠ د) ٣٦س^٢ + ٣٦ص^٢ – ٢٤س – ٣٦ص – ٢٣ = ٠

٣ أي من المعادلات التالية تمثل دائرة :

أ) س^٢ + ص^٢ – ٥ = ٠ ب) س^٢ + ص^٢ + ١٠ = ٠

جـ) ٣س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س – ٨ص + ١٠٠ = ٠ د) أ س^٢ + أ ص^٢ = ٠ ، أ $\in$ ح

هـ) س^٢ + ص^٢ + ٥س ص = ١ و) س^٢ + ص^٢ + ٨س + ٤ = ٠

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢،١) وتمر بالنقطة (٤،-٣)

٥ بيِّن أن بعد مركز الدائرة س^٢ + ص^٢ – ٦س – ٤ص + ٤ = ٠ عن محور ص يساوي نصف قطر الدائرة .

٦ اثبت أن الدائرة س^٢ + ص^٢ – ٤س + ٦ص + ٤ = ٠ تمس محور السينات.

٧ ينزلق سلم طوله ٦م على حائط رأسي نحو الارض، وضح شكل المحل الهندسي لنقطة منتصف السلم، واكتب معادلة حركة نقطة المنتصف.

٨ يبحر قارب بحيث يبقى بعده عن المرفأ أ ضعف بعده عن المرفأ ب، فإذا كان البعد بين المرفأين ٣كم، فصف المحل الهندسي لمسير القارب واكتب المعادلة.

٩ إذا كانت النقطة أ (٣ ، -١) والنقطة ب (٥ ، ٣)، فاثبت أن المحل الهندسي للنقطة جـ التي تتحرك بحيث (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٢٨ هي دائرة، وأوجد مركزها ونصف قطرها .

١٠ اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة ٦س^٢ – ١٢س + ٦ص^٢ + ٣٦ص = ٣٦ ، وأوجد إحداثيات المركز وطول نصف القطر.

أوضاع خاصة للدائرة

تتضمن معادلة الدائرة بالصورة العامة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

ثلاثة مجاهيل هي ل ، ك ، جـ حيث (−ل،−ك) هي إحداثيات المركز، نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − جـ

هي علاقة نصف القطر بالمجاهيل ل ، ك ، جـ ، فإذا توفرت معلومات تكفي لإيجاد هذه المجاهيل أمكن إيجاد المعادلة، وفيما يلي بعض من هذه الحالات.

أ) معادلة دائرة علم إحداثيات نقطتي نهايتي قطر فيها .

نشاط ١ : تحديد نصف القطر وإحداثيات المركز

الأدوات : ورق مربعات ، فرجار ، قلم ، مسطرة.

الخطوات :

١ ارسم المحورين الإحداثيين.

٢ ارسم أية دائرة في المستوى الإحداثي.

٣ ارسم قطرًا في الدائرة وحدد إحداثيات نهايتي القطر:(س$_{١}$، ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$).

٤ أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين نهايتي القطر. ماذا تسمي هذه النقطة ؟

٥ استخدم قانون المسافة لتجد طول القطر ثم أوجد طول نصف القطر.

٦ استخدم العلاقة نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − جـ لإيجاد جـ

من الخطوات السابقة أجب عما يلي:

أ) ما إحداثيات مركز الدائرة التي رسمتها ؟

ب) ما طول نصف القطر ؟

جـ) ما قيم كل من ل ، ك ، جـ ؟

تدريب ١

استخدم معلومات النشاط في إيجاد معادلة دائرة تكون النقطتان ﻡ (٢ ، ٨) ، ب (٦ ، −٤) نهايتي قطر فيها .

نتيجة

معادلة دائرة إحداثيات نهايتي قطر فيها (س$_{١}$،ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) تعطى بالعلاقة

س^{٢}+ص^{٢} − س (س$_{١}$+س$_{٢}$) − ص (ص$_{١}$+ص$_{٢}$) + س$_{١}$ س$_{٢}$ + ص$_{١}$ ص$_{٢}$ =٠

مثال ١

أوجد معادلة دائرة إذا كان ٨ (٢،٤) ، ب (−١،٥) نهايتي قطر فيها.

الحل

إحداثيات المركز هي −ل = $\frac{١}{٢}$ ، −ك = ٤,٥ ومنها ل = $\frac{-١}{٢}$ ، ك = −٤,٥

طول نصف القطر (نق) = $\sqrt{\frac{١}{٤} + ٢٠\frac{١}{٤} - جـ}$ ⟸ نق^{٢} = ٢٠,٥ − جـ

لكن نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ [(٢ −(−١))^{٢} + (٤−٥)^{٢}] = $\frac{١}{٤}$ × ١٠ = ٢,٥

∴ جـ = ٢٠,٥ − ٢,٥ = ١٨

بالتعويض في المعادلة العامة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

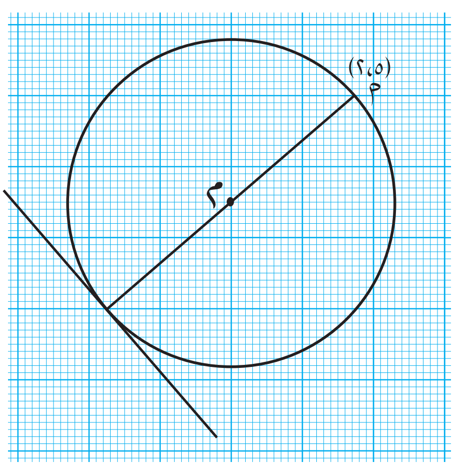
تكون المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} − س − ٩ص + ١٨ = ٠

وباستخدام النتيجة السابقة فإن المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − س − ٩ص + ١٨ = ٠

تدريب ٢

في المثال ١ أعلاه افترض نقطة جـ(س ، ص) على الدائرة ، اكتب ميل $\overline{٨جـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ وساوي حاصل ضربهما بالعدد (−١)، هل ستحصل على معادلة الدائرة ؟ فسر السبب .

مثال ٢



رسم من النقطة (٥،٢) الواقعة على دائرة قطر للدائرة ، ومن نقطة نهاية القطر الأخرى رسم مماس للدائرة، فإذا كانت معادلة المماس هي س − ٢ص + ٤ = ٠ فاكتب معادلة الدائرة.

الحل

ميل المماس = $\frac{١}{٢}$ ومنه، فإن ميل القطر = −٢

معادلة القطر $\frac{ص - ٢}{س - ٥}$ = −٢ أي ص + ٢س − ١٢ = ٠

وبحل معادلة المماس مع معادلة القطر نجد س = ٤ ، ص = ٤

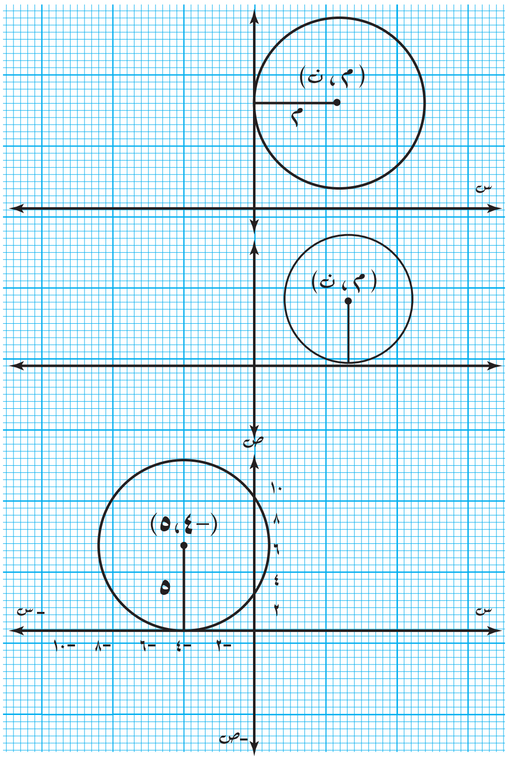
∴ إحداثيات نهاية القطر الأخرى هي (٤،٤) ، (−ل ،−ك) = (٤,٥ ، ٣) ، جـ = ٢٨

∴ معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٩س − ٦ص + ٢٨ = ٠

∴ ويمكن كتابة المعادلة من النتيجة مباشرة س^{٢} + ص^{٢} − س (س$_{١}$+س$_{٢}$) − ص (ص$_{١}$+ص$_{٢}$) + س$_{١}$ س$_{٢}$ + ص$_{١}$ ص$_{٢}$ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} − ٩س − ٦ص + ٢٨ = ٠

ب) معادلة الدائرة إذا مست أحد المحورين وعلم إحداثيات المركز.



يمكننا معرفة نصف قطر الدائرة ، كما في الشكل ، فإذا مست الدائرة محور السينات فإن الإحداثي الصادي يدل على نصف القطر، وإذا مست محور الصادات كان الإحداثي السيني يدل على نصف القطر.

مثال ٣

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٤،٥) وتمس محور السينات.

من السؤال ل=٤ ، ك = -٥ ، نق = ٥

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} = ١٦ + ٢٥ - ٢٥ = ١٦

∴ بالتعويض في المعادلة العامة بدلاً من ل ، ك ، جـ نجد المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٨س - ١٠ص + ١٦ = ٠

تدريب ٣

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٣،٦) وتمس محور الصادات.

مثال ٤

أوجد معادلة الدائرة التي تمس كلاً من محور السينات والمستقيم ص = ٨ ، وكان الإحداثي السيني للمركز ضعف الإحداثي الصادي.

الحل

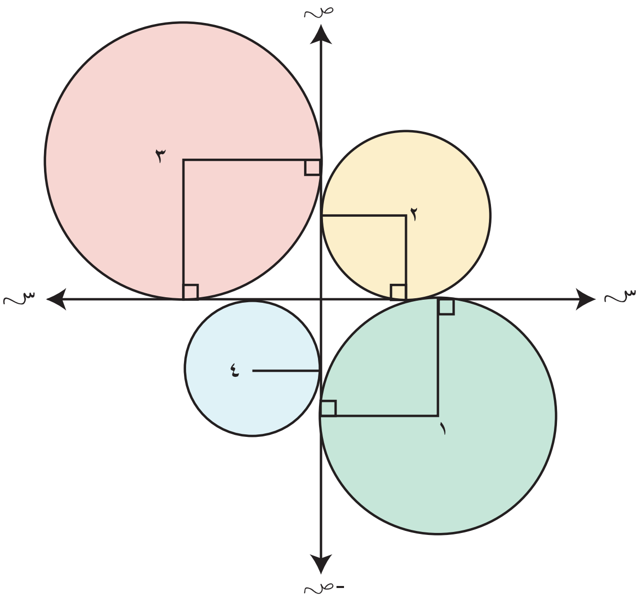
بما أن الدائرة تمس مستقيمين متوازيين المسافة بينهما ٨سم . فسِّر ذلك

فإن نصف قطر الدائرة = ٤ ، وكذلك فإن الإحداثي الصادي للمركز = ٤ أيضًا. فسِّر ذلك

∴ الإحداثي السيني = ٨ ، جـ = ٦٤ + ١٦ - ١٦ = ٦٤

∴ المعادلة = س^{٢} + ص^{٢} - ١٦س - ٨ص + ٦٤ =٠

جـ) معادلة الدائرة إذا مست المحورين الإحداثيين وعلم طول نصف القطر أو إحداثيات إحدى نقاط التماس .



اعتمد على الشكل وأجب عما يلي:

- ما علاقة الإحداثي السيني بالإحداثي الصادي لمركز الدائرة؟

ما علاقة الإحداثي الصادي للمركز مع الإحداثي الصادي لنقطة التماس مع محور السينات؟

اكتب إحداثيات المركز ، إذا كان طول نصف القطر يساوي ٥سم .

اكتب إحداثيات المركز إذا كانت الدائرة تمس المحورين وإحداثيات نقطة تماسها مع محور ص هي (٠،-٤).

تدريب ٤

استخدم المعلومات التي حصلت عليها من إجابتك عن الأسئلة السابقة، وأوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الإحداثيين وتمس محور السينات في النقطة (٦،٠).

مثال ٥

أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الإحداثيين ونصف قطرها = ٥سم.

الحل

هنالك عدة حالات حيث يمكن أن تكون الدائرة في أي من الأرباع الأربعة ، فإحداثيات المركز تكون (٥،٥) أو (٥،-٥) أو (-٥،-٥) أو(-٥،٥)

ففي الحالة الأولى نق = ٥ ، ل = -٥ ، ك = -٥

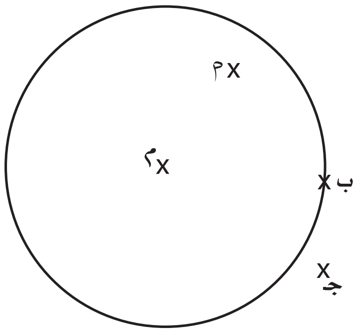
جـ = $ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}$ = ٢٥

المعادلة $س^{٢} + ص^{٢}$ - ١٠س -١٠ص + ٢٥ = ٠

تدريب ٥

أوجد بقية المعادلات في المثال السابق.

د) معادلة دائرة علم عليها إحداثيات ثلاث نقاط



أجب عما يلي :

أ) متى تقع النقطة داخل دائرة؟

ب) متى تقع النقطة خارج الدائرة؟

جـ) متى تقع النقطة على الدائرة؟

لعلك تلاحظ من الشكل أن المسافة م أ $<$ نق ، أ نقطة داخل الدائرة

بينما المسافة م ب = نق فالنقطة ب واقعة على الدائرة وتحقق معادلتها

النقطة جـ خارج الدائرة لأن م جـ $>$ نق ولا تحقق معادلة الدائرة.

نتيجة

إذا وقعت نقطة على دائرة فإنها تحقق معادلتها

مثال ٦

أي من النقاط التالية تقع على الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٦ص = ٠

(٠،٠) ، (٥،٢) ، (٠،٨) ، (−٦،١)

الحل

مركز الدائرة (٤،−٣) ونصف قطرها ٥سم

المسافة بين النقطة (٠،٠) ومركز الدائرة (٤،−٣) يساوي

$\sqrt{(٤-٠)^{٢} + (-٣-٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ ولهذا فالنقطة تقع على الدائرة .يمكن التحقق من ذلك بالتعويض بالمعادلة

٠^{٢} + ٠^{٢} + ٨ × ٠ + ٦ × ٠ = ٠ بمعنى أن النقطة (٠،٠) تقع على الدائرة.

مربع المسافة بين النقطة (٢ ، ٥) والنقطة (٤ ، −٣) =

(٤−٢)^{٢} + (−٣ − ٥)^{٢} = ٤ + ٦٤ $\neq$ ٢٥ فالنقطة لا تقع على الدائرة

كذلك بالتعويض في المعادلة ٢^{٢} + ٥^{٢} − ٨ × ٢ + ٦ × ٥ = ٤٣ $\neq$ ٢٥ فالنقطة لا تقع على الدائرة

تدريب ٦

أكمل التحقق من كون النقاط المتبقية تقع على الدائرة أم لا

مما سبق يمكن إيجاد معادلة الدائرة إذا علمت إحداثيات ثلاث نقاط عليها.

مثال ٧

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٣،١) ، (٨،٢) ، (٢،٦)

الحل

الصورة العامة للمعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

بالتعويض بالنقطة الأولى ٩ + ١ + ٦ل + ٢ك + جـ = ٠ ....١

بالتعويض بالنقطة الثانية ٦٤ + ٤ + ١٦ل + ٤ك + جـ = ٠ ....٢

بالتعويض بالنقطة الثالثة ٤ + ٣٦ + ٤ل + ١٢ك + جـ = ٠ ....٣

بطرح ١ من ٣ ينتج

-٢ل + ١٠ك + ٣٠ = ٠

ومنها ل = ٥ك +١٥

بطرح ١ من ٢ ينتج

١٠ل + ٢ك + ٥٨ = صفر

وبالتعويض عن قيمة ل

١٠(٥ك+١٥) + ٢ك + ٥٨ = صفر

٥٢ك + ٢٠٨ = ٠ ومنها ك = -٤

ل = ٥ك + ١٥ ومنها ل = -٥

لإيجاد قيمة جـ نعوض في إحدى المعادلات

١٠ + ٦(-٥) + ٢(-٤) + جـ = ٠ ∴ جـ = ٢٨

المعادلة س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ٨ص + ٢٨ = ٠

تدريب ٧

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط التالية (٦،-٥) ، (٦،-٧) ، (-٦،-١)

تمارين &

مسائل (٢)

١ أوجد معادلة الدائرة التي نصف قطرها يساوي ٣ ويقع مركزها في الربع الأول وتمس محور الصادات.

٢ أوجد معادلة الدائرة التي تكون النقطتان (٥،٢) ، (٣،٠) نهايتي قطر فيها.

٣ أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص−٤=٠ وتمس محور السينات.

٤ أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س + ص = ٤ وتمس كلاً من المحورين الإحداثيين.

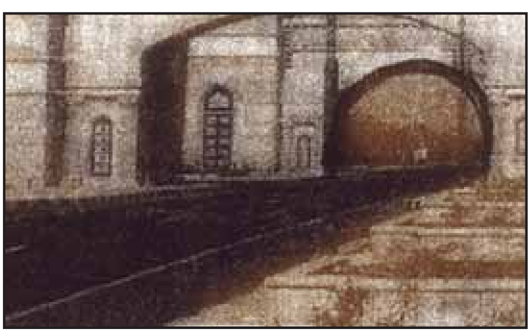
٥ أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ونصف قطرها يساوي ٥ وتمر بالنقطة (٨،٠).

٦ أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ٲ (−٥،٢) ، ب (−٣،٤) ، جـ (١،٨)، ثم أوجد إحداثيات نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة للوترين $\overline{ٲب}$ ، $\overline{بجـ}$ ووضح ما تمثله هذه النقطة.

٧ تمر الدائرة $س^{٢} + ص^{٢}$ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠ بالنقاط ٲ(−١،−٢) ، ب (١،٢)، جـ (٢،٣)، اكتب ثلاث معادلات بدلالة ل ، ك ، جـ ، ثم اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط ٲ ، ب ، جـ .

٨ أوجد نقاط التقاء المستقيم س − ٣ص = ٠ مع الدائرة $س^{٢} + ص^{٢}$ −١٠س − ٥ص + ٢٥=٠ ثم أوجد معادلة الدائرة التي تكون هاتان النقطتان نهايتي قطر فيها .

٩ طريق يمر من بوابة على شكل نصف دائرة قطرها ٩م



أ) بيِّن هل تستطيع شاحنة عرضها ٢,٥م وارتفاعها٤م بعبور البوابة ؟

ب) واذا التزم السائق المسرب الأيمن من الطريق ، فهل يتمكن من ذلك ؟

جـ) اكتب معادلة الدائرة التي تمثل البوابة.

أمثلة تطبيقية

مثال ١

يستخدم مزارع طريقة ري أرضه باستخدام نظام الرشاشات الدوّارة ، وبفرض أن المزارع وضع إحدى هذه الرشاشات في مركز قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها ٧٠م ، فإذا كانت إحداثيات أبعد نقطة يمكن أن تصلها المياه من الرشاش هي(١٤، ٣٢) فأجب عما يلي:

أ) أوجد معادلة النقاط القصوى (الأبعد) التي تصلها المياه من الرشاش.

ب) أوجد مساحة المنطقة التي يمكن أن يتم سقيها بالوحدة (الرشاش).

جـ) نسبة المنطقة التي لا يتمكن المزارع من سقيها بهذه الطريقة.

الحل

نفرض أن المحورين الإحداثيين يوازيان أضلاع المربع ، وأن نقطة الأصل هي في مركز المربع.

∴ نصف قطر الدائرة التي يمكن أن تصلها المياه =

$\sqrt{(١٤-٠)^٢ + (٣٢-٠)^٢} = \sqrt{١٩٦ + ١٠٢٤} = ٣٥$م

∴ معادلة الدائرة التي تقع عليها النقاط القصوى (البعيدة) هي

$(س-٠)^٢ + (ص-٠)^٢ = ١٢٢٥$ أو $س^٢ + ص^٢ = ٣٥^٢$

مساحة المنطقة المروية بالنظام = π نق^٢ = $٣٥^٢ \times \frac{٢٢}{٧}$

$= \frac{١٢٢٥ \times ٢٢}{٧}$

= ٣٨٥٠م٢

مساحة قطعة الأرض = ٧٠ × ٧٠ = ٤٩٠٠

المنطقة غير المروية = ٤٩٠٠-٣٨٥٠

= ١٠٥٠م٢

نسبة المساحة غير المروية = $\frac{١٠٥٠}{٤٩٠٠}$

= ٢١٪

تدريب ١

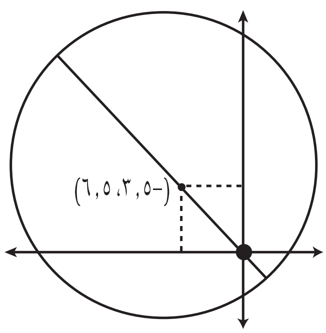
يعتبر أبولو ٨ أول سفينة فضاء مأهولة اتخذت لها مدارًا حول القمر، فإذا كان معدل ارتفاعها عن سطح القمر ١٨٥كيلو مترًا ، وكان نصف قطر القمر ١٧٤٠كيلو مترًا، فاختر محاور إحداثية مناسبة وأوجد معادلة مدار السفينة حول القمر.

مثال ٢

ضربت هزه أرضية بقوة ٧,٢ درجة على مقياس ريختر إحدى المناطق ، وتأثرت بذلك إحدى المدن القريبة من مركز الزلزال، وكانت إحدى محطات رصد الزلزال تبعد عن مركز الزلزال ١٤,٤كم . فأجب عما يلي:

أ) اختر محاور مناسبة واستخدم القياس ومقياس رسم مناسب، وأوجد معادلة المحل الهندسي لمركز الزلزال.

ب) احسب أقرب مسافة ممكنة بين مركز الزلزال والمدينة المنكوبة ، وأبعد مسافة ممكنة.



الحل

نختار محاور الإحداثيات (شرق - غرب) ، (شمال -جنوب) والمدينة المنكوبة نقطة الأصل ، عندها تكون إحداثيات محطة الرصد هي (-٣,٥، ٦,٥) (باستخدام القياس ومقياس الرسم) .

∴ محطة الرصد تقيس بعد مركز الزلزال عن المحطة لتكن إحداثيات مركز الزلزال (س ، ص)

(س + ٣,٥)^{٢} + (ص-٦,٥)^{٢} = (١٤,٤)^{٢} هي المحل الهندسي لموقع مركز الزلزال وهي دائرة.

لمعرفة أقرب موقع ممكن وأبعد موقع ممكن لمركز الزلزال من المدينة يرسم القطر المار بالمدينة ومحطة الرصد

المسافة من المدينة إلى محطة الرصد = $\sqrt{(٠+٣,٥)^{٢} + (٠-٦,٥)^{٢}}$

= ٧,٣٨ كم

أبعد مسافة = ١٤,٤٠ + ٧,٣٨ = ٢١,٧٨كم

أقصر مسافة = ١٤,٤ - ٧,٣٨ = ٧,٠٢كم

ما الفرق بين أثر الزلزال على المدينة في الحالتين ؟ وضح وجهة نظرك .

أجب عما يلي:

١) ما علاقة مماس الدائرة بنصف قطرها الذي يلتقي معه عند نقطة التماس ؟

٢) كم مماسًا يمكن أن ترسم لدائرة من نقطة خارجها ؟

٣) ما المعلومات الواجب توفرها لإيجاد معادلة خط مستقيم ؟

٤) إذا كان ميل مستقيم ما يساوي م، فما ميل المستقيم المعامد له ؟

من خلال إجابتك عن الأسئلة السابقة يمكن أن تجد معادلة مماس الدائرة .

مثال ٣

أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٢ ص + ٧ = ٠ عند النقطة (٣،٢)

الحل

يفضل أولاً التحقق من أن النقطة تقع على الدائرة، وذلك من خلال تعويض إحداثيات النقطة في معادلة الدائرة.

الطرف الأيمن ٣^{٢}+٢^{٢}−٨×٣+٢×٢+٧=٩+٤−٢٤+٤+٧=٠ = الطرف الأيسر فالنقطة واقعة على الدائرة.

مركز الدائرة من المعادلة م (٤،−١)

ميل نصف القطر م أ = $\frac{٢-(-١)}{٣-٤}$ = −٣

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٣}$ حيث م$_{١}$ م$_{٢}$ = −١

∴ معادلة المماس $\frac{ص-٢}{س-٣} = \frac{١}{٣}$

٣ص−٦ = س − ٣

س −٣ص + ٣ = صفر هي معادلة المماس وهي معادلة من الدرجة الأولى

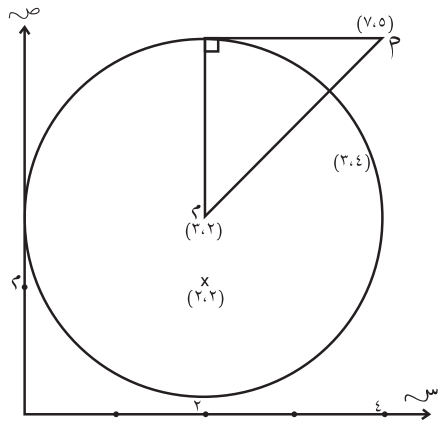
تدريب ٢

أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} −٨س −٢ص = ٠ عند النقطة (٣،٥)

مثال ٤

أوجد طول كل من المماسين المرسومين للدائرة س٢ + ص٢ −٤س −٦ص + ٩ = ٠ من النقطتين (٣،٤) ، (٢،٢) واكتب ما تستنتجه من السؤال.

الحل



طول المماس عبارة عن المسافة بين النقطة المعطاة ونقطة التماس.

مركز الدائرة من المعادلة هو (٣،٢)

بعد المركز عن النقطة (٣،٤) = $\sqrt{(٤-٢)^{٢} + (٣-٣)^{٢}} = ٢$

بعد النقطة (٢،٢) عن المركز = $\sqrt{(٢-٢)^{٢} + (٣-٢)^{٢}} = ١$

طول نصف قطر الدائرة نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$

= $\sqrt{٤ + ٩ - ٩} = ٢$

∴ النقطة (٣،٤) تقع على الدائرة فطول المماس = ٠

النقطة (٢،٢) تقع داخل الدائرة ولا يمكن رسم مماس للدائرة منها.

نتيجة

يمكن إيجاد طول المماس فقط في حالة كون النقطة التي يرسم منها المماس خارج الدائرة.

مثال ٥

في المثال السابق أوجد طول المماس المرسوم للدائرة من النقطة (٧،٥)، ثم اكتب معادلة كل من المماسين المرسومين للدائرة من تلك النقطة.

الحل

بعد النقطة (٧،٥) عن المركز = $\sqrt{(٥-٢)^{٢} + (٧-٣)^{٢}} = ٥$ فالنقطة تقع خارج الدائرة

طول نصف قطر الدائرة = ٢ من المثال السابق

باستخدام نظرية فيثاغورس طول المماس = $\sqrt{٥^{٢} - ٢^{٢}} = \sqrt{٢١}$

لإيجاد معادلة المماس تتبع الخطوات الآتية :

معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، ٣) هي

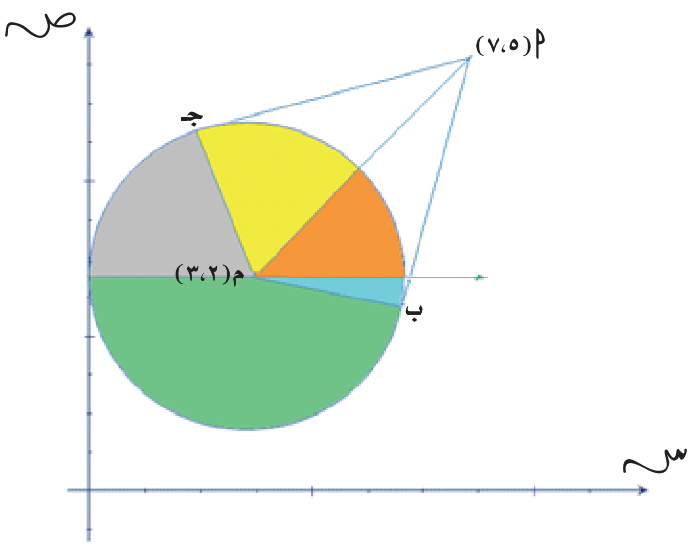
س^{٢} + ص^{٢} −٤س −٦ص + ٩ = ٠ .... ١

معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، ٧) ونصف قطرها $\sqrt{٢١}$ هي

س^{٢} + ص^{٢} −١٠س − ١٤ص + ٥٣ = ٠ .... ٢

بحل المعادلتين ١ ، ٢ نحصل على نقطتي تقاطع المماسين المرسومين من النقطة (٥ ، ٧) إلى الدائرة الأولى وهاتان النقطتان هما :

ب (٤ ، ٢,٥) ، جـ (١ ، ٤,٧)



معادلة المماس أ ب

$$\frac{\text{ص} - ٧}{\text{س} - ٥} = \frac{٧ - ٢,٥}{٥ - ٤}$$

∴ ٩س − ٢ص − ٣١ = ٠

معادلة المماس أجـ

$$\frac{\text{ص} - ٧}{\text{س} - ٥} = \frac{٧ - ٤,٧}{٥ - ١}$$

∴ ٢٣س − ٤٠ص + ١٦٥ = ٠

تدريب ٣

أ) تحقق من أن النقاط المعطاة تحقق معادلة الدائرة، وأوجد معادلة المماس عندها

١) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س + ٤ص − ١٢ = ٠ والنقطة (٣، −١)

٢) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٨س − ٥ص −١ = ٠ والنقطة (١، −١)

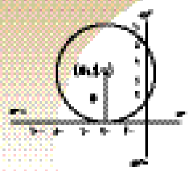
ب) أوجد طول المماس المرسوم لكل من الدوائر التالية من النقاط المعطاة

١) س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ٨ص + ٥ = ٠ من النقطة (٥، ٤)

٢) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠ من النقطة (٠، ٠)

جـ) أوجد طول المماس ومعادلته المرسوم للدائرة

س^{٢} + ص^{٢} − ٤س − ٨ص −٥ = ٠ من النقطة (٨، ٢)



تمارين &

مسائل (٣)

١. تحقق من أن النقاط المعطاة تقع على الدائرة المحددة ، ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة

أ) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س−٢ص−٨=٠ النقطة (٢،٢)

ب) س^{٢} + ص^{٢} + ١٠س +٣ص−٢=٠ النقطة (−٢،٣)

٢. أوجد طول المماس المرسوم لكل من الدوائر التالية من النقاط الموضحة إزاء كل منها

أ) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س−٦ص+١٠=٠ والنقطة (٠،٠)

ب) س^{٢} + ص^{٢} −٤=٠ والنقطة (−٣،٤)

٣. اثبت أن الخط المستقيم س − ص−٣=٠ مماس مشترك للدائرتين

س^{٢} + ص^{٢} −٢س −٤ص −٣ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٤س −٢ص −١٣ = ٠

٤. المماس المرسوم للدائرة س^{٢} + ص^{٢} −٤س + ٦ص −٧٧ = ٠ من النقطة (٦،٥) يلاقي المحورين الإحداثيين في النقطتين أ،ب، أوجد إحداثيات كل من أ،ب واستنتج مساحة المثلث م أ ب حيث م نقطة الأصل.

٥. أوجد معادلة الوتر المشترك للدائرتين:

س^{٢} + ص^{٢}−٤س−٢ص + ١ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٦ص −١٠ = ٠

٦. اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يصل نقطة الأصل بنقطة تقاطع المستقيمين

١٧س−١٥ص+٧=٠ ، ١٩س − ١٣ص =٠

٧. أوجد طول المماس المرسوم للدائرة س^{٢} + ص^{٢}− ٢س + ٤ص − ٣ = ٠ من مركز الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص − ١ = ٠

تمارين &

مسائل عامة

١ تتحرك النقطة جـ بحيث يكون بعدها عن النقطة ب(٣،٠) ضعف بعدها عن النقطة أ(-٣،٠)، اثبت أن المحل الهندسي للنقطة جـ هي دائرة مركزها (-٥،٠) ونصف قطرها ٤وحدات.

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥،٤) وتمس محور السينات.

٣ أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط أ(٠،٢)،ب(٨،-٢)،جـ(٩،٥).

٤ بين أن المستقيم ص = س + ١ يمس الدائرة س^٢ + ص^٢ − ٨س − ٢ص + ٩ = ٠ ثم أوجد معادلة المماس الآخر الذي يمس الدائرة من النقطة (٠ ، ١).

٥ برهن أن المستقيم س − ٢ص + ١٢ = ٠ يمس الدائرة س^٢ + ص^٢− س −٣١ = ٠ وأوجد إحداثيات نقطة التماس.

٦ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥،٤) وتمس المستقيم الواصل بين النقطتين أ(٠،٥)، ب(٤،١).

٧ أ،ب،جـ ثلاث نقاط تشكل مثلثًا ، فإذا كان أ(٠،٦) ، ب(٤،٠) ، جـ(٦،٠) فأوجد معادلة الدائرة المرسومة حول المثلث ومعادلة الدائرة التي تمر بمنتصفات أضلاع المثلث.

٨ بين أن المستقيم ص = م س + جـ يمس الدائرة س^٢ + ص^٢ = نق^٢ إذا كان جـ^٢ = نق^٢ (١+ م^٢)

٩ أوجد معادلة الدائرة التي نصف قطرها ٤سم وتمس كلاً من فرعي المنحنى ص= | س |

٤

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

Integration

الأهداف

١ فهم عملية التكامل على أنها عملية عكسية للتفاضل .

٢ حل معادلات تفاضلية بسيطة .

٣ استخدام التكامل في تطبيقات فيزيائية وهندسية .

٤ إيجاد التكامل باستخدام التكامل بالتعويض .

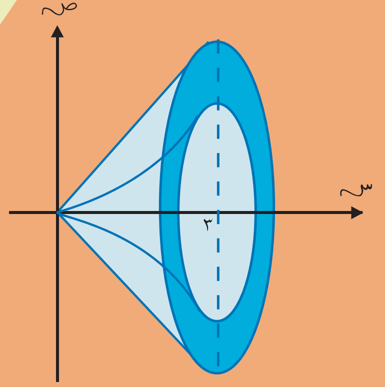
٥ إيجاد التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء .

٦ إيجاد التكامل المحدد .

٧ إيجاد تكامل الدوال(دالة الصحيح [س] ، دالة القيمة المطلقة |س|، الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة) .

٨ إيجاد المساحة المحصورة بين منحنيين أو أكثر .

٩ إيجاد حجوم الأجسام الدورانية .



التكامل

Integration

التكامل كعملية عكسية للتفاضل :

لقد تعرفنا سابقا على عمليات متعاكسة ، كالجمع والطرح ، القسمة والضرب ، الجذور والقوى ...

نشاط ١ : أصل المشتقة .

الأدوات : ورقة وقلم .

الخطوات :

اعمل في مجموعات ثلاثية وقم بما يلي :

١ إذا كانت دَ(س) = صفر فاكتب د(س) . وهل هي دالة وحيدة ؟

٢ اكتب د(س) إذا كانت دَ(س) = -٣. وهل هي دالة واحدة فقط ؟ اذكر السبب.

٣ إذا كانت دَ(س) = م (حيث م : ثابت) فاكتب د(س) . اكتب أكثر من دالة إن أمكن .

٤ إذا كانت دَ(س) = ٢س فهل د(س) لها شكل وحيد ؟ فسر إجابتك .

٥ إذا كانت دَ(س) = س، فماذا تكون د(س) ؟

٦ ناقش مع زملائك النتائج التي توصلت إليها .

٧ اقترح طريقة لإيجاد الدالة التي مشتقتها $س^{ن}$.

تدريب ١

إذا كانت قَ(س) = $٦س^{٥}$ ، فما ق(س) ؟

تعريف

١) إذا كانت قَ(س) = د(س) فإننا نسمي الدالة د(س) مشتقة ق(س) ، ونسمي الدالة ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) .

٢) إذا كانت ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) في فترة ما، فإن : ق(س) + جـ هي مجموعة الدوال المقابلة للدالة د(س) في نفس الفترة .

مثال ١

تحقق من أن الدالة ق(س) $= \frac{1}{3}$ س^{6} هي دالة مقابلة للدالة د(س) = ٢س^{5}

الحل

نشتق الدالة ق(س) حيث قَ(س) = $\frac{1}{3}$ × ٦س^{5} = ٢س^{5} .

∴ قَ(س) = د(س)

∴ ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) .

تدريب ٢

أ) اكتب دالتين مقابلتين للدالة د(س) = ٥س^{3} + ٦

ب) تحقق من أن ق(س) = $\sqrt{١ + س^{4}}$

دالة مقابلة للدالة : د(س) = $\frac{٢س^{3}}{\sqrt{١ + س^{4}}}$

نتيجة

١) إذا كانت د(س) = ٠ لجميع قيم س الحقيقية أو أية مجموعة جزئية منها فإن الدالة :

ق(س) = ث ، حيث ث ثابت هي الدالة المقابلة للدالة د(س) في تلك الفترة .

٢) إذا كانت كل من ق(س) ، هـ(س) دالتين مقابلتين للدالة د(س) في فترة ما فإن :

ق(س) = هـ(س) + ث ، حيث ث ثابت لكل س تنتمي للفترة نفسها .

التكامل Integration

عرفنا أن مجموعة الدوال المقابلة للدالة د(س) على فترة معينة تعطى بالقاعدة ق(س) + ث حيث ث ثابت ، إن هذا التعبير يسمى أيضًا التكامل للدالة د(س) وسنستخدم لفظ التكامل بدلاً من الدالة المقابلة العامة ونرمز لذلك بالرمز :

$\int$ د(س) . ءس = ق(س) + ث ، ويقرأ : تكامل الدالة د(س) بالنسبة إلى س يساوي ق(س) + ث ، حيث :

$\int$ رمز التكامل، د(س) الدالة المكاملة ، ءس متغير التكامل. وتسمى عملية إيجاد ق(س) + ث التي تحقق :

$\int$د(س) ءس = ق(س) + ث عملية التكامل وفي الواقع فإن التكامل يعني إيجاد الدوال المقابلة للدالة المعطاة،

وعليه فإن $\int$ قَ(س) . ءس = ق(س) + ث .

