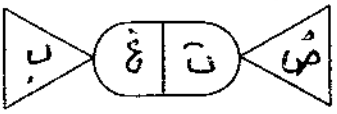
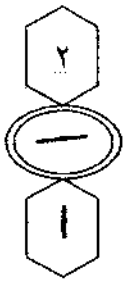
منهاجي
متعة التعليم الهادف



بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة



امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩ / التكميلي

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات / الورقة الأولى / ف١ — مدة الامتحان: ٢ : ٠٠ (د س)
الفرع : العلمي + الصناعي (جامعات) / خطة (٢٠١٩) — اليوم والتاريخ: السبت ٢٠١٩/٨/٣

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٥)، علمًا بأن عدد الصفحات (٤).

السؤال الأول: (٤٢ علامة)

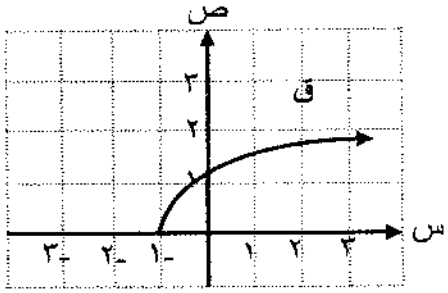
أ) جد كلًا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٥) + \sqrt{س + ١}}{س - ٣}$ (١٥ علامة)

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا\ س - جا\ س}{س(جتا\ ٥س - جتا\ س)}$ (١٥ علامة)

ب) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [−١ ، ∞)، فإن



$\lim_{س \to -٢}$ ق(س) تساوي:

أ) صفر — ب) −٢
ج) −٣ — د) غير موجودة

٢) إذا كان ق(س) = [٢ − س]، ما قيم الثابت جـ التي تجعل $\lim_{س \to جـ}$ ق(س) = −١؟

أ) [٢ ، ٣) — ب) (٢ ، ٣) — ج) [−١ ، ٠) — د) (−١ ، ٠]

٣) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٢س}{(م - ١)\ س} = \frac{١}{٥}$ ، فإن قيمة الثابت م تساوي:

أ) ١١ — ب) ٩ — ج) ١٠ — د) ٧

٤) قيمة $\lim_{س \to ٠}$ (قا س + ٧س قتا ٢س) تساوي:

أ) ١٨ — ب) $\frac{٢}{٩}$ — ج) $\frac{٩}{٢}$ — د) صفر

يتبع الصفحة الثانية /،،،،،،

السـؤال الثاني: (٤٣ علامة)

أ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{[س]}{س+1} & ، \quad ٤ \leq س < ٥ \\ |س - ٥| & ، \quad ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على مجاله (١٦ علامة)

ب) إذا كان ق(س) = $س^{٢} + \frac{٤}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، فجد قَ(٢) باستخدام تعريف المشتقة. (١٥ علامة)

ج) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٢ علامة)

١) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٣س}{س^{٢} + أس + ١}$ ، فما قيم الثابت أ التي تجعل الاقتران ق متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

أ) (-٢ ، ٢) ب) [-٢ ، ٢] ج) [-٢ ، ٢) د) (-٢ ، ٢]

٢) نهـــا $\frac{٢^{س} - ٢^{-س}}{٢^{س} - ١}$ تساوي: $س \to ٠$

أ) ١ ب) ٢ ج) صفر د) غير موجودة

٣) إذا كان ق(س) = $٤س^{٢} - أ$ ، $أ \ni ح$ ، فإن معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (-٣) إلى (٢) يساوي:

أ) ٤ ب) -٢٠ ج) -٤ د) -٨

٤) إذا كان قَ(٥) = ٣ ، فإن نهـــا $\frac{ق(س) - ق(٥)}{س^{٢} - ٤س - ٥}$ تساوي: $س \to ٥$

أ) $\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

السـؤال الثالث: (٢٨ علامة)

أ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢ - س & ، \quad ٠ \leq س < ١ \\ \sqrt{س} & ، \quad ١ \leq س < ٣ \end{cases}$ ،

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١ (١٦ علامة)

يتبع الصفحة الثالثة ....

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ب) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٢ علامة)

١) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ(١) = ٤ ، قَ(٤) = ٥ ، هـَ(١) = ٢

فإن قيمة (ق ○ هـ)َ(١) تساوي:

أ) ١٠ ب) ٥ ج) ٢٠ د) صفر

٢) إذا كان ق(س) = (٢س + ١)^{٣} ، فإن قيمة قً(-١) تساوي:

أ) -٦ ب) ٩ ج) -١٢ د) -٢٤

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان ق(٢س - ١) = $\frac{١٦}{س}$ - ٥، فإن قيمة قَ(٣) تساوي:

أ) -٤ ب) ٤ ج) -٢ د) ٢

٤) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ق(١) = ٢ ، قَ(١) = ٥ ، هـَ(١) = ٢ ، هـً(١) = -١

فإن قيمة $\left(\frac{هـ}{ق}\right)$َ(١) تساوي:

أ) -٦ ب) -٣ ج) $-\frac{٣}{٢}$ د) ٢

السـؤال الرابع: (٤٥ علامة)

أ) جد معادلتي المماسين لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٢س عند نقطتي تقاطع منحناه مع محور السينات. (١٥ علامة)

ب) إذا كان ق(س) = س^{٤} - ٣٢س^{٢} ، س ∈ ح ، فجد كلًا ممّا يأتي: (١٨ علامة)

١) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

٢) القيم القصوى للاقتران ق (إن وجدت)، مبينًا نوعها.

