طريق التفوق

في الرياضيات الفرع العلمي | توجيهي

المنهاج الجديد

التكامل 621 سؤال

2023

مع الإجابات الكاملة لها تشمل جميع الأسئلة

كتاب الطالب وكتاب التمارين

إعداد

د.خالد جلال

للتواصل مع المعلم

0799948198

أ.إياد الحمد

للتواصل مع المعلم

0795604563

طريق التفوق

في

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة التكامل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

إعداد

د.خالد جلال
0799948198

أ.إياد الحمد
0795604563

الفهرس

الجزء الأول

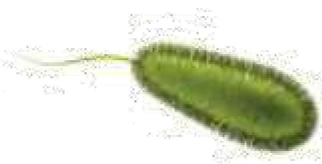
الجزء الثاني

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا من بَدْء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بَدْء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.



الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 2e^{4x+3}\, dx$

2) $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)\, dx$

3) $\int \sqrt{e^{x+1}}\, dx$

4) $\int (5^x + 7)\, dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 10)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx$

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

2) $\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\, dx$

3) $\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\, dx$

أتحقق من فهمي (صفحة 12)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x - \pi)dx$ b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\, dx$ c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x)\, dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^2 2x\, dx$ 2 $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$ 3 $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$ 4 $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

أتحقق من فهمي (صفحة 14)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\, dx$ b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x\, dx$ c) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$ 2 $\int \frac{1}{4x - 1} dx$ 3 $\int \frac{2x^5 - 4}{x} dx$ 4 $\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$

5 $\int \frac{6x}{x^2 + 9} dx$ 6 $\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x} dx$ 7 $\int \tan x\, dx$ 8 $\int \sec x\, dx$

أتحقق من فهمي (صفحة 16)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ b) $\int \frac{5}{3x + 2} dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

d) $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} dx$ e) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$ f) $\int \cot x\, dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} dx$ h) $\int \csc x\, dx$

مثال 5

أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 17)

أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

مثال 6

1) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}12 & ,x<2\\ 3x^2 & ,x\geq 2\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\,dx$.

2) إذا كان: $f(x)=|x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{6} f(x)dx$.

3) إذا كان: $f(x)=|4-x^2|$، فأجد قيمة: $\int_0^3 f(x)dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 19)

a) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x & ,x<1\\ 2x & ,x\geq 1\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

b) إذا كان: $f(x)=|1-x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

c) إذا كان: $f(x)=|x^2-1|$، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

مثال 7 : من الحياة

تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t)=-\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء، بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

أتحقّق من فهمي (صفحة 20)

تلوُّث: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قُطْرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بَدْء التسرُّب. إذا كان نصف قُطْر الدائرة يزداد بمُعدَّل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

مثال 8

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

1) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.

2) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

3) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

أتحقّق من فهمي (صفحة 23)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

أتدرّب وأحُلّ المسائل (صفحة 24)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$

2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

3) $\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$

4) $\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

6) $\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

7. $\int (e^x + 1)^2 \, dx$

8. $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$

9. $\int \frac{x^4 - 6}{2x} \, dx$

10. $\int \left(3 \csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right) dx$

11. $\int \frac{e^x + 1}{e^x} \, dx$

12. $\int \frac{e^x}{e^x + 4} \, dx$

13. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} \, dx$

14. $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

15. $\int \frac{1}{1 - \sin x} \, dx$

16. $\int \sec^2 x \, (1 + e^x \cos^2 x) dx$

17. $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

18. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

19. $\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} \, dx$

20. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx$

21. $\int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x)\right) dx$

22. $\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx$

23. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx$

24. $\int \frac{x^2}{x^3 - 3} \, dx$

25. $\int (9 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) \, dx$

26. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

27. $\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x \, dx$

28. $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$

29. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \tan^2 x \, dx$

30. $\int_1^{e} \frac{8x}{x^2 + 1} \, dx$

31. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x \, dx$

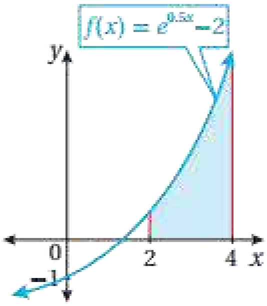
32. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \, dx$

33. $\int_0^{3} (x - 5^x) \, dx$

34. $\int_0^{4} |x^2 - 4x + 3| \, dx$

35. $\int_1^{4} (3 - |x - 3|) \, dx$

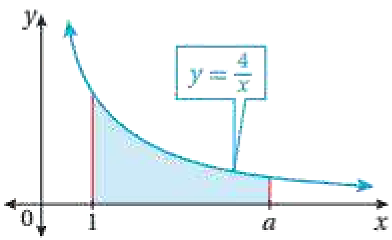
36. إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$.