مثال ٢

تحقق من صحة :

أ) $\int \text{٤س}^{٣}\, \text{ءس} = \text{س}^{٤} + \text{ث}$.

ب) $\int ١\, \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$.

الحل

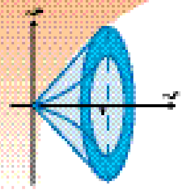
أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{٤} + \text{ث}\right) = \text{٤س}^{٣} \Longrightarrow \int \text{٤س}^{٣}\, \text{ءس} = \text{س}^{٤} + \text{ث}$.

ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س} + \text{ث}\right) = ١ \Longrightarrow \int ١\, \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$.

تدريب ٣

تحقق من صحة :

$\int \text{ص}\sqrt{١ + \text{ص}^{٢}}\, \text{ءص} = \frac{١}{٣}\left(١ + \text{ص}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$



قوانين التكامل :

نشاط ٢ : (تكامل س^{ن})

الخطوات:

لاحظ الجدول الذي أمامك ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه :

ملاحظة : (إذا علم أن أ ∈ ح ، ن ∈ ح$^{+}$)

د(س)	دَ(س)	$\int$ دَ(س) ء س
أ	٠	ث
أ س	؟	أس + ث
أس^{٢}	٢ أ س	؟
؟	ن س$^{ن-١}$	س^{ن} + ث
س^{٤}	٤س^{٣}	؟

١) ما العلاقة بين القيم في العمود الأول والقيم في العمود الثالث لكل صف ؟

٢) ما العلاقة بين قيم العمود الثاني وقيم العمود الثالث ؟ وضح ذلك بمثال عددي .

٣) بالاعتماد على الجدول ، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل اكتب النتائج التي توصلت إليها .

تدريب ٤

تحقق مما يلي (حيث ن ≠ -١):

أ) $\int$ س^{ن} . ء س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ث .

ب) $\int$ (أ س^{ن} + ب) ء س = $\frac{\text{أ س}^{ن+١}}{ن+١}$ + ب س + ث .

نتيجة

لعلك توصلت إلى النتائج التالية :

١) $\int \text{أ} \,.\, \text{ءس} = \text{أس} + \text{ث} \ ،\ \text{أ} \in \text{ح}$
٢) $\int \text{س}^{\text{ن}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث} \ ،\ \text{ن} \neq -١$
٣) $\int \text{أ}\,\text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ءس} \ ،\ \text{أ} \in \text{ح}$
٤) $\int \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right) .\, \text{ءس} = \int \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ءس} \pm \int \text{هـ}(\text{س}) \,.\, \text{ءس}$

مثال ٣

أوجد التكاملات الآتية :

أ) $\int \left(\dfrac{١}{\text{س}^٢} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right) .\, \text{ءس} \ ،\ \text{س} \neq ٠$

ب) $\int (٢\text{س}+٥)\,(٣\text{س}-٢) \,.\, \text{ءس}$

جـ) $\int \dfrac{(\text{س}^٢+١)^٢}{\text{س}^٢} \,.\, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int \left(\dfrac{١}{\text{س}^٢} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right) .\, \text{ءس} = \int (\text{س}^{-٢} + \text{س}^{\frac{١}{٣}}) \,.\, \text{ءس}$

$= \dfrac{\text{س}^{-١}}{-١} + \dfrac{٣\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + \text{ث}$

$= \dfrac{-١}{\text{س}} + \dfrac{٣}{٤}\sqrt[٣]{\text{س}^٤} + \text{ث}$

ب) $\int (٢\text{س}+٥)\,(٣\text{س}-٢) \,.\, \text{ءس}$.

$= \int (٦\text{س}^٢ + ١١\text{س} - ١٠) \,\text{ءس}$

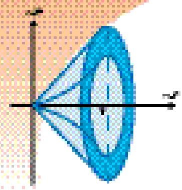
$= ٢\text{س}^٣ + \dfrac{١١}{٢}\text{س}^٢ - ١٠\text{س} + \text{ث}$

جـ) $\int \dfrac{(\text{س}^٢+١)^٢}{\text{س}^٢} \,.\, \text{ءس} = \int \dfrac{(\text{س}^٤ + ٢\text{س}^٢ + ١)}{\text{س}^٢} \,.\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^٢ + ٢ + \text{س}^{-٢}) \,.\, \text{ءس}$

$= \dfrac{\text{س}^٣}{٣} + ٢\text{س} + \dfrac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \dfrac{١}{٣}\text{س}^٣ + ٢\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}} + \text{ث}$



حل آخر : $\int \left(\frac{(\text{س}^{٢} + ١)}{\text{س}}\right)^{٢} \text{ءس} = \int (\text{س} + \text{س}^{-١})^{٢} \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{٢} + ٢ + \text{س}^{-٢}) \text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$

تدريب ٥

أ) أوجد $\int (\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{-٢} + ٤\text{س} - ٣) \,.\, \text{ءس}$

ب) ما الفرق بين : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \text{د}(\text{س}) \,.\, \text{ءس}$ ، $\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{د}(\text{س}) \,.\, \text{ءس}$ ؟

تحقق من صحة إجابتك .

تمارين&

مسائل (١)

أوجد الدالة المقابلة لكل من الدوال الآتية :

١) $د(س) = ٩س^{٢} + ٤س - ١$

٢) $د(س) = س^{\frac{٥}{٤}}$

٣) $د(س) = \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢}$

٤) $د(س) = س^{٥} - \sqrt{٢}$

٥) $د(س) = \frac{٣س^{٣} - ٣س^{٢} + ١}{س^{٢}}$

أوجد :

٦) $\int \frac{٣}{\sqrt{س}} \, ءس$

٧) $\int \sqrt{س \sqrt{س}} \, ءس$

٨) $\int \frac{٨س - ٥}{\sqrt[٣]{س}} \, ءس$

٩) $\int ١٠ \, ءس$

١٠) $\int (س + ٦) \sqrt{س} \, ءس$

١١) $\int \frac{\sqrt{س}\,(س - ١)}{\sqrt{س} + ١} \, ءس$

١٢) $\int س^{٢} \left(٧ - \frac{٣}{س}\right)^{٢} \, ءس$

١٣) $\int \frac{٥\,(٢س - ٣)^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt{١٦س - ٢٤}} \, ءس$

١٤) أوجد الدالة ق المقابلة للدالة $د(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ علمًا بأن $ق(١) = \frac{١}{٣}$.

أعط اسما لكل من المعادلات الآتية :

أ) ٣س − ٥ = ٦

ب) س^{٢} + ٤ = ١٢

جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا س = $\frac{١}{٤}$

د) ٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥

لاحظ أنك تعرضت لأنواع المعادلات أ ، ب التي تسمى معادلات جبرية، وكذلك المعادلة جـ وتسمى معادلة مثلثية ، والمعادلة د تسمى معادلة تفاضلية، وسنأخذ في هذا الجزء معادلات تفاضلية بسيطة ونحاول حلها.

❖ مفهوم المعادلة التفاضلية :

تعرف المعادلة التفاضلية بأنها معادلة رياضية تشتمل على معامل التفاضل، ونقصد بحل المعادلة التفاضلية إيجاد العلاقة بين المتغيرات بدون وجود معامل التفاضل .

مثال ١

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

أ) ٢س − $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥

ب) ٣قَ(س) − ٦س^{٢} = ١

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{٢س}^{٢}}$

الحل

أ) ٢س − $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢س − ٥

$\int$ ءص = $\int$ (٢س − ٥) . ءس

ص = س^{٢} − ٥س + ث

ب) $\text{٣ق}'(\text{س}) - \text{٦س}^{\text{٢}} = \text{١}$

$\text{٣ق}'(\text{س}) = \text{١} + \text{٦س}^{\text{٢}}$

$\because \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}}$

$\int \text{ءص} = \int (\frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}})\ \text{ءس} .$

$\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{ث} .$

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٢س}^{\text{٢}}}$

$\text{٢س}^{\text{٢}} . \text{ءص} = \text{ص}^{\text{٢}} . \text{ءس} .$

$\int \frac{\text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}}} . \text{ءص} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢س}^{\text{٢}}}\ \text{ءس} .$

$-\text{ص}^{-\text{١}} = \frac{-\text{س}^{-\text{١}}}{\text{٢}} + \text{ث}$

$\frac{-\text{١}}{\text{ص}} = \frac{-\text{١}}{\text{٢س}} + \text{ث} .$

تدريب ١

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٥}}}$

ب) $(\text{ص} - \text{٢}) . \text{ءص} = \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} . \text{ءس}$

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١}}{\text{ص} + \text{١}}$

١) تطبيقات فيزيائية :

لقد درست في التفاضل أن السرعة مشتقة المسافة بالنسبة للزمن، وأن العجلة أو التسارع عبارة عن مشتقة السرعة بالنسبة للزمن، ويمكننا التعبير عنها بالصيغة الرياضية الآتية :

إذا كان : ف(ن) دالة المسافة بالنسبة للزمن فإن :

ع(ن) دالة السرعة بالنسبة للزمن ،

ت(ن) دالة التسارع بالنسبة للزمن .

$$\text{ف(ن)} \underset{\text{بالتكامل}}{\overset{\text{بالاشتقاق}}{\rightleftarrows}} \text{ع(ن)} \underset{\text{بالتكامل}}{\overset{\text{بالاشتقاق}}{\rightleftarrows}} \text{ت(ن)}$$

مثال ٢

يتحرك جسيم في خط مستقيم بعجلة ت(ن) = ٦ن + ٤ . أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة، علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ٢م/ث وأنه قطع مسافة ٢١م في أول ثانيتين من بدء الحركة .

الحل

ع(ن) = $\int$ ت(ن) . ءن = $\int$(٦ن + ٤) . ءن = ٣ن^{٢} + ٤ن + ث$_{١}$ ، حيث ث$_{١}$ ثابت

∵ السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢

∴ ث$_{١}$ = ٢

∴ ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢

ف(ن) = $\int$ ع(ن) . ءن = $\int$(٣ن^{٢} + ٤ن + ٢) . ءن = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ث$_{٢}$ ، حيث ث$_{٢}$ ثابت

∵ الجسيم قطع مسافة ٢١م في أول ثانيتين ∴ ف(٢) = ٢١

∴ (٢)^{٣} + ٢ × (٢)^{٢} + ٢ × ٢ + ث$_{٢}$ = ٢١

∴ ث$_{٢}$ = ١

∴ ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١

ف(٣) = (٣)^{٣} + ٢(٣)^{٢} + ٢ × ٣ + ١ = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١ = ٥٢م

تدريب ٢

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم من نقطة الأصل ، فإذا كانت عجلتها في اللحظة ن تعطى بالعلاقة :

ت (ن) = ٣ + ٢ن سم/ث^{٢} وكانت سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٤سم/ث ، أوجد :

أ) السرعة عند أي لحظة ن.

ب) المسافة المقطوعة خلال الثواني الأربعة الأولى من بدء الحركة.

٢) تطبيقات هندسية :

إذا علم ميل المماس $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لمنحنى عند أي نقطة عليه (س ، ص)، فإن معادلة المنحنى ص = د(س) تعطى بالعلاقة :

ص = د(س) معادلة المنحنى $\xrightarrow[\text{بالتكامل}]{\xleftarrow{\text{بالاشتقاق}}}$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ميل المماس للمنحنى

مثال ٣

إذا كان ميل المماس لمنحنى عند النقطة (س ، ص) يساوي (٣س^{٢} − ٤س + ٥)،

أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة (−١ ، ٥).

الحل

∵ ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} −٤س + ٥

ص = ∫ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$. دس = ∫ (٣س^{٢} −٤س + ٥) . دس = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٥س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٥)

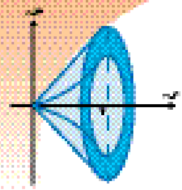
∴ ٥ = (−١)^{٣} − ٢ (−١)^{٢} + ٥ (−١) + ث ⟸ ومنه ث = ١٣

∴ معادلة المنحنى : ص = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٥س + ١٣

تدريب ٣

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ق(س) عند النقطة (١ ، −١) يساوي ١٠ حيث إن قً(س) = ١٨س − ٨ ،

أوجد ق(س).



تمارين &

مسائل (٢)

١ حل المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١$

ج) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{-٢}}{\text{س}^{٣}}$

ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٨\text{س} - ٧ = \text{صفر}$

د) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{٢\text{ص}^{٢}}$

٢ إذا كانت $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٦\text{س} - ١٢$ وكان ميل المماس لمنحنى الدالة يساوي −٥ عند النقطة (١ ، −٢) أوجد معادلة المنحنى .

٣ تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم مبتدئة بنقطة الأصل بعجلة ت(ن) = ٣ + ٢ ن سم/ث^{٢}، إذا كانت سرعتها الابتدائية ٤سم/ث أوجد :

أ) السرعة عند أي لحظة ن .

ب) المسافة المقطوعة خلال الثواني الثمان الأولى من بدء الحركة .

٤ إذا كانت دً(س) = ٢ ، دَ(١) = −٣ ، د(٠) = ١ أوجد د(س) .

٥ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}}$ فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

٦ إذا كان ميل المماس لمنحنى هو ٦س وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٤) فأوجد معادلة هذا المنحنى.

٧ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (١ ، −٢) الذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوي س^{٢}(١٥ − س) .

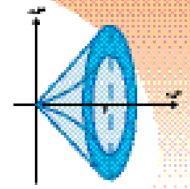
٨ إذا كان تسارع جسيم ت(ن) = ٦ن − $\frac{٣}{\sqrt{\text{ن}}}$ فأوجد المسافة والسرعة بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة إذا علمت أن المسافة ٩ متر والسرعة ٥ م/ث بعد ثانية واحدة من بدء حركته .

٩ قذفت كرة رأسيا إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٨٠مترًا من سطح الأرض بسرعة ابتدائية تساوي ٣٠متر/ث ، إذا كانت السرعة تعطى بالعلاقة : ع(ن) = ٣٠ − ١٠ ن احسب :

أ) موقع الكرة بعد زمن قدره ن .

ب) الزمن المستغرق حتى تصل الكرة إلى الأرض .

جـ) أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه الكرة .



١٠ تحركت حافلة من السكون من المحطة (أ) وبعد مرور دقيقتين ونصف مرت الحافلة في المحطة (ب) ، فإذا كانت سرعة الحافلة بعد مرور ن من الثواني تعطى بالعلاقة :
$ع = ٠,٦ ن - ٠,٠٠٤ ن^{٢}$ متر/ثانية أوجد المسافة بين المحطتين .

١١ إذا كان معدل تغير مساحة سطح صفيحة معدنية (م) بالنسبة للزمن ن بالدقيقة يعطى بالعلاقة:

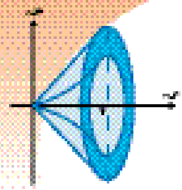
$$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{١٨٠} (٣ن^{٢} + ٢ن)$$

أوجد مساحة سطح هذه الصفيحة عند بدء التسخين إذا علم أن م=١٥٢م^{٢} عندما ن = ١٥ دقيقة.

١٢ عند تفريغ حمام سباحة به كمية معينة من الماء وجد أن معدل تغير حجم الماء في الحمام عند زمن ن دقيقة يتعين بالعلاقة:

$$\frac{ءح}{ءن} = ٦(٣ن - ٥٠)\text{م}^{٣}/\text{دقيقة} .$$

إذا علمت أن حجم الماء في الحمام بعد مرور ١٠ دقائق من بدء التفريغ يساوي ٤٠٠م^{٣} .
أوجد حجم الماء في الحمام عند بدء التفريغ ، واحسب الزمن اللازم حتى يتم التفريغ .



طرق التكامل

في كثير من الحالات نواجه مسائل تتطلب إيجاد تكاملات لدوال على صورة حاصل ضرب دالتين ، بحيث تكون إحدى الدالتين مشتقة للدالة الثانية أو ليست مشتقة للدالة الثانية . وهنا سنأخذ نوعين من التكاملات : التكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء:

أ) التكامل بالتعويض (طريقة تبديل المتغير): Intergation by Substitution

لاحظ أساليب التكامل في (أ) ، (ب) ، (جـ) ثم أجب عن الأسئلة التي تليه :

أ	ب	جـ
$\int (س+١)^٢ \cdot ءس$ $= \int (س^٢ + ٢س + ١) \cdot ءس$ $= \frac{س^٣}{٣} + س^٢ + س + ث$	$\int (س+١)^٢ \cdot ءس$ ضع $(س+١) = ع$ ومنها $ءس = ءع$ $\therefore \int (س+١)^٢ \cdot ءس = \int ع^٢ \cdot ءع$ $= \frac{ع^٣}{٣} + ث$ $= \frac{(س+١)^٣}{٣} + ث$ $= \frac{س^٣}{٣} + \frac{٣س^٢}{٣} + \frac{٣س}{٣} + \frac{١}{٣} + ث$ $= \frac{س^٣}{٣} + س^٢ + س + ث$	$\int (س+١)^٢ \cdot ءس$ $= \frac{(س+١)^٣}{٣} + ث$ $= \frac{س^٣}{٣} + \frac{٣س^٢}{٣} + \frac{٣س}{٣} + ١ + ث$ $= \frac{س^٣}{٣} + س^٢ + س + ١ + ث$ $= \frac{س^٣}{٣} + س^٢ + س + ث$
$\int (٥س+٢)^٣ \cdot ءس$ $= \int (١٢٥س^٣ + ١٥٠س^٢ + ٦٠س + ٨) \, ءس$ $= \frac{١٢٥}{٤}س^٤ + \frac{١٥٠}{٣}س^٣ + \frac{٦٠}{٢}س^٢ + ٨س + ث$	$\int (٥س+٢)^٣ \cdot ءس$ ضع $(٥س+٢) = ع$ $٥ \, ءس = ءع \Longleftarrow ءس = \frac{ءع}{٥}$ $\therefore \int (٥س+٢)^٣ \, ءس = \int ع^٣ \cdot \frac{ءع}{٥}$ $= \frac{١}{٥} \times \frac{ع^٤}{٤} + ث$ $= \frac{١}{٢٠} \times ع^٤ + ث$ $= \frac{١}{٢٠}(٥س+٢)^٤ + ث$ $= \frac{١}{٢٠}(٦٢٥س^٤ + ١٠٠٠س^٣ + ٦٠٠س^٢ + ١٦٠س + ١٦) + ث$ $= \frac{١٢٥}{٤}س^٤ + ٥٠س^٣ + ٣٠س^٢ + ٨س + ث$	$\int (٥س+٢)^٣ \, ءس .$ $= \frac{١}{٥} \int ٥(٥س+٢)^٣ \, ءس$ $= \frac{١}{٥} \left(\frac{(٥س+٢)^٤}{٤} \right) + ث$ $= \frac{١}{٢٠}(٥س+٢)^٤ + ث$ $= \frac{١٢٥}{٤}س^٤ + ٥٠س^٣ + ٣٠س^٢ + ٨س + ث$

١) لإيجاد $\int (٥س+٢)^{١٥} \, ءس$ ، أيهما أفضل استخدام: الأسلوب المتبع في (أ)، أو الأسلوب المتبع في (ب)، أو في (جـ)؟

٢) أي الأساليب أفضل عندما يكون الأس : ٣ ، ٧ ، ٢٠ ، ٦٠ ، .... ١١٠ ؟

٣) استنتج القاعدة لأفضل طريقة تراها .

تدريب ١

باستخدام ما توصلت إليه : أوجد : $\int (٥س + ١)^{٤}$ ءس .

مثال ١

أ) أوجد $\int (٤س - ٥)^{-٥}$ ءس باستخدام التكامل بالتعويض .

ب) أوجد $\int أ\,(أ\,س + ب)^{ن}$ ءس . (حيث أ ، ب : ثوابت . ن $\neq$ −١) .

الحل

أ) نفرض أن :

ص = ٤س − ٥

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ \Longleftarrow ءس = \frac{ءص}{٤}$

حيث : الرمز ءس يدل على أن التكامل يتم بالنسبة لـ س

$\therefore \int (٤س - ٥)^{-٥}\,ءس = \int ص^{-٥}\,\frac{ءص}{٤}$

$= \int \frac{١}{٤} \times ص^{-٥}\,ءص$

$= \frac{-١}{١٦}\,(٤س - ٥)^{-٤} + ث$

(لاحظ العلاقة بين الإجابة ودالة السؤال).

ب) افرض أن ك = أ س + ب

$\therefore \frac{ءك}{ءس} = أ \Longleftarrow ءس = \frac{ءك}{أ}$

$\therefore \int أ\,(أ\,س + ب)^{ن}\,ءس = \int أ(ك)^{ن}\,\frac{ءك}{أ} = \int ك^{ن}.\,ءك = \frac{ك^{ن+١}}{ن+١} + ث$.

$= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١} + ث$.

تدريب ٢

أوجد:

أ) $\int \text{س}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٤} + ١}\ \text{ءس}$

ب) $\int ٢\text{ك}\ (٢\text{ك س} + \text{ب})^{٢\text{ن}} \cdot \text{ءس}$.

نتيجة

$$\int \left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\text{ن}} \cdot \text{هـَ}(\text{س})\ \text{ءس} = \frac{\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$$

نستخدم النتيجة السابقة عند إيجاد تكامل مقدار يمكن كتابته على الصورة $\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\text{ن}} \cdot \text{هـَ}(\text{س})$

مثال ٢

أوجد $\int -٢\text{س} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}} \cdot \text{ءس}$

الحل

$\because$ -٢س مشتقة $(١ - \text{س}^{٢})$ موجودة $\Leftarrow$ $\therefore$ نستخدم النتيجة .

$\therefore \int -٢\text{س} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس} = \int -٢\text{س}(١ - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}} \cdot \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣}(١ - \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

مثال ٣

أوجد $\int \text{س}(\text{٥س}^{٢}+٢)^{٣} \,.\, \text{ءس}$

الحل

$$\int \text{س}(\text{٥س}^{٢}+٢)^{٣}\,\text{ءس} = \frac{١}{١٠}\int \text{١٠س}(\text{٥س}^{٢}+٢)^{٣}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{١٠}\;\frac{(\text{٥س}^{٢}+٢)^{٤}}{٤} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٤٠}(\text{٥س}^{٢}+٢)^{٤} + \text{ث}$$ (ماذا تلاحظ بين المثال والنتيجة؟)

تدريب ٣

أوجد $\int (\frac{١}{٣}\text{س} - ٢)^{٣٥} \,.\, \text{ءس}$

ب) التكامل بالأجزاء : Integration by Parts

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين بالصورة ق(س) . هـَ(س) .

افرض أن :

$$\text{د(س)} = \text{ق(س)} \,.\, \text{هـ(س)}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\Big(\text{ق(س)} \,.\, \text{هـ(س)}\Big) = \text{قَ(س)} \,.\, \text{هـ(س)} + \text{هـَ(س)} \,.\, \text{ق(س)} \,.$$

$$\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\Big(\text{ق(س)} \,.\, \text{هـ(س)}\Big)\text{ءس} = \int \text{قَ(س)} \,.\, \text{هـ(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـَ(س)} \,.\, \text{ق(س)}\,\text{ءس} \,.$$

$$\text{ق(س)} \,.\, \text{هـ(س)} + \text{ث} = \int \text{قَ(س)} \,.\, \text{هـ(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـَ(س)} \,.\, \text{ق(س)} \,.\, \text{ءس} \,.$$

$$\therefore \int \text{ق(س)} \,.\, \text{هـَ(س)} \,.\, \text{ءس} = \text{ق(س)} \,.\, \text{هـ(س)} - \int \text{قَ(س)} \,.\, \text{هـ(س)} \,.\, \text{ءس} + \text{ث}$$

وبصورة مختصرة : $\int$ ق. وهـ = ق . هـ − $\int$ هـ . وق . حيث : وهـ تعنى مشتقة الدالة هـ(س) ،
وق تعنى مشتقة الدالة ق(س) .

تسمى المعادلة بهذه الصورة معادلة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للآخر .

مثال ٤

أوجد : $\int \frac{٣س}{\sqrt[٣]{٢س + ١}}$. وس باستخدام التكامل بالأجزاء .

الحل

نفرض أن :

ق(س) = ٣س $\Longleftarrow$ وق = ٣. وس (لاحظ : المقدار ق(س) يفضل أن يكون مقدار سهل الاشتقاق) .

وهـ = $(٢س + ١)^{-\frac{١}{٣}}$. وس $\Longleftarrow$ هـ(س) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} (٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ (لاحظ : وهـ : مقدار سهل التكامل) .

هـ(س) = $\frac{٣}{٤} (٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$

$\because$ $\int$ ق . وهـ = ق . هـ − $\int$ هـ . وق .

$\therefore$ $\int \frac{٣س}{\sqrt[٣]{٢س + ١}}$. وس = ٣س × $\frac{٣}{٤} (٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ − $\int \frac{٣}{٤} (٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ × ٣. وس .

= $\frac{٩}{٤}$ س$(٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ − $\frac{٢٧}{٤٠} (٢س + ١)^{\frac{٥}{٣}}$ + ث .

تدريب ٤

استخدم التكامل بالأجزاء في إثبات :

$\int$ س^{ن} . وس = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + ث .

مثال ٥

أوجد $\int س^{٢} \sqrt{٣س - ٢}\ ءس$.

الحل

نفرض أن :

$ق(س) = س^{٢} \Longleftarrow ءق(س) = ٢س \ .\ ءس$.

$ءهـ = (٣س - ٢)^{\frac{١}{٢}} \Longleftarrow هـ(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٩} (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore \int ق \ .\ ءهـ = ق \ .\ هـ - \int هـ \ .\ ءق$.

$= س^{٢} \times \frac{٢}{٩} (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{٢}{٩} (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢س\ ءس$.

$= \frac{٢}{٩} س^{٢} (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{٤}{٩} س(٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} \ .\ ءس$

يكامل بالأجزاء مرة أخرى

نفرض أن :

$ق = \frac{٤}{٩} س \Longleftarrow ءق = \frac{٤}{٩} ءس$.

$ءهـ = (٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} \Longleftarrow هـ = \frac{٢}{١٥} (٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}}$.

$\therefore \int \frac{٤}{٩} س(٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} \ .\ ءس = \frac{٨}{١٣٥} س(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} - \int \frac{٨}{١٣٥} (٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} \ .\ ءس$

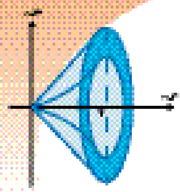
$= \frac{٨}{١٣٥} س(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{١٣٥} \times \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٧} (٣س - ٢)^{\frac{٧}{٢}} + ث$

$= \frac{٨}{١٣٥} س(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{١٦}{٢٨٣٥} (٣س - ٢)^{\frac{٧}{٢}} + ث$

$\therefore \int س^{٢} \sqrt{٣س - ٢} \ .\ ءس = \frac{٢}{٩} س^{٢}(٣س - ٢)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٨}{١٣٥} س(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١٦}{٢٨٣٥}(٣س - ٢)^{\frac{٧}{٢}} + ث$.

تدريب ٥

أوجد $\int ٥س \sqrt{س + ٣} \ .\ ءس$



تمارين &

مسائل (٣)

أوجد التكاملات التالية :

١ $\int (س + ١)^{٢} \cdot ءس$

٢ $\int (١ - ٣س)^{٤} \cdot ءس$

٣ $\int (٤س - ٦)^{٥} \cdot ءس$

٤ $\int س^{٢}(٢ - س)^{٣} \cdot ءس$

٥ $\int ٣س^{٢}(س^{٣} - ٧)^{٥} \cdot ءس$

٦ $\int ٦س \sqrt{٣س^{٢} + ٥} \cdot ءس$

٧ $\int \frac{٤س - ٦}{(س^{٢} - ٣س + ٥)^{٢}} \cdot ءس$

٨ $\int س(س + ١)^{٥} \cdot ءس$

٩ $\int \frac{(س - ١)^{٢}}{٢س^{٤}} \cdot ءس$

١٠ $\int \sqrt{س^{٢} - ٢س^{٤}} \cdot ءس$

١١ $\int \sqrt[٣]{س^{٥} - س^{٣}} \cdot ءس$

١٢ $\int \frac{(س + ١)^{٧}}{س^{٩}} \cdot ءس$

التكامل المحدود

Definite integration

إذا عرفت الدالة د(س) على فترة [أ ، ب] فقط ، فإن تكامل الدالة سيكون معرفًا على الفترة نفسها .

تدريب ١

أ) مثِّل بيانيًّا منحنى الدالة د(س) = ٢س + ١ في الفترة [١، ٤]،ثم احسب المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات في تلك الفترة معتمدًا على خصائص الشكل .

ب) أوجد الدالة المقابلة للدالة د(س) ثم احسب قيمة هذه الدالة في بداية الفترة ونهايتها، وأوجد الفرق بين القيمتين وقارن النتيجة مع النتيجة في (أ) .

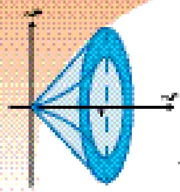
سنرمز للفرق بين قيمتي الدالة المقابلة عند بداية الفترة أ وعند نهايتها في ب بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) . ءس ونطلق عليه اسم التكامل المحدود ، كما تسمى أ ، ب بحدود التكامل .

وسنقدم فيما يلي النظرية الأساسية في حساب التكامل دون برهان :

نظرية :

إذا كانت الدالة د متصلة في الفترة [أ، ب] وكانت ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) في نفس الفترة فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} = \text{ق(س)} \Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = [\ \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}\ ] .$$



مثال ١

أوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{-١}^{٢} (٢\text{س} + ٣) \,.\, \text{ءس}$

ب) $\int_{٠}^{٣} \frac{٣}{\sqrt{\text{س} + ١}} \,.\, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int_{-١}^{٢} (٢\text{س} + ٣) \,.\, \text{ءس} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} \Big|_{-١}^{٢} = \left[((٢)^{٢} + ٣ \times ٢) - ((-١)^{٢} + ٣ \times -١) \right]$

$= \left[(٤ + ٦) - (١ - ٣) \right]$

$= ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $\int_{٠}^{٣} \frac{٣}{\sqrt{\text{س} + ١}} \,.\, \text{ءس} = \int_{٠}^{٣} ٣(\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} \,.\, \text{ءس}$

$= ٣ \times ٢ \, (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} \Big|_{٠}^{٣} = \left[(٦\sqrt{٣ + ١}) - (٦\sqrt{٠ + ١}) \right] = ٦$

تدريب ٢

أوجد قيمة :

أ) $\int_{٢}^{٤} \left(\text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{(\text{س} + ٥)^{٢}} \right) \,.\, \text{ءس}$

ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٦} - ٣) \,.\, \text{ءس}$.

خواص التكامل المحدد :

١) خاصية اللاتغير في الإشارة :

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكانت د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \,.\, \text{ءس} \geqslant ٠$.

مثال ٢

بين أن $\int_{٠}^{٢} \frac{٥س}{س^{٢}+٤} \, ءس \geqslant ٠$. (بدون حساب التكامل) .

الحل

$\because$ ٥س $\geqslant$ صفر $\forall$ س $\in$ [٠، ٢]

، $س^{٢}+٤ >$ صفر $\forall$س $\in$ [٠، ٢]

$\therefore \frac{٥س}{س^{٢}+٤} \geqslant$ صفر

$\therefore \int_{٠}^{٢} \frac{٥س}{س^{٢}+٤} \, ءس \geqslant ٠$.

تدريب ٣

أ) وضح بدون حساب قيمة التكامل أن $\int_{-٢}^{٢} (س^{٢}+١) \, ءس \geqslant ٠$.

ب) إذا كانت د(س) $\geqslant$ هـ(س) ، لكل س $\in$ [أ ، ب] . فاثبت أن $\int_{أ}^{ب} (د(س) - هـ(س)) \, ءس \geqslant ٠$.

٢) خاصية المقارنة :

إذا كانت كل من د(س) ، هـ(س) دالتين قابلتين للتكامل في [أ ، ب] ، وكانت د(س) $\geqslant$ هـ(س) لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن :

$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ءس \geqslant \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, ءس$

مثال ٣

اثبت دون حساب التكامل أن $\int_{٠}^{١} س \, ءس \geqslant \int_{٠}^{١} س^{٢} \, ءس$.

الحل

$\because$ س $\geqslant س^{٢} \forall$ س $\in$ [٠ ، ١] فسِّر السبب .

$\therefore \int_{٠}^{١} س \, ءس \geqslant \int_{٠}^{١} س^{٢} \, ءس$.

تدريب ٤

اثبت بدون حساب التكامل أن :

$$\int_{-1}^{2} (\text{س}^2 + 1)\ \text{ءس} \geqslant \int_{-1}^{2} (\text{س} - 1)\ \text{ءس}$$

٣) خاصية اللا تغير عند الانسحاب :

إذا كانت ق(س) قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{\text{أ} + \text{جـ}}^{\text{ب} + \text{جـ}} \text{ق(س} - \text{جـ)}\ \text{ءس}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{\text{أ} - \text{جـ}}^{\text{ب} - \text{جـ}} \text{ق(س} + \text{جـ)}\ \text{ءس}$$

أي :

إذا كان $\int_{5}^{6} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = 4$ فإن : $\int_{3}^{4} \text{ق(س} + 2)\ \text{ءس} = \int_{3+2}^{4+2} \text{ق(س} + 2 - 2)\ \text{ءس} = \int_{5}^{6} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = 4$

مثال ٤

إذا كان $\int_{2}^{4} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = 12$ فأوجد $\int_{-1}^{1} \text{ق(س} + 3)\ \text{ءس}$.

الحل

$$\int_{-1}^{1} \text{ق(س} + 3)\ \text{ءس} = \int_{-1+3}^{1+3} \text{ق(س} + 3 - 3)\ \text{ءس}$$

$$= \int_{2}^{4} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$$

$$= 12$$

تدريب ٥

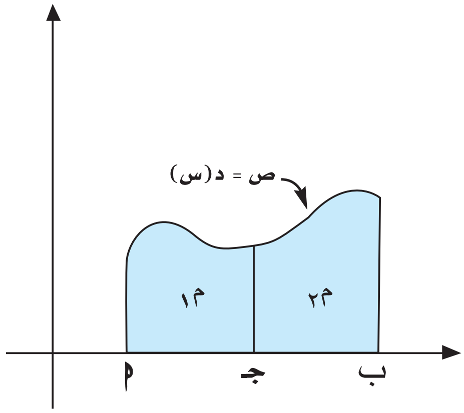
إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = 4$ فأوجد $\int_{\text{أ} - 3}^{\text{ب} - 3} \text{ق(س} + 3)\ \text{ءس}$.

٤) خاصية الإضافة :

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في الفترة [م ، ب]

وكان م < جـ < ب فإن :

$$\int_{م}^{ب} د(س) \cdot ءس = \int_{م}^{جـ} د(س) \cdot ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س) \cdot ءس$$



مثال ٥

عبر بتكامل واحد :

$$\int_{-٣}^{٢} د(س) \cdot ءس + \int_{٢}^{٥} د(س) \cdot ءس \,.$$

الحل

$$\int_{-٣}^{٢} د(س) \cdot ءس + \int_{٢}^{٥} د(س) \cdot ءس = \int_{-٣}^{٥} د(س) \cdot ءس \,.$$

تدريب ٦

إذا كانت د(س) = |س − ١| ، س ∈ [٠ ، ٢] ، عبر عن $\int_{٠}^{٢} د(س) \, ءس$.

- خاصيتا تبديل الحدود والتكامل عند نقطة .

٥) $\int_{م}^{ب} د(س) \cdot ءس = -\int_{ب}^{م} د(س) \cdot ءس$

٦) $\int_{م}^{م} د(س) \cdot ءس = صفر$

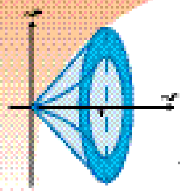
مثال ٦

إذا كان $\int_{٢}^{٥} ق(س) \cdot ءس = ٧$ ، أوجد أ) $\int_{٣}^{٣} ق(س) \cdot ءس$ ب) $\int_{٥}^{٢} ق(س) \cdot ءس$

الحل

أ) $\int_{٣}^{٣} ق(س) \cdot ءس = د(٣) - د(٣) = صفر$

ب) $\int_{٥}^{٢} ق(س) \cdot ءس = -\int_{٢}^{٥} ق(س) \cdot ءس = -٧$



تدريب ٧

عبر بتكامل واحد :

$$\int_{-٢}^{١} \sqrt{س + ١}\ .\ ءس - \int_{٥}^{١} \sqrt{س + ١}\ .\ ءس$$

مثال ٧

إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} ٢س & ،\ س \leqslant ١ \\ ٣س^٢ + ١ & ،\ س > ١ \end{cases}$ فأوجد $\int_{-١}^{٠} ق(س)\ ءس$.

الحل

$$\int_{-١}^{٠} ق(س)\ .\ ءس = \int_{-١}^{٠} ٢س\ .\ ءس$$

$$= س^٢ \Big|_{-١}^{٠} = [(٠)^٢ - (-١)^٢] = -١$$

تدريب ٨

إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ،\ س \leqslant ٢ \\ س^٢ - ٢س & ،\ س > ٢ \end{cases}$$

أوجد : أ) $\int_{٠}^{٤} د(س)\ .\ ءس$ ب) $\int_{-٢}^{١} د(س)\ .\ ءس$.

مثال ٨

أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} |٢س + ٢|\ .\ ءس$

الحل

نعيد تعريف الدالة $|٢س + ٢| = \begin{cases} -(٢س + ٢) & ،\ س \leqslant -١ \\ (٢س + ٢) & ،\ س > -١ \end{cases}$

$$\int_{٠}^{٣} |٢س + ٢|\ .\ ءس = \int_{٠}^{٣} (٢س + ٢)\ .\ ءس$$ ....(لماذا) ؟

$$= س^٢ + ٢س \Big|_{٠}^{٣} = (٩ + ٦) - (٠ + ٠)$$

$$= ١٥$$

تدريب ٩

أوجد قيمة $\int_{١}^{٥} \left| \frac{١}{٢}\text{س} - ١ \right| \, .\, \text{ءس}$.