٣) الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعرًا للأسفل.

٤) نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت).

منهاجي
منصة التعليم الهادف

ج) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٢ علامة)

١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = أن^{٢} ، حيث ف: المسافة بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، فإذا كانت السرعة المتوسطة للجُسيم في الفترة [٠ ، ٤] تساوي ٨ م/ث، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٩}{٤}$

٢) إذا كان ق(س) = | ٩ - ٣س | ، فإن قيمة قَ(٣) تساوي:

أ) ٣ ب) -٣ ج) صفر د) غير موجودة

٣) إذا كان ص = ظا س جتا ٢س ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ تساوي:

أ) ٣ ب) صفر ج) -٢ د) ٢

٤) قُذف جسم رأسيًا للأعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٥ن - ٥ن^{٢}، فإن الزمن بالثواني اللازم حتى يعود الجسم إلى سطح الأرض يساوي:

أ) ١ ب) ٥ ج) ٣ د) ٢,٥

يتبع الصفحة الرابعة ....

السـؤال الخامس: (٤٢ علامة)

أ) بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة أ(١٢ ، ٠) على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث، وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة ب(٠ ، ٣) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ١سم/ث، جد معدل التغير في المسافة بين النقطتين أ ، ب في اللحظة التي يتساوى فيها بعدا النقطتين عن نقطة الأصل. (١٥ علامة)

ب) منشور ثلاثي قائم حجمه ٢ سم^{٣} قاعدته على شكل مثلث متطابق الأضلاع، جد طول ضلع قاعدة المنشور التي تجعل مساحة سطحه الكلية أقل ما يمكن. (١٥ علامة)

ج) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٢ علامة)

١) إذا كان $\frac{٤}{ص}$ − ٢س = ٣ ، ص ≠ ٠ ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (−٢ ، −٤) تساوي:

أ) ٢٠ ب) ٨ ج) −٨ د) −٢٠

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٤س + ٣ ، فإن ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ١ يساوي:

أ) $-\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) −٢ د) ٢

٣) إذا كان س = جـا ص ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{\pi}{٦})$ تساوي:

أ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤) إذا كانت ص = ٢ن^{٣} ، س = ن^{٢} ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عند ن = ٢ تساوي:

أ) ٩٦ ب) ٢٤ ج) ٣ د) ٦

(انتهت الأسئلة)

منهجي
متعة التعليم الهادف

بسم الله الرحمن الرحيم

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩

صفحة رقم (١)

تكميلي

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

المبحث : الرياضيات / ورقة أولى / ف١

الفرع : العلمي + الصناعي دفعة ٢٠١٩

مدة الامتحان: ٢ س د

التاريخ : ٢٠١٩/٨/٣ م

الإجابة النموذجية :

في الكتاب	
٢٨	السؤال الأول :- (٤٣ علامة) أ) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١}+(٥-س)}{٣-س}$ = $\frac{\sqrt{٣+١}+(٥-٣)}{٣-٣}$ = $\frac{٤}{٠}$ ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+١}+(٥-س))(\sqrt{س+١}-(٥-س))}{(٣-س)(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)-(٥-س)^{٢}}{(٣-س)(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-١٠س+٢٥-س-١}{(٣-س)(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-١١س+٢٤}{(٣-س)(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٨)(س-٣)}{(٣-س)(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① $= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٨)}{(\sqrt{س+١}-(٥-س))}$ ① $= \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$ ①

منهاجي
متعة التعليم الهادف

رقم الصفحة في الكتاب

تكملة ورقة أولى

س ١ م ١

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س(جتا ٥س - جتا س)}$ = صفر ① ٤٣

صفر ٦٧

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{-٢ س \, جا(\frac{٥س+س}{٢}) \, جا(\frac{٥س-س}{٢})}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س - جا س \, جتا س}{جتا س}$ ①

$-٢ س \, جا ٣س \, جا ٢س$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (١ - جتا س)}{-٢ س \, جا ٣س \, جا ٢س} \times \frac{١}{جتا س}$ ① ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (٢ جا^٢ \frac{س}{٢})}{-٢ س \, جا ٣س \, جا ٢س} \times \frac{١}{جتا س}$ ①

$= \lim_{س \to 0} -\frac{جا س}{س} \times \frac{جا \frac{س}{٢}}{جا ٢س} \times \frac{جا \frac{س}{٢}}{جا ٣س} \times \frac{١}{جتا س}$ ① ① ①

$= -١ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times ١$ ① ① ①

$= \frac{-١}{٤}$ ① ← المطلوب البرهان

س ١ ع)