مثال ٩

أوجد قيمة التكامل : $\int_{-٢}^{٣} [\text{س}] \, .\, \text{ءس}$

الحل

لإيجاد تكامل دالة صحيح العدد لابد من إعادة تعريف الدالة وذلك من خلال تجزئة الفترة .

$\because$ طول الفترة الجزئية = $\frac{١}{|\text{م}|}$ $\quad \therefore$ طول الفترة = $\frac{١}{١}$ = ١ ، حيث م : معامل س .

إعادة تعريف الدالة :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} -٢ \ , & -٢ \leqslant \text{س} < -١ \\ -١ \ , & -١ \leqslant \text{س} < ٠ \\ ٠ \ , & ٠ \leqslant \text{س} < ١ \\ ١ \ , & ١ \leqslant \text{س} < ٢ \\ ٢ \ , & ٢ \leqslant \text{س} < ٣ \\ ٣ \ , & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$$\int_{-٢}^{٣} [\text{س}] \, .\, \text{ءس} = \int_{-٢}^{-١} -٢ \, .\, \text{ءس} + \int_{-١}^{٠} -١ \, .\, \text{ءس} + \int_{٠}^{١} \text{صفر} \, .\, \text{ءس} + \int_{١}^{٢} ١ \, .\, \text{ءس} + \int_{٢}^{٣} ٢ \, .\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٣} ٣ \, .\, \text{ءس}$$

$$= -٢(-١ - (-٢)) -١(٠ - (-١)) + ٠(١ - ٠) + ١(٢ - ١) + ٢(٣ - ٢) + ٠$$

$$= -٢ - ١ + ٠ + ١ + ٢ + ٠$$

$$= \text{صفر} .$$

مثال ١٠

أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٢} [\frac{\text{س}}{٢} - ٣] \, \text{ءس}$.

الحل

طول الفترة $= \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

$$\therefore [\frac{\text{س}}{٢} - ٣] = \begin{cases} -٤ & -٢ \leqslant \text{س} < ٠ \\ -٣ & ٠ \leqslant \text{س} < ٢ \\ -٢ & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} [\frac{\text{س}}{٢} - ٣] \, \text{ءس} = \int_{-٢}^{٠} -٤ \, \text{ءس} + \int_{٠}^{٢} -٣ \, \text{ءس} + \int_{٢}^{٢} -٢ \, \text{ءس}$$

$$= -٤ \left(٠ - (-٢)\right) + -٣(٢ - ٠) + ٠ = -٨ - ٦ = -١٤$$

تدريب ١٠

إذا كانت $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٣ & \text{،} \quad \text{س} \leqslant ١ \\ [\frac{١}{٢} \text{س}] & \text{،} \quad ١ < \text{س} < ٥ \\ |\text{س} - ٣| & \text{،} \quad \text{س} \geqslant ٥ \end{cases}$

فأوجد $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س)} \, \text{ءس}$.

تمارين &

مسائل (٤)

١ أوجد قيمة التكاملات التالية :

أ) $\int_{٠}^{١} \frac{\text{س} + ١}{(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)^٤} \, . \, \text{ءس}$

ب) $\int_{-١}^{٠} (٢ - \text{س})^٤ \, . \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{٥} [\frac{\text{س}}{٢} + ١] \, . \, \text{ءس}$.

د) $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{(٢\text{س} - ٥)^٥} \, . \, \text{ءس}$.

هـ) $\int_{-٢}^{٣} (١ - \frac{١}{٢}) \, . \, \text{ءس}$.

و) $\int_{-١}^{٢} |\text{س} - ٣| \, . \, \text{ءس}$.

٢ أوجد قيمة :

أ) $\int_{٤}^{٩} ٢\text{س} \sqrt{\text{س}} \, . \, \text{ءس}$.

ب) $\int_{-١}^{٢} \text{س}(١ + \text{س}^٣) \, . \, \text{ءس}$.

٣ إذا كان $\int_{٠}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ١) \, . \, \text{ءس} = ٦$ فما قيمة ب .

٤ أوجد $\int_{٠}^{٢} ٣\text{س}^٢ \sqrt{\text{س}^٣ + ١} \, . \, \text{ءس}$.

٥ $\int_{٠}^{١} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س} + ١} - \sqrt{\text{س}}}$.

٦ $\int_{٢}^{٦} [\frac{\text{س}}{٢}] \, \text{ءس}$.

٧ إذا كان $\int_{-١}^{١} \left(٥\,\text{ق}(\text{س}) + ٢\,\text{هـ}(\text{س})\right) .\, \text{ءس} = ٣٠$ ، $\int_{-١}^{١} ٢\,\text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٨$

فما قيمة $\int_{-١}^{١} \text{هـ}(\text{س}) .\, \text{ءس}$.

٨ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + |\text{س}|$ ، $\text{س} \in [-١ ، ٤]$

فأوجد $\int_{-١}^{٤} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$.

٩ إذا كان $\int_{٢}^{\text{م}} (٢ - ٢\text{س}) .\, \text{ءس} = \text{صفر}$. أوجد قيم الثابت م .

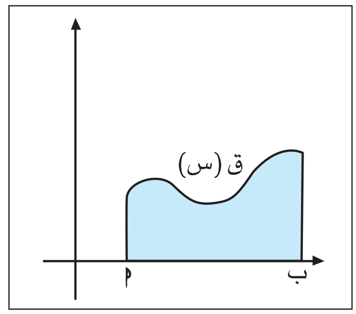
١٠ ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣ & ، \quad \text{س} \leqslant ١ \\ [\text{س} + ١] & ، \quad ١ < \text{س} < ٣ \\ |\text{س} - ٧| & ، \quad \text{س} \geqslant ٣ \end{cases}$

فأوجد $\int_{٠}^{٥} \text{ق}(\text{س}) .\, \text{ءس}$.

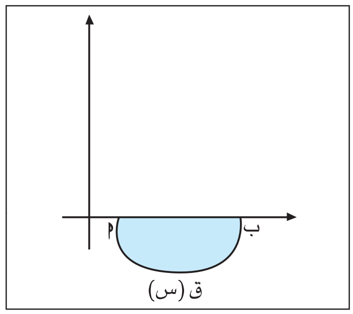
المساحات Areas

أ) المساحة تحت منحنى الدالة :

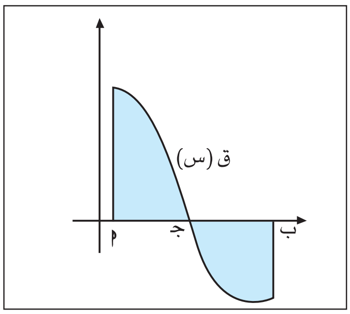
أولاً : إيجاد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب].



ق(س) ⩾ ٠
لا تغير الدالة إشارتها في الفترة
[أ، ب]



ق(س) ⩽ ٠
لا تغير الدالة إشارتها في الفترة
[أ، ب]



ق(س) تغير إشارتها عند س = جـ
ق(س) ⩽ ٠ في الفترة [جـ ، ب]
ق(س) ⩾ ٠ في الفترة[أ ، جـ]

ملاحظة

❖ لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى وإن اعطيت حدود التكامل .

❖ تتغير إشارة ق(س) في الفترة [أ، ب]، إذا كانت ق(س) متصلة ووجد نقطتين جـ ، هـ ∈ [أ، ب] وكانت إشارة ق(جـ) تختلف عن إشارة ق(هـ) .

تعريف

أ) إذا كانت الدالة د(س) قابلة للتكامل وكانت د(س) ⩾ ٠ ∀ س ∈ [أ، ب] أو د(س) ⩽ ٠ ∀ س ∈ [أ ، ب] ، وكانت م تمثل مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = أ، س = ب فإن م تعطى بالعلاقة : م = $\left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس} \right|$.

ب) إذا كانت الدالة د(س) تغير إشارتها عند س = جـ (مثلا) فنجزء التكامل حسب فترات التجزئة مثل ، م = $\text{م}_1 + \text{م}_2$ = $\left| \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) . ءس} \right| + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} \right|$.

مثال ١

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى د (س) = $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣$ ومحور السينات

الحل

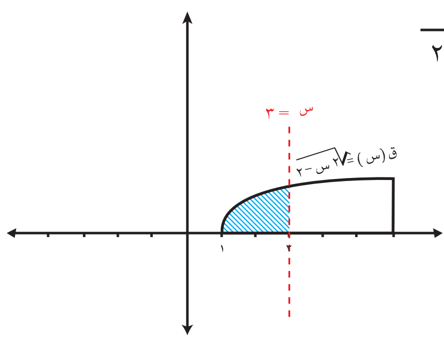
نوجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٣$ أو $\text{س} = -١$

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} \right| = \left| \int_{-١}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣)\,.\,\text{ءس} \right| = \left| \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}^{٢} - ٣\text{س} \right]_{-١}^{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال ٢



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{٢\text{س} - ٢}$

ومحور السينات والمستقيم س = ٣

الحل

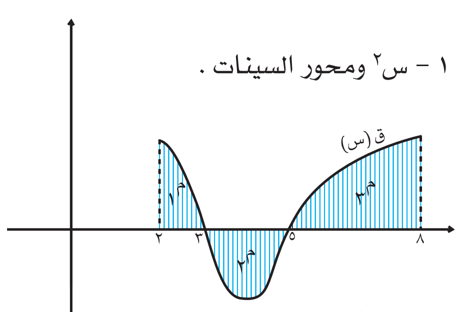
نوجد أصفار الدالة $\Leftarrow \sqrt{٢\text{س} - ٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

$$\text{م} = \left| \int_{١}^{٣} \sqrt{٢\text{س} - ٢}\,.\,\text{ءس} \right| = \left| \int_{١}^{٣} (٢\text{س} - ٢)^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(٢\text{س} - ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{(٢ \times \frac{٣}{٢})} \right]_{١}^{٣} \right| = \frac{٨}{٣}$$ وحدة مربعة

تدريب ١

١) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = $١ - \text{س}^{٢}$ ومحور السينات .



٢) اعتمد على الشكل المجاور لإيجاد :

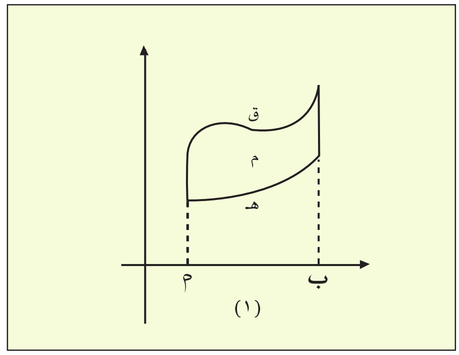
أ) مساحة المنطقة (م) .

حيث $\text{م} = \text{م}_{١} \cup \text{م}_{٢} \cup \text{م}_{٣}$

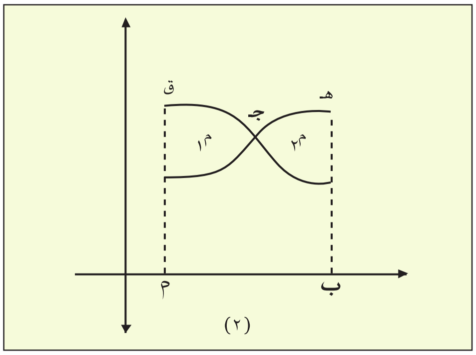
(علمًا بأن مساحات المناطق م١ ، م٢ ، م٣ هي ٥ ، ٧ ، ٨ على الترتيب)

ب) $\int_{٢}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{ءس}$

ثانيًا: إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين :



الدالة (ق − هـ) لا تغير إشارتها في [ا، ب]



الدالة (ق − هـ) تغير إشارتها بين ا، ب لوجود نقطة التقاطع عند س = جـ .

ملاحظة

تغير الدالة (ق − هـ) من إشارتها في [ا ، ب] إذا وفقط إذا وجد على الأقل نقطة تقاطع للمنحنيين مثل جـ بين ا ، ب .

نظرية :

أ) إذا كان ق(س) − هـ(س) لا يغير من إشارته في [ا، ب]، وكان ق(س) ⩾ هـ(س) في تلك الفترة، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ق ، هـ تعطى بالقاعدة :

$$\text{م} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \left(\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right) .\ \text{ءس} .$$

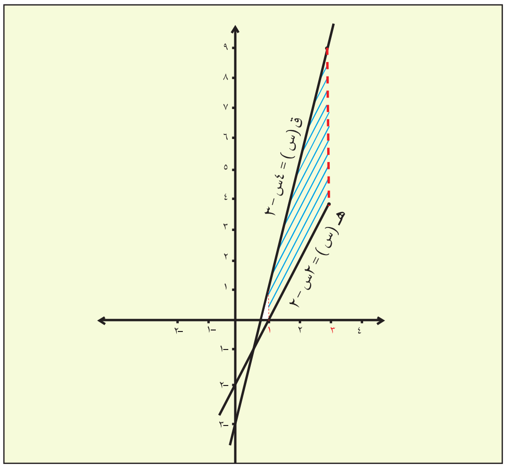
ب) إذا تقاطع منحنى الدالتين ق ، هـ عند س = جـ بين ا، ب كما في الشكل الثاني في الصفحة أعلاه فإن:

$$\text{م} = \left| \int_{\text{ا}}^{\text{جـ}} (\text{ق} - \text{هـ}) .\ \text{ءس} \right| + \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ}) .\ \text{ءس} \right|$$

مثال ٣

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س} - ٣$

ومنحنى $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٢$ والمستقيمان س=١ ، س = ٣



الحل

ابحث عن أصفار الدالة :

$٤\text{س} - ٣ = ٢\text{س} - ٢$

$\therefore\ ٢\text{س} = ١ \Longleftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}\ .\ \Longleftarrow \frac{١}{٢} \notin [١ ، ٣]\ .$

$\text{م} = \left|\int_{١}^{٣} (\text{ق} - \text{هـ})\ .\ \text{ءس}\right| = \left|\int_{١}^{٣} ((٤\text{س} - ٣) - (٢\text{س} - ٢))\ .\ \text{ءس}\right|$

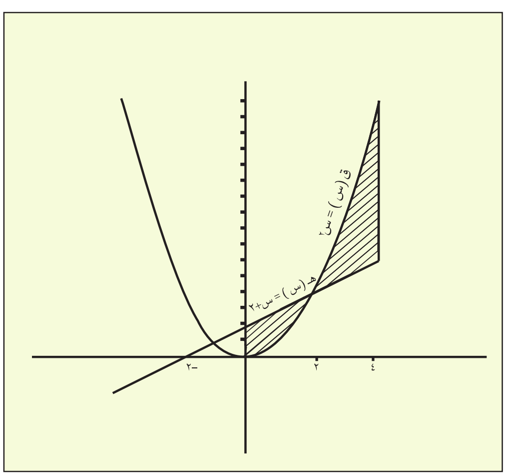
$= \left|\int_{١}^{٣} (٢\text{س} - ١)\ .\ \text{ءس}\right| = \left|(٣^{٢} - ٣) - (١ - ١)\right| = ٦$ وحدات مربعة

تدريب ٢

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص}_{١} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{ص}_{٢} = \sqrt{\text{س}}$.

مثال ٤

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ومنحنى $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} + ٢$ والمستقيمان س = ٠ ، س = ٤ .



الحل

$\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) = ٠$

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠ \Longleftarrow (\text{س} - ٢)\ (\text{س} + ١) = ٠$

إما $\text{س} = -١ \notin [٠ ، ٤]$

أو $\text{س} = ٢ \in [٠ ، ٤]$

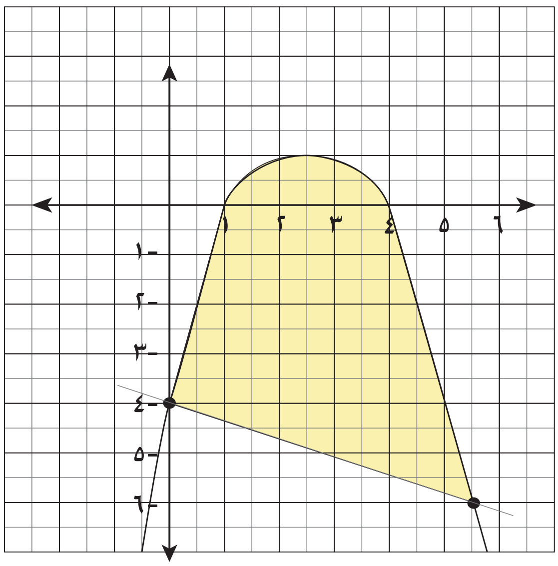
$\therefore\ \text{م} = \left|\int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)\ .\ \text{ءس}\right| + \left|\int_{٢}^{٤} (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)\ .\ \text{ءس}\right|$

$= \left|\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{٠}^{٢}\right| + \left|\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{٢}^{٤}\right|$

$= \left|(\frac{٨}{٣} - ٢ - ٤)\right| + \left|((\frac{٦٤}{٣} - ٨ - ٨) - (\frac{٨}{٣} - ٢ - ٤))\right| = \frac{١٠}{٣} + \frac{٢٦}{٣} = \frac{٣٦}{٣} = ١٢$ وحدة مساحة .

تدريب ٣

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .



مثال ٥

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

$ق(س) = س^{٣}$ ، $هـ(س) = س$

وأحد المستقيمات $س = ٠$

الحل

نوجد نقاط التقاطع (حدود التكامل) بمساواة الدالتين معًا .

$س^{٣} = س \Longleftarrow س^{٣} - س = ٠$

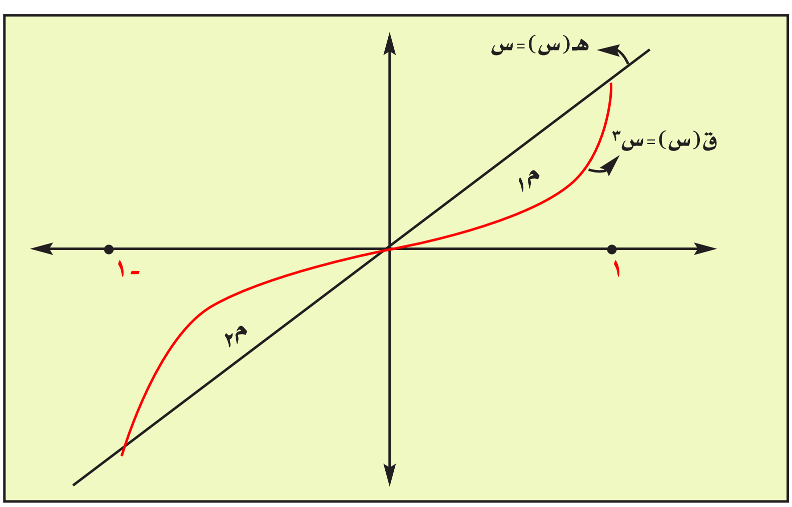
$\Longleftarrow س(س^{٢} - ١) = ٠$

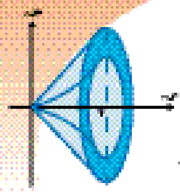
$\Longleftarrow س = ٠$ ، $س = ١$ ، $س = -١$

فالمساحة المطلوبة والتي هي عبارة عن مساحتين أي $م = م_{١} + م_{٢}$

$$م = \left|\int_{-١}^{٠} (س^{٣} - س)\, ءس\right| + \left|\int_{٠}^{١} (س^{٣} - س)\, ءس\right|$$

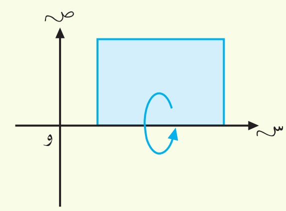
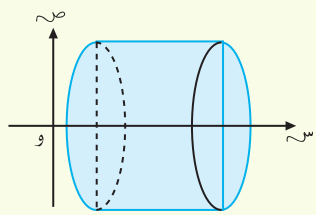
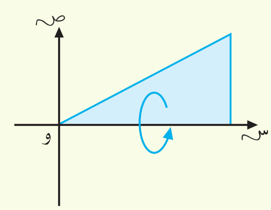
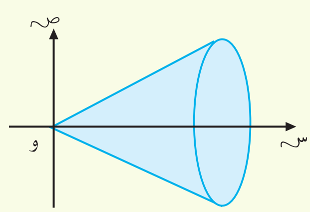
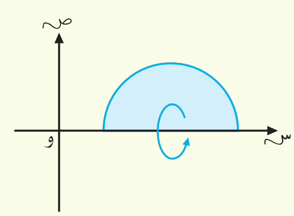
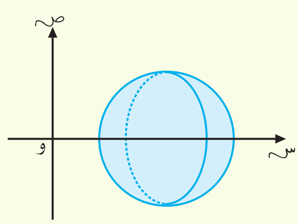
$$= \left|\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢}\right|_{-١}^{٠} + \left|\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢}\right|_{٠}^{١} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$





ب) حجوم الأجسام الدورانية (Volumes Of Revolution):

تأمل الأشكال الآتية ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

أ	ب
	
	
	

١) ما اسم كل شكل من الأشكال المرسومة في المستوى الإحداثي في العمود أ ؟

٢) إذا دارت كل منطقة مستوية مرسومة في الأشكال الثلاثة في أ ، فما اسم الجسم الناتج من دوران كل منها في العمود ب ؟

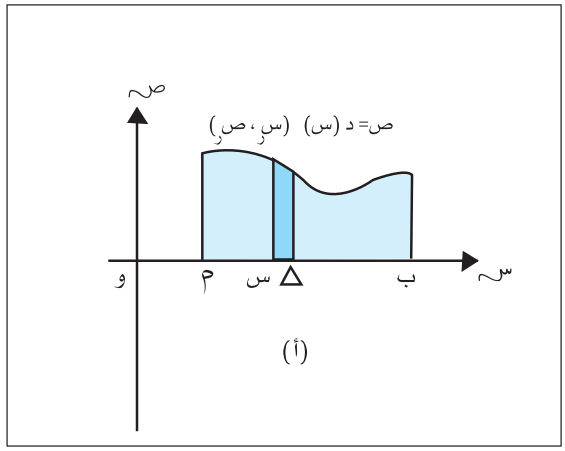
٣) هل يمكنك إيجاد حجوم الأجسام الناتجة من الدوران باستخدام التكامل ؟

ملاحظة

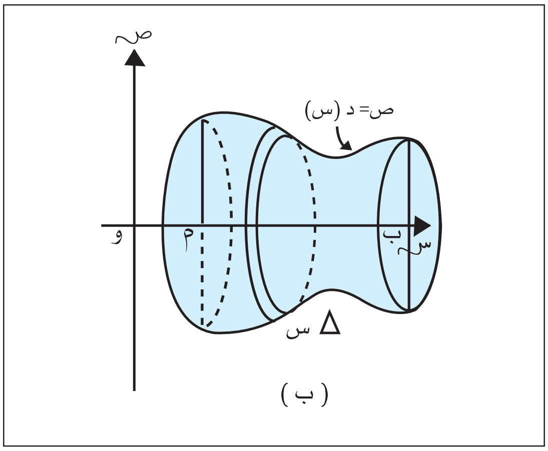
إذا دارت منطقة مستوية حول مستقيم في مستواها، فإن الجسم الناتج من الدوران يُسمى (جسم دوراني) ، ويُسمى المستقيم (محور الدوران).

أولا : حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ص= د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني .

إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنى ص = د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب ، كما في الشكل أدناه حول المحور السيني ينتج جسم دوراني .



(أ)



(ب)

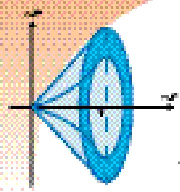
دوران شريحة المساحة المظللة حول المحور السيني ينتج عنه تقريبا قرص دائري قاعدته منطقة دائرية طول نصف قطرها $\text{ص}_{ر}$ ، وارتفاعه ءس ، وحجمه تقريبا $\pi\,\text{ص}_{ر}^{2}$ ءس .

ويكون الحجم الفعلي للجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة بكاملها عبارة عن مجموع حجوم الأقراص (π ص٢ . ءص) الناتج من الأقراص الدائرية المتلاصقة الناتجة من دوران الشرائح المساحية المكونة للمنطقة حول المحور السيني، وهذا المجموع يعطى من خلال تكامل حجم إحدى هذه الأقراص من بداية الفترة إلى نهايتها .

∴ حجم الجسم الدوراني = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi\, \text{ص}^{2} \,.\, \text{ءس}$

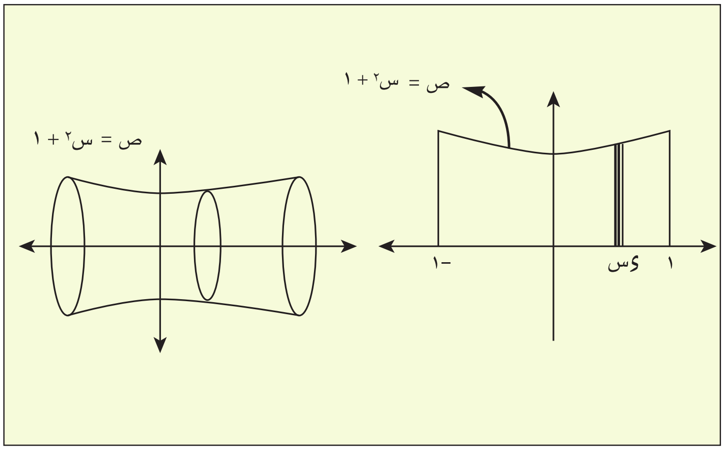
مثال ٦

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = س٢ + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ١ حول المحور السيني.



الحل

حجم الجسم الناتج من الدوران = ح



$$\therefore \text{ح} = \int_{-1}^{1} \pi \, \text{ص}^2 \, . \, \text{ءس} \, .$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi \, (\text{س}^2 + ١)^2 \, . \, \text{ءس} \, .$$

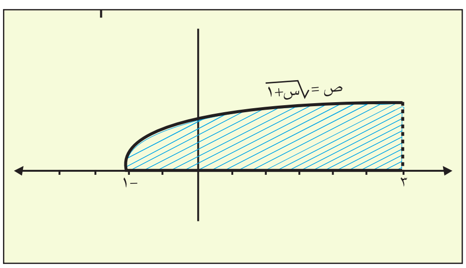
$$= \int_{-1}^{1} \pi \, (\text{س}^4 + ٢\text{س}^2 + ١) \, . \, \text{ءس} \, .$$

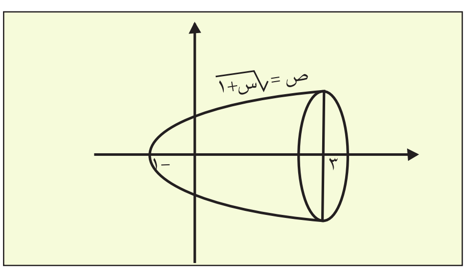
$$= \pi \left(\tfrac{١}{٥} \text{س}^5 + \tfrac{٢}{٣} \text{س}^3 + \text{س} \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{٥٦}{١٥} \, \pi \ \text{وحدة حجم}$$

مثال ٧

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ومحور السينات والمستقيم س = ٣ حول المحور السيني .





الحل

نجد الحد الآخر للتكامل $\sqrt{\text{س} + ١} = ٠$ ، س + ١ = ٠ ، س = ١-

$$\text{ح} = \pi \int_{-1}^{3} \left(\sqrt{\text{س} + ١} \right)^2 \cdot \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{-1}^{3} (\text{س} + ١) \cdot \text{ءس}$$

$$= \pi \left(\frac{\text{س}^2}{٢} + \text{س} \right) \Big|_{-1}^{3} = ٨ \, \pi \ \text{وحدة حجم .}$$

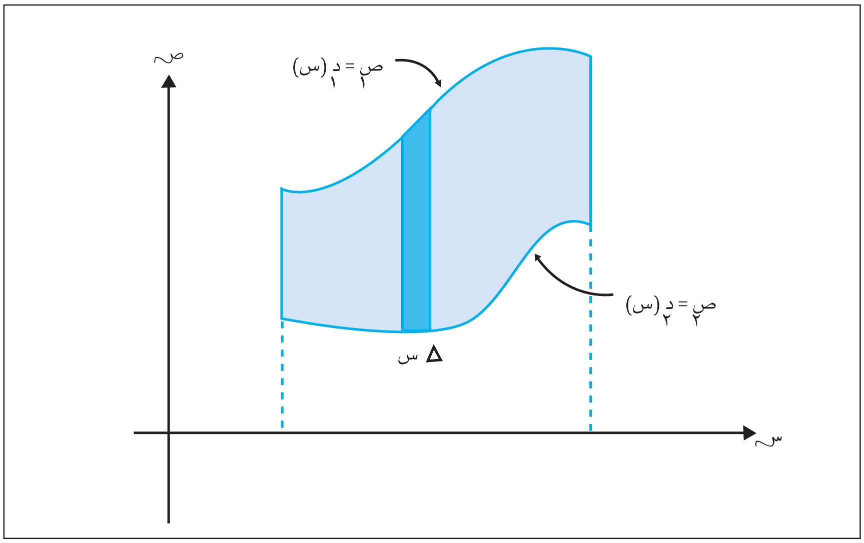
تدريب ٤

أ) ما حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ٤س – س^2 ومحور السينات حول المحور السيني ؟

ب) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : ص = ٤ – ٢س والمحور السيني والمستقيمين س = ٠ ، س = ١ حول المحور السيني .

ثانيا : حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيين حول المحور السيني .

إذا أعتبرنا المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $ص_١ = د_١ (س)$ ، ومنحنى الدالة $ص_٢ = د_٢ (س)$ والمستقيمين $س = ﺃ$ ، $س = ب$ ،كما في الشكل التالي :



فإن دوران الشريحة المساحية المظللة حول المحور السيني ينتج عنه حلقة دائرية،طول نصف قطرها الخارجي $ص_١$ وطول نصف قطرها الداخلي $ص_٢$ وارتفاعها (سمكها) ؤس وحجمها $\simeq \pi (ص_١^٢ - ص_٢^٢)$ ؤس .

وسيكون حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة بأكملها حول المحور السيني يساوي تكامل الدالة الناتجة من الحلقات المتلاصقة.

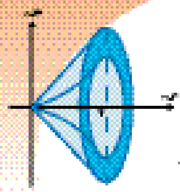
حجم الجسم الناتج من الدوران $= \pi \int_{ﺃ}^{ب} (ص_١^٢ - ص_٢^٢) \cdot$ ؤس

حيث $ص_١ \geqslant ص_٢$ لكل $س \in [ﺃ ، ب]$

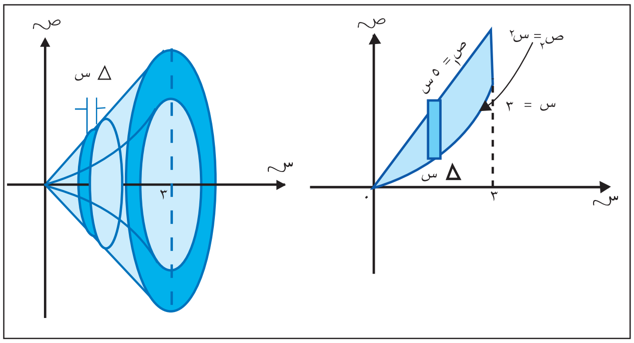
تؤخذ القيمة المطلقة في حالة عدم معرفة أيهما أكبر $ص_١$ ، $ص_٢$.

مثال ٨

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $ص = ٥س$ ومنحنى الدالة $ص = س^٢$ والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٣$ حول محور السينات .



الحل



نرسم رسما تقريبيًّا للشكل :

حيث إن $٥\text{س} \geqslant \text{س}^{٢}$ في الفترة $[٠،٣]$

$$\therefore \text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} \left((٥\text{س})^{٢} - (\text{س}^{٢})^{٢} \right) \cdot \text{ءس}$$

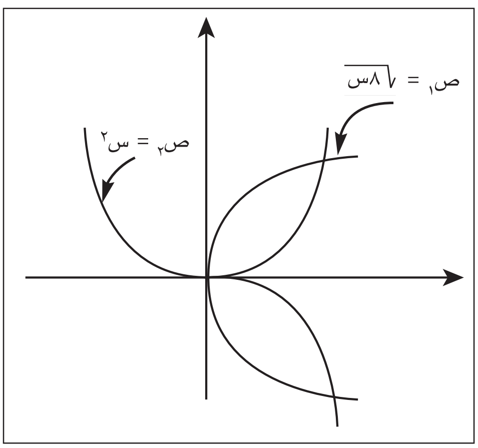
$$= \pi \int_{٠}^{٣} \left(٢٥\,\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤} \right) \cdot \text{ءس}$$

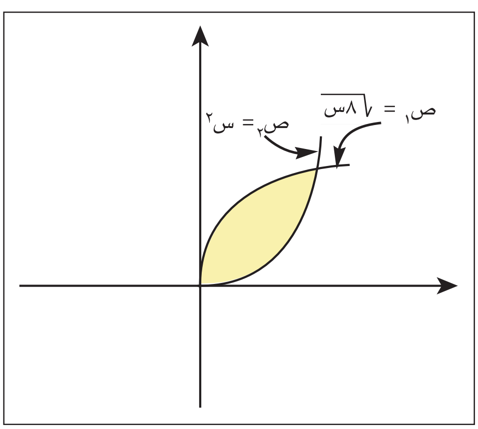
$$= \pi \left(\frac{٢٥}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} \right) \Big]_{٠}^{٣} = \pi \left(٢٢٥ - \frac{٢٤٣}{٥} \right) = \frac{٨٨٢}{٥}\pi \text{ وحدة حجم}$$

مثال ٩

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى :

$\text{ص}_{١} = \sqrt{٨\text{س}}$ ، $\text{ص}_{٢} = \text{س}^{٢}$





الحل

نرسم رسما تقريبيًّا للشكل

نوجد حدود التكامل (نقاط تقاطع المنحنيين) :

$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$

$\therefore \text{س}^{٢} = \sqrt{٨\text{س}}$

$\therefore \text{س}^{٤} = ٨\text{س} \Longleftarrow \text{س}^{٤} - ٨\text{س} = ٠$

$\Longleftarrow \text{س}(\text{س}^{٣} - ٨) = ٠$

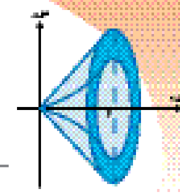
$\Longleftarrow \text{س} = ٠$ أو $\text{س} = ٢$

$$\therefore \text{ح} = \int_{٠}^{٢} \pi \left((\sqrt{٨\text{س}})^{٢} - (\text{س}^{٢})^{٢} \right) . \text{ءس} .$$

$$= \pi \int_{٠}^{٢} (٨\text{س} - \text{س}^{٤})\, \text{ءس} .$$

$$= \pi \left(٤\text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٥}}{٥} \right) \Big|_{٠}^{٢}$$

$$= \pi \left[\left(١٦ - \frac{٣٢}{٥} \right) - (\text{صفر}) \right] = \frac{٤٨\pi}{٥} \text{ وحدة حجم} .$$



تدريب ٥

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

$\text{ص} = \frac{1}{4}\,\text{س}^2 + 2$ ، $5\,\text{س} - 8\,\text{ص} + 14 = 0$ حول المحور السيني

مثال ١٠

استخدم التكامل لإثبات أن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة التي طول نصف قطر قاعدتها (نق) وارتفاعها (ع) يساوي :

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\text{ع}$

الحل

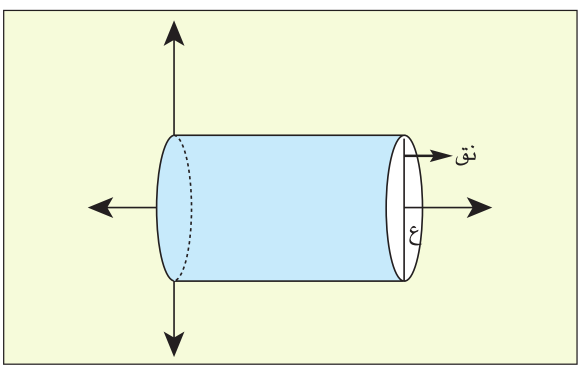
يمثل الشكل المجاور الأسطوانة الناتجة من دوران المستطيل حول أحد أضلاعه أو دوران المنطقة المحددة بمنحنيات ص = نق ، س = ع حول محور السينات في الفترة [٠ ، ع] ، وعليه فإن حجم الشكل الناتج هو :

$$\text{ح} = \pi \int_{0}^{\text{ع}} \text{ص}^2 \,.\, \text{ءس} = \pi \int_{0}^{\text{ع}} \text{نق}^2 \,\text{ءس}$$

$$= \pi\,\text{نق}^2\,\text{س}\Big|_{0}^{\text{ع}}$$

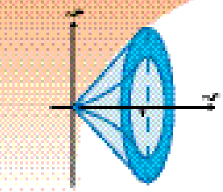
$$= \pi\,\text{نق}^2\,(\text{ع} - 0)$$

$$= \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع} \,.$$



تدريب ٦

استخدم التكامل المحدد لاشتقاق الصيغة التي تعطي حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه (ع) ، وطول نصف قطر قاعدته (نق) .



تمارين &

مسائل (٥)

١ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ٢}$
والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢ ومحور السينات .

٢ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ق(س) = س^{٢} −٣س ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٢.

٣ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين ق(س) = س^{٢} − ٢س ، هـ (س) = ٢س − س^{٢}.

٤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ق (س) = س^{٢} + ١ والمستقيم ص = ٥.

٥ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين ق(س) = س^{٤} + ١، هـ (س) = ٢س^{٢} .

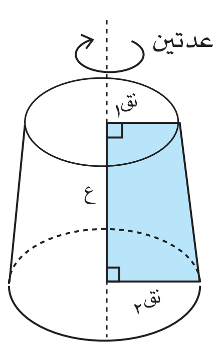
٦ اثبت باستخدام التكامل أن حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} π ع .

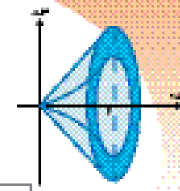
٧ استخدم التكامل المحدد لاشتقاق الصيغة التي تعطي حجم مخروط دائري قائم ناقص ارتفاعه (ع) ، وطول نصف قطر قاعدته الصغرى نق$_{١}$ وطول نصف قطر قاعدته الكبرى نق$_{٢}$ (نق$_{١}$ $<$ نق$_{٢}$).

٨ أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = (س −١)^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢ حول المحور السيني.

٩ أب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، ص منتصف $\overline{\text{أ د}}$ ، س منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة أب جـ س ص دورة كاملة حول ب جـ كمحور

١٠ اثبت باستخدام التكامل أن حجم المخروط الدائري القائم الناقص المتوازي القاعدتين
= $\frac{١}{٣}$ π ع (نق$_{١}^{٢}$ + نق$_{٢}^{٢}$ + نق$_{١}$ نق$_{٢}$)
حيث نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ أنصاف أقطار قاعدتي المخروط الناقص ، ع الارتفاع .





تمارين &

مسائل عامة

١ أوجد التكاملات لكل من الدوال التالية:

أ) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س^{٢}+١}} \cdot دس$

ب) $\int \sqrt{(٤س^{٢}+٣)^{٢}} \cdot دس$

التمارين (٢-٦) أوجد قيمة ك التي تجعل العبارة صحيحة في كل مما يلي:

٢ $\int س^{-٥} \cdot دس = ك\, س^{-٤} + ث$

٣ $\int (٥س - ٧)^{٢} \cdot دس = ك\, (٥س - ٧)^{٣} + ث$

٤ $\int (س+١)^{\frac{١}{٢}} \cdot دس = ك\, (س+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥ $\int \frac{٧}{\sqrt{(٨-س)^{٣}}} \cdot دس = \frac{ك}{\sqrt{(٨-س)}} + ث$

٦ $\int \frac{٣}{\sqrt{ن}} \cdot دن = ك\sqrt{ن} + ث$

٧ إذا كان $\int_{٢}^{٧} ق(س) \cdot دس = ٩$ ، $\int_{٢}^{١٠} ٥ق(س) \cdot دس = ١٥$ فأوجد :

أ) $\int_{٧}^{١٠} ق(س) \cdot دس$

ب) $\int_{٢}^{٧} (٢س + ق(س)) \cdot دس$

جـ) $\int_{٢}^{١٠} (٣س^{٢} - ٦ق(س)) \cdot دس$

٨ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ١ \\ ٦س^{٢} - ٣ & ، س \geq ١ \end{cases}$ فأوجد:

أ) $\int_{٠}^{٢} ق(س) \cdot دس$

ب) $\int_{٠}^{١} ق(س) \cdot دس$

جـ) $\int_{٢}^{٥} ق(س) \cdot دس$

٩ إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = |٢\text{س} + ٢|$ ، فأوجد $\int_{-٢}^{٠} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ء س}$

١٠ إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٤|$ ،فأوجد $\int_{-٢}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ء س}$

١١ إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,|\text{س} - ١|$ ، فأوجد $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ء س}$

١٢ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٤\text{س}$ ومحور السينات.

١٣ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين :

$\text{ص} = -\text{س}$ ، $\text{ص} = ٢ - \text{س}^٢$

١٤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

$\text{ص} = ٤\text{س} - \text{س}^٢ + ٨$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٢\text{س}$

١٥ إذا كانت $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\text{ق}(\text{س})$ لكل $\text{س} \in [١ ، ٢]$ ، $\text{هـ}(٢) = ٥$ ، $\text{هـ}(١) = ٣$ ، $\text{ق}(٢) = ١$

$\text{ق}(١) = ٠$ فأوجد $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{هـ}(\text{س}) \cdot \text{ء س}$

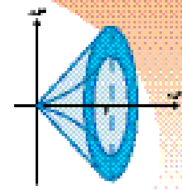
١٦ إذا كانت $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ء س} = \int_{-٦}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س} + ٧) \cdot \text{ء س}$ فأوجد قيمة جـ .

١٧ إذا كان $\text{ق}(١) = ٣$ ، $\text{قَ}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = -١$ ، $\text{قَ}(٢) = ٤$

أوجد $\int_{١}^{٢} \text{س} . \text{قً}(\text{س}) \cdot \text{ء س}$

١٨ حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢$

١٩ منحنى يمر بالنقطة (١،-١) وحاصل ضرب ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س،ص) في مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة تساوي ٢ أوجد معادلة المنحنى.



٢٠ منحنى يمر بالنقطتين (٢،−٢) ، (٣،١) ومعدل تغير ميل المماس له يساوي ٢ (١−٦س)
أوجد معادلته.

٢١ إذا كان $\sqrt{\text{س}}$ + ص = ١ ، س + ص = ١ أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين حول المحور السيني.

٢٢ إذا كانت ص= ٥س^{٢} ، ص = ٥ ، ص = ٢٠ . أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة في الربع الأول والمحددة بالمنحنيات الثلاث حول المحور السيني .

٢٣ استخدم الحجوم الدورانية لإثبات أن حجم المخروط القائم الذي نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) هو ($\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع).

٢٤ استخدم أسلوب الحجوم الدورانية في إثبات أن حجم الكرة التي نصف قطرها (نق) هو ($\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}).

٢٥ مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة فيه ٦ سم ، ٨ سم . أدير هذا المثلث دورة كاملة حول الضلع الأكبر . ماحجم الجسم الناتج عن الدوران ؟

٢٦ إذا كانت ص$_{١}$ = $\sqrt{٣\text{س}}$ ، ص$_{٢}$ = أ $\sqrt{\text{س}}$. إذا علمت أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين حول المحور السيني في الفترة [٠ ، ١] هو $\frac{\pi}{٣}$.
أوجد قيمة أ إذا علمت أن ص$_{١}$ ≥ ص$_{٢}$ في تلك الفترة.

٢٧ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٢}\text{س} + ٢ \text{ ، } & \text{س} \le ٢ \\ ٣\,(٣ - \text{س}) \text{ ، } & \text{س} > ٢ \end{cases}$

فأوجد $\int_{-٢}^{٥}$ د (س) · ءس

٥

الوحدة الخامسة

الاحتمالات والإحصاء

Probability and Statistices

الأهداف

١ التعرف إلي المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي.

٢ حساب الاحتمالات للتوزيعات المتقطعة، وحساب كل من وسطها وانحرافها المعياري مثل:

- توزيع ذي الحدين.

٣ التعرف إلى التوزيع الاحتمالي المتصل ودراسة التوزيعات الآتية:

أ) التوزيع الطبيعي.

ب) التوزيع الطبيعي المعياري.

وإيجاد كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلٍّ منها.

المتغيرات العشوائية

Random variables

المتغير العشوائي المتقطع

نشاط ١ : إلقاء حجري نرد منتظمين

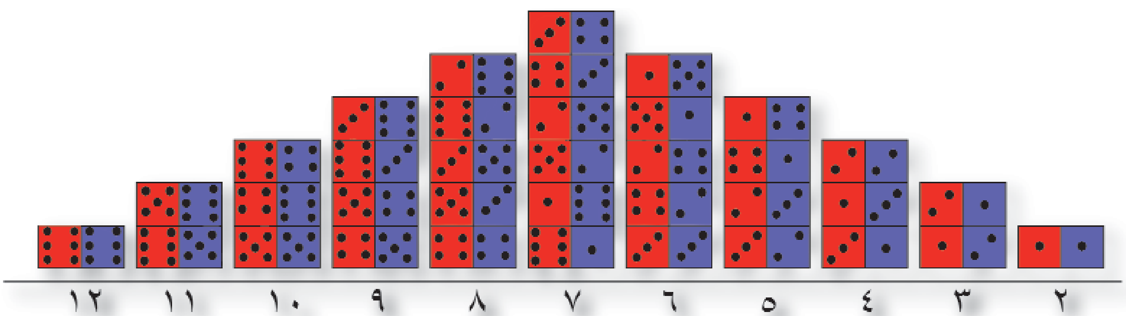
المواد: حجري نرد منتظمين بستة أوجه

الخطوات:

١ تناوب مع زميلك في رمي حجري نرد وسجل مجموع العددين الظاهرين في كل مرة.

٢ اكتب الفراغ العيني للتجربة كأزواج مرتبة.

٣ عرّف المتغير (س) بمجموع الأعداد الظاهرة لكل زوج في الفضاء العيني .



٤ اربط كل مجموع بمجموعة الأزواج المرتبة الخاصة به، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما القيم الممكنة لـ س ؟

ب) هل يمكن عد قيم (س)؟ وهل يمكن تمثيلها على خط الأعداد بنقاط أم بفترات؟

ج) احسب احتمال كل قيمة للمتغير(س) . سجل إجاباتك في كراستك في جدول على النحو الآتي:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل (س)											

د) أوجد عددين حقيقيين (أ،ب) بحيث إن أ < ل(س) < ب لكل قيم ل(س).

هـ) ما مجموع قيم ل(س)؟ فسِّر إجابتك ، وما مجموع قيم س.ل(س)؟

تدريب ١

في تجربة سحب كرة من صندوق يحتوي ٣ كرات بيضاء، ٣كرات حمراء مع الإرجاع. فإذا تكررت التجربة أربع مرات وكان المتغير العشوائي هو عدد مرات ظهور كرة بيضاء، فأجب عما يلي:-

أ) اكتب عناصر الفضاء العيني ، وعناصر المتغير العشوائي .

ب) صف عناصر المتغير العشوائي من حيث إنها متقطعة أم متصلة (تمثل بنقاط أم بفترات على خط الأعداد) .

جـ) اكتب احتمال كل عنصر من عناصر المتغير العشوائي .

تعريف

- المتغير العشوائي عبارة عن دالة مجالها الفضاء العيني ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يكون المتغير العشوائي متقطعًا إذا كان قابلاً للعد،أو أنه يمثل بنقاط منفصلة على خط الأعداد.
- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع عبارة عن دالة تربط كل عنصر من مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير باحتماله . وبحيث تحقق الآتي :

  ل (س) $\geqslant$ ٠ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ ل(س$_ر$) = ١ حيث ن = عدد القيم الممكنة للمتغير (س)

مثال ١

لدى عائلة أربعة أطفال، فإذا عرف المتغير العشوائي بأنه عدد الذكور من الأطفال، فاكتب:

أ) الفضاء العيني.

ب) عناصر المتغير العشوائي .

ج) التوزيع الاحتمالي.

الحل

أ) ليكن الرمز (و) يمثل ولد، والرمز (ب) يمثل بنت.

Ω={وووو ، ووو ب ، ب ووو ، وو ب و ، و ب وو ، وو ب ب ، و ب و ب ، و ب ب و ، ب و و ب ، ب و ب و ، ب ب و و ، و ب ب ب ، ب و ب ب ، ب ب و ب ، ب ب ب و ، ب ب ب ب}

ب) عدد عناصر المتغير العشوائي (الذكور) هو {٠ ،١ ،٢ ،٣ ،٤}.

جـ) يلاحظ أن العنصر الأول (٠) يمثل بحالة واحدة ،والعنصر الثاني (١) يمثل بأربع حالات ،والعنصر الثالث(٢) يمثل بست حالات ،والعنصر الرابع(٣) يمثل بأربع حالات ،والعنصر الخامس(٤)يمثل بحالة واحدة.

س	٠	١	٢	٣	٤
ل (س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

١) لاحظ أن ل(س) > صفر   ٢) مج ل(س) = $\frac{١}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{٦}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{١}{١٦} = \frac{١٦}{١٦}$

تدريب ٢

من المثال أعلاه إذا اعتبر أن عدد الحالات لكل عنصر في المتغير العشوائي هو تكرار لهذا العنصر.

أ) نظِّم جدولاً تحدد فيه عناصر المتغير العشوائي وتكرار كل منها .

ب) احسب الوسط الحسابي للمتغير (س).

ج) هل يمكن الحصول على نفس النتيجة إذا وجدت مج س.ل (س) ؟ فسر لماذا؟

نتيجة

- الوسط للتوزيع الاحتمالي المتقطع يساوي مجموع حاصل ضرب كل عنصر باحتماله.
- يطلق على وسط التوزيع الاحتمالي بالقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي .

الوسط = القيمة المتوقعة = مج س .ل(س) ويرمز له بالرمز (و).

مثال ٢

اثبت أن مج س.ل(س) = الوسط الحسابي.

البرهان :

الوسط الحسابي = $\frac{ر_١س_١ + ر_٢س_٢ + ر_٣س_٣ + ... ر_نس_ن}{ن}$ حيث ر١ ،ر٢ ،...التكرارات ، مج(ر١ + ر٢ + ...) = ن

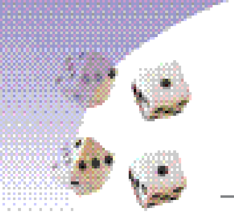
= $\frac{س_١ \times ر_١}{ن} + \frac{س_٢ \times ر_٢}{ن} + ... + \frac{س_ن \times ر_ن}{ن}$

= وحيث أن $\frac{ر_١}{ن}$ ، $\frac{ر_٢}{ن}$ ، $\frac{ر_٣}{ن}$ ... هي التكرار النسبي للعناصر

س١، س٢ ، س٣ ، .... فهي تمثل الاحتمال لهذه العناصر

∴ $س_١ ل(س_١) + س_٢ ل(س_٢) + ... + س_ن ل(س_ن)$

= مج س ل(س)



مثال ٣

أ) في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين مرة واحدة، أوجد احتمال أن يكون مجموع النقاط على الحجرين .

١) أقل من ٧   ٢) أكثر من ٤

٣) عددًا فرديًّا   ٤) عددًا زوجيًّا

ب) أوجد القيمة المتوقعة لمجموع النقاط على حجري نرد منتظمين إذا ألقيا مرة واحدة.

الحل

أ) التوزيع الاحتمالي :

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

١) ل(س < ٧) = ل(٢) + ل(٣) + ... + ل(٦)   (فسر لماذا)

= $\frac{١٥}{٣٦}$

٢) ل (س > ٤) = ل(٥) + ل(٦) + ... + ل(١٢)

= ١ − ل(س ≤ ٤) = ١ − $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{٣٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

٣) ل(س فردي) = ل(٣) + ل(٥) + ل(٧) + ل(٩) + ل(١١)

= $\frac{١٨}{٣٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٤) ل(س زوجي) = ١ − ل(س فردي) = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ب) القيمة المتوقعة = و = Σ س . ل(س)

= $\frac{٢ \times ١}{٣٦}$ + $\frac{٣ \times ٢}{٣٦}$ + $\frac{٤ \times ٣}{٣٦}$ + $\frac{٥ \times ٤}{٣٦}$ + $\frac{٦ \times ٥}{٣٦}$ + ... + $\frac{١٢ \times ١}{٣٦}$

= $\frac{٢ + ٦ + ١٢ + ٢٠ + ٣٠ + ٤٢ + ٤٠ + ٣٦ + ٣٠ + ٢٢ + ١٢}{٣٦}$ = $\frac{٢٥٢}{٣٦}$ = ٧

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي متقطع

نشاط ٢ : مقارنة الانحراف المعياري لمجموعة بيانات مع الانحراف المعياري إذا شكلت البيانات مع احتمالاتها توزيعا احتماليا

الأدوات : مجموعة جداول

الخطوات :

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ل (س)	$\frac{١}{٢٦}$	$\frac{٣}{٢٦}$	$\frac{٥}{٢٦}$	$\frac{٨}{٢٦}$	$\frac{٥}{٢٦}$	$\frac{٣}{٢٦}$	$\frac{١}{٢٦}$

المتغير (س)	١	٣	٥	٦	٧	٩	١٠
التكرار (ك)	٢	٥	٧	٨	٧	٥	٢
احتمال ل (س)	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

١) احسب الوسط الحسابي لمجموعة البيانات ($\bar{\text{س}}$) ثم احسب الوسط (و) للتوزيع الاحتمالي

٢) احسب الانحراف المعياري لمجموعة البيانات $\text{ع}_١ = \sqrt{\frac{\sum \text{ك}(\text{س} - \bar{\text{س}})^٢}{\sum \text{ك}}}$

٣) احسب قيمة $\text{ع}_٢ = \sqrt{\sum (\text{س} - \text{و})^٢ \text{ل}(\text{س})}$

قارن بين $\bar{\text{س}}$ ، و ، وكذلك بين $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٢$ وضع تعريفا للانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي .

تدريب ٣

اثبت أن $\sqrt{\frac{\sum \text{ك}(\text{س} - \bar{\text{س}})^٢}{\sum \text{ك}}} = \sqrt{\sum (\text{س} - \text{و})^٢ . \text{ل}(\text{س})}$ حيث (و) الوسط الحسابي

> يعرف الانحراف المعياري (Standard deviation) لمتغير عشوائي متقطع بـ ع
>
> حيث $\text{ع} = \sqrt{\sum (\text{س} - \text{و})^٢ . \text{ل}(\text{س})}$ ويعرف $\text{ع}^٢$ بالتباين

مثال ٤

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) يعطى بالعلاقة ل (س) = ك.س ، س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فأوجد

أ) قيمة ك
ب) القيمة المتوقعة للمتغير س
ج) الانحراف المعياري والتباين

الحل

أ) $\sum \text{ل}(\text{س}) = ١ = \text{ك} + ٢\text{ك} + ٣\text{ك} + ٤\text{ك} = ١٠\text{ك}$. $\therefore$ $\text{ك} = \frac{١}{١٠} = ٠,١$

ب) $\text{و} = \sum \text{س} . \text{ل}(\text{س}) = ٣$

ج) $\text{ع} = \sqrt{(١-٣)^٢ \times ٠,١ + (٢-٣)^٢ \times ٠,٢ + (٣-٣)^٢ \times ٠,٣ + (٤-٣)^٢ \times ٠,٤} = ١$ ، $\text{ع}^٢ = ١$

توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذي الحدين مثالاً على التوزيعات المتقطعة ويطلق عليه توزيع برنولي، وقد سبق لك دراسة تجارب ذات الحدين ووجدت احتمال إحداث لمثل هذه التجارب، وعلمت أن مثل هذه التجارب تتميز بالآتي:

أ) تتكرر التجربة عددًا من المرات.

ب) لكل تجربة نتيجتين (نجاح أو فشل).

ج) احتمال النجاح ثابت في كل تجربة وكذلك الفشل (أي التجارب مستقلة).

تدريب ٤

أي من التجارب الآتية تحقق صفات تجربة ذات الحدين؟ وضح في كل حالة أي من الصفات يتحقق وأيها لا يتحقق ؟

أ) عدد المرات التي تظهر فيها صورة عند إلقاء قطعة نقود من فئة ٥٠ بيسة ١٠ مرات.

ب) عدد المرات التي سيفوز فيها فريق كرة القدم الذي تشجعه في الموسم الرياضي القادم.

ج) عدد الطلاب الذين سيحصلون على تقدير ممتاز في الرياضيات البحتة في صفك هذا الفصل.

مثال ٥

في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ٣ مرات وحساب عدد المرات التي تظهر فيها صورة :

أ) تحقق من توفر مواصفات تجربة ذات الحدين .

ب) استنتج التوزيع الاحتمالي للمتغير (ر) = عدد المرات التي تظهر فيها صورة.

الحل

أ)

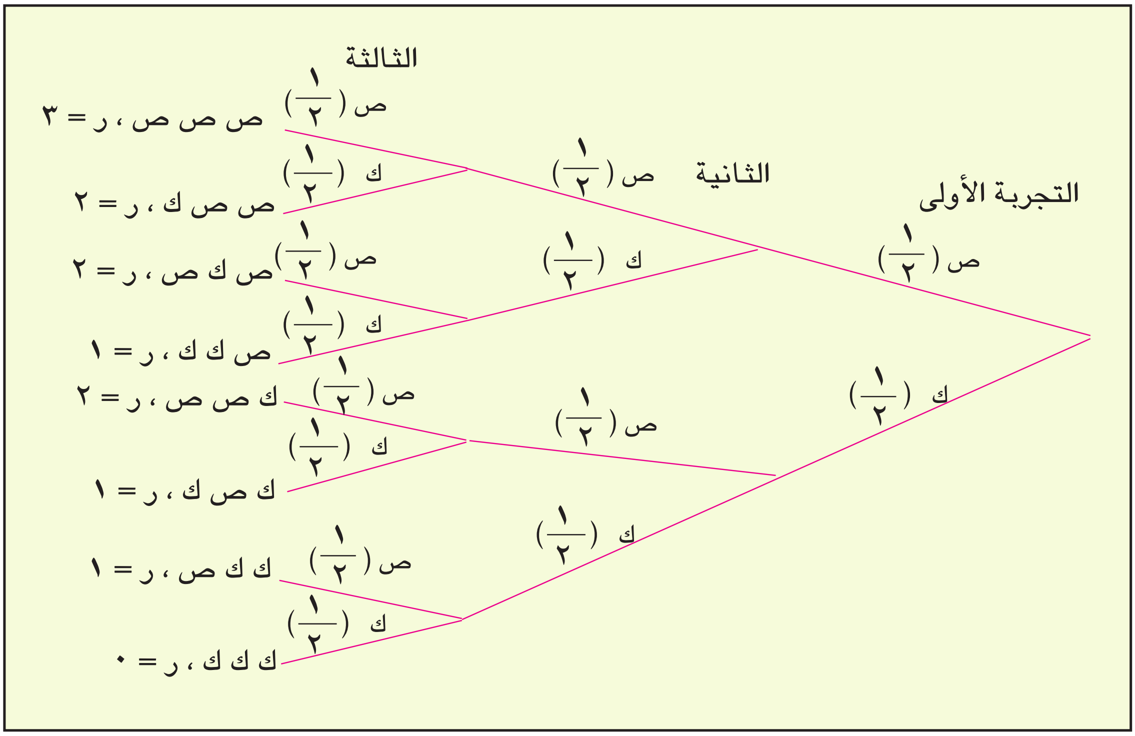
١) عدد مرات إجراء التجربة = ٣ محدد سلفا ، ن = ٣ .

٢) نتيجة التجربة في كل مرة أحد حدثين : صورة أو كتابة .

٣) ل(ص) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ك) = $\frac{١}{٢}$ ثابت في كل من التجارب الثلاث .

∴ تحقق جميع مواصفات تجربة ذات الحدين .

ب) يمكن تمثيل النواتج بشجرة تمثل كل مرحلة فيها تجربة على النحو الآتي :



ويمكن الحصول على احتمال أي من النواتج الثمانية التي تمثل الفضاء العيني للتجربة بالضرب

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

حيث ل(ص) = ل(ك) = $\frac{1}{2}$ في كل مرة.

نرى أيضًا أن القيم الممكنة للمتغير هي ٠، ١، ٢، ٣،

حيث ل(ر=٣) = ل(ص ص ص) = $\frac{1}{8}$

ل(ر=٢) = ل(ص ص ك) + ل(ص ك ص) + ل(ك ص ص)

= $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

ل (ر = ١) = ل(ص ك ك) + ل(ك ص ك) + ل(ك ك ص)

= $\frac{3}{8}$

ل(ر=٠) = ل(ك ك ك) = $\frac{1}{8}$

ومنة يكون التوزيع الاحتمالي هو :

ر	٠	١	٢	٣
ل (ر)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

لاحظ أن ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر} (١−ب)$^{ن-ر}$

وهي الصيغة العامة للتوزيع الاحتمالي المعروف بذي الحدين.

تعريف

يسمى التوزيع الاحتمالي لمتغير (ر) بذي الحدين دالة الاحتمال إذا أمكن كتابته على النحو الآتي :

ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر} (١ − ب)$^{ن-ر}$ ، حيث ٠ < ب < ١ ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

حيث أن: ب: احتمال النجاح ، ن: عدد مرات تكرار التجربة

مثال ٦

جلس أحمد لاختبار من عشرة أسئلة ، لكل سؤال أربع إجابات واحدة منها فقط صحيحة . لم يستعد أحمد للامتحان ولا يدري ما الإجابة الصحيحة لأي من الأسئلة ، ولذا قرر أن يجيب عن كل سؤال بأن يختار عشوائيًّا إحدى الإجابات الأربع . أوجد احتمال أن:

أ) تكون جميع إجاباته خطأ.

ب) يحصل على أربع إجابات صحيحة.

جـ) لا يحصل على أكثر من إجابة واحدة صحيحة .

د) يحصل على إجابتين صحيحتين على الأقل.

الحل

١) تمثل الإجابة على كل سؤال تجربة نتيجتها نجاح أو فشل.

٢) عدد الأسئلة ن = ١٠ (عدد مرات تكرار التجربة).

٣) الإجابة عن أي سؤال صحيحة كانت أم خاطئة لا تؤثر على إجابة الأسئلة الأخرى.

٤) احتمال النجاح = $\frac{١}{٤}$ واحتمال الفشل = $\frac{٣}{٤}$ في كل تجربة أو محاولة.

٥) ر=عدد مرات النجاح أو عدد الإجابات الصحيحة.

أي تتحقق جميع صفات تجربة ذات الحدين

أ) $\text{ل}(\text{ر}) = \binom{١٠}{\text{ر}} \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{ر}} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{١٠-\text{ر}}$ ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ١٠

$\text{ل}(٠) = \binom{١٠}{٠} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٠} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{١٠-٠} = ١ \times ١ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{١٠} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{١٠}$

$= ٠,٠٥٦$

ب) $\text{ل}(٤) = \binom{١٠}{٤} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٦} = \frac{٢١٠ \times ٣^{٦}}{٤^{١٠}} = ٠,١٤٦$

ج) $\text{ل}(\text{ر} \leqslant ١) = \text{ل}(\text{ر}=٠ \text{ أو } ١) = \text{ل}(٠) + \text{ل}(١) =$

$= ٠,٠٥٦ + \binom{١٠}{١} \left(\frac{١}{٤}\right) \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٩} = ٠,٠٥٦ + ٠,١٨٨$

$= ٠,٢٤٤$

د) $\text{ل}(\text{ر} \geqslant ٢) = ١ - \text{ل}(\text{ر} < ٢) = ١ - \text{ل}(\text{ر} \leqslant ١)$

$= ١ - ٠,٢٤٤ = ٠,٧٥٦$

تدريب ٥

أ) أوجد مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

ب) اثبت أن $= (١-\text{ب})^{\text{ن}} + \text{ن ب}(١-\text{ب})^{\text{ن}-١} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{ب}^{٢}(١-\text{ب})^{\text{ن}-٢} + ... + \text{ب}^{\text{ن}} = ١$

ج) اثبت أنه في توزيع ذي الحدين $\sum^{\text{ن}} \text{ل}(\text{ر}) = ١$

د) علل تسمية توزيع ذي الحدين بهذا الاسم.

تعريف

باستخدام تعريف الوسط والانحراف المعياري يمكن استنتاج أن الوسط (و) ، و الانحراف المعياري ع لتوزيع ذي الحدين هما :

$\text{و} = \text{ن ب}$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{ن ب}(١-\text{ب})}$ حيث ب احتمال نجاح التجربة،

ن: عدد مرات تكرار التجربة

تمارين &

مسائل (١)

١ في التوزيع الاحتمالي الآتي:

س	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤
ل (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٣}{٨}$	ك	$\frac{١}{١٢}$

أ) أوجد قيمة ك

ب) أوجدالقيمة المتوقعة للمتغير س

٢ بيِّن إن كانت أي من الدوال التالية تمثل توزيعًا احتماليًّا ،ثم أوجد الوسط والانحراف المعياري للدوال التي تمثل توزيعًا احتماليًّا .

أ) ل(س) = $\frac{١}{٥}$ ،س=٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥

ب) ل(س) = $\frac{س - ١}{٥}$ ،س=٠، ١، ٢، ٣، ٤

جـ) ل(س) = $\frac{س^{٢}}{٣٠}$ ،س=١، ٢، ٣، ٤

٣ إذا كان احتمال أن يحرر موظف بلدية مسقط أعدادًا من المخالفات في جولته في أحد مواقف السيارات كالآتي:

عدد المخالفات	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
الاحتمال	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,١	٠,٠٨	٠,٠٦	٠,٠١

فكم مخالفة يتوقع أن يحرر؟

٤ إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الزبائن الذين يطلبون خدمة محل صبغ سيارات كما يأتي:

عدد الزبائن	٠	١	٢	٣	٤	٥
الاحتمال	٠,٠٥	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,١٥	٠,٠٥

وكان المحل قادرًا على صبغ سيارتين في اليوم ، فما احتمال أن لا يحصل على ما يكفيه من عمل في اليوم ؟

٥ درس عالم للحيوان أعمار عدد من أنواع الغزلان فكانت كما يأتي :

العمر بالسنوات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
العدد	٢	٣٠	٧٨	١٢٥	١٥٠	٧٠	٤٠	١٠

اعتمد على هذه البيانات وأوجد العمر المتوقع (متوسط الأعمار) على اعتبار أن العمر متغير عشوائي، ثم أوجد الانحراف المعياري له.

٦ في اختبار من خمسة أسئلة كان توزيع الطلاب حسب عدد الإجابات الصحيحة كما يأتي :

عدد الإجابات الصحيحة	٠	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد الطلاب	٤	٤	٨	١٢	١٠	٢	٤٠

أ) احسب متوسط عدد الإجابات الصحيحة في هذا الصف.

ب) أوجد المتوسط في (أ) باستخدام التوزيع الاحتمالي.

ج) باستخدام التكرار النسبي أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير س (عدد الإجابات الصحيحة)

٧ إذا كانت س متغيرًا عشوائيًا مجموعة عناصره {-٢،-١، ٠، ١} وكانت ل(س=-٢) = جـ ، ل(س=-١) = ٢جـ،ل(س=٠) = ٣جـ،ل(س=١) = ٤جـ أوجد قيمة جـ والقيمة المتوقعة للمتغير س .

٨ تقدر إدارة أحد المراكز التجارية أن ٣٥٪ من زوار المركز لا يشترون شيئًا . إذا أخذت عينة عشوائية من ٢٠ شخصًا عند مدخل المركز.

أ) احسب احتمال أن يخرج ٣ منهم من المركز دون أن يشتروا شيئًا.

ب) كم منهم تتوقع أن يشتروا شيئًا ؟

٩ إذا كانت نسبة الذين يحملون فصيلة الدم AB في السلطنة ٣٪ واختير مائة شخص عشوائيًا، فما احتمال أن:

أ) لا يكون بينهم من يحمل فصيلة الدم AB ؟

ب) يكون واحدًا منهم على الأقل يحمل هذه الفصيلة؟

١٠ تحدد مواصفات منتج معين في مصنع كي يطرح في الأسواق أن يكون ٩٥٪ من القطع في أي شحنة سليمة تمامًا.يقرر المهندس المسؤول عن ضبط الجودة التصديق لأي شحنة بأن تطرح في السوق بناءً على عينة عشوائية من ١٠ قطع يختارها من الشحنة ويسمح بمرورها إذا كانت القطع العشر المختارة جميعها سليمة، وإلا تحتجز الشحنة لمزيد من الفحص. ما احتمال أن يحجز شحنة مطابقة للمواصفات؟

التوزيعات الإحتمالية المتصلة :

Continuous Probability Destribution

إذا كانت عناصر المتغير العشوائي (س)لتوزيع احتمالي ∋ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٠٠ }

وكانت عناصر متغير عشوائي آخر(ص)لتوزيع احتمالي ∋ [١ ، ١٠٠] فأجب عما يأتي :

١) أي من المتغيرين العشوائيين (س ، ص) يمكن تمثيلهما بقطعة مستقيمة ، وأيهما لا يمكن ذلك؟ ولماذا؟

٢) أي من المتغيرين يمكن عد عناصره، وأيهما لا يمكن ؟ ولماذا ؟

٣) أي منهما تستطيع أن تكتب الاحتمال لكل عنصر مثل (أ) بحيث ل(أ) > ٠ ؟

٤) إذا مثل كل من المتغيرين العشوائيين بيانيًّا، فأيهما يمثل منحنى متصلاً؟

من إجابتك عن الأسئلة السابقة يمكنك أن تتوصل إلى الآتي:

أ) إذا كان المتغير العشوائي مجموعة من النقاط منفصلة عن بعضها فإنه يمكن عدها، وإن كان أحيانًا لا يعرف عددها، بينما إذا كان المتغير العشوائي عبارة عن فترة [أ ، ب] فإنه لا يمكن عد العناصر كما لا يمكن معرفة عددها.

ب) إذا مثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع فإنه سيكون عبارة عن مجموعة من النقاط غير المتراصة تقع على منحنى، وتتقارب هذه النقاط من بعضها كلما زاد عدد عناصر المتغير العشوائي،بينما يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المعرف على فترة يكون متصلاً ولا فجوات فيه ويسمى مثل هذا التوزيع الذي يكون منحناه متصلاً:(بدالة كثافة).

جـ) المساحة المحصورة بين منحنى التوزيع الاحتمالي ومحور السينات يساوي وحدة واحدة، هو عبارة عن ∑ ل(س) = ١ للمتغير العشوائي المتقطع ،و $\int_{أ}^{ب}$ د(س). ءس = ١ للمتغير العشوائي المتصل.

ولهذا فإن الاحتمال عند نقطة (قيمة من قيم المتغير العشوائي المتصل) =صفر

لأن $\int_{أ}^{أ}$ د(س) ءس= ٠

> تعريف المتغير العشوائي المتصل:إذا كانت القيم المكنة للمتغير العشوائي (س) تأخذ أي قيمة على مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها، فإن (س) يعتبر متغيرًا عشوائيًّا متصلا Continuous Random Variable

أمثلة لمتغيرات عشوائية متصلة:

١) الزمن الذي تستغرقه للحضور من البيت إلى المدرسة يوميًّا .

٢) أوزان المواليد في السلطنة خلال فترة معينة .

٣) المسافة التي يقطعها الإنسان ماشيًّا خلال ساعة .

تعريف

التوزيعات الاحتمالية المتصلة :

يعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل بدالة متصلة تسمى دالة كثافة الاحتمال، ويعطي احتمال وقوع قيمة المتغير في فترة بالمساحة المحصورة بين منحنى دالة الكثافة والمحور السيني فوق هذه الفترة .

تحقق دالة الكثافة الشروط الآتية :

١) جميع قيمها $\geqslant$ ٠ وبالتالي يكون المنحنى فوق المحور السيني .

٢) المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى والمحور السيني=١.

- ل(أ $<$ س $<$ ب) = المساحة بين المنحنى والمحور السيني والمستقيمين س= أ ، س = ب

- يسمى منحنى دالة الكثافة بمنحنى التوزيع الاحتمالي.

مثال ١

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) هو الدالة د(س) حيث :

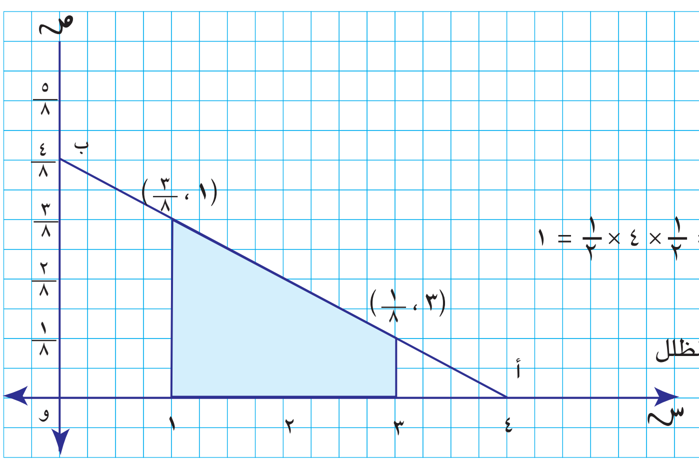
د(س) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{س}{٨}$ ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٤

أ) اثبت أن د(س) دالة كثافة.   ب) أوجد ل(١ $<$ س $<$ ٣).

الحل

يمكن رسم الدالة د(س) على الفترة [٠ ، ٤]

وهي عبارة عن خط مستقيم كما يلي :



١) كل قيم د(س) $\geqslant$ ٠

٢) المساحة الكلية بين د(س) والمحور السيني =

مساحة المثلث و(٠ , ٠) ،ب(٠ ، ١) ، أ(٤ ، ٠) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ د(س) دالة كثافة احتمال

ب) ل(١ $<$ س $<$ ٣) = مساحة شبة المنحرف المظلل

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١}{٨}$ + $\frac{٣}{٨}$) × ٢ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = $\frac{١}{٢}$

تعريف

تعرف القيمة المتوقعة (الوسط) والانحراف المعياري لتوزيع متصل بتعابير رياضية شبيهة بالتي تعرف بها في التوزيعات المتقطعة باستبدال علامة الجمع $\sum$ بعلامة التكامل $\int$

فمثلاً معادلة الدالة د(س) = −$\frac{١}{٨}$ (س − ٤) تسمى دالة كثافة إذا كانت المساحة بينها وبين محور السينات في الفترة [٠ ، ٤] = ١   المساحة تحت المنحنى = $\int_{٠}^{٤}$ −$\frac{١}{٨}$ (س − ٤) ءس = −$\frac{١}{٨}$ ($\frac{س^٢}{٢}$ − ٤س) $\Big|_{٠}^{٤}$ = ١

مثال ٢

استخدم التكامل في إثبات أن الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{4 - |\text{س} - 4|}{16}$ ، $\text{س} \in [\,0 ، 8\,]$ هي دالة كثافة
ثم احسب احتمال أن تقع نقطة ما من قيم (س) في الفترة $[\,2 ، 4\,]$

الحل

$\text{ل}(0 < \text{س} < 8) = \int_{0}^{8} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{0}^{4} \frac{\text{س}}{16}\,\text{ءس} + \int_{4}^{8} \frac{(8-\text{س})}{16}\,\text{ءس}$

$= \left.\frac{\text{س}^2}{32}\right|_{0}^{4} + \left.\frac{(8\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2})}{16}\right|_{4}^{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$ وهي احتمال أن يكون $0 < \text{س} < 8$ وهذا مؤكد

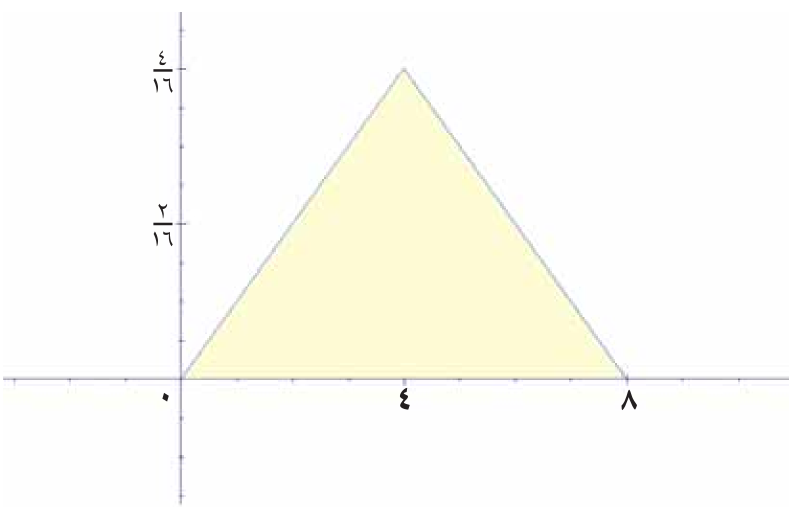
احتمال أن تقع نقطة من قيم (س) من الفترة $[\,2 ، 4\,]$ يساوي

$\text{ل}(2 < \text{س} < 4) = \int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س}$

$= \int_{2}^{4} \frac{\text{س}}{16}\,\text{ء س}$

$= \left.\frac{\text{س}^2}{32}\right|_{2}^{4}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$



تدريب ١

استخدم التكامل في إثبات أن الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{3}{22}(5 - \text{س}^2)$ حيث $\text{س} \in [\,0 ، 2\,]$ دالة كثافة. ثم احسب احتمال وقوع نقطة ما من قيم (س) في الفترة $[\,0{,}5 ، 1{,}5\,]$.