رقم الفقرة	١	ب	ج	٢	٤
الإجابة	د	ب	٣	٢	٤٠
رمز الإجابة	غير موجودة	(٣، ٢)	١١	٣	$\frac{٩}{٤}$

لكل فقرة ثلاث علامات

١٣ ١٤ ١٤ ١٤

رقم الصفحة في الكتاب

تكميلي ورقة اولى

السؤال الثاني : (٤٣ علامة)

أ) بفيد تعريف الاقتران هـ(س) حيث س ∈ [٤، ٦] ٥٩

١٦

$$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س+١} & ، ٤ \leq س < ٥ \\ ٢س - ٥ & ، ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$$

① يعكس العبارة التعريف على خط الأعداد

① في الفترة (٤، ٥) الاقتران هـ متصل لأنه على صورة اقتران نسبي معرّف على كل هذه الفترة

① في الفترة (٥، ٦) الاقتران هـ متصل لأنه على صورة كثير حدود

* نبحث عند نقطة التصنيع س = ٥ ①

① هـ(٥) = صفر

① $\lim_{س \to ٥^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٥^+} (س - ٥) =$ صفر

① $\lim_{س \to ٥^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٥^-} \frac{٤}{س+١} = \frac{٤}{٦}$ ①

① بما أن $\lim_{س \to ٥^-} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٥^+} هـ(س)$ ∴ نهـ(س) غير موجودة

① وعليه فإن الاقتران هـ غير متصل عند س = ٥

* نبحث في اتصال الاقتران هـ عند س = ٤ من اليمين ①

① $\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{٤}{س+١} = \frac{٤}{٥}$

① هـ(٤) = $\frac{٤}{٤+١} = \frac{٤}{٥}$

① $\Leftarrow$ هـ(س) متصل عند س = ٤ من اليمين

وعليه فإن الاقتران هـ(س) متصل على

① $[٤، ٦) - \{٥\}$

رقم الصفحة في الكتاب

تكميلي ورقة اولى

س ٤

ب) $م(س) = س^{٤} + \frac{٤}{س}$ ، $س \neq ٠$ ٦١

١٥

$$م'(ج) = \lim_{س \to ج} \frac{م(س) - م(ج)}{س - ج} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٤} + \frac{٤}{س} - (ج^{٤} + \frac{٤}{ج})}{س - ج} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٣} + ٤ - ٦س}{س} \quad ① \quad ① \quad ①٦$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ج)(س^{٢} + جس - ٤)}{س(س - ج)} \quad ① \quad ③$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٢} + جس - ٤}{س} \quad ①$$

$$= \frac{ج^{٢} + ٤ - ٤}{ج} \quad ① \quad ① \quad ①$$

$$= ٣ \quad ① \quad = \frac{٦}{ج}$$

ج	١	٠	-٦	٤
-٤		٤	-١٢	٢٤
٠	١	-٣	-١٨	٢٦

س ٤

٤٠) ١٤

رقم المقره	١	٢	٣	٤
الاجابه	أ	ب	ج	د
رمز الاجابه	(-٢، ٤)	ج	-٤	$\frac{١}{٤}$

٦٣
٥٨
٦٦
١١٧

لكل مقره ٣ علامات

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثالث :(٣٨ علامة) تكميلي ورقة أولى (ف١ ٢٠١٩)

(أ) $ق(س) = \begin{cases} ٢ - س ، ٠ \le س < ١ \\ \sqrt{س} ، ١ \le س < ٣ \end{cases}$ ٩٥

ق متصلة عند س = ١

$ق(١) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ٢ - س = ١$

$\therefore \lim_{س \to ١} ق(س) = ١$ ، وبما أن $\lim_{س \to ١} ق(س) = ق(١)$ فإن ق متصلة عند س = ١

$ق'(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{٢ - س - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{١ - س}{س - ١} = -١$

$ق'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt{س} + ١)} = \lim_{س \to ١^+} \frac{١}{\sqrt{س} + ١} = \frac{١}{٢}$

$\because ق'_+(١) \neq ق'_-(١)$ أي ضرها يأخذ عالرصام

$\therefore$ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

متقاجي
متعة التعليم الهادف

(ب)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الإجابة الصحيحة	م	ك	ع	ب
الإجابة الصحيحة	١٠	-٢٤	-٢	-٣

ثلاث علامات لكل فقرة

رقم الصفحة في الكتاب	السؤال الرابع : (٤٥ علامة) تكملة ورقة أول لعام ٢٠١٩

(أ) منحنى الاقتران $ه(س) = س^2 - ٢س$ يقطع محور السينات عندما $ص = صفر$ ١٦٠

١٥ $\leftarrow س^2 - ٢س = صفر \leftarrow س(س-٢) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، ٢$