يجب أن يتذكر الطالب أنه في الدوال المتصلة لا يبحث الاحتمال عند إحدى النقاط .

ولكنة يبحث عند فترة ولذلك فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = $. بمعنى آخر فإن عدد نقاط الفترة

(الفراغ العيني) كبير جدًّا يساوي ∞ فالاحتمال عند نقطة $= \frac{1}{\infty} =$ صفر لأن موقع النقطة حالة واحدة من عدد لا نهائي من الحالات .

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

يُعدُّ التوزيع الطبيعي أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما لما له من خواص نظرية هامة ؛ ولأن الكثير من الظواهر الطبيعية تنتج توزيعًا قريبًا من هذا التوزيع ، حيث تكون الغالبية في الوسط وتقل النسب كلما ابتعدنا عن الوسط بصورة متماثلة في كل من الاتجاهين.

نشاط ١ :

الأدوات : شريط متري.

الخطوات :

١. اختر عينة من ٢٠ طالبًا في المدرسة وقس طول كل منهم .
٢. ارسم منحنى تكراريًّا للأطوال التي حصلت عليها (منحنى يمر بالنقاط «الطول، التكرار»).
٣. اجمع بياناتك مع بيانات زميلك وكرر الخطوة ٢ باستخدام الأطوال ال ٤٠ .
٤. قارن المنحنى التكراري لكل منكما بالمنحنى المشترك .
٥. اجمع بيانات ٥ مجموعات للطلاب (١٠٠ طالب) وكون لها منحنى تكراريًّا واحدًا، قارن الشكل بمنحنى كل منكم.
٦. اجمع كل بيانات الفصل وارسم لها منحنى تكراريًّا واحدًا.
٧. غير عدد القيم في الخطوة ٦ إلى الضعف وارسم المنحنى مرةً ثانية .
٨. غير عدد القيم في الخطوة ٧ إلى الضعف وارسم المنحنى التكراري .
٩. ماذا تلاحظ في شكل المنحنى التكراري كلما زاد عدد القيم .

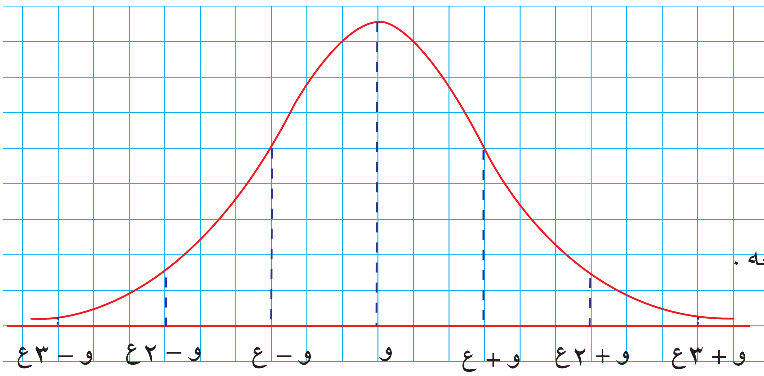
تدريب ٢

عد إلى كتب إحصائية واجمع معلومات عن بعض الظواهر مثل درجة الحرارة خلال أيام السنة أو عدد الوفيات،... ومثِّل ذلك بيانيًّا ثم أعط وصفا للشكل الناتج.

نتيجة

كلما زادت البيانات حول إحدى الظواهر الطبيعية (الطول، الوزن، الدخل،.) اقترب المنحنى من المنحنى المتصل والمعتدل.

إن منحنى التوزيع الطبيعي عبارة عن منحنى توزيع احتمالي ، وعليه فإن دالته تُعدُّ دالة كثافة وتعطى بالقاعدة $د(س) = \frac{١}{ع\sqrt{٢\pi}}\, هـ^{-\frac{١}{٢}\left(\frac{س-و}{ع}\right)^{٢}}$ حيث (هـ) العدد النايبيري ويساوي تقريبًا ٢,٧ ، ع الانحراف المعياري ، و الوسط الحسابي ، س ∈ ح ويلاحظ أن د(س) > ٠ إن عملية إيجاد الاحتمال من خلال تكامل هذه الدالة خارج نطاق هذا الكتاب ولذا سيتم الاعتماد على خصائص هذا التوزيع.



يعطي الشكل رسمًا توضيحًا لمنحنى التوزيع الطبيعي والذي يتميز بالخواص الآتية:

١) قيم (س) الممكنة هي: −∞ إلى ∞ .

٢) المحور السيني لايمس المنحنى ولا يقطعه .

٣) المنحنى متماثل حول المحور س=و حيث (و) هي وسط التوزيع.

٤) المساحة الكلية تحت المنحنى = ١ فيكون على يمين (و) = $\frac{١}{٢}$ ، وعلى يسار (و) = $\frac{١}{٢}$

٥) يتحدد شكل المنحنى تمامًا بمعرفة الوسط (و) والانحراف المعياري (ع) .

٦) المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور السيني فوق الفترة.

أ) (و − ع ، و + ع) = ٠,٦٨٢   أي ٦٨,٢٪ من المساحة الكلية.

ب) (و − ٢ ع ، و + ٢ع) = ٠,٩٥٤   أي ٩٥,٤٪ من المساحة الكلية.

ج) (و − ٣ع ، و + ٣ع) = ٠,٩٩٧   أي ٩٩,٧٪ من المساحة الكلية.

مثال ٣

تتبع أطوال الرجال في منطقة معينة توزيعًا طبيعيًّا بوسط ١٦٥سم وانحراف معياري٥سم، أوجد احتمال:

أ) أن يكون طول رجل اختير عشوائيًّا أكثر من ١٨٠سم.

ب) أن يكون طول رجل اختير عشوائيًّا أقل من ١٥٥ سم.

جـ) أن يكون طول رجل اختير عشوائيًّا بين ١٦٠سم و١٧٥سم.

د) نسبة الرجال في المنطقة الذين تتراوح أطوالهم بين ١٦٠سم و١٧٥ سم.

الحل

س = طول رجل اختير عشوائيًّا من المنطقة

و = ١٦٥ سم ،ع = ٥ سم

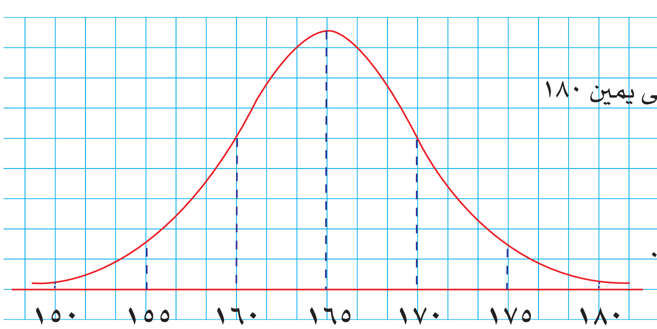
أ) ل(س > ١٨٠) = ل(س > و + ٣ع) = المساحة على يمين ١٨٠

∵ المساحة من و−٣ع الى و + ٣ع = ٠,٩٩٧

∴ المساحة من و إلى و + ٣ع = $\frac{٠,٩٩٧}{٢}$ = ٠,٤٩٨٥ .

المساحة على يمين و + ٣ع = $\frac{١}{٢}$ − ٠,٤٩٨٥ = ٠,٠٠١٥ .

ل (س > ١٨٠) = ٠,٠٠١٥



ب) ل(س < ١٥٥) = ل(س < و − ٢ع) = المساحة يسار و− ٢ع

= $\frac{١}{٢}$ − المساحة من و إلى و− ٢ع

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٠,٩٥٤}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ − ٠,٤٧٧ = ٠,٠٢٣ .

ل (س < ١٥٥) = ٠,٠٢٣

جـ) ل(١٦٠ < س < ١٧٥) = المساحة المحصورة بين ١٦٠ و ١٧٥

= ل(و − ع < س < و + ٢ع)

= ل (و − ع < س < و) + ل (و < س < و + ٢ع)

= $\frac{٠,٦٨٢}{٢}$ + $\frac{٠,٩٥٤}{٢}$ (فسر)

= ٠,٣٤١ + ٠,٤٧٧ = ٠,٨١٨ .

د) نسبة الرجال الذين تتراوح أطوالهم بين ١٦٠ و١٧٥سم = ٨١,٨٪

تدريب ٣

تتبع درجات الحرارة في منطقة ما في السلطنة توزيعًا طبيعيًا بوسط ٢٨° وانحراف معياري ٣,٥° ، أوجد احتمال :

أ) أن تكون درجة الحرارة في يوم تم اختياره عشوائيًّا أكثر من ٣٥° .

ب) أن تكون درجة الحرارة في يوم تم اختياره عشوائيًّا أقل من ٢١° .

ج) أن تكون درجة الحرارة في يوم تم اختياره عشوائيًّا بين ٢٤,٥°، ٣٨,٥° .

التوزيع الطبيعي المعياري Standerd normal distribution

لكل توزيع طبيعي متوسط وانحراف معياري مختلف عن توزيع طبيعي آخر، كما إنه يصعب إيجاد الاحتمال إذا لم تكن أطوال الفترات من مضاعفات الانحراف المعياري. لذلك فإنه من المناسب تحويل التوزيعات إلى التوزيعات المعيارية من خلال تحويل القيم إلى قيم معيارية (ز) حيث ز = $\frac{س - \bar{س}}{ع}$: $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للتوزيع ، ع انحرافه المعياري عندها يصبح الوسط الحسابي = ٠ ، والانحراف المعياري = ١

وتصبح معادلة د(س) = $\frac{١}{\sqrt{٢\pi}}$. هـ$^{-\frac{١}{٢}ز^٢}$

التوزيع الطبيعي المعياري (ز ، Z) :

يسمى التوزيع الطبيعي الذي وسطه و=٠ ،وانحرافه المعياري ع=١ بالتوزيع الطبيعي المعياري ويرمز للمتغير العشوائي في هذا التوزيع بالرمز (ز) .

تدريب ٤

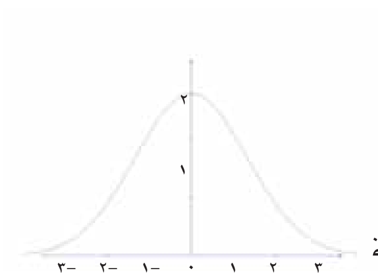
اعتمد على خصائص التوزيع الطبيعي المعياري وأجب عما يلي:

أ) هل يشكل التوزيع الطبيعي المعياري توزيعًا احتماليًّا؟ وضح إجابتك.

ب) هل تشكل دالة التوزيع الطبيعي المعياري دالة كثافة؟ وضح إجابتك.

ج) ما الصفات التي يتميز بها التوزيع الطبيعي المعياري عن التوزيع الطبيعي؟

حساب احتمال فترة في مجال دالة المنحنى الطبيعي المعياري



١) يتسم المنحنى المعياري بالآتي:

أ) وسطه = ٠ ، وانحرافه المعياري = ١

ب) ٩٩,٩٩٪ من المساحة تحت المنحنى تقع بين-٣ انحرافات معيارية و٣ انحرافات معيارية

٢) حسبت المساحات تحت المنحنى وعلى فترات]- ∞ ، أ[، أ ≥ ٠ ووضعت في جدول بحيث وضع إزاء كل قيمة للانحراف المعياري الموجب المساحة التي تقع على يسار ذلك العدد (ز) وتحت المنحنى.

ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة
١,٨٠	٠,٩٦٤١	٢,١٦	٠,٩٨٤٦	٢,٥٢	٠,٩٩٤١	٢,٨٨	٠,٩٩٨٠	٣,٢٤	٠,٩٩٩٤
١,٨١	٠,٩٦٤٩	٢,١٧	٠,٩٨٥٠	٢,٥٣	٠,٩٩٤٣	٢,٨٩	٠,٩٩٨١	٣,٢٥	٠,٩٩٩٤
١,٨٢	٠,٩٦٥٦	٢,١٨	٠,٩٨٥٤	٢,٥٤	٠,٩٩٤٥	٢,٩٠	٠,٩٩٨١	٣,٢٦	٠,٩٩٩٤
١,٨٣	٠,٩٦٦٤	٢,١٩	٠,٩٨٥٧	٢,٥٥	٠,٩٩٤٦	٢,٩١	٠,٩٩٨٢	٣,٢٧	٠,٩٩٩٥
١,٨٤	٠,٩٦٧١	٢,٢٠	٠,٩٨٦١	٢,٥٦	٠,٩٩٤٨	٢,٩٢	٠,٩٩٨٢	٣,٢٨	٠,٩٩٩٥

مثال ٤

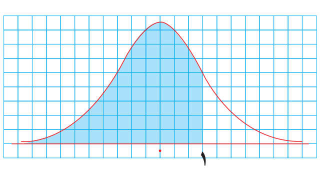
إذا كان (ز) متغيرًا طبيعيًّا معياريًّا، فاحسب احتمال أن يكون:

أ) ز < ١ ب) ز > ٢

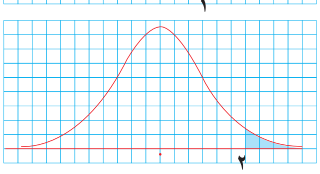
جـ) ١ < ز < ٣ د) ز < -١

هـ) ز > -٣ و) -١,٥ < ز < ١,٧

الحل

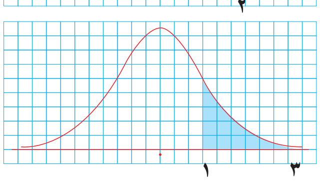


أ) ل(ز < ١) = المساحة يسار ع = ١ = ٠,٨٤١٣ . من الجدول مباشرة



ب) ل(ز > ٢) = المساحة على يمين ع = ٢ = ١ - المساحة على يسار ع = ٢

= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨



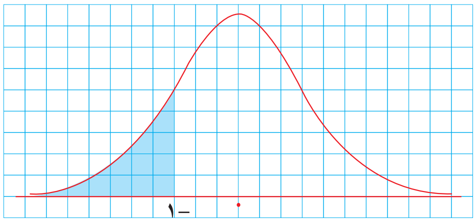
جـ) ل(١ < ز < ٣) = المساحة بين ١، ٣ = المساحة يسار ٣ - المساحة يسار ١ = ٠,٩٩٨٧ - ٠,٨٤١٢ = ٠,١٥٧٥

د) ل(ز > - ١) = المساحة يسار -١

لكن لا توجد قيم سالبة في الجدول

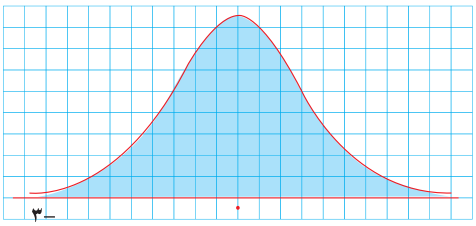
بالتماثل المساحة يسار (-١) = المساحة يمين ١

= ١- ٠,٨٤١٢ = ٠,١٥٨٨



هـ) ل(ز < -٣) = المساحة يمين (-٣)

= المساحة يسار ٣ (بالتماثل) =٠,٩٩٨٧



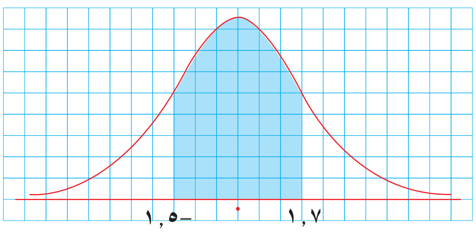
و) ل(-١,٥ > ز > ١,٧)

= المساحة يسار١,٧ -المساحة يسار (-١,٥)

= ٠,٩٥٥٤ - المساحة يمين ١,٥

= ٠,٩٥٥٤ - (١ - المساحة يسار ١,٥)

= ٠,٩٥٥٤ -١ + ٠,٩٣٣٢ =٠,٨٨٧٦



تدريب ٥

أ) إذا اختيرت قيمة عشوائيًا من متغير عشوائي يتوزع توزيعًا طبيعيًا معياريًا فما احتمال أن تكون هذه أقل من ٠,٨٥ ؟

ب) احسب احتمال أن تقع القيمة التي تم اختيارها في (أ) في الفترة :

١) [٠ ، ٠,٨٥]   ٢) أكبر من ٠,٨٥   ٣) أقل من -١,٧٣   ٤) أكبر من -١,٧٣

تمارين & مسائل (٢)

١ اختبر إن كانت الدالة د(س) = $\frac{٦س - س^٢}{٧٢}$ ، س ∋ [٠، ٦] دالة كثافة ، ثم أوجد احتمال أن تقع قيمة تم اختيارها من قيم المتغير العشوائي (س) بين القيمتين ٣ ، ٤

٢ أ) ما نسبة البيانات التي تقع بين −١ انحراف معياري وانحراف معياري في التوزيعات الطبيعية ؟

ب) ما نسبة البيانات التي تقع فوق ١,٧ انحراف معياري في التوزيع الطبيعي ؟

٣ أ) باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أوجد ما يأتي :

ل(ز > ١,٨٨) ، ل(ز < ٠,٠٧) ، ل(ز < −٢)

٤ تقدر وزارة الصحة في السلطنة أن كتلة الأطفال عند الولادة تتبع توزيعًا طبيعيًّا بتوقع (وسط) ٣,٢٥ كجم وانحراف معياري ٠,٤٦ كجم.

أ) ما احتمال أن تكون كتلة مولود اختير عشوائيًّا أكثر من ٤ كجم.

ب) يُعدُّ المولود مصابًا بسوء التغذية إذا كانت كتلته عند الولادة أقل من ٢,٥ كجم. ما نسبة المواليد المصابين بسوء التغذية ؟

٥ اذا كانت آلة صنع القهوة في المدرسة تسكب القهوة في أكواب ورقية بحجم ٢٠سم^٣ وكانت الكمية التي تسكبها متغيرة وتتبع توزيعًا طبيعيًّا بوسط ١٩ سم^٣ وانحراف معياري ١,٤سم^٣ ، ما احتمال أن لا يسع الكوب القهوة المسكوبة ؟

٦ إذا كانت الدرجات في امتحان الرياضيات تتبع توزيعًا طبيعيًّا بوسط ٨٠ درجة، وانحراف معياري ١٠,٦ درجة، ويُعدُّ راسبًا كل من يحصل على أقل من٥٤ درجة.

أ) كم نسبة الرسوب في الامتحان ؟

ب) كم طالبًا تتوقع أن يرسب من ١٠٠٠ طالب جلسوا للامتحان ؟

ج) إذا تقرر أن يعطى أفضل ٥٪ من الطلاب تقديرًا ممتازًا، فما أقل درجة مطلوبة للحصول على تقدير ممتاز؟

٧ في تجربة على أطفال في الرابعة من عمرهم لاختبار سرعتهم في تجميع لعبة سهلة التجميع لوحظ أن الوقت الذي يستغرقونه يتبع توزيعًا طبيعيًّا بوسط ٢٨ دقيقة وانحراف معياري ٤ دقائق. ما احتمال أن يجمع أحد الأطفال اللعبة في زمن : أ) أقل من ٢٥ دقيقة. ب) بين ٢٤ إلى ٣٢ دقيقة. ج) أكثر من ٤٠ دقيقة.

تمارين &

مسائل عامة

١ يوضح الجدول التالي عدد طلبات خدمة الغرف في فندق في مسقط على مدى ٢٠٨ ليالٍ.

عدد الطلبات	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥
عدد الليالي	٦	١٠	١١	٢٠	٢٦	٣٢	٣٤	٢٨	٢٥	١٦

أ) إذا اعتبرت هذه الليالي عينة عشوائية من سجلات الفندق لعدد من السنوات، فاحسب احتمال ٣٦، ٣٧، .....٤٥ طلبًا في الليلة.

ب) ما احتمال أن يكون هناك من ٤٠ إلى ٤٥ طلبًا لليلة ؟

جـ) ما العدد المتوقع للطلبات في الليلة ؟

٢ إذا كان عمر مروحة سقف يتبع توزيعًا طبيعيًّا بوسط ٤ سنوات وانحراف معياري ١٥ شهرًا، وكنت قد اشتريت ٩ مراوح من هذا النوع لمنزلك الجديد ، ما احتمال أن يكون عمر :

أ) مروحة من هذا النوع بين ٣ إلى ٥ سنوات ؟

ب) ٨ على الأقل من مراوحك التسع يكون عمرها من ٣ إلى ٥ سنوات ؟

٣ قدّرت شركة لصناعة الساعات أن متوسط عمر الساعات التي تنتجها ٢٨ شهرًا بانحراف معياري ٥ أشهر ، وأن عمر الساعات يتبع توزيعًا طبيعيًّا .

أ) إذا كانت الشركة تعطي ضمانًا لمدة عامين ، أي تستبدل الساعة إذا حدث بها عطل خلال عامين، فما نسبة المبيعات التي ستستبدل ؟

ب) إذا حددت الشركة نسبة ١٢٪ من المبيعات كحد أقصى للاستبدال ، فكم يجب أن تكون فترة الضمان ؟

٤ إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير (س) يعطى بدالة ل(س) :

$$\text{ل(س)} = \begin{cases} \text{س} & ، \ ٠ \leqslant \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س} & ، \ ١ < \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$$

أ) اثبت أن ل (س) دالة كثافة

ب) أوجد ل(س < ١,٥)

جـ) أوجد ل(٠,٥ < س < ١,٥)

٥ اجريت دراسة لمعرفة أثر علاج ما في تخفيف الآلام باستخدام مقياس خاص، واختيرت عينة عشوائية من ٦٤ شخصًا فكان المتوسط لمستوى الآلام ٨٨ بانحراف معياري ٢٠ . وبعد المعالجة فإن المتوسط لمستوى الآلام ٦٥ بانحراف معياري ٢٤، بيِّن إن كان هناك دليل على أن العلاج يخفف الآلام .

٦ إذا كان عمر أحد القطع في جهاز الحاسوب الشخصي يتبع توزيعًا طبيعيًا تقريبًا بوسط ٣ سنوات وانحراف معياري ١٢ شهرًا وتعطي الشركة ضمانًا لمدة عام على هذه القطعة . فأجب عما يلي :

أ) ما نسبة مبيعات الشركة من القطع التي عليها استبدالها ، أو إصلاحها بالمجان خلال فترة الضمان؟

ب) إذا لم ترغب الشركة في استبدال أو إصلاح أكثر من ٠,١ من القطع المبيعة بالمجان ، فكم يجب أن تكون فترة الضمان ؟

ملحق (١)

المساحة المتجمعة تحت المنحنى الطبيعي (المعتدل) لغاية قيم ز الموجبة ★

ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة
٠,٠٠	٠,٥٠٠٠	٠,٣٦	٠,٦٤٠٦	٠,٧٢	٠,٧٦٤٢	١,٠٨	٠,٨٥٩٩	١,٤٤	٠,٩٢٥١
٠,٠١	٠,٥٠٤٠	٠,٣٧	٠,٦٤٤٣	٠,٧٣	٠,٧٦٧٣	١,٠٩	٠,٨٦٢١	١,٤٥	٠,٩٢٦٥
٠,٠٢	٠,٥٠٨٠	٠,٣٨	٠,٦٤٨٠	٠,٧٤	٠,٧٧٠٣	١,١٠	٠,٨٦٤٣	١,٤٦	٠,٩٢٧٩
٠,٠٣	٠,٥١٢٠	٠,٣٩	٠,٦٥١٧	٠,٧٥	٠,٧٧٣٤	١,١١	٠,٨٦٦٥	١,٤٧	٠,٩٢٩٢
٠,٠٤	٠,٥١٦٠	٠,٤٠	٠,٦٥٥٤	٠,٧٦	٠,٧٧٦٤	١,١٢	٠,٨٦٨٦	١,٤٨	٠,٩٣٠٦
٠,٠٥	٠,٥١٩٩	٠,٤١	٠,٦٥٩١	٠,٧٧	٠,٧٧٩٤	١,١٣	٠,٨٧٠٨	١,٤٩	٠,٩٣١٩
٠,٠٦	٠,٥٢٣٩	٠,٤٢	٠,٦٦٢٨	٠,٧٨	٠,٧٨٢٣	١,١٤	٠,٨٧٢٩	١,٥٠	٠,٩٣٣٢
٠,٠٧	٠,٥٢٧٩	٠,٤٣	٠,٦٦٦٤	٠,٧٩	٠٠,٧٨٥٢	١,١٥	٠,٨٧٤٩	١,٥١	٠,٩٣٤٥
٠,٠٨	٠,٥٣١٩	٠,٤٤	٠,٦٧٠٠	٠,٨٠	٠,٧٨٨١	١,١٦	٠,٨٧٧٠	١,٥٢	٠,٩٣٥٧
٠,٠٩	٠,٥٣٥٩	٠,٤٥	٠,٦٧٣٦	٠,٨١	٠,٧٩١٠	١,١٧	٠,٨٧٩٠	١,٥٣	٠,٩٣٧٠
٠,١٠	٠,٥٣٩٨	٠,٤٦	٠,٦٧٧٢	٠,٨٢	٠,٧٩٣٩	١,١٨	٠,٨٨١٠	١,٥٤	٠,٩٣٨٢
٠,١١	٠,٥٤٣٨	٠,٤٧	٠,٦٨٠٨	٠,٨٣	٠,٧٩٦٧	١,١٩	٠,٨٨٣٠	١,٥٥	٠,٩٣٩٤
٠,١٢	٠,٥٤٧٨	٠,٤٨	٠,٦٨٤٤	٠,٨٤	٠,٧٩٩٥	١,٢٠	٠,٨٨٤٩	١,٥٦	٠,٩٤٠٦
٠,١٣	٠,٥٥١٧	٠,٤٩	٠,٦٨٧٩	٠,٨٥	٠,٨٠٢٣	١,٢١	٠,٨٨٦٩	١,٥٧	٠,٩٤١٨
٠,١٤	٠,٥٥٥٢	٠,٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٦	٠,٨٠٥١	١,٢٢	٠,٨٨٨٨	١,٥٨	٠,٩٤٢٩
٠,١٥	٠,٥٥٩٦	٠,٥١	٠,٦٩٥٠	٠,٨٧	٠,٨٠٧٨	١,٢٣	٠,٨٩٠٧	١,٥٩	٠,٩٤٤١
٠,١٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٢	٠,٦٩٨٥	٠,٨٨	٠,٨١٠٦	١,٢٤	٠,٨٩٢٥	١,٦٠	٠,٩٤٥٢
٠,١٧	٠,٥٦٧٥	٠,٥٣	٠,٧٠١٩	٠,٨٩	٠,٨١٣٣	١,٢٥	٠,٨٩٤٤	١,٦١	٠,٩٤٦٣
٠,١٨	٠,٥٧١٤	٠,٥٤	٠,٧٠٥٤	٠,٩٠	٠,٨١٥٩	١,٢٦	٠,٨٩٦٢	١,٦٢	٠,٩٤٧٤
٠,١٩	٠,٥٧٥٣	٠,٥٥	٠,٧٠٨٨	٠,٩١	٠,٨١٨٦	١,٢٧	٠,٨٩٨٠	١,٦٣	٠,٩٤٨٤
٠,٢٠	٠,٥٧٩٣	٠,٥٦	٠,٧١٢٣	٠,٩٢	٠,٨٢١٢	١,٢٨	٠,٨٩٩٧	١,٦٤	٠,٩٤٩٥
٠,٢١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧	٠,٧١٥٧	٠,٩٣	٠,٨٢٣٨	١,٢٩	٠,٩٠١٥	١,٦٥	٠,٩٥٠٥
٠,٢٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٨	٠,٧١٩٠	٠,٩٤	٠,٨٢٦٤	١,٣٠	٠,٩٠٣٢	١,٦٦	٠,٩٥١٥
٠,٢٣	٠,٥٩١٠	٠,٥٩	٠,٧٢٢٤	٠,٩٥	٠,٨٢٨٩	١,٣١	٠,٩٠٤٩	١,٦٧	٠,٩٥٢٥
٠,٢٤	٠,٥٩٤٨	٠,٦٠	٠,٧٢٥٧	٠,٩٦	٠,٨٣١٥	١,٣٢	٠,٩٠٦٦	١,٦٨	٠,٩٥٣٥
٠,٢٥	٠,٥٩٨٧	٠,٦١	٠,٧٢٩١	٠,٩٧	٠,٨٣٤٠	١,٣٣	٠,٩٠٨٢	١,٦٩	٠,٩٥٤٥
٠,٢٦	٠,٦٠٢٦	٠,٦٢	٠,٧٣٢٤	٠,٩٨	٠,٨٣٦٥	١,٣٤	٠,٩٠٩٩	١,٧٠	٠,٩٥٥٤
٠,٢٧	٠,٦٠٦٤	٠,٦٣	٠,٧٣٥٧	٠,٩٩	٠,٨٣٨٩	١,٣٥	٠,٩١١٥	١,٧١	٠,٩٥٦٤
٠,٢٨	٠,٦١٠٢	٠,٦٤	٠,٧٣٨٩	١,٠٠	٠,٨٤١٣	١,٣٦	٠,٩١٣١	١,٧٢	٠,٩٥٧٣
٠,٢٩	٠,٦١٤١	٠,٦٥	٠,٧٤٢٢	١,٠١	٠,٨٤٣٨	١,٣٧	٠,٩١٤٧	١,٧٣	٠,٩٥٨٢
٠,٣٠	٠,٦١٧٩	٠,٦٦	٠,٧٤٥٤	١,٠٢	٠,٨٤٦١	١,٣٨	٠,٩١٦٢	١,٧٤	٠,٩٥٩١
٠,٣١	٠,٦٢١٧	٠,٦٧	٠,٧٤٨٦	١,٠٣	٠,٨٤٨٥	١,٣٩	٠,٩١٧٧	١,٧٥	٠,٩٥٩٩
٠,٣٢	٠,٦٢٥٥	٠,٦٨	٠,٧٥١٧	١,٠٤	٠,٨٥٠٨	١,٤٠	٠,٩١٩٢	١,٧٦	٠,٩٦٠٨
٠,٣٣	٠,٦٢٩٢	٠,٦٩	٠,٧٥٤٩	١,٠٥	٠,٨٥٣١	١,٤١	٠,٩٢٠٧	١,٧٧	٠,٩٦١٦
٠,٣٤	٠,٦٣٣١	٠,٧٠	٠,٧٥٨٠	١,٠٦	٠,٨٥٥٤	١,٤٢	٠,٩٢٢٢	١,٧٨	٠,٩٦٢٥
٠,٣٥	٠,٦٣٦٨	٠,٧١	٠,٧٦١١	١,٠٧	٠,٨٥٧٧	١,٤٣	٠,٩٢٣٦	١,٧٩	٠,٩٦٣٣

★ المساحة المناظرة لقيم ز السالبة = ١− المساحة المناظرة لقيم ز الموجبة . فمثلا اذا كانت ز = −١,١٥ فان المساحة المناظرة لها

=١−٠,٨٧٤٩=٠,١٢٥١

ملحق (١)

المساحة المتجمعة تحت المنحنى الطبيعي (المعتدل) لغاية قيم ز الموجبة ★

ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة	ز	المساحة
١,٨٠	٠,٩٦٤١	٢,١٦	٠,٩٨٤٦	٢,٥٢	٠,٩٩٤١	٢,٨٨	٠,٩٩٨٠	٣,٢٤	٠,٩٩٩٤
١,٨١	٠,٩٦٤٩	٢,١٧	٠,٩٨٥٠	٢,٥٣	٠,٩٩٤٣	٢,٨٩	٠,٩٩٨١	٣,٢٥	٠,٩٩٩٤
١,٨٢	٠,٩٦٥٦	٢,١٨	٠,٩٨٥٤	٢,٥٤	٠,٩٩٤٥	٢,٩٠	٠,٩٩٨١	٣,٢٦	٠,٩٩٩٤
١,٨٣	٠,٩٦٦٤	٢,١٩	٠,٩٨٥٧	٢,٥٥	٠,٩٩٤٦	٢,٩١	٠,٩٩٨٢	٣,٢٧	٠,٩٩٩٥
١,٨٤	٠,٩٦٧١	٢,٢٠	٠,٩٨٦١	٢,٥٦	٠,٩٩٤٨	٢,٩٢	٠,٩٩٨٢	٣,٢٨	٠,٩٩٩٥
١,٨٥	٠,٩٦٧٨	٢,٢١	٠,٩٨٦٤	٢,٥٧	٠,٩٩٤٩	٢,٩٣	٠,٩٩٨٣	٣,٢٩	٠,٩٩٩٥
١,٨٦	٠,٩٦٨٦	٢,٢٢	٠,٩٨٦٨	٢,٥٨	٠,٩٩٥١	٢,٩٤	٠,٩٩٨٤	٣,٣٠	٠,٩٩٩٥
١,٨٧	٠,٩٦٩٣	٢,٢٣	٠,٩٨٧١	٢,٥٩	٠,٩٩٥٢	٢,٩٥	٠,٩٩٨٤	٣,٣١	٠,٩٩٩٥
١,٨٨	٠,٩٦٩٩	٢,٢٤	٠,٩٨٧٥	٢,٦٠	٠,٩٩٥٣	٢,٩٦	٠,٩٩٨٥	٣,٣٢	٠,٩٩٩٥
١,٨٩	٠,٩٧٠٦	٢,٢٥	٠,٩٨٧٨	٢,٦١	٠,٩٩٥٥	٢,٩٧	٠,٩٩٨٥	٣,٣٣	٠,٩٩٩٦
١,٩٠	٠,٩٧١٢	٢,٢٦	٠,٩٨٨١	٢,٦٢	٠,٩٩٥٦	٢,٩٨	٠,٩٩٨٦	٣,٣٤	٠,٩٩٩٦
١,٩١	٠,٩٧١٩	٢,٢٧	٠,٩٨٨٤	٢,٦٣	٠,٩٩٥٧	٢,٩٩	٠,٩٩٨٦	٣,٣٥	٠,٩٩٩٦
١,٩٢	٠,٩٧٢٦	٢,٢٨	٠,٩٨٨٧	٢,٦٤	٠,٩٩٥٩	٣,٠٠	٠,٩٩٨٧	٣,٣٦	٠,٩٩٩٦
١,٩٣	٠,٩٧٣٢	٢,٢٩	٠,٩٨٩٠	٢,٦٥	٠,٩٩٦٠	٣,٠١	٠,٩٩٨٧	٣,٣٧	٠,٩٩٩٦
١,٩٤	٠,٩٧٣٨	٢,٣٠	٠,٩٨٩٣	٢,٦٦	٠,٩٩٦١	٣,٠٢	٠,٩٩٨٧	٣,٣٨	٠,٩٩٩٦
١,٩٥	٠,٩٧٤٤	٢,٣١	٠,٩٧٩٦	٢,٦٧	٠,٩٩٦٢	٣,٠٣	٠,٩٩٨٨	٣,٣٩	٠,٩٩٩٧
١,٩٦	٠,٩٧٥٠	٢,٣٢	٠,٩٨٩٨	٢,٦٨	٠,٩٩٦٣	٣,٠٤	٠,٩٩٨٨	٣,٤٠	٠,٩٩٩٧
١,٩٧	٠,٩٧٥٦	٢,٣٣	٠,٩٩٠١	٢,٦٩	٠,٩٩٦٤	٣,٠٥	٠,٩٩٨٩	٣,٤١	٠,٩٩٩٧
١,٩٨	٠,٩٧٦١	٢,٣٤	٠,٩٩٠٤	٢,٧٠	٠,٩٩٦٥	٣,٠٦	٠,٩٩٨٩	٣,٤٢	٠,٩٩٩٧
١,٩٩	٠,٩٧٦٧	٢,٣٥	٠,٩٩٠٦	٢,٧١	٠,٩٩٦٦	٣,٠٧	٠,٩٩٨٩	٣,٤٣	٠,٩٩٩٧
٢,٠٠	٠,٩٧٧٢	٢,٣٦	٠,٩٩٠٩	٢,٧٢	٠,٩٩٦٧	٣,٠٨	٠,٩٩٩٠	٣,٤٤	٠,٩٩٩٧
٢,٠١	٠,٩٧٧٨	٢,٣٧	٠,٩٩١١	٢,٧٣	٠,٩٩٦٨	٣,٠٩	٠,٩٩٩٠	٣,٤٥	٠,٩٩٩٧
٢,٠٢	٠,٩٧٨٣	٢,٣٨	٠,٩٩١٣	٢,٧٤	٠,٩٩٦٩	٣,١٠	٠,٩٩٩٠	٣,٤٦	٠,٩٩٩٧
٢,٠٣	٠,٩٧٨٨	٢,٣٩	٠,٩٩١٦	٢,٧٥	٠,٩٩٧٠	٣,١١	٠,٩٩٩١	٣,٤٧	٠,٩٩٩٧
٢,٠٤	٠,٩٧٩٣	٢,٤٠	٠,٩٩١٨	٢,٧٦	٠,٩٩٧١	٣,١٢	٠,٩٩٩١	٣,٤٨	٠,٩٩٩٧
٢,٠٥	٠,٩٧٩٨	٢,٤١	٠,٩٩٢٠	٢,٧٧	٠,٩٩٧٢	٣,١٣	٠,٩٩٩١	٣,٤٩	٠,٩٩٩٨
٢,٠٦	٠,٩٨٠٣	٢,٤٢	٠,٩٩٢٢	٢,٧٨	٠,٩٩٧٣	٣,١٤	٠,٩٩٩٢	٣,٥٠	٠,٩٩٩٨
٢,٠٧	٠,٩٨٠٨	٢,٤٣	٠,٩٩٢٥	٢,٧٩	٠,٩٩٧٤	٣,١٥	٠,٩٩٩٢	٣,٥١	٠,٩٩٩٨
٢,٠٨	٠,٩٨١٢	٢,٤٤	٠,٩٩٢٧	٢,٨٠	٠,٩٩٧٤	٣,١٦	٠,٩٩٩٢	٣,٥٢	٠,٩٩٩٨
٢,٠٩	٠,٩٨١٧	٢,٤٥	٠,٩٩٢٩	٢,٨١	٠,٩٩٧٥	٣,١٧	٠,٩٩٩٢	٣,٥٣	٠,٩٩٩٨
٢,١٠	٠,٩٨٢١	٢,٤٦	٠,٩٩٣١	٢,٨٢	٠,٩٩٧٦	٣,١٨	٠,٩٩٩٣	٣,٥٤	٠,٩٩٩٨
٢,١١	٠,٩٨٢٦	٢,٤٧	٠,٩٩٣٢	٢,٨٣	٠,٩٩٧٧	٣,١٩	٠,٩٩٩٣	٣,٥٥	٠,٩٩٩٨
٢,١٢	٠,٩٨٣٠	٢,٤٨	٠,٩٩٣٤	٢,٨٤	٠,٩٩٧٧	٣,٢٠	٠,٩٩٩٣	٣,٥٦	٠,٩٩٩٨
٢,١٣	٠,٩٨٣٤	٢,٤٩	٠,٩٩٣٦	٢,٨٥	٠,٩٩٧٨	٣,٢١	٠,٩٩٩٣	٣,٥٧	٠,٩٩٩٨
٢,١٤	٠,٩٨٣٨	٢,٥٠	٠,٩٩٣٨	٢,٨٦	٠,٩٩٧٩	٣,٢٢	٠,٩٩٩٤	٣,٥٨	٠,٩٩٩٨
٢,١٥	٠,٩٨٤٢	٢,٥١	٠,٩٩٤٠	٢,٨٧	٠,٩٩٧٩	٣,٢٣	٠,٩٩٩٤	٣,٥٩	٠,٩٩٩٨

★ المساحة المناظرة لقيم ز السالبة = ١– المساحة المناظرة لقيم ز الموجبة . فمثلا اذا كانت ز = –١,١٥ فان المساحة المناظرة لها =١–٠,٨٧٤٩=٠,١٢٥١

الوحدة السادسة ٦

القطوع المخروطية

Conic Sections

الأهداف

١ تعريف القطوع المخروطية .

٢ تعريف كل من: القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد.

٣ تعيين عناصر كل من: القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد.

٤ إيجاد معادلة قطع مكافئ محوره يوازي أحد المحورين الإحداثيين إذا علمت شروط كافية.

٥ رسم قطع مكافئ علمت معادلته.

٦ إيجاد معادلة قطع ناقص محوراه يوازيان المحورين الإحداثيين إذا علمت شروط كافية.

٧ رسم قطع ناقص علمت معادلته .

٨ تمييز الاختلاف المركزي لقطوع مخروطية.

٩ إيجاد معادلة قطع زائد محوراه يوازيان المحورين الإحداثيين إذا علمت شروط كافية.

١٠ رسم قطع زائد علمت معادلته .

١١ إيجاد الخطين التقاربيين لقطع زائد معلوم رأساه ومركزه واختلافه المركزي.

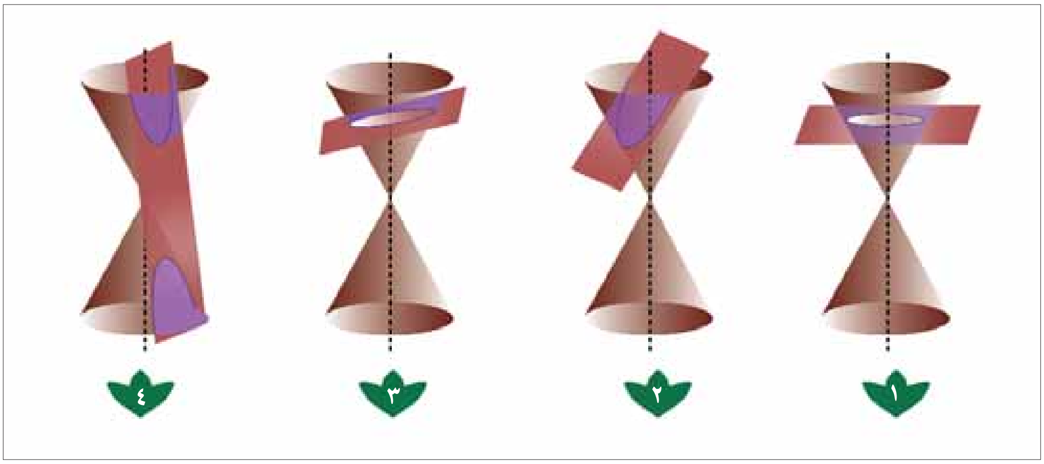
١٢ مناقشة معادلة الدرجة الثانية

ل س^{٢} + م ص^{٢} + ن س + ي ص + ك = ٠، وتعيين نوع القطع المخروطي الذي يمثله.

القطوع المخروطية

Conic Sections

القطوع المخروطية هي منحنيات (Curves) تنتج من تقاطع مستوى مع مخروطين دائريين قائمين مشتركين في الرأس والمحور بأوضاع معينة.



١ في الشكل (١) قطع المستوى أحد المخروطين بحيث كان محور المخروط عموديا عليه. ما اسم الشكل الناتج من التقاطع؟ ارسم رسما تخطيطيا له.

٢ في الشكل (٢) قطع المستوى أحد المخروطين بحيث كان موازيا لأحد الرواسم. ارسم رسما تخطيطيا للشكل الناتج.

٣ في الشكل (٣) قطع المستوى المخروط بحيث كان مائلا على المحور ولا يمر برأس المخروط وليس موازيًا لراسم فيه. ارسم رسما تخطيطيا للشكل الناتج.

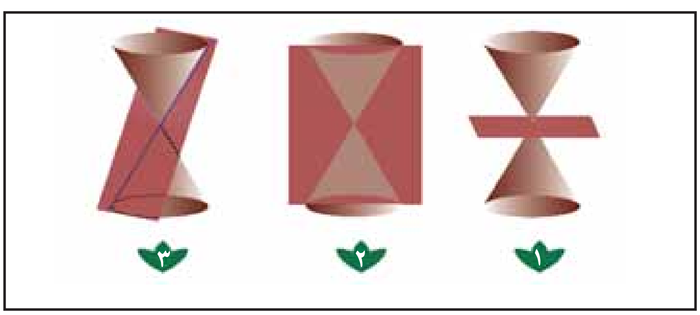
٤ في الشكل (٤) قطع المستوى المخروطين بشكلٍ موازٍ للمحور. ارسم رسما تخطيطيا للشكل الناتج.

يكون القطع في شكل (١) دائرة ،وفي شكل (٢) قطعا مكافئا ، وفي شكل (٣) قطعا ناقصا ،وفي شكل (٤) قطعا زائدا.

ملاحظة : الراسم هو الخط الواصل من رأس المخروط إلى محيط القاعدة .

تدريب ١

بالاستعانة بالأشكال المعطاة اكتب وصفا لحالة تقاطع المستوى مع المخروط في كل حالة،واذكراسم الشكل الناتج.



القطع المكافئ

Parabola

ينتج القطع المكافئ كما أشرنا،من قطع مستوى لأحد المخروطين بحيث يكون موازيا لأحد الرواسم،ويظهر القطع المكافئ في المصابيح الكهربائية (مقطع الجزء العاكس منها) ، ويظهر كذلك في بعض المنشآت الهندسية (مقاطع الجسور العلوية التي تبنى فوق طريق معبد،والجسور المعلقة فوق موانع مائية أو طبيعية أخرى) ،وفي الصحون اللاقطة (مقطع الصحن اللاقط ...).

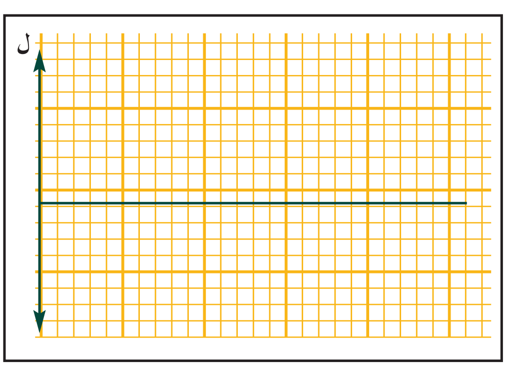
نشاط ١ : (خصائص القطع المكافئ)

المواد: ورق رسم بياني ، فرجار ، مسطرة ، قلم.

الخطوات: اعمل في مجموعات ثنائية وقم بما يلي:

١. ارسم مستقيما ل وحدد نقطة ف خارجه .
٢. أنزل عمودا من النقطة ف على المستقيم ل ومده من جهتي النقطة.
٣. ارسم مجموعة دوائر مركزها النقطة ف بحيث تكون أنصاف أقطارها ١سم،٢سم،٣سم،٤سم،...
٤. حدد نقطة المنتصف بين النقطة ف والمستقيم ل وسمها م .
٥. ابحث عن نقطتين على كل دائرة يكون بعد كل نقطة عن النقطة ف يساوي بعدها عن المستقيم ل إن أمكن.
٦. صل هذه النقاط بخط ممهد، ثم أجب عما يلي:

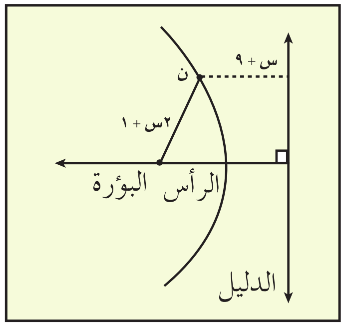
- كم مستقيما موازيا للمستقيم ل يمكن أن ترسم؟
- كم دائرة مركزها ف يمكن أن ترسم؟
- صف الشكل الناتج من توصيل النقاط.
- اقترح اسما للخط الذي تقع عليه النقطتان ف ، م .
- اقترح اسما للنقطة م .
- أعط تعريفا للمنحنى الناتج من توصيل النقاط.

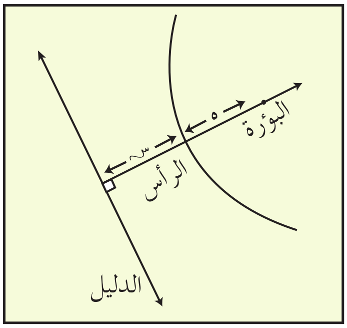


تدريب ٢

أ) ارسم منحنى المعادلة ص^{٢} = ٤س ، وتحقق إن كانت له نفس خواص المنحنى الذي توصلت إليه في النشاط ، وحدد مكان كل من المستقيم ل والنقطة ف .

ب) بالاعتماد على ما توصلت إليه في نشاط١، أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية :





تعريف

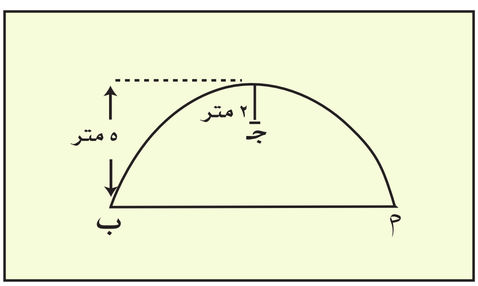
القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (بؤرة القطع المكافئ) مساويا لبعدها عن مستقيم معلوم (دليل القطع المكافئ).
(تقع البؤرة والرأس على مستقيم يعامد الدليل يسمى محور التماثل) .

تدريب ٣

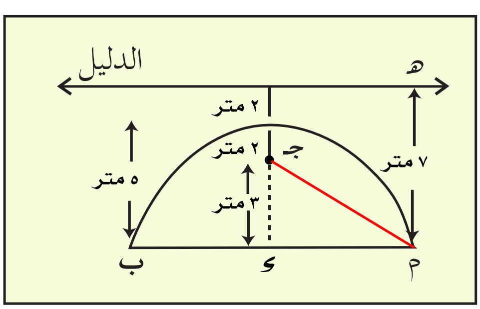
ما العلاقة بين بعد البؤرة عن الرأس و بعد الرأس عن الدليل ؟

مثال ١

صمم أحد المهندسين جسرا علويا مقطعه على شكل قطع مكافئ على أحد الطرق السريعة (انظر الشكل)، فإذا كانت بؤرته على بعد ٢متر من الرأس وكان أقصى ارتفاع للجسر ٥ متر. احسب المسافة الأفقية (أ ب) بين نهايتي القوس الذي يمثل مقطع الجسر.



الحل



أ نقطة واقعة على القطع المكافئ:

∴ أ جـ = أ هـ = ٧م ⟸ (حسب تعريف القطع المكافئ)

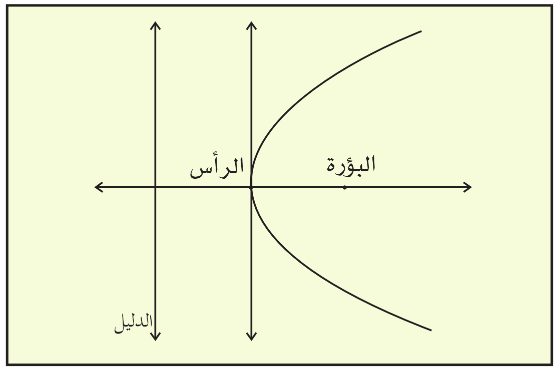
△ أ جـ د مثلث قائم الزاوية في د :

(أ د)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (جـ د)^{٢} ⟸ (لماذا؟)

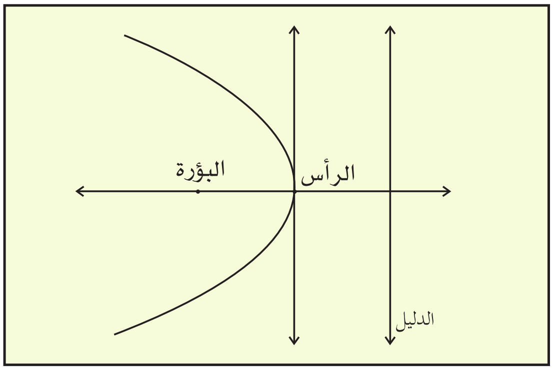
= (٧)^{٢} − (٣)^{٢} = ٤٠

∴ أ د = $\sqrt{٤٠}$ ، ∴ أ ب = ٢$\sqrt{٤٠}$ ≅ ١٢,٦ م

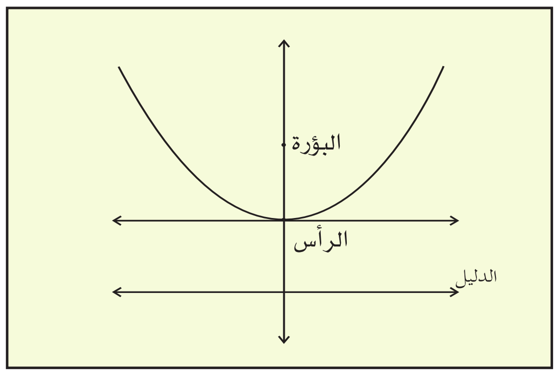
الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠)



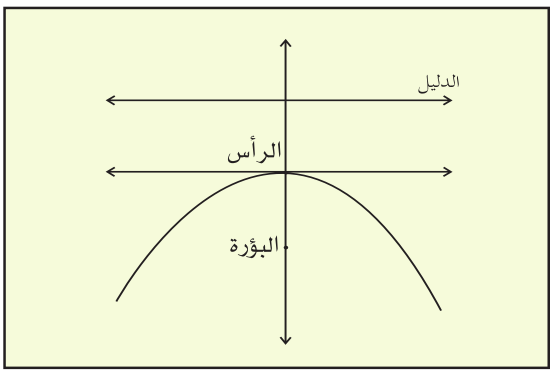
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الأشكال (١)،(٢)،(٣)،(٤) جميعها أشكال لقطوع مكافئة . تأمل هذه الأشكال وأجب عما يلي:

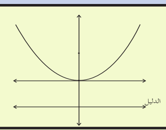
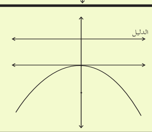
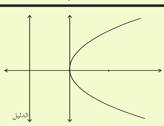
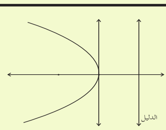
١. حدد إحداثيات الرأس في كل شكل.
٢. حدد اتجاه فتحة القطع في كل شكل.
٣. حدد محور التماثل في كل شكل.
٤. في أي شكل من الأشكال تكون $س^{٢}$ موجودة في معادلة القطع؟
٥. في أي شكل من الأشكال تكون $ص^{٢}$ موجودة في معادلة القطع؟
٦. متى تكون إشارة أ موجبة ؟ ومتى تكون سالبة؟
٧. أوجد إحداثيات البؤرة(ف) ومعادلة الدليل ومحور التماثل لكل شكل .
٨. ماذا تتوقع أن تكون معادلة القطع المكافئ في كل شكل من الأشكال؟

تدريب ٤

بالاعتماد على ما توصلت إليه سابقا. جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٤ ، ٠) ودليله المستقيم الذي معادلته ص=٦.

نتيجة

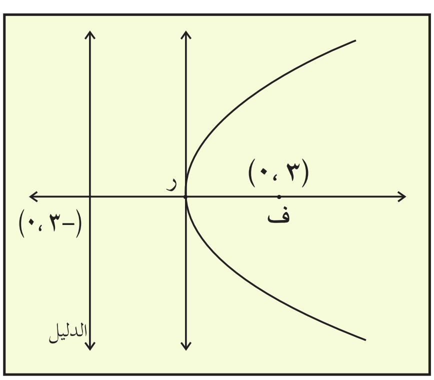
- الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠)، أ > ٠

الصورة القياسية لمعادلته	محور التماثل	فتحة القطع	بؤرته (ف)	معادلة دليله	شكل القطع
$س^{٢} = ٤أ ص$	المحور الصادي	إلى أعلى	(٠ ، أ)	ص = - أ	
$س^{٢} = -٤أ ص$	المحور الصادي	إلى أسفل	(٠ ، - أ)	ص = أ	
$ص^{٢} = ٤أ س$	المحور السيني	إلى اليمين	(أ ، ٠)	س = - أ	
$ص^{٢} = -٤أ س$	المحور السيني	إلى اليسار	(- أ ، ٠)	س = أ	

مثال ٢

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) في الحالات التالية:

أ) دليله المستقيم س = - ٣ ب) يمر بالنقطة (- ٢ ، - ٣)



الحل

أ) البؤرة (٣ ، ٠) ، القطع لليمين (متناظر حول محور السينات)

أ = ٣ (لماذا؟)

معادلة القطع المكافئ $ص^{٢} = ٤أ س \Leftarrow ص^{٢} = ١٢س$

ب) هناك حالتان تحققان الشرط :

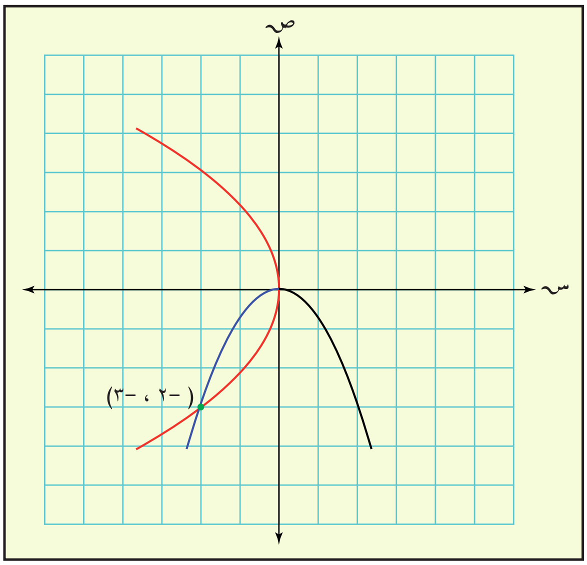
أولا : القطع لليسار ومتناظر حول محور السينات

معادلته $ص^{٢} = -٤م\,س$

النقطة (− ٢ ، − ٣) تحقق معادلته (لماذا؟).

$\therefore (-٣)^{٢} = -٤م(-٢) \Leftarrow م = \frac{٩}{٨}$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي : $ص^{٢} = -\frac{٩}{٢}\,س$



ثانيا : القطع للأسفل متناظر حول محور الصادات

معادلته : $س^{٢} = -٤م\,ص$

النقطة (− ٢ ، − ٣) تحقق المعادلة

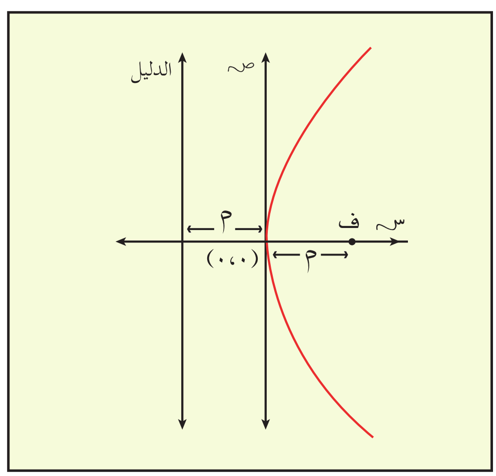
$(-٢)^{٢} = -٤م(-٣) \Leftarrow م = \frac{١}{٣}$

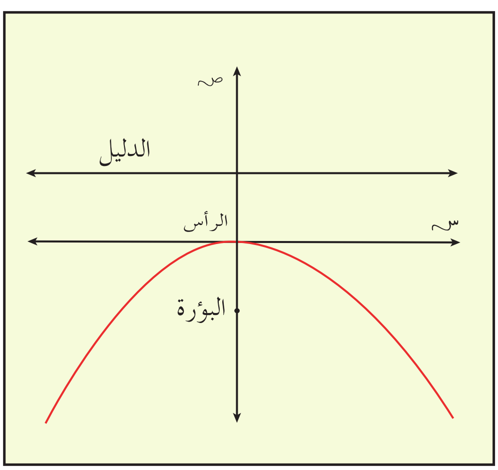
$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي: $س^{٢} = -٤ \times \frac{١}{٣}\,ص$

$\Leftarrow س^{٢} = \frac{-٤}{٣}\,ص$

تدريب ٥

أوجد معادلة القطع المكافئ، ومعادلة الدليل ، ومحور التناظر في كل من الشكلين التاليين :

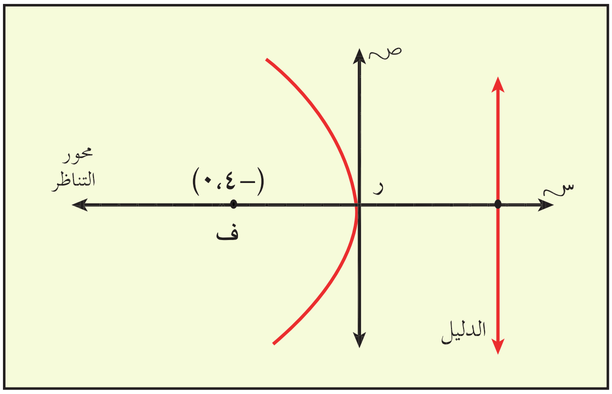




مثال ٣

أوجد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ ص^{٢} = − ١٦س ، وارسم شكلا تخطيطيا له .

الحل



ص^{٢} = − ١٦س

الصورة القياسية : ص^{٢} = − ٤م س

الرأس (٠ ، ٠) ، −٤م = − ١٦ ⟸ م = ٤

القطع لليسار ، البؤرة (− ٤ ، ٠)

معادلة الدليل س = ٤

محور التناظر ص = ٠

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ)

يمكن كتابة المعادلة : ص^{٢} = ٤م س على الصورة (ص − ٠)^{٢} = ٤ م (س − ٠)
حيث (٠ ، ٠) هي إحداثيات الرأس .

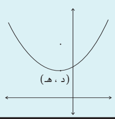
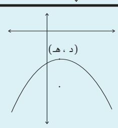
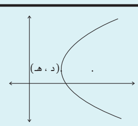
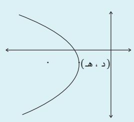
تدريب ٦

أ) كيف يمكن أن تكتب المعادلة إذا كانت إحداثيات الرأس (د ، هـ) ؟

ب) أوجد معادلة صورة القطع المكافئ : ص^{٢} = ١٢س تحت تأثير انسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات . ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع وصورته موضحا الرأس والبؤرة والدليل لكلٍّ منهما .

نتيجة

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ) ، أ $>$ ٠

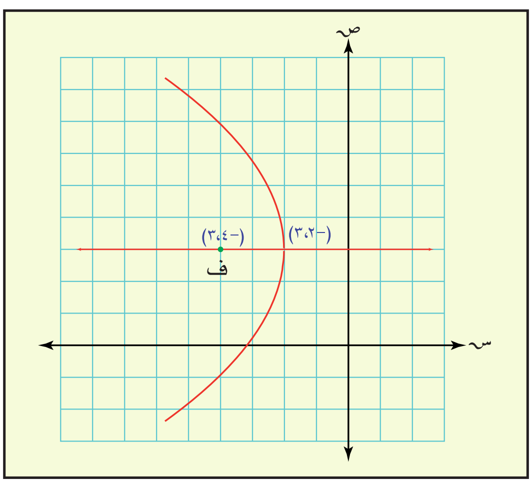
الصورة القياسية لمعادلته	محور التماثل	فتحة القطع	بؤرته (ف)	معادلة دليله	شكل القطع
(س - د)^{٢} = ٤ أ (ص - هـ)	يوازي محور الصادات	إلى أعلى	(د ، هـ + أ)	ص = هـ - أ	
(س - د)^{٢} = -٤ أ (ص - هـ)	يوازي محور الصادات	إلى أسفل	(د ، هـ - أ)	ص = هـ + أ	
(ص - هـ)^{٢} = ٤ أ (س - د)	يوازي محور السينات	إلى اليمين	(د + أ ، هـ)	س = د - أ	
(ص - هـ)^{٢} = -٤ أ (س - د)	يوازي محور السينات	إلى اليسار	(د - أ ، هـ)	س = د + أ	

مثال ٤

أوجد معادلة القطع المكافئ في الحالتين التاليتين:

أ) الرأس (- ٢ ، ٣) والبؤرة (- ٤ ، ٣).

ب) البؤرة (٣ ، ٠) والدليل هو المستقيم الذي معادلته ص = ١ .



الحل

أ) بما أن الإحداثي الصادي ثابت فإن محور التناظر يوازي محور السينات.

وبما أن الإحداثي السيني للبؤرة أقل من الإحداثي السيني للرأس فإن فتحة القطع لليسار.

أ = البعد بين الرأس والبؤرة = | -٢ - (-٤) | = ٢

معادلة القطع المكافئ : (ص - ٣)^{٢} = -٨ (س + ٢)

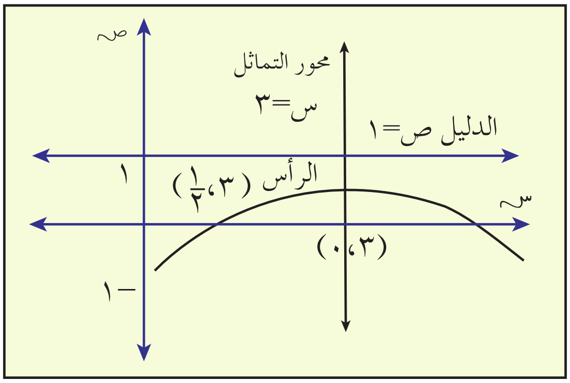
ب) فتحة القطع للأسفل (لماذا؟).

الرأس (٣ ، $\frac{١}{٢}$) ويقع في منتصف العمود المقام من البؤرة على الدليل.

$م = \frac{١}{٢}$ (لماذا؟).

معادلة القطع المكافئ: $(س - د)^٢ = -٤م (ص - هـ)$

$(س - ٣)^٢ = -٢(ص - \frac{١}{٢})$.



تدريب ٧

أ) ارسم شكلا تخطيطيا للقطع المكافئ وأوجد معادلته إذا كان :

الرأس (٢ ، ١) ومحور تناظره يوازي محور الصادات ويمر منحناه بالنقطة (- ١ ، ٥).

ب) أوجد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ

$(س - ٣)^٢ = ٤(ص - ٢)$. وارسم شكلا تخطيطيا له .

تدريب ٨

أوجد الرأس والبؤرة والدليل ومحور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته: $ص^٢ - ٦ص + ٨س - ٧ = ٠$.

ثم ارسم منحناه.

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ :

يمكن أن نتوصل إلى الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ ،وذلك عن طريق تبسيط الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

أولا: إذا كان محور التناظر يوازي محور السينات.

مثال ٥

حول الصورة القياسية (ص − هـ)^{٢} = ٤أ (س − د) إلى الصورة ص^{٢} + ن ص + ي س + ك = ٠

وأوجد قيم كل من ن ، ي ، ك بدلالة د ، هـ ، أ .

الحل

(ص − هـ)^{٢} = ٤أ (س − د) ⇐ ص^{٢} − ٢هـ ص + هـ^{٢} = ٤أ س − ٤أ د

⇐ ص^{٢} − ٢هـ ص − ٤أ س + هـ^{٢} + ٤أ د = ٠

وبمقارنة الحدود مع الصورة: ص^{٢} + ن ص + ي س + ك = ٠ نجد :

ن = − ٢هـ ، ي = − ٤أ ، ك = هـ^{٢} + ٤أ د .

ثانيا: إذا كان محور التناظر يوازي محور الصادات.

تدريب ٩

حول الصورة القياسية (س − د)^{٢} = ٤أ (ص − هـ) إلى الصورة س^{٢} + ن س + ي ص + ك = ٠

وأوجد قيم كل من ن ، ي ، ك بدلالة د ، هـ ، أ .

نتيجة

١) الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي يكون محور تناظره يوازي محور السينات هي:

ص^{٢} + ن ص + ي س + ك = ٠

٢) الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي يكون محور تناظره يوازي محور الصادات هي:

س^{٢} + ن س + ي ص + ك = ٠

مثال ٦

أوجد الرأس ، والبؤرة ، ومعادلة الدليل ، للقطع المكافئ : ص^{٢} + ٢ص + ٢س + ٥ = ٠

الحل

ص^{٢} + ٢ص + ٢س + ٥ = ٠

بإكمال المربع ينتج : (ص + ١)^{٢} = − ٢ (س + ٢). (فتحة القطع لليسار).

∴ الرأس: (− ٢ ، − ١)

− ٤ م = − ٢ ⟸ م = $\frac{١}{٢}$

البؤرة : (− ٢ − $\frac{١}{٢}$ ، −١) ⟸ (− $\frac{٥}{٢}$ ، −١)

معادلة الدليل : س = − $\frac{٣}{٢}$

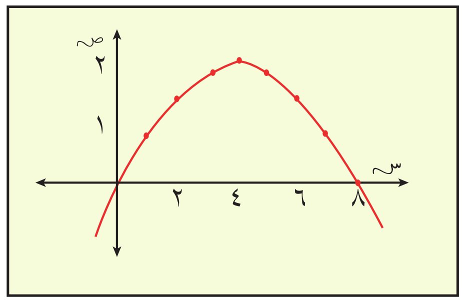
تدريب ١٠

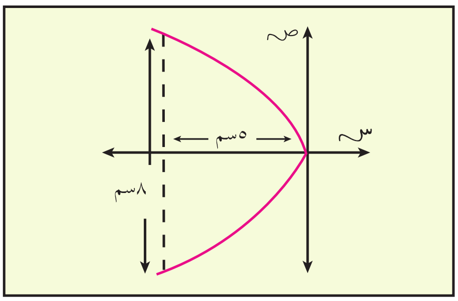
أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ويمر بالنقاط (٣ ، ٠)،(− ٥ ، ٠)، (٠ ، − ٥)، ثم أوجد بؤرته ومعادلة دليله.

تمارين &

مسائل (١)

١ استخدم المعلومات الواردة في الشكلين التاليين لإيجاد معادلة القطع المكافئ في كل منهما، ثم أوجد معادلة كل من الدليل ومحور التناظر وإحداثيات البؤرة.



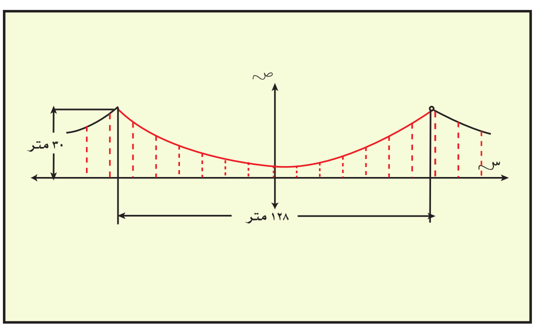


٢ أوجد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية :

أ) البؤرة (٠ ، − ٥) ومعادلة الدليل ص = ٥

ب) الرأس (− ٣ ، ٥) ومحوره يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٥ ، ٩).

٣ الشكل المقابل يمثل نموذجا لمقطع جسر علوي، حيث يكون الكابل الحامل للجسر والواصل بين دعامتين على شكل قطع مكافئ: بالاعتماد على محاور الإحداثيات في الشكل ، أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كان رأس القطع يرتفع ٤أمتار عن الطريق التي يمثلها المحور س .

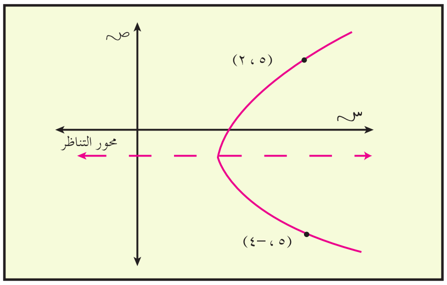


٤ أوجد الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل ومعادلة محور التناظر للقطع المكافئ الذي معادلته ٤س^{٢} + ٤٠س + ٣٢ص − ٢٨ = ٠ . وارسم شكلا تخطيطيا له.

٥ ما الشكل الهندسي الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث يكون بعدها عن النقطة (− ٣ ، ٢) يساوي بعدها عن المستقيم ص = − ٤ ؟ وأوجد معادلته وارسم المخطط البياني.

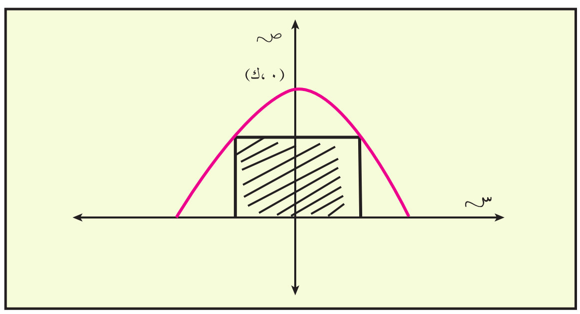
٦ أوجد البؤرة والرأس ومعادلة الدليل ومعادلة محور التناظر لكلٍّ من القطوع المكافئة فيما يلي:

أ) ص^٢ = ٤س + ١٢ ب) (س − ٢)^٢ = ٤ − ص جـ) ٣ص^٢ − ٦ص + ١٨س − ١٥ = ٠ .



٧ أوجد معادلة القطع المكافئ الممثل في الشكل علما بأنه يمر بنقطة ثالثة هي (١١ ، ٥).

٨ قوس على شكل قطع مكافئ ارتفاع أعلى نقطة فيه هي ك مترا (انظر الشكل)، اثبت أن ارتفاع المستطيل الذي مساحته أكبر ما يمكن ويحتويه القوس يساوي $\frac{٢}{٣}$ ك متر.



٩ جسر على شكل قطع مكافئ معادلته: س^٢ − ٨س + ٨ ص = ٠ ، أوجد ارتفاع أعلى نقطة في الجسر ، وما طول قاعدته الأفقية إذا كانت الأرض تمثل محور السينات؟

١٠ ارسم منحنى القطع المكافئ: ص^٢ − ١٢س + ٢ص + ٢٥ = ٠ ، مبينا على الرسم: الرأس، والبؤرة، والدليل.

١١ إذا كانت: ص^٢ − ٤ص + ٤س + ٨ = ٠ معادلة قطع مكافئ . أوجد:-

أ) الرأس.

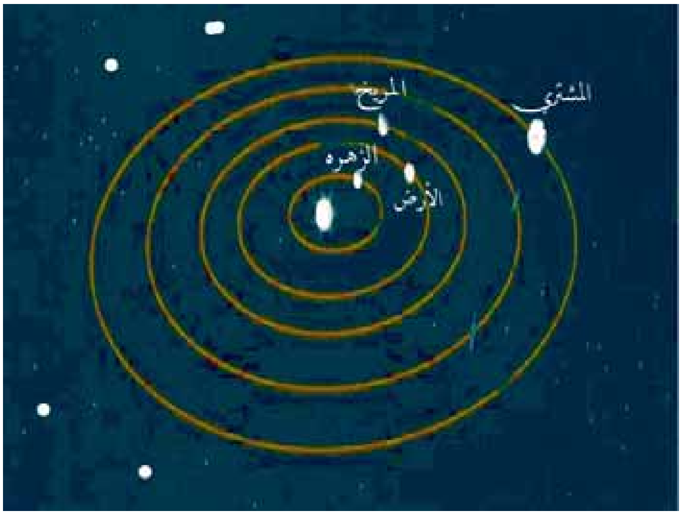
ب) البؤرة.

جـ) بعد البؤرة عن الدليل.

١٢ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقاط (٠ ، ٠)، (١ ، ١)، (٣ ، ٢).