نقطتي تقاطع منحنى الاقتران $ه(س)$ مع محور السينات هما $(٠،٠)$ ، $(٢،٠)$

وهما نقطتي التماس لمنحنى $ه(س)$ ، $ه'(س) = ٢س - ٢$

ميل المماس الأول $م_١ = ه'(٠) = ٢ \times ٠ - ٢ = -٢$

معادلة المماس الأول $ص - ص_١ = م(س - س_١) \leftarrow ص - ٠ = -٢(س - ٠)$

$\leftarrow ص = -٢س$ ، ميل المماس الثاني $م_٢ = ه'(٢) = ٢ \times ٢ - ٢ = ٢$

معادلة المماس الثاني $ص - ٠ = ٢(س - ٢) \leftarrow ص - ٢س - ٤$

(ب) $ه(س) = ٤س^3 - ٦٤س$

١٨ ٢١١ $٤س^3 - ٦٤س = صفر \leftarrow ٤س(س^2 - ١٦) = ٠$

$\leftarrow ٤س(س-٤)(س+٤) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، ٤ ، -٤$

إشارة $ه'(س)$

(١) $ه(س)$ متزايد على الفترتين $[-٤،٠]$ ، $[٤،\infty)$ ومتناقص على الفترة $(-\infty،-٤]$

، $[٠،٤]$ (٢) لاقتران $ه(س)$ قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $س = -٤$ هي $ه(-٤) = -٢٥٦$

وقيمة صغرى محلية ومطلقة عند $س = ٤$ هي $ه(٤) = -٢٥٦$ ، وله قيمة عظمى محلية عند $س = ٠$

هي $ه(٠) = ٠$ (٣) ، $ه''(س) = ١٢س^2 - ٦٤ = ٠ \leftarrow س = \pm \frac{٤}{\sqrt{٣}}$

$ه$ مقعر للأسفل في $\left[-\frac{٤}{\sqrt{٣}}، \frac{٤}{\sqrt{٣}}\right]$ إشارة $ه''$

(ب) نقط الانعطاف هي $\left(-\frac{٤}{\sqrt{٣}}، ه\left(-\frac{٤}{\sqrt{٣}}\right)\right)$ ، $\left(\frac{٤}{\sqrt{٣}}، ه\left(\frac{٤}{\sqrt{٣}}\right)\right)$ (ج) ..

١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	
رمز الاجابة الصحيحة	أ	د	ج	ب	٧٩
الاجابة الصحيحة	٣	غير موجودة	-٢	٥	١٠٨

ثلاث علامات لكل فقرة ١٦٣ ٧٩

رقم الصفحة في الكتاب: ١٧٣

تحليلي رقم ١ ولى

السؤال الخامس: (٤٢ علامة)

(P) باستخدام نظرية فيثاغورس ① وحيث أن س = ٤ن ، ص = ١٢ - ن

ق = $\sqrt{(٤ن)^٢ + (١٢-ن)^٢}$ ① ± ①

$\frac{ك ق}{ك ن} = \frac{٢(١٢-ن)\times(-١) + ٢(٤ن)\times ٤}{٢\sqrt{(٤ن)^٢ + (١٢-ن)^٢}}$ ① ① ①

$\left|\frac{ك ق}{ك ن}\right|_{ن=٣} = \frac{٢(١٢-٣)\times(-١) + ٢(٣\times٤)\times ٤}{٢\sqrt{(٣\times٤)^٢ + (١٢-٣)^٢}}$ ①

بتساوى بعد النقطتين عن ط

١٢ - ن = ٣ + ن ①

ن = ٣ ①

$= \frac{-٤\times٦ + ٦\times٢}{٢\sqrt{٣٦+٣٦}}$ ①

$= \frac{-١٢}{٢\sqrt{٢\times٣٦}}$ ①

$= \frac{-٦}{\sqrt{٧٢}}$ ①

$= \frac{-١}{٣\sqrt{٢}}$ كم/ن

رقم الصفحة في الكتاب

تكميلي ورقة ١

س :

ب) حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع ①

$٢ = \frac{١}{٢} \times س \times س \times ٦٠ \text{ جا} \times ع = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢} ع$ ① ٩٠ص

١٥

$\leftarrow ع = \frac{٨}{\sqrt{٣} س^{٢}}$ ①

مساحة سطح المنشور الكلية = مساحة القاعدتين + مساحة الأوجه الجانبية ①

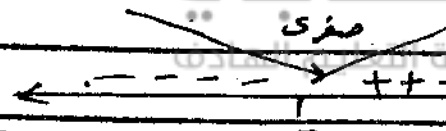
$م = ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢} + ٣ س ع$ ①

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٢} س^{٢} + ٣ س \times \frac{٨}{\sqrt{٣} س^{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} س^{٢} + \frac{\sqrt{٣}٨}{س}$ ①

$م' = \sqrt{٣} س - \frac{\sqrt{٣}٨}{س^{٢}} \Leftarrow \frac{\sqrt{٣} س^{٣} - \sqrt{٣}٨}{س^{٢}} = صفر$ ①

$\leftarrow \sqrt{٣} س^{٣} - \sqrt{٣}٨ = صفر \leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{س^{٢}} (س^{٣} - ٨) = صفر$ ①

① $\leftarrow س^{٣} - ٨ = صفر \leftarrow (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) = صفر \leftarrow س = ٢$



← عندما س = ٢ تكون المساحة الكلية لسطح المنشور أقل ما يمكن ①

(ج)

١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	
رمز الإجابة الصحيحة	ج	ب	م	د	
الإجابة الصحيحة	-٨	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٤}{\sqrt{٣}}$	٦	

١٤٤ — ١٥٦ — ص١٣٠ — ١٧٨

ثلاث علامات لكل فقرة

السؤال الأول (٢٤) علامة.