القطع الناقص

Ellipse



تأمل الشكل المقابل، ومن خلال معلوماتك أجب عن الأسئلة التالية:

١. ما كواكب المجموعة الشمسية؟

٢. كم تستغرق الأرض حتى تكمل دورتها حول الشمس؟

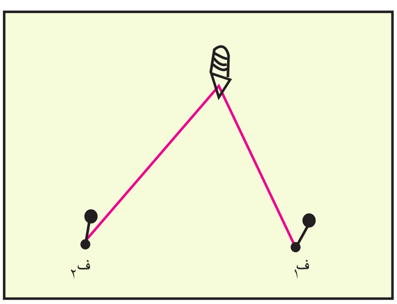
٣. ما شكل المسار الذي تسلكه الكواكب في دورانها حول الشمس؟

٤. ما الفارق بين أقرب وأبعد مسافة بين الأرض والشمس؟

نشاط ١ : (خصائص القطع الناقص)

المواد: مسماران ، قطعة خشب ملصق عليها ورقة بيضاء ، خيط ، قلم رصاص ، ورق شفاف.

الخطوات: اعمل في مجموعات وقم بما يلي:



١ عين نقطتين ثابتتين ف١ ، ف٢ في الورقة الملصقة على قطعة الخشب وضعها بشكل أفقي ، وثبت عند كل منهما مسمارا بحيث يكون ف١ ف٢ يساوي ٦سم مثلا.

٢ اقطع جزءًا من الخيط طوله أكبر من ف١ ف٢ وليكن ١٠سم مثلا ، وثبت طرفيه بالمسمارين عند ف١ ، ف٢ .

٣ شد الخيط من إحدى نقطه بقلم الرصاص، وحرك القلم بحيث يبقى الخيط مشدودا، ولاحظ الشكل الذي يرسمه قلم الرصاص في حركته.

٤ كرر الخطوات السابقة بجعل النقطتين ف١ ، ف٢ على خط عمودي على الخط السابق .

ثم أجب عن الأسئلة التالية:

أ) ما اسم الشكل الناتج من حركة قلم الرصاص؟

ب) خذ نقاطا مثل ل١ ، ل٢ ، ل٣ .... على الشكل. قس المسافة بين كل نقطة والنقطتين الثابتتين ف١ ، ف٢ ثم جد كلا من ل١ف١ + ل١ف٢ ، ل٢ف١ + ل٢ف٢ ، ل٣ف١ + ل٣ف٢ .... هل هذه الكميات ثابتة أم متغيرة ؟ وماذا يمثل كل منها؟

جـ) اطبع الشكل الناتج على ورق شفاف. صل بين $ف_1$ ، $ف_2$ بالمسطرة ومده على استقامته من جهتيه حتى يقطع الشكل. ســمِّ نقطتي التقاطع $ر_1$ ، $ر_2$ من جهتي $ف_1$ ، $ف_2$ على الترتيب .

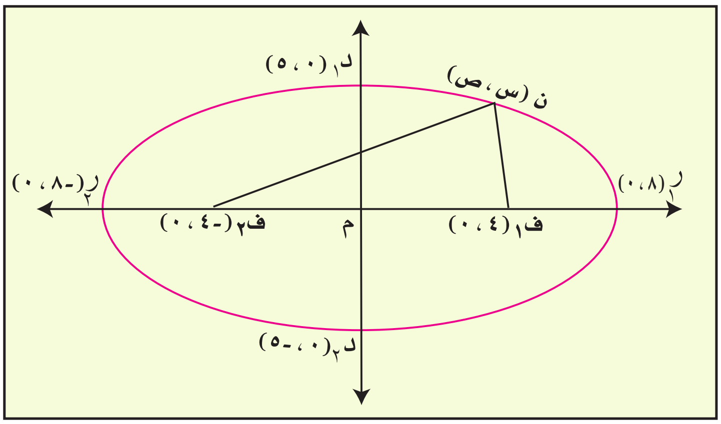
د) نصف $\overline{ر_1 ر_2}$ وارسم خطا عموديا يقطع الشكل من الأعلى في $د_1$ ، ومن الأسفل في $د_2$.

هـ) اطو الورقة الشفافة على الخط $ر_1 ر_2$ ، $د_1 د_2$. ماذا تلاحظ؟

و) أي المقدارين أكبر $ر_1 ر_2$ أم $د_1 د_2$ ؟ ماذا تقترح أن نسمي كلا من $ر_1 ر_2$ ، $د_1 د_2$ ؟

٥ ناقش ما توصلت إليه مجموعتك مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى.

٦ هل تستطيع أن تكتب تعريفا للمنحنى بناءً على ما توصلت إليه؟



تدريب ١

بالاستعانة بالشكل المقابل أوجد:

أ) البعد $ر_1 ر_2$. ب) البعد $د_1 د_2$.

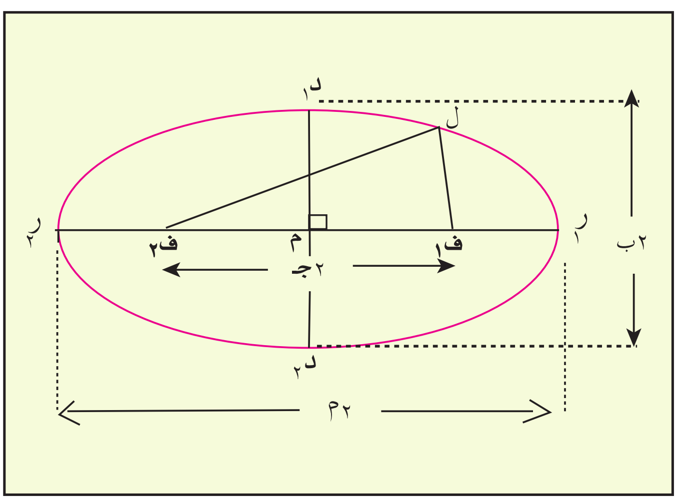
جـ) أوجد قيمة ن$ف_1$ + ن$ف_2$ وقارنه بـ $ر_1 ر_2$.

د) ما النسبة بين م$ف_1$ ، م$ر_1$ ؟ وهل هي أصغر أم أكبر من ١؟

تعريف

القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (بؤرتي القطع)، في المستوى يساوي مقدارا ثابتا (البعد بين الرأسين).

الشكل المقابل يمثل قطعا ناقصا ، فيه :



١) $ر_1$ ، $ر_2$ رأسا القطع، ويسمى $ر_1 ر_2$ بالمحور الأكبر، ويكون $ر_1 ر_2$ = ٢أ حيث أ هي البعد بين أحد الرأسين والمركز.

٢) تسمى $ف_1$ ، $ف_2$ بؤرتا القطع ويكون $ف_1 ف_2$ = ٢جـ (البعد البؤري).

٣) تسمى $د_1$ ، $د_2$ طرفا المحور الأصغر، ويكون $د_1 د_2$ = ٢ب .

٤) محورا القطع هما محورا تناظر متعامدان وينصف كل منهما الآخر ويتقاطعان في نقطة تسمى مركز القطع الناقص.

٥) مركز القطع الناقص ينصف $\overline{ف_1 ف_2}$ ، $\overline{د_1 د_2}$ ، $\overline{ر_1 ر_2}$

٦) $\frac{م ف_1}{م ر_1} < ١$

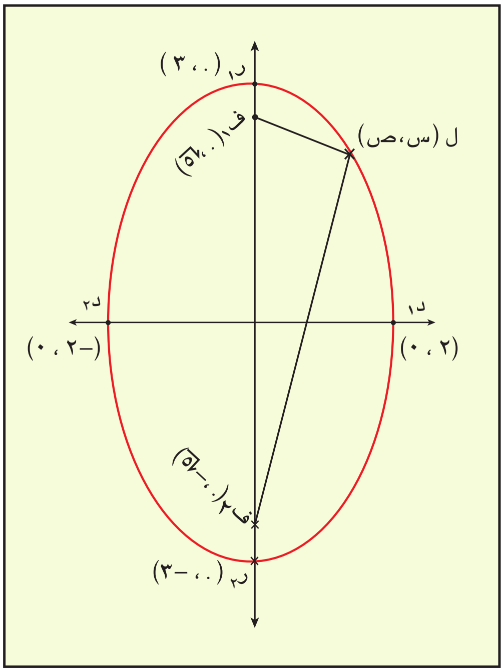
الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠)

تأمل الشكل المقابل الذي يمثل قطعا ناقصا مركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر ينطبق على محور الصادات.وأجب عما يلي:

١) ما قيمة كل من أ ، جـ ؟

٢) احسب قيمة ب .

٣) إذا أخذت النقطة ل(س ، ص) على منحنى القطع الناقص ، فما قيمة ل ف$_١$ + ل ف$_٢$ ؟



تدريب ٢

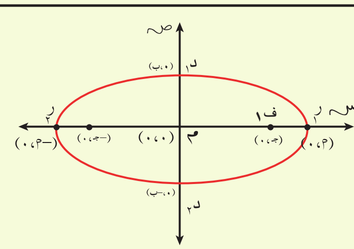
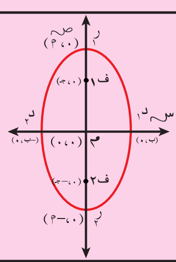
بالاستعانة بالشكل المقابل :

استخدم قانون المسافة بين نقطتين وتعريف القطع الناقص لإثبات أن معادلة القطع الموضح في الشكل هي :

$$\frac{\text{س}^٢}{٤} + \frac{\text{ص}^٢}{٩} = ١$$

نتيجة

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠)

	المحور الأكبر منطبق على محور السينات	المحور الأكبر منطبق على محور الصادات
معادلة القطع	$\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$	$\frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} = ١$
بؤرتا القطع	(جـ ، ٠) ، (− جـ ، ٠)	(٠ ، جـ) ، (٠ ، − جـ)
رأسا القطع	(أ ، ٠) ، (− أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، − أ)
شكل القطع		

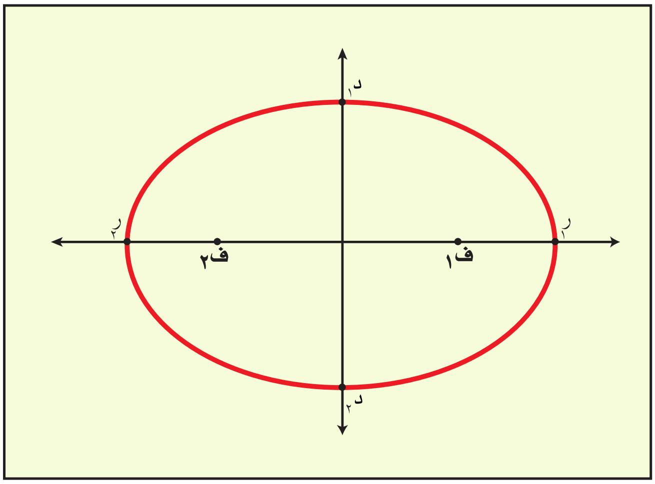
وفي كلا الحالتين يكون دائما :

أ > ب ، جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢ ، طول المحور الأكبر = ٢أ ، ويكون طول المحور الأصغر = ٢ب

مثال ١

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٦ ، ٠) ، (– ٦ ، ٠)، وطول المحور الأكبر يساوي ١٦ وحدة ، وارسم مخططا لهذا القطع.

الحل



المحور الأكبر ينطبق على محور السينات،(لماذا؟)

من البؤرتين: جـ = ٦ ، المركز (٠ ، ٠)

طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٦ ⟸ أ = ٨

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ⟸ ب^{٢} = ٦٤ − ٣٦ = ٢٨

∴ ب = ٢$\sqrt{٧}$

معادلة القطع : $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

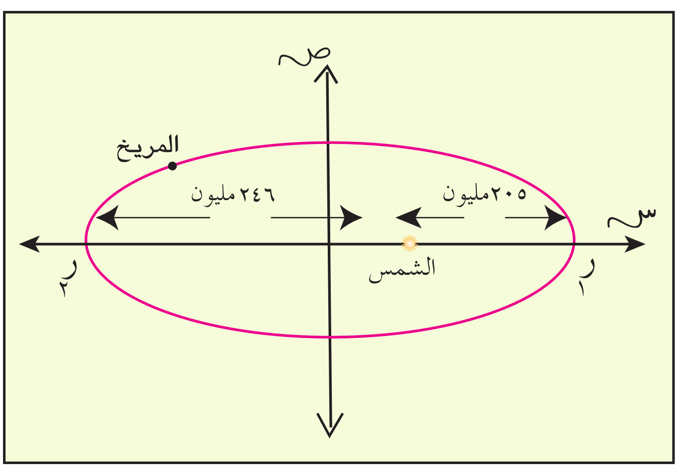
⟸ $\frac{س^{٢}}{٦٤} + \frac{ص^{٢}}{٢٨} = ١$

تدريب ٣

أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س ، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠ ، ٢) ، (٠ ، – ٢) يساوي ١٠ وحدات.

مثال ٢

يدور المريخ حول الشمس في مسار على شكل قطع ناقص ويكون أصغر بعد له عن الشمس حوالي ٢٠٥ مليون كم ، وأكبر بعد له عنها حوالي ٢٤٦ مليون كم ، وتكون الشمس في إحدى بؤرتي المدار ، على فرض أن مركز القطع الناقص الذي يمثل المدار هو (٠ ، ٠). اكتب معادلة ذلك المدار بالصورة القياسية.



الحل

ر١ ر٢ = ٢٠٥ + ٢٤٦ = ٤٥١

٢أ = ٤٥١ ⟸ أ = ٢٢٥,٥

جـ = أ − ٢٠٥ ⟸ جـ = ٢٢٥,٥ − ٢٠٥ = ٢٠,٥

ب^{٢} = أ^{٢} − جـ^{٢} = ٥٠٨٥٠,٢٥ − ٤٢٠,٢٥ = ٥٠٤٣٠

الصورة القياسية لمعادلة المدار بملايين الكيلومترات :

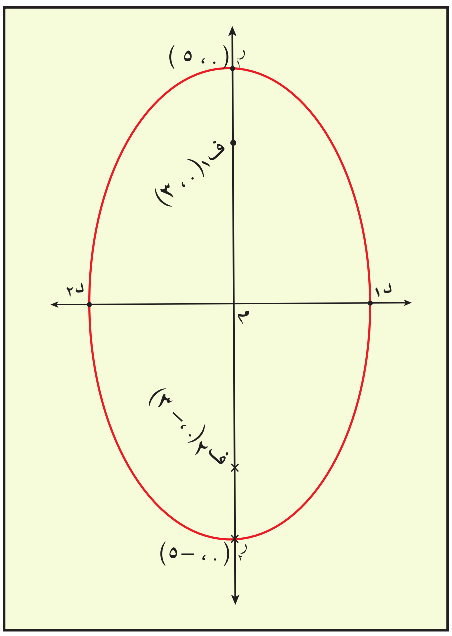
$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١ \Rightarrow \frac{\text{س}^{٢}}{٥٠٨٥٠,٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٥٠٤٣٠} = ١$$

مثال ٣

أوجد الرأسين والبؤرتين وطول المحور الأكبر وطول المحور الأصغر للقطع الناقص ، وارسم مخططا بيانيا له إذا كانت معادلته:

أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$ ب) $٤\text{س}^{٢} + ٩\text{ص}^{٢} = ٣٦$

الحل



أ) الصورة القياسية للمعادلة: $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$

المركز (٠ ، ٠) ، $\text{أ}^{٢} = ٢٥ \Rightarrow \text{أ} = ٥$ ، $\text{ب}^{٢} = ١٦ \Rightarrow \text{ب} = ٤$

$\text{ج}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Rightarrow \text{ج}^{٢} = ٢٥ - ١٦ = ٩ \Rightarrow \text{ج} = ٣$

رأسا القطع : (٠ ، أ) ، (٠ ، − أ) ⟸ (٠ ، ٥) ، (٠ ، −٥)

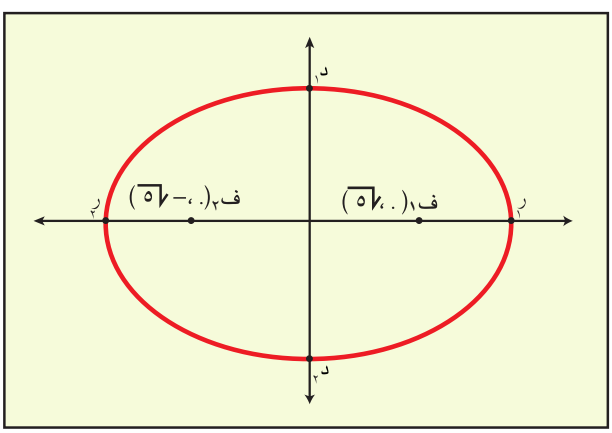
بؤرتا القطع : (٠ ، ج) ، (٠ ، − ج) ⟸ (٠ ، ٣) ، (٠ ، −٣)

طول المحور الأكبر = ٢أ = ٢ × ٥ = ١٠

طول المحور الأصغر = ٢ب = ٢ × ٤ = ٨

ب) نجعل المعادلة بالصورة القياسية وذلك بالقسمة على ٣٦

فينتج : $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$



المركز (٠ ، ٠) ، المحور الأكبر ينطبق على محور السينات (لماذا؟)

$\text{أ}^{٢} = ٩ \Rightarrow \text{أ} = ٣$ ، $\text{ب}^{٢} = ٤ \Rightarrow \text{ب} = ٢$

$\text{ج}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} = ٥ \Rightarrow \text{ج} = \sqrt{٥}$

رأسا القطع : (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)

بؤرتا القطع : ($\sqrt{٥}$ ، ٠) ، ($-\sqrt{٥}$ ، ٠)

طول المحور الأكبر = ٦

طول المحور الأصغر = ٤

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (د ، هـ)

يمكن كتابة معادلة القطع الناقص : $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$ على الصورة :

$\frac{(\text{س} - ٠)^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - ٠)^2}{\text{ب}^2} = ١$ ، حيث (٠ ، ٠) هي إحداثيات المركز .

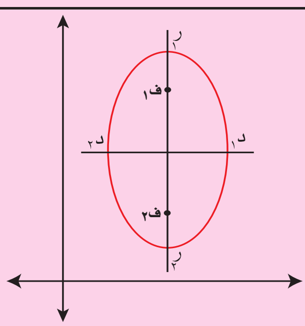
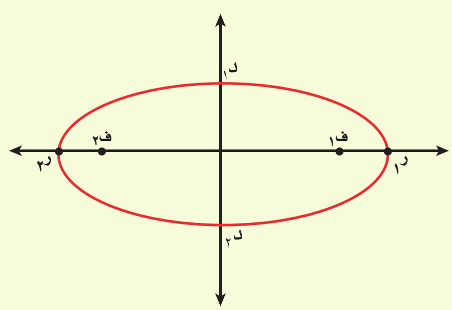
تدريب ٤

أ) كيف يمكن أن تكتب المعادلة إذا كانت إحداثيات المركز هي (د ، هـ) ؟

ب) ما معادلة القطع الناقص الناتج من إزاحة رأسية قدرها ٣ وحدات للأعلى ، وإزاحة أفقية قدرها وحدتين لليمين ؟ ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع وصورته موضحا الرأسين والبؤرتين والدليل لكل منهما .

نتيجة

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (د ، هـ).

	المحور الأكبر موازي لمحور السينات أو ينطبق عليه	المحور الأكبر موازي لمحور الصادات أو ينطبق عليه
معادلة القطع	$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$	$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{ب}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{أ}^2} = ١$
بؤرتا القطع	(د + جـ ، هـ) ، (د − جـ ، هـ)	(د ، هـ + جـ) ، (د ، هـ − جـ)
رأسا القطع	(د + أ ، هـ) ، (د − أ ، هـ)	(د ، هـ + أ) ، (د ، هـ − أ)
شكل القطع		

وفي كلا الحالتين يكون دائما :

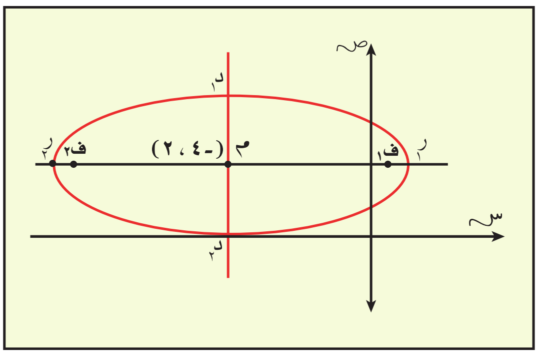
أ > ب ، $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$ ، طول المحور الأكبر = ٢أ ، ويكون طول المحور الأصغر = ٢ب

مثال ٤

أوجد المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر وطول المحور الأصغر للقطع الناقص ، وارسم تخطيطا بيانيا له إذا كانت معادلته:

أ) $\text{٤}(\text{س} + \text{٤})^{\text{٢}} + \text{٢٥}(\text{ص} - \text{٢})^{\text{٢}} = \text{١٠٠}$ ب) $\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٦ص} - \text{٢٤س} + \text{٢٧} = \text{٠}$

الحل



أ) بالقسمة على ١٠٠ لجعل المعادلة بالصورة القياسية : $\frac{(\text{س} + \text{٤})^{\text{٢}}}{\text{٢٥}} + \frac{(\text{ص} - \text{٢})^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$

المركز (− ٤ ، ٢) ، محوره الأكبر يوازي محور السينات (لماذا ؟) .

$\text{أ}^{\text{٢}} = \text{٢٥} \Leftarrow \text{أ} = \text{٥}$ ، $\text{ب}^{\text{٢}} = \text{٤} \Leftarrow \text{ب} = \text{٢}$

$\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} - \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٢١} \Leftarrow \text{جـ} = \sqrt{\text{٢١}}$

البؤرتان : (د + جـ ، هـ) ، (د − جـ ، هـ) $\Leftarrow$ ($-\text{٤} + \sqrt{\text{٢١}}$ ، ٢) ، ($-\text{٤} - \sqrt{\text{٢١}}$ ، ٢)

الرأسان : (د + أ ، هـ) ، (د − أ ، هـ) $\Leftarrow$ (− ٤ + ٥ ، ٢) ، (− ٤ − ٥ ، ٢)

ب) $(\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٢٤س}) + (\text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٦ص}) = -\text{٢٧}$ (تجميع الحدود المتشابهة).

$\text{٤}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س}) + \text{٣}(\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٢ص}) = -\text{٢٧}$

بإكمال مربع السينات والصادات ينتج :

$\text{٤}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{٩}) + \text{٣}(\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٢ص} + \text{١}) = -\text{٢٧} + \text{٤} \times \text{٩} + \text{٣} \times \text{١}$

$\text{٤}(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}} + \text{٣}(\text{ص} - \text{١})^{\text{٢}} = \text{١٢}$ ، وبالقسمة على ١٢ ينتج:

$\frac{(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{(\text{ص} - \text{١})^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$ (بقية الحل يترك للطالب).

تدريب ٥

أوجد الصورة القياسية لمعادلة المحل الهندسي للنقطة و(س ، ص) ، والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠ ، ٤) ، (٠ ، − ٢) يساوي مقدارا ثابتا قيمته ١٠ وحدات.

الاختلاف المركزي للقطع الناقص Excentricity

نشاط ٢: (تأثير النسبة $\frac{ج}{م}$ على شكل القطع الناقص)

الأدوات : آلة حاسبة ، ورق رسم بياني.

الخطوات : اعمل في مجموعات وقم بما يلي :

١) انقل الجدول التالي في دفترك وأكمله (بالنسبة للقطع الناقص).

م	جـ	$\frac{ج}{م}$ { الاختلاف المركزي }
٢	١	
١٫٩	١	
١٫٨	١	
١٫٧	١	
١٫٦	١	

٢) ارسم شكلا واحدا يضم جميع المخططات البيانية للقطوع في الجدول أعلاه بحيث تكون مراكزها في نقطة الأصل.

٣) ما العلاقة بين النسبة $\frac{ج}{م}$ وشكل القطع ؟ (من ملاحظتك للبيانات في الجدول والشكل الذي رسمته).

٤) اعمل جدولا آخر وثبت فيه قيم جـ واجعل قيم م متزايدة وكرر ما قمت به في الجدول السابق .

تدريب ٦

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص : $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

تعريف

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة بعد البؤرة عن المركز إلى بعد الرأس عن المركز

ويكتب بالرموز $e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، $٠ < e < ١$

مثال ٥

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته : $\text{س}^٢ + ٤\text{ص}^٢ = ١٦$

الحل

$$\frac{\text{س}^٢}{١٦} + \frac{\text{ص}^٢}{٤} = ١$$

$\text{أ} = ٤$ ، $\text{ب} = ٢$ (لماذا؟).

$\text{جـ} = ٢\sqrt{٣}$ (لماذا؟) $\Leftarrow e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٤} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، لاحظ أن $\frac{\sqrt{٣}}{٢} < ١$

تدريب ٧

أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، ٥) ، (٠ ، −٥) واختلافه المركزي ٠,٦ .

الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص:

يمكن أن نتوصل إلى الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص، وذلك عن طريق تبسيط الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

مثال ٦

حول الصورة القياسية: $\frac{(\text{س} - \text{د})^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

إلى الصورة : $\text{ل س}^٢ + \text{م ص}^٢ + \text{ن س} + \text{ي ص} + \text{ك} = ٠$، وأوجد قيم كل من ل ، م ، ن ، ي ، ك .

الحل

$ب^٢ (س - د)^٢ + ﻫ^٢ (ص - هـ)^٢ = ﻫ^٢ ب^٢$ وبفك الأقواس على الطرف الأيمن

$ب^٢ (س^٢ - ٢س د + د^٢) + ﻫ^٢ (ص^٢ - ٢ص هـ + هـ^٢) = ﻫ^٢ ب^٢$

$ب^٢ س^٢ - ٢ب^٢ د س + ب^٢ د^٢ + ﻫ^٢ ص^٢ - ٢ ﻫ^٢ هـ ص + ﻫ^٢ هـ^٢ - ﻫ^٢ ب^٢ = ٠$

وبفرض أن $ل = ب^٢$ ، $م = ﻫ^٢$ ، $ن = - ٢ ب^٢ د$ ، $ي = - ٢ ﻫ^٢ هـ$ ، $ك = ب^٢ د^٢ + ﻫ^٢ هـ^٢ - ﻫ^٢ ب^٢$

$\Leftarrow$ فإن المعادلة تصبح : $ل س^٢ + م ص^٢ + ن س + ي ص + ك = ٠$

تدريب ٨

حول الصورة القياسية : $\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{ﻫ^٢} = ١$ ،

إلى الصورة : $ل س^٢ + م ص^٢ + ن س + ي ص + ك = ٠$، وأوجد قيم كل من ل ، م ، ن ، ي ، ك .

نتيجة

الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص هي :

$ل س^٢ + م ص^٢ + ن س + ي ص + ك = ٠$

حيث $ل \neq ٠$ ، $م \neq ٠$ ، ل ، م لهما نفس الإشارة .

مثال ٧

أوجد الرأسين والبؤرتين والمركز للقطع الناقص الذي معادلته :

$٢٥س^٢ + ٩ص^٢ - ١٠٠س - ١٨ص - ١١٦ = ٠$

الحل

نحول المعادلة : ٢٥س^{٢} + ٩ص^{٢} − ١٠٠س − ١٨ ص − ١١٦ = ٠

من الصورة العامة إلى الصورة القياسية.

٢٥(س^{٢} − ٤س) + ٩(ص^{٢} − ٢ص) = ١١٦

وبإكمال المربع بالنسبة للسينات والصادات ينتج :

٢٥(س^{٢} − ٤س + ٤) + ٩(ص^{٢} − ٢ص + ١) = ١١٦ + ١٠٠ + ٩

$\Leftarrow$ ٢٥(س − ٢)^{٢} + ٩(ص − ١)^{٢} = ٢٢٥

وبالقسمة على ٢٢٥ ينتج :

$$\frac{(س - ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٢٥} = ١$$

$\therefore$ ﻫ^{٢} = ٢٥ $\Leftarrow$ ﻫ = ٥

ب^{٢} = ٩ $\Leftarrow$ ب = ٣

جـ^{٢} = ﻫ^{٢} − ب^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦ $\Leftarrow$ جـ = ٤

من الصورة القياسية : محور القطع يوازي محور الصادات.

المركز : (٢ ، ١)

الرأسين : (د ، هـ + ﻫ) ، (د ، هـ − ﻫ) $\Leftarrow$ (٢ ، ٦) ، (٢ ، −٤)

البؤرتين : (د ، هـ + جـ) ، (د ، هـ − جـ) $\Leftarrow$ (٢ ، ٥) ، (٢ ، −٣)

تمارين &

مسائل (٢)

١ أوجد معادلة القطع الناقص في الحالات التالية :

أ) رأساه (٨ ، ٠) (−٨ ، ٠)، ومقطعه من محور الصادات ٦ ، −٦ .

ب) مركزه (٠ ، ٠)، وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات ، ويمر بالنقطة (١ ، ٢).

جـ) المركز (٣ ، ٣)، وأحد الرأسين (٣ ، ٨) ، واختلافه المركزي $\frac{٤}{٥}$.

د) بؤرتاه (−٢ ، ٠) ، (٤ ، ٠)، وطول محوره الأصغر يساوي البعد البؤري (٢جـ) .

٢ لكلٍّ من القطوع الناقصة التالية: أوجد الرأسين، والبؤرتين، والاختلاف المركزي، وطول المحور الأكبر، وطول المحور الأصغر، وارسم مخططًا بيانيًّا :

أ) ١٦س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٤٤ ب) س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٨س − ٣٢ص + ٤٤ = ٠

٣ تدور الأرض حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص تكون الشمس إحدى بؤرتيه ، إذا كان طول المحور الأكبر ٣ × ١٠^{٨} كـم وتبعد البؤرة عن المركز ٢,٥ × ١٠^{٦} كـم فأوجد :

أ) طول المحور الأصغر ب) معادلة المدار

٤ أوجد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي الذي معادلته :

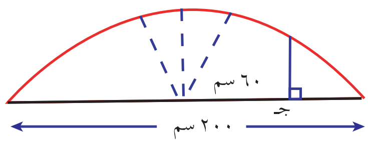
٢س^{٢} + ٣ص^{٢} + ١٦س − ٣٦ص + ١٠٤ = ٠

٥ م هـ ن مثلث فيه م ، ن نقطتان ثابتتان هما (١ ، ٢)،(١ ، ١٠) على الترتيب، والنقطة هـ تتحرك في المستوى بحيث يبقى محيط المثلث م هـ ن ثابتا ويساوي ٢٠، وعندما تكون النقطة هـ على امتداد $\overline{\text{ن م}}$ من جهة ن يكون ن هـ = ٢ ، وعندما تكون النقطة هـ على امتداد $\overline{\text{م ن}}$ من جهة م يكون م هـ = ٢. أوجد المحل الهندسي للنقطة هـ ومعادلته.

٦ أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) وبؤرتاه النقطتان (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) .

٧ إذا كان ل > صفر فإن المعادلة : $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ل} + ٤} = ١$ ، تمثل قطعا ناقصا . بين أن جميع القطوع الناقصة التي تمثلها هذه المعادلة لها نفس البؤرة بغض النظر عن قيمة ل .

٨ الجزء العلوي من نافذة على شكل نصف قطع ناقص (كما في الشكل) . إذا كان أقصى ارتفاع له ٥٠ سم ، وطول قاعدته ٢٠٠ سم ، أوجد ارتفاع الشباك عند النقطة جـ التي تبعد ٦٠ سم عن مركز قاعدته .



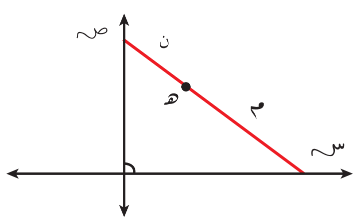
٩ إذا كان مدار بلوتو حول الشمس على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي ٠,٢٥ وطول محوره الأصغر ١٠^{١٠} كم ، أوجد معادلته.

١٠ يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في إحدى بؤرتيه . فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي م كم ، وأقصر مسافة بينهما تساوي ن كم .

فاثبت أن : $e = \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}}$

١١ إذا تحركت النقطة و(س ، ص) بحيث إنه بعد ن ثانية تكون س = ٣ + جان ، ص = ١ + ٤جتان . فاثبت أن النقطة ترسم قطعا ناقصا ثم جد رأسيه وبؤرتيه واختلافه المركزي .

١٢ تتحرك قطعة مستقيمة طولها م + ن بحيث يبقى طرفاها على المحورين الإحداثيين (انظر الشكل) ،اثبت أنه إذا كانت م ≠ ن فإن المحل الهندسي لحركة النقطة هـ هو قطع ناقص .



١٣ أوجد معادلة المماس للقطع الناقص : ٥س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٥٦ عند النقطة (-٢ ، ٣) .

١٤ أوجد معادلة القطع الناقص إذا كان المركز (٣ ، ٣) ، ر$_{١}$ (٣ ، ٨) ، والاختلاف المركزي $\frac{٤}{٥}$ ، حيث ر$_{١}$ هو أحد الرأسين .

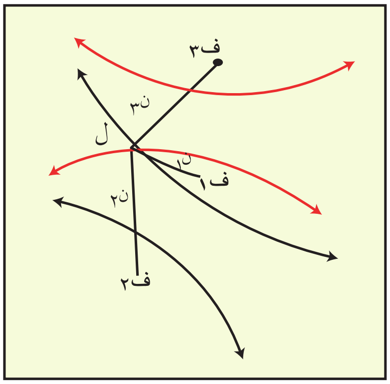
١٥ أوجد الرأسين والبؤرتين والمركز للقطع الناقص الذي معادلته :

أ) س^{٢} + ١٠ص^{٢} = ٤س - ٤٠ص - ٣٤

ب) س^{٢} + ٤ص^{٢} - ١٤س - ٨ص + ٥٢ = ٠

القطع الزائد

Hyperbola

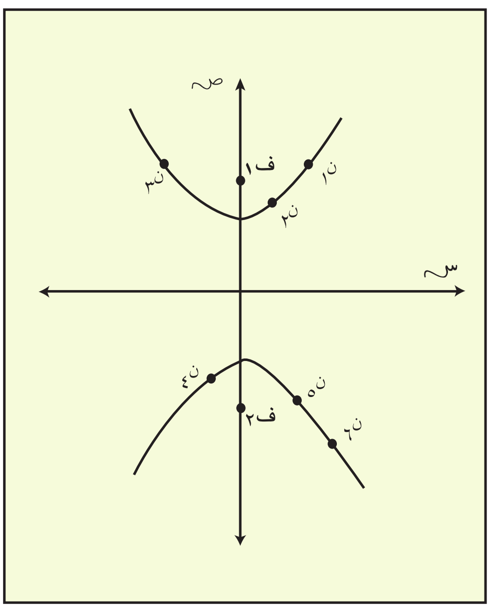


تهتدي السفن في الإبحار باستخدام نظام لوران اللاسلكي للإبحار (Loran radio navigation system) الذي يستند على فرق الزمن بين تلقي الإشارات اللاسلكية من زوج من محطات بث ترسل إشاراتها بنفس الوقت. فعلى سبيل المثال: فإن السفينة التي تمثل موقعها النقطة ل في الشكل المقابل يمكن أن تستخدم فرق الزمن $ن_{٢} - ن_{١}$ والمسافة $ف_{١}ف_{٢}$ لتحدد موقعها على منحنى القطع الزائد باللون الأسود . ثم باستخدام فرق الزمن $ن_{٣} - ن_{١}$ والمسافة $ف_{١}ف_{٣}$ تحدد السفينة موقعها على أحد فرعي منحنى القطع الزائد باللون الأحمر . ثم باستخدام تقاطع منحنيي القطعين الزائدين، تستطيع السفينة تحديد موقعها بالضبط.

نشاط ١ : (خصائص القطع الزائد)

المواد : ورق شفاف ، مسطرة .

الخطوات : اعمل في مجموعات وقم بما يلي :



١ اطبع الشكل المقابل على ورق شفاف والصقه في دفترك.

٢ املأ الجدول التالي بعد أن تنقله في دفترك بالمسافات بين البؤرة والنقاط على المنحنى لأقرب مم.

نقاط على المنحنى / البؤرة	$ن_{١}$	$ن_{٢}$	$ن_{٣}$	$ن_{٤}$	$ن_{٥}$	$ن_{٦}$
$ف_{١}$						
$ف_{٢}$						
$\mid ن_م ف_{١} - ن_م ف_{٢} \mid$						

م = ١، ٢ ، ٣ ، ٤، ٥ ، ٦

٣ اختر أي نقطة على المنحنى، وأوجد الفرق المطلق بين بعديها عن $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ وقارنه بالبعد بين الرأسين.

٤ ناقش ما توصلت إليه مجموعتك مع ما توصلت إليه المجموعات الأخرى.

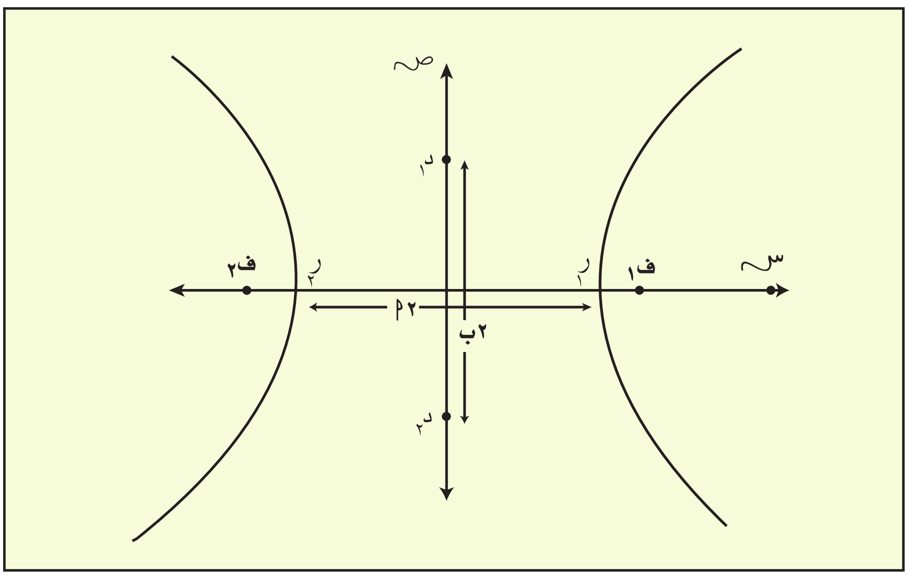
٥ إذا علمت أن الشكل المرسوم هو قطع زائد . هل تستطيع أن تكتب تعريفا للقطع الزائد؟

تدريب ١

ما المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) التي تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين (٠ ، ٦) ، (٠ ، −٦) يساوي ١٠ ؟

تعريف

القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) التي تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (بؤرتا القطع) ، يساوي مقدارا ثابتا قيمته ٢أ (البعد بين الرأسين) . أي أن : | ن ف١ − ن ف٢ | = ٢أ .