أ)

١٥/ ١) حل آخر.

$$\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1} + (س-5)}{س-3} = \frac{\sqrt{4} + (-2)}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1} + (-)+(-) - (س-5)}{س-3}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س-5}{\sqrt{س+1} - 2} + \lim_{س \to 3} \frac{2 + (س-5)}{س-3}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س-3}{\sqrt{س+1} - 2} \times \frac{\sqrt{س+1} + 2}{\sqrt{س+1} + 2} + \lim_{س \to 3} \frac{س-3}{(س-3)(4)}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1} + 2}{س-3} + \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1} + 2}{(4)(س-3)} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

منصاتي منصة التعليم الهادف

السؤال الأول : (٤٥) علامة

ب) ١) حل آخر

١٥

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} + (س-٥)}{س-٣} = \div$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} + س - ٥}{س-٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} - ٤ + س - ٣}{س-٣}$$

ترشيد + اختصار

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٣} + \lim_{س \to ٣^+} \frac{س-٣}{س-٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{س+١-٤}{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)} + ١$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{س-٣}{(س-٣)(٤)} + ١$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{١}{٤} + ١ = \frac{٥}{٤}$$

السؤال الأول: (٤٠) علامة

(أ)

١٥ (١) حل آخر

$$\text{①} \quad \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} + (٥-س)}{٣-س} = \frac{٠}{٠}$$

نفرض $\text{①} + \text{①} \quad ق(س) = \sqrt{س+١} + (٥-س)$

$$\text{①} \quad ق(٣) = ٢ + ٢ - = صفر$$

$$\therefore \lim_{س \to ٣^+} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س-٣} = ق'(٣) \quad \text{①}$$

$$\text{①} \quad \frac{١}{٢\sqrt{س+١}} - ١ = ق'(س)$$

$$\text{①} \quad \frac{١}{٢\times ٢} - ١ = ق'(٣)$$

$$\text{①} \quad \frac{١}{٤} - ١ =$$

$$\text{①} \quad \frac{٥}{٤} -$$

$$\therefore \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س+١} + (٥-س)}{٣-س} = ق'(٣)$$

$$\text{①} \quad \frac{٥}{٤} -$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

ب) حل آخر.

$$\text{نهـ}_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1} + (س-5)}{س-3} = \frac{0}{0} \quad (1)$$

(15)

نفرض $\sqrt{س+1} = ص$ (1)

$س+1 = ص^2$ (1)

$س = ص^2 - 1$ (1)

عندما $س \to 3$ ، فإن $ص \to 2$ (1)

$$\text{نهـ}_{ص \to 2} \frac{ص^2 - 1 - 5 + ص}{ص^2 - 1 - 3} \quad (1)(1)$$

$$= \text{نهـ}_{ص \to 2} \frac{ص^2 + ص - 6}{ص^2 - 4} \quad (1)$$

$$= \text{نهـ}_{ص \to 2} \frac{(ص+3)(ص-2)}{(ص+2)(ص-2)} \quad (1)(1)$$

$$= \frac{5}{4} \quad (1)$$

منهجي
منصة التعليم الهادف

السؤال الأول : (٤٠) علامة.

٢٩

٤) حل آخر.

١٥

$$\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^3 (جتا 2س - جتا س)} = \text{؟} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{س^3 (-2 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2})} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س - جا س جتا س}{جتا س}}{-2 س^3 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2}} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س - جا س جتا س}{-2 س^3 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2} جتا س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{① جا س (1 - جتا س)}{-2 س^3 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2} جتا س} \times \frac{1 + جتا س}{1 + جتا س} \quad ①$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{① جا^2 س (1 - جتا^2 س)}{-2 س^3 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2} جتا س (1 + جتا س)} \quad ① \quad \frac{1}{2} \times$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{① جا س \times جا^2 س}{-2 س^3 جا \frac{3س}{2} جا \frac{س}{2} جتا س (1 + جتا س)} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{-2 س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{جا \frac{3س}{2}} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{جا \frac{س}{2}} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{جتا س (1 + جتا س)} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \quad ①$$ أخطأ خطأ تغير العلامة

$$= \frac{1}{24} - \quad ①$$

السؤال الأول :-

(م) (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا^{١٠} س - حا^{١٠} س}{س (ضتا^{٥} س - ضتا^{٥} س)} \times \frac{ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س}{ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^{٢٠} س - حا^{٢٠} س}{س (ضتا^{٥} س - ضتا^{٥} س)(ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س)}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{حا^{٢٠} س}{س (-٢ حا^{٣} س \cdot حتا س)} \cdot \frac{١}{(ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س)}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{حا^{٢٠} س}{ضتا^{٢٠} س} - حا^{٢٠} س}{-٢ س حا^{٣} س حتا س (ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س)}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{حا^{٢٠} س - حا^{٢٠} س ضتا^{٢٠} س}{-٢ س ضتا^{٢٠} س حا^{٣} س حتا س (ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س)}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{حا^{٢٠} س (١ - ضتا^{٢٠} س)}{-٢ س ضتا^{٢٠} س حا^{٣} س حتا س (ظا^{١٠} س + حا^{١٠} س)}$ ①

$= \lim_{س \to 0} \frac{حا س}{-٢ س} \cdot \lim_{س \to 0} \frac{حا س}{حا^{٣} س} \cdot \lim_{س \to 0} \frac{حا س}{حتا س} \cdot \lim_{س \to 0} \frac{حا س \div س}{\frac{ظا^{١٠} س}{س} + \frac{حا^{١٠} س}{س}} \cdot \lim_{س \to 0} \frac{١}{ضتا^{٢٠} س}$ ①

$= \frac{١}{-٢} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{حتا} \times \frac{١}{١+١} \times \frac{١}{٢}$ ①

$= -\frac{١}{٤}$

السؤال الثاني : (٤٣) علامة.

١٥ ب) حل آخر.

$$ق(س) = س^{٣} + \frac{٤}{س} \quad ، \quad س \neq ٠$$

$$ق'(ج) = \lim_{س \to ج} \frac{ق(س) - ق(ج)}{س - ج} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س^{٣} + \frac{٤}{س}) - (ج^{٣} + \frac{٤}{ج})}{س - ج} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٣} - ج^{٣} + \frac{٤}{س} - \frac{٤}{ج}}{س - ج} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٣} - ج^{٣} + ٤ - \frac{٤}{س}}{س - ج} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ج)(س^{٢} + ج س + ج^{٢}) + \frac{٤ - ٤س}{س}}{س - ج} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ج)(س + ج)(س - ٢)}{س(س - ج)} + \lim_{س \to ج} \frac{٤ - ٤س}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٢} + ج س - ٢س - ٢ج}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{٤ - ٤س}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س^{٢} - ٢س + ج س - ٢ج}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{٤ - ٤س}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{س(س - ٢) + ج(س - ٢)}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{٤ - ٤س}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ٢)(س + ج)}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{٤ - ٤س}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ٢)(س + ج)}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{-٤(س - ج)}{س(س - ج)} \quad (١)$$

$$= \lim_{س \to ج} \frac{(س - ٢)(س + ج)}{س} + \lim_{س \to ج} \frac{-٤}{س} \quad (١)$$

$$= \frac{(ج - ٢)(ج + ج)}{ج} + \frac{-٤}{ج} \quad (١)$$

$$= \frac{٢ج(ج - ٢)}{ج} - \frac{٤}{ج}$$

$$= ٢(ج - ٢) - \frac{٤}{ج}$$

$$= ٢ج - ٤ - \frac{٤}{ج} \quad (١)$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

السؤال الثاني: (٣٤ علامة).

ب) حل آخر.

١٥

$$\text{ق}'(ج) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\text{ق}(ج+\Delta) - \text{ق}(ج)}{\Delta} \quad ①$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(ج+\Delta)^{\frac{3}{2}} + \frac{ج+\Delta}{3} - (ج+ج)}{\Delta} \quad ① ①$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(ج+\Delta)^{\frac{3}{2}} - ج^{\frac{3}{2}} + \frac{ج+\Delta}{3} - \frac{ج}{3}}{\Delta} \quad ① ①$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(ج+\Delta)^{\frac{3}{2}} - ج^{\frac{3}{2}}}{\Delta} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\frac{ج+\Delta}{3} - \frac{ج}{3}}{\Delta} \quad ① ①$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(ج+\Delta-ج)(ج+\Delta+ج)}{\Delta} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\frac{\Delta}{3}}{\Delta} \quad ① ①$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta(٣ج+\Delta)}{\Delta} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{٣ج-٣ج-٣\Delta}{٣\Delta(ج+\Delta)} \quad ① ①$$

$$= ٣ + \lim_{\Delta \to 0} \frac{-٣\Delta}{٣\Delta(ج+\Delta)} \quad ①$$

$$= ٣ + \frac{-٣}{٣ج} = ٣ - ١ = ٢ \quad ① ①$$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

السؤال الثاني : (٤٣) علامة.

ب) حل آخر.