الشكل أعلاه يمثل قطعا زائدا ، فيه :

١) تسمى النقطتان ر١ ، ر٢ برأسي القطع الزائد.

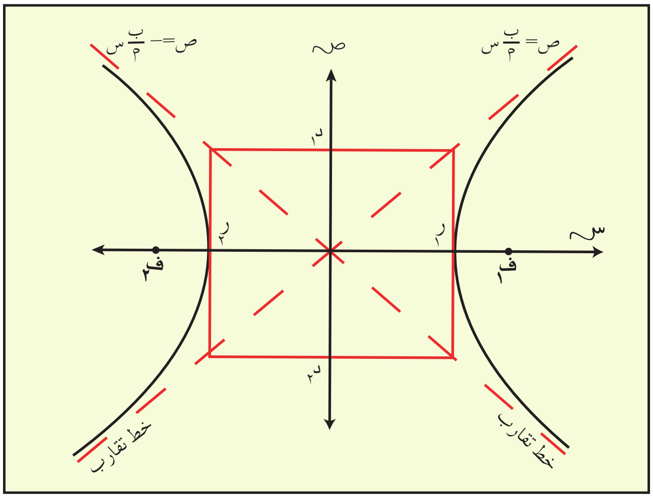
٢) نسمى القطعة المستقيمة ر١ ر٢ بالمحور الرئيسي ويساوي ٢أ .

٣) تسمى القطعة المستقيمة د١ د٢ بالمحور المرافق ويساوي ٢ب.

٤) المسافة بين البؤرتين ف١ف٢ تساوي ٢جـ .

٥) يوجد محوران للتماثل للقطع الزائد.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)



تدريب ٢

بالاعتماد على الشكل أعلاه أجب عما يلي :

الشكل يمثل قطعا زائدا مركزه (٠ ، ٠).

١) بين أن معادلتي خطي التقارب هما:

$$ص = \pm \frac{ب}{أ} س .$$

٢) ما العلاقة بين أ ، ب ، جـ ؟

٣) هل الاختلاف المركزي e = $\frac{جـ}{أ}$ أكبر أم أقل من ١ ؟

٤) ماذا يمكن أن تسمي المستطيل الموضح في الشكل ؟

٥) ارسم مخططا بيانيا للقطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠) ومحوره الرئيسي ينطبق على محور الصادات، وعين على الرسم (الرأسين ، البؤرتين ، معادلتي خطي التقارب ، طرفي المحور المرافق) ؟

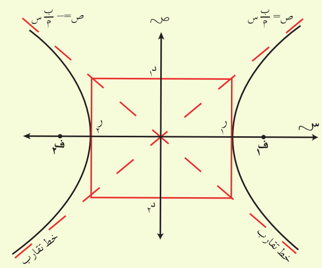
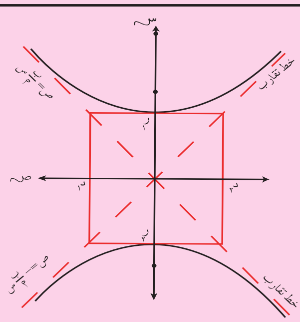
ملاحظة :

لرسم القطع الزائد نرسم المستطيل المركزي (Central Rectangle) بعداه ٢أ ، ٢ب كما في الشكل (باللون الأحمر) ، ونرسم خطي التقارب وهما المستقيمان المنطبقان على قطري المستطيل المركزي ، وهذان المستقيمان يقتربان من أفرع منحنى القطع الزائد دون أن يقطعاهما.

وعندما س $\longleftarrow \pm \infty$ ، يكونان مماسين للقطع ، ثم نرسم جزئي القطع .

نتيجة

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠).

	المحور الرئيسي منطبق على محور السينات	المحور الرئيسي منطبق على محور الصادات
معادلة القطع	$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$
بؤرتا القطع	(جـ ، ٠) ، (−جـ ، ٠)	(٠ ، جـ) ، (٠ ، −جـ)
رأسا القطع	(أ ، ٠) ، (−أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، −أ)
شكل القطع		

وفي كلا الحالتين يكون دائما :

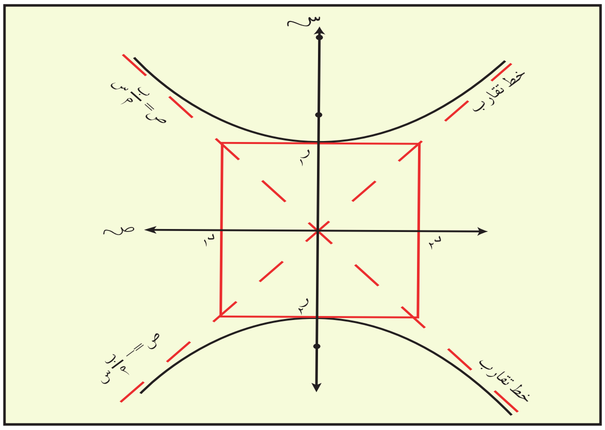
طول المحور الرئيسي ٢أ ، وطول المحور المرافق ٢ب

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ، $e = \frac{جـ}{أ} > ١$

مثال ١

ارسم مخططا بيانيا للقطع الزائد الذي رأساه (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)، وبؤرتاه (٥ ، ٠) ، (−٥ ، ٠)، ثم جد معادلته.

الحل



من إحداثيات الرأسين يكون أ = ٣ ، المركز (٠ ، ٠)

المحور الرئيسي ينطبق على محور الصادات ، ومن

إحداثيات البؤرة يكون جـ = ٥ .

ب^{٢} = جـ^{٢} - أ^{٢} = ٢٥ − ٩ = ١٦

∴ ب = ٤

بأخذ أي نقطة على القطع الزائد مثل ن(س ، ص)

يكون : | ن ف١ ـ ن ف٢ | = ٢أ

$$\left| \sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص - ٥)^{٢}} - \sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص + ٥)^{٢}} \right| = ٦$$

$$\sqrt{س^{٢} + (ص - ٥)^{٢}} = ٦ + \sqrt{س^{٢} + (ص + ٥)^{٢}} \quad أو \quad \sqrt{س^{٢} + (ص - ٥)^{٢}} = -٦ + \sqrt{س^{٢} + (ص + ٥)^{٢}}$$

بتربيع الطرفين وفك الأقواس في الحالة الأولى ينتج :

$$س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ص + ٢٥ = ٣٦ + ١٢ \times \sqrt{س^{٢} + (ص + ٥)^{٢}} + س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ص + ٢٥$$

$$-٥ص - ٩ = ٣ \times \sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ص + ٢٥}$$

بالتربيع : ٢٥ص^{٢} + ٩٠ص + ٨١ = ٩س^{٢} + ٩ص^{٢} + ٩٠ص + ٢٢٥

$$\Leftarrow ١٦ص^{٢} - ٩س^{٢} = ١٤٤ \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{٩} - \frac{س^{٢}}{١٦} = ١$$

وبنفس الطريقة للحالة الثانية (يترك للطالب).

تدريب ٣

بالاستعانة بالمثال السابق :

١) اكتب المعادلة التي حصلت عليها في المثال السابق بدلالة أ ، ب .

٢) بالمقارنة مع القطع الناقص ، ماذا يمكن أن نقول بالنسبة للثابتين أ ، ب في القطع الزائد .

٣) كيف يمكن التعرف على المحور الرئيسي من معادلة القطع الزائد ؟

٤) ماذا تتوقع أن تكون معادلة القطع الزائد إذا كان الرأسان (٣ ، ٠) ، (− ٣ ، ٠) والبؤرتان(٥ ، ٠) ، (− ٥ ، ٠) ؟

تأكد من صحة توقعك.

مثال ٢

أوجد الصورة القياسية لمعادلة قطع زائد بؤرتاه (٦ ، ٠) ، (− ٦ ، ٠) واختلافه المركزي $e = ٢$

ثم ارسم مخططا بيانيا لهذا القطع مبينا عناصره على الرسم.

الحل

من البؤرتين جـ = ٦ ، المركز (٠ ، ٠) ، المحور الرئيسي منطبق على محور السينات ..... (لماذا؟)

$e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow ٢ = \frac{٦}{\text{أ}} \Leftarrow \text{أ} = ٣$

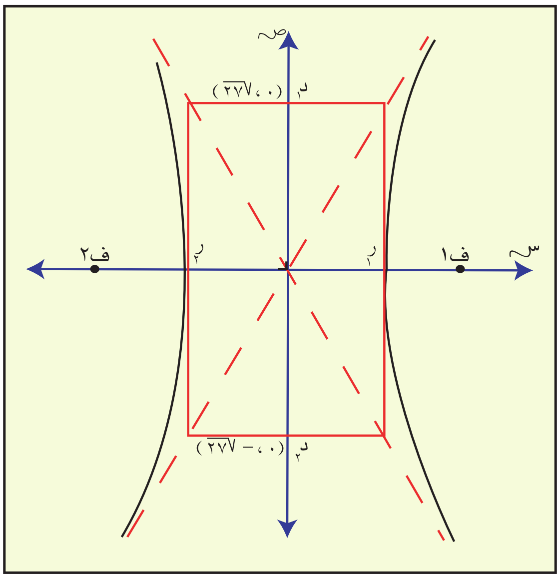
$\text{ب}^٢ = \text{جـ}^٢ - \text{أ}^٢ = ٣٦ - ٩ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ٢٧$

معادلته : $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

$\Leftarrow \frac{\text{س}^٢}{٩} - \frac{\text{ص}^٢}{٢٧} = ١$

معادلتا خطي التقارب : $\text{ص} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س}$

$\Leftarrow \text{ص} = \pm \frac{\sqrt{٢٧}}{٣} \text{س}$ (لماذا؟).



تدريب ٤

أ) أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الرئيسي يساوي ١٤ وحدة ، وطرفا محوره المرافق هما النقطتان (٢٤ ، ٠) ، (− ٢٤ ، ٠). ثم جد معادلتي خطي التقارب واختلافه المركزي.

ب) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)، ورأساه على محور السينات، ويمر بالنقطتين (١ ، ٢)، (٥ ، ١٢).

مثال ٣

أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته :

$٤\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ + ٣٦ = ٠$

الحل

$٤\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ + ٣٦ = ٠ \Leftarrow ٤\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ = -٣٦$

بالقسمة على − ٣٦ $\Leftarrow \frac{\text{ص}^٢}{٤} - \frac{\text{س}^٢}{٩} = ١$

المركز (٠ ، ٠) (لماذا؟) ، $\text{أ}^٢ = ٤ \Leftarrow \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١٣ \Leftarrow \text{جـ} = \sqrt{١٣}$ ، المحور الرئيسي ينطبق على محور الصادات (لماذا؟)

الرأسان : ⇐ (٠ ، أ) ، (٠ ، − أ) ⇐ (٠ ، ٢) ، (٠ ، −٢)

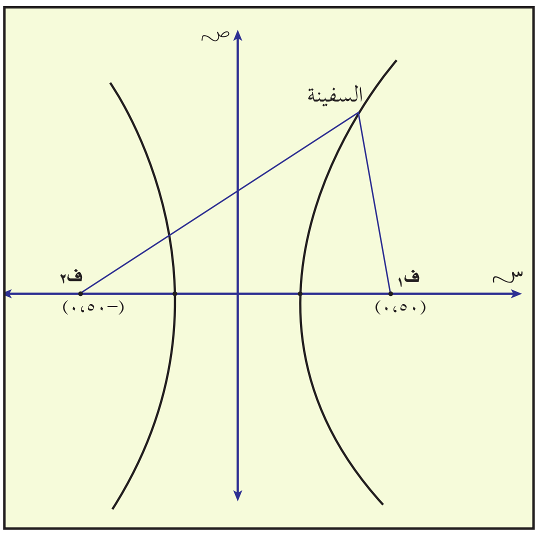
البؤرتان : ⇐ (٠ ، جـ) ، (٠ ، − جـ) ⇐ (٠ ، $\sqrt{١٣}$) ، (٠ ، $-\sqrt{١٣}$)

$e = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

معادلتا خطي التقارب : ص = ± $\frac{أ}{ب}$ س ⇐ ص = ± $\frac{٢}{٣}$ س .

مثال ٤

محطتان للرصد ف١ ، ف٢ تبعدان عن بعضهما ١٠٠كـم وتقعان على شاطئ مستقيم وتمثلهما النقطتان (٥٠ ، ٠) ، (− ٥٠ ، ٠) في المستوى الديكارتي. وإذا كانت هنالك سفينة تبحر في خط مستقيم يوازي خط الشاطئ وعلى بعد ٢٠٠ متر منه. أوجد إحداثيات موقع السفينة إذا كانت المحطتان تصدران إشارات لاسلكية في نفس الوقت حيث تصل إشارة ف١ للسفينة بزمن قدره ١٠٠ مايكروثانية أبكر من الإشارة التي تصدرها المحطة ف٢ (اعتبر أن سرعة الإشارات اللاسلكية = سرعة الضوء = ٣×$١٠^{٨}$ متر/ثانية)



الحل

٢أ = المسافة التي تقطعها الإشارات اللاسلكية في ١٠٠ مايكرو ثانية ، (الثانية = ١٠٠٠٠٠٠ مايكرو ثانية)

= $\frac{١٠٠}{١٠٠٠٠٠٠}$ ثانية × $\frac{٣×١٠^{٨}}{١٠٠٠}$ كـم/ثانية (المسافة = السرعة × الزمن)

= (١٠٠ × $١٠^{-٦}$) ثانية × (٣ × $١٠^{٥}$) كم/ثانية = ٣٠ كـم

∴ أ = ١٥

جـ = ٥٠ ∴ $ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$ = ٢٥٠٠ − ٢٢٥ = ٢٢٧٥

∴ ب = $\sqrt{٢٢٧٥}$

معادلة القطع الزائد الذي يكون موقع السفينة في إحدى نقطه هي :

$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

⇐ $\frac{س^٢}{٢٢٥} - \frac{ص^٢}{٢٢٧٥} = ١$

موقع السفينة عند النقطة $(س_1 ، ٢,٠)$ (لماذا؟)

$$\frac{س_1^2}{٢٢٥} - \frac{٠,٠٤}{٢٢٧٥} = ١ \Leftarrow \frac{س_1^2}{٢٢٥} \simeq ١$$

$$س_1^2 = ٢٢٥ \Leftarrow س_1 = ١٥$$

إحداثيات موقع السفينة (١٥ ، ٢,٠) تقريبا.

تدريب ٥

أ) أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠ ، ٦) ، (٠ ، −٦)، ومعادلتا خطي التقارب $ص = \pm \frac{١}{٣} س$.

ب) أوجد معادلة القطع الزائد الذي محوره الرئيسي هو محور السينات، وطولا محوريه الرئيسي والمرافق هما : ٨ ، ٤ على الترتيب .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (د ، هـ)

يمكن كتابة معادلة القطع الزائد : $\frac{س^2}{م^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ على الصورة :

$\frac{(س - ٠)^2}{م^2} - \frac{(ص - ٠)^2}{ب^2} = ١$ ، حيث (٠ ، ٠) هي إحداثيات المركز .

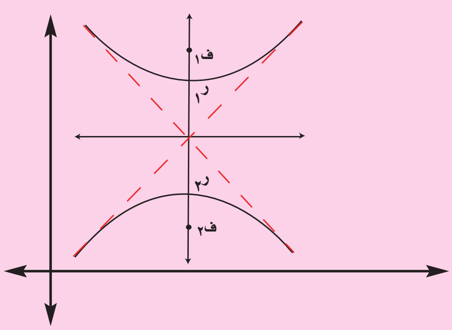
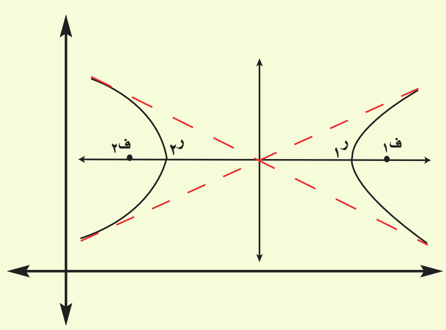
تدريب ٦

أ) كيف يمكن أن تكتب المعادلة إذا كانت إحداثيات المركز هي (د ، هـ) ؟

ب) ما معادلة القطع الزائد الناتج من إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات للأعلى ، وإزاحة أفقية قدرها ٥ وحدات لليمين ؟ ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع وصورته موضحا الرأس والبؤرة والدليل لكل منهما .

نتيجة

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (د ، هـ)

	المحور الأكبر موازي لمحور السينات أو ينطبق عليه	المحور الأكبر موازي لمحور الصادات أو ينطبق عليه
معادلة القطع	$\frac{(س-د)^2}{أ^2} - \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} = ١$	$\frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س-د)^2}{ب^2} = ١$
بؤرتا القطع	(د + جـ ، هـ) ، (د − جـ ، هـ)	(د ، هـ + جـ) ، (د ، هـ − جـ)
رأسا القطع	(د + أ ، هـ) ، (د − أ ، هـ)	(د ، هـ + أ) ، (د ، هـ − أ)
معادلتا الخطين التقاربيين	$ص - هـ = \pm \frac{ب}{أ} (س - د)$	$ص - هـ = \pm \frac{أ}{ب} (س - د)$
شكل القطع		

وفي كلا الحالتين يكون دائما :

طول المحور الرئيسي ٢أ ، وطول المحور المرافق ٢ب

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$ ، $e = \frac{جـ}{أ} > ١$

مثال ٥

أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي، ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته :

$٤س^2 - ٩ص^2 + ٨س + ٣٦ص + ٤ = ٠$ ، وارسم شكلا تخطيطيًا له .

الحل

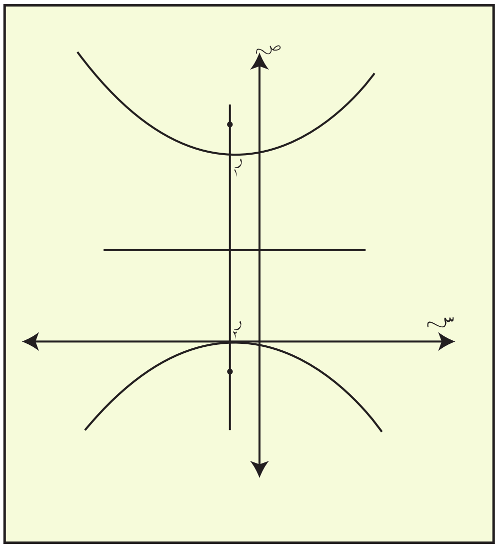
نجعل المعادلة بالصورة القياسية (بإكمال المربع بالنسبة للمتغير س ، وبإكمال المربع بالنسبة للمتغير ص).

$$٤\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٩\text{ص}^{٢} + ٣٦\text{ص} = -٤$$

$$٤\,(\text{س}^{٢} + ٢\text{س}) - ٩(\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص}) = -٤$$

$$٤\,(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١) - ٩\,(\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص} + ٤) = -٤ + ٤ - ٣٦$$

$$٤\,(\text{س} + ١)^{٢} - ٩\,(\text{ص} - ٢)^{٢} = -٣٦$$



بالقسمة على − ٣٦ ينتج :

$$\frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٩} = ١$$

الصورة القياسية $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

المركز (− ١ ، ٢)، المحور الرئيسي يوازي محور الصادات (لماذا؟)

$\text{أ}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} = ١٣ \Leftarrow \text{جـ} = \sqrt{١٣}$

الرأسان : $(\text{د} ، \text{هـ} \pm \text{أ}) \Leftarrow (-١ ، ٤) ، (-١ ، ٠)$

البؤرتان : $(\text{د} ، \text{هـ} \pm \text{جـ}) \Leftarrow (-١ ، ٢ + \sqrt{١٣}) ، (-١ ، ٢ - \sqrt{١٣})$.

$$e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$$

معادلتا خطي التقارب : $\text{ص} - \text{هـ} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{س} - \text{د}) \Leftarrow \text{ص} - ٢ = \pm \frac{٢}{٣}(\text{س} + ١)$

تدريب ٧

أوجد معادلة القطع الزائد فيما يلي وارسم مخططا بيانيا له :

أ) مركزه (٦ ، − ٣) وإحدى بؤرتيه (٦ ، ٠) وأحد رأسيه (٦ ، − ١) .

ب) رأساه (١ ، ٤) ، (١ ، − ١) ، واختلافه المركزي $e = \frac{٣}{٢}$

جـ) المركز (٢ ، ٤)، وأحد الرأسين (٦ ، ٤)، ومعادلة أحد الخطين التقاربيين : ص = ٢س

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد :

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد هي معادلة من الدرجة الثانية بمتغيرين، ونحصل عليها عن طريق تبسيط الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد :

$$\frac{(س - د)^{٢}}{م^{٢}} - \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

أو $$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{م^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

وبعد التربيع والاختصار كما قمنا به في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص نحصل على الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد $ل\,س^{٢} + م\,ص^{٢} + ن\,س + ي\,ص + ك = ٠$

تدريب ٨

حول الصورة القياسية في كل ما يأتي:

أ) $$\frac{(س - د)^{٢}}{م^{٢}} - \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

ب) $$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{م^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

إلى الصورة : $ل\,س^{٢} + م\,ص^{٢} + ن\,س + ي\,ص + ك = ٠$ ، ثم أوجد قيم كل من ل ، م ، ن ، ي ، ك .

بدلالة م ، ب ، د ، هـ

نتيجة

الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد هي:

$$ل\,س^{٢} + م\,ص^{٢} + ن\,س + ي\,ص + ك = ٠$$

حيث $ل \neq ٠$ ، $م \neq ٠$ ، ل ، م مختلفان في الإشارة .

مثال ٦

أوجد الرأسين والبؤرتين والمركز وطول المحور الرئيسي وطول المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته :

$٤س^٢ - ص^٢ - ١٦س + ١٠ص - ١٧ = ٠$

الحل

نحول المعادلة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية عن طريق إكمال المربع بالنسبة لـ س ، ص

فينتج : $٤(س - ٢)^٢ - (ص - ٥)^٢ = ٨$ وبالقسمة على ٨ نحصل :

$$\frac{(س - ٢)^٢}{٢} - \frac{(ص - ٥)^٢}{٨} = ١$$

$\therefore$ المحور الرئيسي موازي لمحور السينات

المركز (٢ ، ٥)

$أ^٢ = ٢ \Leftarrow أ = \sqrt{٢}$

$ب^٢ = ٨ \Leftarrow ب = \sqrt{٨}$

$\because جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = ١٠ \Leftarrow جـ = \sqrt{١٠}$

الرأسان : $(د \pm أ ، هـ) \Leftarrow (٢ + \sqrt{٢} ، ٥) ، (٢ - \sqrt{٢} ، ٥)$

البؤرتان : $(د \pm جـ ، هـ) \Leftarrow (٢ + \sqrt{١٠} ، ٥) ، (٢ - \sqrt{١٠} ، ٥)$

طول المحور الرئيسي = $٢أ = ٢ \times \sqrt{٢}$

طول المحور المرافق = $٢ب = ٢ \times \sqrt{٨}$

الصورة العامة لمعادلة قطع مخروطي

لعلك لاحظت من دراستك للقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد ،

أن معادلات تلك القطوع يمكن وضعها بالصورة :

ل س^{٢} + م ص^{٢} + ن س + ي ص + ك = ٠ ، بحيث إن كلا من ل ، م لا تساويان صفرا معا .

تدريب ٩

بالاعتماد على ما درسته سابقا ، انقل الجدول التالي في دفترك وأكمله :

المعادلة : ل س^{٢} + م ص^{٢} + ن س + ي ص + ك = ٠	
تكون معادلة	**الشروط الواجب توافرها في ل ، م**
القطع المكافئ	
القطع الناقص	
القطع الزائد	

تدريب ١٠

ما القطع المخروطي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية :

أ) ٣ص^{٢} + ٢٤ص − س^{٢} − ٢س = − ٤١

ب) ٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} − ٥٤س − ٥٠ص = ١١٩

جـ) ٤ص^{٢} + ٤ص + ٨س − ١٥ = ٠

نتائج للتمييز بين القطوع المخروطية :

الصورة العامة لمعادلة القطوع المخروطية هي : $ل س^2 + م ص^2 + ن س + ي ص + ك = ٠$

١) إذا كان أحد المعاملين ل أو م يساوي صفرا، فإن المنحنى يكون قطعا مكافئا .

٢) إذا كانت إشارتا كل من المعاملين ل ، م متشابهتين ل $\neq$ م، فإن المنحنى يكون قطعا ناقصا .

٣) إذا كانت إشارتا كل من المعاملين ل ، م مختلفتين، فإن المنحنى يكون قطعا زائدا .

مثال ٧

ما القطع المخروطي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية ، وتحقق من ذلك :

أ) $٢س^2 + ٣ص^2 - ٤س + ١٢ص - ٢٠ = ٠$

ب) $-س^2 + ص^2 + ٤ص - ١٦ = ٠$

جـ) $س^2 - ٩ص^2 - ٢٤س - ١٨ص - ٩ = ٠$

د) $ص^2 - ٨ص + ٤س - ٨ = ٠$

الحل

أ) إشارة معامل $س^2$ هي نفس إشارة معامل $ص^2$ ، معامل $س^2 \neq$ معامل $ص^2$

$\therefore$ يمكن أن تكون معادلة قطع ناقص، لكن يجب التأكد بعد إكمال المربعات (لماذا؟)

$٢(س^2 - ٢س) + ٣(ص^2 + ٤ص) = ٢٠$

$٢(س^2 - ٢س + ١) + ٣(ص^2 + ٤ص + ٤) = ٢٠ + ٢ + ١٢$

$٢(س - ١)^2 + ٣(ص + ٢)^2 = ٣٤$ (معادلة قطع ناقص).

ب) قطع زائد؛ لأن إشارة معامل $س^2$ تختلف عن إشارة معامل $ص^2$ (التحقق يترك للطالب).

جـ) يمكن أن تكون معادلة قطع زائد؛ لأن إشارة معامل $س^2$ تختلف عن إشارة معامل $ص^2$ ،

لكن يجب التأكد بعد إكمال المربعات .

$٤(س^2 - ٦س + ٩) - ٩(ص^2 + ٢ص + ١) = ٩ + ٣٦ - ٩$

$٤(س - ٣)^2 - ٩(ص + ١)^2 = ٣٦$ (معادلة قطع زائد).

د) معامل $س^2$ يساوي صفر (ل = ٠) ، فإن المعادلة تمثل معادلة قطع مكافئ.

وبإكمال المربع بالنسبة لـ ص $\Leftarrow$ $ص^2 - ٨ص + ١٦ = -٤س + ٢٤$

$\Leftarrow$ $(ص - ٤)^2 = -٤(س - ٦)$ (معادلة قطع مكافئ).

تمارين &

مسائل (٣)

١ أوجد معادلة القطع الزائد فيما يلي :

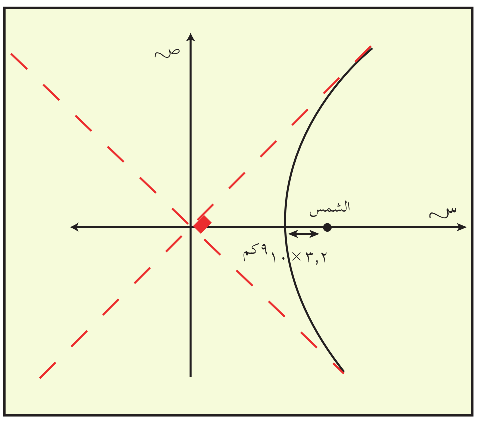
أ) بؤرتاه (١٠ ، ٠) ، (−١٠ ، ٠)، واختلافه المركزي يساوي ٢,٥ .

ب) رأساه النقطتان (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)، ويمر منحناه بالنقطة (٥ ، ٣) .

جـ) طرفا المحور المرافق هما النقطتان (٦ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)، وطول محوره الرئيسي ١٠ وحدات.

د) رأساه (٤ ، ٥) ، (−٤ ، ٥)، والبعد بين بؤرتيه ١٢ وحدة .

٢ أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الرئيسي ٩ وحدات، وبعدا المستطيل المركزي له ٩ وحدات ، ٤ وحدات، ومركز القطع (٠ ، ٠) .



٣ بعض المذنبات (مثل مذنب هالي) ، تشكل جزءًا دائما من النظام الشمسي ، وتدور حول الشمس في مدارات كل منها على شكل قطع ناقص ، وبعضها الآخر يمر خلال النظام الشمسي مرة واحدة فقط ويكون مساره على شكل قطع زائد تقع الشمس في إحدى بؤرتيه . أوجد معادلة هذا المسار على اعتبار أن البؤرة القريبة منه تبعد $٣,٢ \times ١٠^{٩}$ كم، ومسار دخوله للنظام الشمسي متعامد مع مسار خروجه منه.

٤ أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي خطي التقارب، وارسم شكلا تخطيطيا للقطع الزائد الذي معادلته :

أ) $س^{٢} - ٤ص^{٢} - ٨ = ٠$

ب) $٤س^{٢} - ٩ص^{٢} + ١ = ٠$

جـ) $(ص + ٣)^{٢} - ٢٥(س - ١)^{٢} = ٢٥$

د) $٤س^{٢} - ٥ص^{٢} - ١٦س + ١٠ص - ٩ = ٠$

٥ يقال للقطعين الزائدين : $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ ، $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = -١$ أنهما مترافقان

أ) بين أن القطعين الزائدين : $س^{٢} - ٩ص^{٢} + ٨١ = ٠$ ، $٩ص^{٢} - س^{٢} + ٨١ = ٠$ مترافقان ، وارسم منحنى كل منهما على نفس المستوى الديكارتي.

ب) بماذا يشترك القطعان في(أ) ؟

جـ) اثبت أن أي زوج من القطوع الزائدة المترافقة يتمتع بما استنتجته في (ب).

٦ اثبت أن خطي تقارب القطع الزائد : $س^٢ - ص^٢ = ل^٢$ متعامدان.

٧ بالنسبة للقطع الزائد الذي معادلته : $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

أ) أوجد قيم α، ب ، جـ ثم أوجد إحداثيات بؤرتي القطع .

ب) بين أن النقطة ن(٥ ، $\frac{١٦}{٣}$) تقع على منحنى القطع .

جـ) أوجد ن $ف_١$ ، ن $ف_٢$ حيث $ف_١$ ، $ف_٢$ تمثلان بؤرتي القطع .

د) بين أن القيمة المطلقة للفرق بين ن $ف_١$ ، ن $ف_٢$ تساوي ٢α .

٨ عندما تقترب مركبة فضاء من أحد الكواكب تعمل قوة جذب ذلك الكوكب على تغيير مسار تلك المركبة من خط مستقيم إلى فرع من قطع زائد . أوجد معادلة مسار مركبة فضاء حول أحد الكواكب إذا علمت أن α = ٣٣٢٩٦٥ كـم ، جـ = ٤٩٢٧٨٨٢ كـم .

٩ ارسم منحنى القطع الزائد الذي معادلته : $٩س^٢ - ص^٢ + ١٨س + ٦ص - ٩ = ٠$ مبينا البؤرتين والرأسين والمركز وخطوط التقارب على الرسم .

١٠ في القطع الزائد الذي معادلته : $٢س^٢ - ٤ص^٢ - ١٢س + ٨ص + ٢٢ = ٠$

أ) اثبت أن النقطة ن(٥ ، ٣) تقع على منحنى القطع .

ب) أوجد $|ن ف_١ - ن ف_٢|$ حيث $ف_١$ ، $ف_٢$ هما بؤرتا القطع .

١١ أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان محيط المستطيل المركزي ١٦ وحدة، ورأسا القطع هما النقطتان (٠ ، ٣) ، (٠ ، -٣).

١٢ أوجد معادلة القطع الزائد إذا كانت إحدى بؤرتيه (٥ ، ٠)، وأحد رأسيه (-٢ ، ٠)، ومركزه (٠,٠) .

١٣ لتكن ن(α هـ ، ٠) نقطة في المستوى الديكارتي ، $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيم معلوم في المستوى نفسه غير مار بالنقطة ن، ومعادلته س = $\frac{\alpha}{هـ}$، حيث أ ، هـ عددان موجبان ، هـ > ١ والمطلوب :

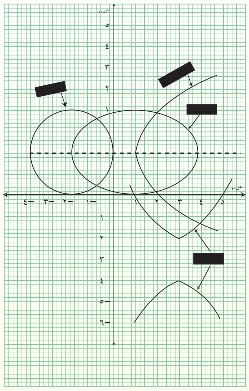
أ) أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) المتحركة في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة ن يساوي هـ × بعدها العمودي عن المستقيم ل .

ب) ما اسم الشكل الهندسي الذي تمثله معادلة المحل الهندسي للنقطة و ؟

١٤ أوجد الرأسين والبؤرتين والمركز وطول المحور الرئيسي وطول المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته : $س^٢ - ٩ص^٢ - ٨س + ٣٦ص - ٢٩ = ٠$.

تمارين &

مسائل عامة



١ انقل الشكل المقابل في دفترك، واكتب اسم الشكل في المستطيل المخصص له، وأجب عما يلي :

أ) ما معادلة كل شكل ؟

ب) أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل بالنسبة للقطع المكافئ وعين البؤرة على الشكل، وأوجد معادلة محور التماثل.

جـ) بالنسبة للقطع الناقص أوجد إحداثيات البؤرتين وعينها على الشكل، ثم أوجد طول المحور الأكبر ، وطول المحور الأصغر، والاختلاف المركزي له .

د) بالنسبة للقطع الزائد أوجد بؤرتي القطع وأوجد معادلتي خطي التقارب .

٢ سمِّ كلا من القطوع المخروطية الآتية التي معادلاتها :

أ) س^٢ − ٨س + ص^٢ = − ١١

ب) ٤ص^٢ + ٢٤ص − ٢س^٢ − ٤س + ٢٦ = ٠

٣ أوجد الرأس ومعادلة الدليل للقطع المكافئ (س − ٧)^٢ = ٨(ص − ٣)، وارسم مخططا بيانيا له.

٤ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ف$_١$ (٥ ، − ١) ، ف$_٢$ (−١ ، − ١) وطول محوره الأكبر يساوي ١٠، وارسم مخططا بيانيا له .

٥ اكتب المحل الهندسي وأوجد معادلته للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون:

أ) بعدها عن النقطة (− ١ ، ٢) يساوي بعدها عن المستقيم س = ٣ .

ب) مجموع بعديها عن النقطتين (− ٥ ، ٠) ، (١ ، ٠) يساوي ١٢ وحدة .

جـ) الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين (٠ ، − ٥) ، (٠ ، ١) يساوي ٤ وحدات.

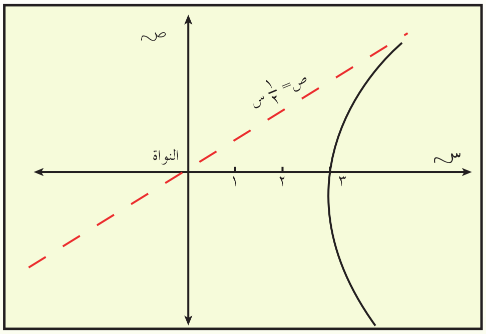
٦ أوجد المركز والبؤرتين ومعادلتي المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته :

س^٢ + ٤ص^٢ − ٤س + ٨ص − ١ = ٠

٧ أوجد المركز والبؤرتين والرأسين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته :

٩س^{٢} − ٤ص^{٢} − ١٨س − ١٦ص + ٢٩ = ٠   ثم ارسم شكلا تخطيطيا له.

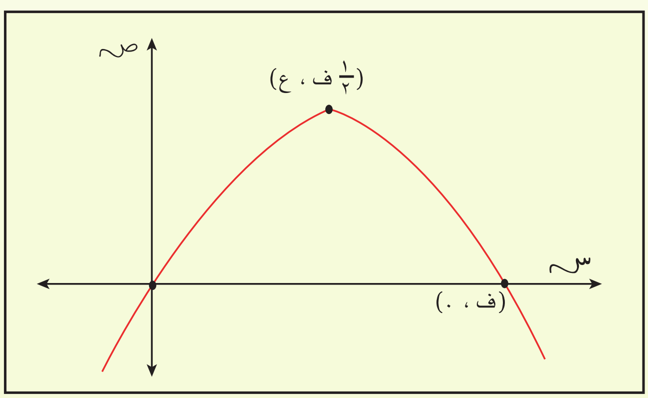
٨ في تجربة رذرفورد أطلقت جسيمات ألفا على شريحة من الذهب، فانعكس أحد الجسيمات المتجهة إلى نواة إحدى الذرات متخذا مسار قطع زائد وبحيث تطابق المسار الأصلي للجسم مع الخط التقاربي للقطع الزائد،أوجد معادلة مسار الجسيم.



٩ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ف$_{١}$ (٥ ، ٠) ، ف$_{٢}$ (١ ، ٠)، وأحد رأسيه نقطة الأصل .

١٠ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٣ ، ١) ، ويمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٧ ، ٥)، ومحوره الرئيسي يوازي محور السينات .

١١ أوجد معادلة القطع المكافئ في الشكل :



١٢ أوجد معادلة القطع الناقص الذي يشترك مع القطع المكافئ س^{٢} + ص = ١٠ في الرأس، وإحدى البؤرتين والبؤرة الأخرى هي نقطة الأصل .

١٣ أوجد قيم الثوابت م ، ل ، ك إذا كان القطع الناقص : ٤س^{٢} + ص^{٢} + م س + ل ص + ك = ٠ يمس المحور السيني عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة (− ٢ ، ١) .

تم بحمد الله

رقم الإيداع : ٢٥٤/٢٠٠٧ م

نزوى عاصمة الثقافة الإسلامية

Nizwa, Capital of Islamic Culture

2015

محافظتك على كتابك المدرسي قيمة حضارية

www.moe.gov.om