١٥/ $\text{ق}'(ج) = \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\text{ق}(ج+\text{ه}) - \text{ق}(ج)}{\text{ه}}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\left(\frac{ج+\text{ه}}{3} + 2\right)^{ج} - (ج+2)}{\text{ه}}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\frac{ج^{ج} + 3\text{ه} + \text{ه}^{ج}}{3} + \frac{ج+\text{ه}}{3} - ج - 2}{\text{ه}}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\frac{\text{ه}^{ج} + 3\text{ه} + \frac{ج+\text{ه}}{3} - ج}{\text{ه}}}{\text{ه}}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\frac{\text{ه}^{ج} + 3\text{ه}(ج+\text{ه}) + 3(ج+\text{ه})^{ج} + (ج+\text{ه})^{ج} - ج(ج+\text{ه})}{3}}{\text{ه}}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{ج\text{ه}^{ج} + \text{ه}^{ج} + 6ج\text{ه} + 3\text{ه}^{ج} + 3ج^{ج} + 3ج\text{ه} + \text{ه}^{ج} - ج^{ج} - ج\text{ه}}{\text{ه}(ج+\text{ه})}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\text{ه}^{ج} + 6\text{ه}^{ج} + 6ج\text{ه}}{\text{ه}(ج+\text{ه})}$ ①

$= \lim_{\text{ه} \to 0} \frac{\text{ه}(\text{ه}^{ج} + 6\text{ه} + 6)}{\text{ه}(ج+\text{ه})}$ ①

$= \frac{6}{ج} = 3$. ①

السؤال الثالث : (٢٨ علامة)

أ) $د(س) = \begin{cases} س^2 - 2 & ، \ 0 \leq س < 1 \\ 1 - س & ، \ 1 \leq س < 3 \end{cases}$

١٦

نبحث في الاتصال عند $س = 1$.

① $د(1) = 1$ (معرفة)

① $\lim_{س \to 1^+} د(س) = \lim_{س \to 1^+} (1 - س) = 1$ ①

① $\lim_{س \to 1^-} د(س) = \lim_{س \to 1^-} (س^2 - 2) = 1$ ①

① $\lim_{س \to 1} د(س) = 1 = د(1)$ ①

① $د(س)$ متصل عند $س = 1$.

$حـ(س) = \begin{cases} ① & ① \\ 1 - س & ، \ 0 \leq س < 1 \\ \text{غير موجودة} & ، \ س = 1 \\ \frac{1}{س + 2} & ، \ 1 < س \leq 3 \end{cases}$ ①

$حـ(1^+) = \frac{1}{3} = \frac{1}{1 + 2}$ ①

$حـ(1^-) = 1 - 1 = 0$ ①

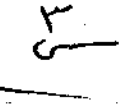
① $حـ(1^+) \neq حـ(1^-)$ ①

① $حـ(س)$ غير موجودة عند $س = 1$ ①

أي خطأ في الاستنتاج

$د(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$.

منهاجي
متعة التعليم الهادف



إذا استخدم الطالب مع إيجاد $\mathcal{L}^{-1}$ المتعة عند $s=1$ التعريف بدون بحث الاتصال وكتابة الحل كاملاً يأخذ علامة كاملة.

~~xxx~~ لا يجاد $\mathcal{L}^{-1}$ باستخدام التعريف لا نحتاج غيرها إلى بحث الاتصال.

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\,ds$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} e^{st}\,\frac{s-1}{s+1}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{e^{st}(s-1)}{(s+1)^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{e^{st}(s+1-2)}{(s+1)^2}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{e^{st}}{s+1}\,ds - \frac{2}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{e^{st}}{(s+1)^2}\,ds$$

$$= f(t) - 2tf(t) = (1-2t)f(t)$$

* ثم يضاف له علامات الاتصال ضمناً (٦)

السؤال الرابع : (٤٥) علامة

(أ)

١٥/ يقطع المنحنى ص = س(س-٤) محور السينات عندما ص = ٠

س(س-٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

نقط التماس هي (٠،٠) ، (٤،٠)

م = ص' = ٢س - ٤

عند النقطة (٠،٠)

م = ص'(٠) = -٤

معادلة المماس هي: ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٠ = -٤(س - ٠)

ص = -٤س

عند النقطة (٤،٠)

م = ص'(٤) = ٤

معادلة المماس هي: ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٠ = ٤(س - ٤)

ص = ٤س - ١٦

منهاجي
منصة التعليم الهادف

السؤال الرابع (٤٥) علامة،

١٨ (ب) $د(س) = س^٤ - ٣٢ س$

د متصل على ح لأنه كثير حدود.

$د'(س) = ٤س^٣ - ٣٢$

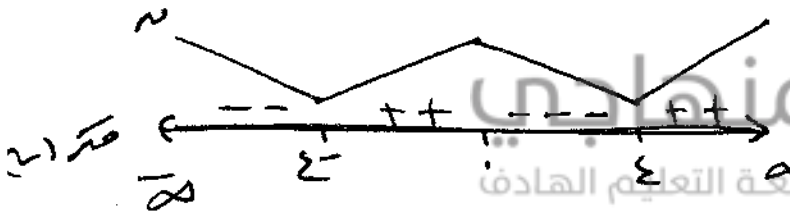
$د'(س) = صفر$

$٤س^٣ - ٣٢ = ٠$

$٤(س^٣ - ٨) = ٠$

$٤(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -٤$



منهجي
منصة التعليم الهادف

① د متزايدة على $[-٤، ٠]$ ، $[٤، \infty)$

د متناقصة على $(-\infty، -٤]$ ، $[٠، ٤]$

② عند $س = ٠$ قيمة عظمى محلية وهي $د(٠) = ٠$

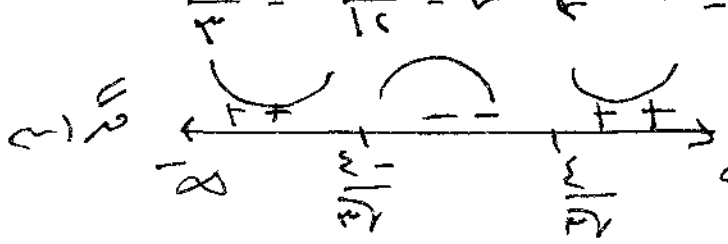
عند $س = -٤$ قيمة صغرى محلية ومطلقة وهي $د(-٤) = -٥٦$

عند $س = ٤$ قيمة صغرى محلية ومطلقة وهي $د(٤) = -٥٦$

③ $د''(س) = ١٢س^٢ - ٣٢$

$د''(س) = ٠ \Leftarrow ١٢س^٢ - ٣٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٨}{٣}$

$س = \pm \frac{٤}{\sqrt{٣}}$



د مقعرة لأسفل على $[-\frac{٤}{\sqrt{٣}}، \frac{٤}{\sqrt{٣}}]$

④ نقط الانقطاف هي

$(-\frac{٤}{\sqrt{٣}}، د(-\frac{٤}{\sqrt{٣}}))$ ، $(\frac{٤}{\sqrt{٣}}، د(\frac{٤}{\sqrt{٣}}))$

$= (-\frac{٤}{\sqrt{٣}}، -\frac{٨٠}{٩})$ ، $(\frac{٤}{\sqrt{٣}}، -\frac{٨٠}{٩})$

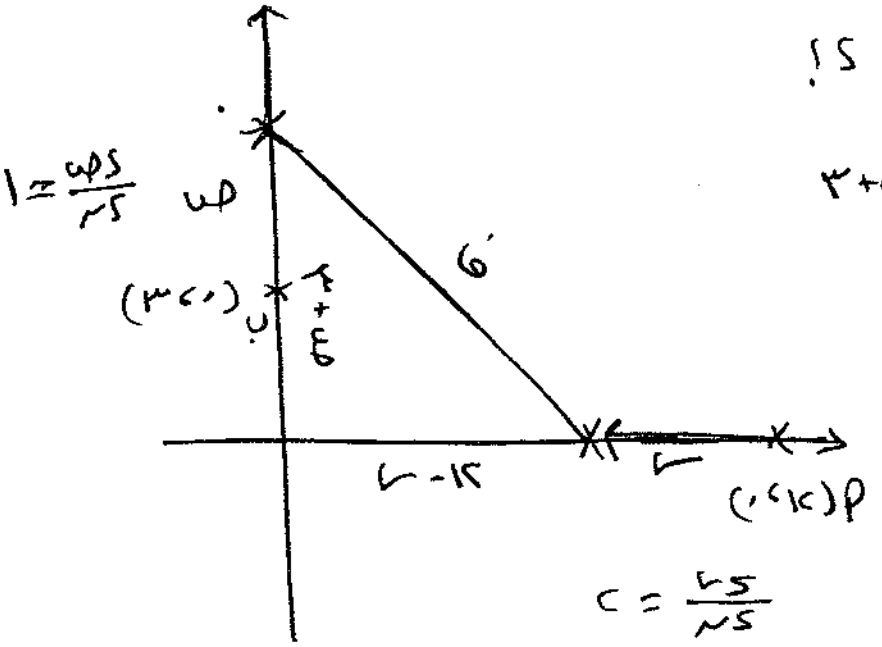
السؤال الخامس (٤٠) علامة.

(أ)

١٥

$\left|\frac{\text{د ف}}{\text{د س}}\right| = 2$!

$-١٢ - س = ٣ + ص$



$ج = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$ف = \sqrt{(-١٢ - س)^{٢} + (٣ + ص)^{٢}}$ ① + ①

$\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \times (٣ + ص) + \frac{\text{د س}}{\text{د س}} \times (-١٢ - س)$ ① ① ①

$\sqrt{(-١٢ - س)^{٢} + (٣ + ص)^{٢}}$ ①

$\frac{\text{د س}}{\text{د س}} = ١$ ① $\Leftarrow$ $ج = ١ \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ص$ ①

$ص = ١ \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$ ①

عندما $-١٢ - س = ٣ + ص$ ①

$-١٢ - ن = ٣ + ن \Leftarrow ٩ = ٢ن \Leftarrow ن = ٣$ ①

$\therefore$ $س = ٢ \times ٣ = ٦$ ①

$ص = ١ \times ٣ = ٣$ ①

$\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} = \frac{١ \times (٣ + ٣) + ج \times (-٦ - ١٢)}{\sqrt{(-٦ - ١٢)^{٢} + (٣ + ٣)^{٢}}}$ ① ①

$= \frac{-٦ + ١٢}{\sqrt{٣٦ + ٣٦}} = \frac{-٦}{\sqrt{٣٦ \times ٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ①

$\therefore$ $\frac{\text{د ف}}{\text{د س}} < ٠$ $\Leftarrow$ ف متناقص

(ب)