37 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ المُمثَّل في الشكل المجاور.

38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\, dx = \ln 12$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

39 أُثبِت أنَّ: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\, dx = \ln\sqrt{2}$، حيث: $a \neq 0$.



40 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = a$، هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a.

41 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$، وكان: $f(\pi) = 3$، فأجد $f(0)$.

42 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

43 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx = a\pi + b$، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a، و b.

45 يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

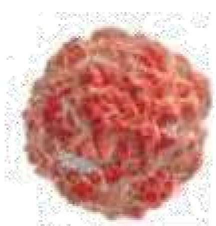
46 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تَبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.



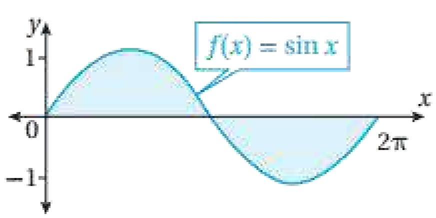
طب: في تجربة لدواء جديد أُعطِي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30\ cm^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة (cm^3/day):

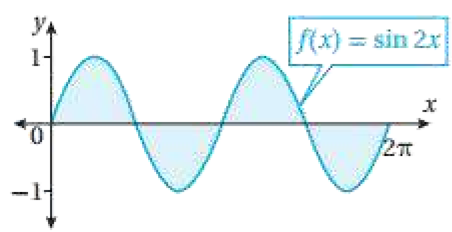
50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة.

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

مهارات التفكير العليا (صفحة 24)

تبرير: أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

52


53


تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\, dx$

55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\, dx$

56 $\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx$

57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

58 تبرير: أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ: $\int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x\, dx = \int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x\, dx - 0$.

59 تبرير: إذا كان: $\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx)\, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$، فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

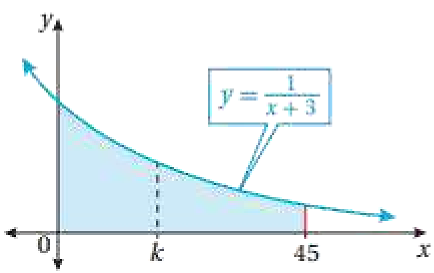
$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \le t \le 6 \\ 20 - (t-8)^2 & , 6 < t \le 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

62 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = \frac{1}{x+3}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و$x = 45$. أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المُظلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 4e^{-5x}\,dx$

2) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

3) $\int \cos^2 2x\,dx$

4) $\int \frac{e^x+4}{e^{2x}}\,dx$

5) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right)dx$

6) $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$

7) $\int \cos x\,(1+\csc^2 x)\,dx$

8) $\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

10) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

11) $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$

12) $\int \ln e^{\cos x}\,dx$

13) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

14) $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$

15) $\int \frac{3-2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$

18) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,\cos x\,dx$

19) $\int_{-1}^1 |3x-2|\,dx$

20) $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2\,dx$

21) $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

22) $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)\,dx$

23) $\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$

24) $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}\,dx$

25) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 3 \\ 10-x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\,dx$.

26) إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1}\,dx = 1$، فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

27) إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الدرس 2

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد t سنة من بَدْء دراستها، حيث G مَقيسة بالكيلوغرام. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الكتلة الحيوية للأسماك هو $G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}$ مَقيسًا بوحدة (kg/year)، وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بَدْء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقَّعة للأسماك بعد 20 سنة من بَدْء الدراسة.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$

2) $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

3) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

4) $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx$

5) $\int \sin^3 2x\cos 2x\,dx$

6) $\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 32)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

e) $\int \cos^4 5x\sin 5x\,dx$

f) $\int x\,2^{x^2}\,dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x\sqrt{2x+5}\, dx$ 2 $\int x^5\left(1+x^2\right)^3 dx$ 3 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 34)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\, dx$ b) $\int x^7\,(x^4-8)^3\, dx$ c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2}\, dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ 2 $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\, dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 35)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ b) $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\, dx$

مثال 4 : من الحياة

زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t)=\frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي (صفحة 37)

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمَل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المَبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \cos^3 x \, dx$

2) $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$

أتحقق من فهمي (صفحة 39)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x \, dx$

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^3 x \, dx$

2) $\int \cot^4 x \, dx$

3) $\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$

أتحقق من فهمي (صفحة 41)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x \, dx$

b) $\int \cot^5 x \, dx$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

مثال 7

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin x} \, dx$

2) $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \, dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 43)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3\,dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\,dx$

أتدرّب وأحُلّ المسائل (صفحة 44)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x^2 (2x^3+5)^4\,dx$

2) $\int x^2 \sqrt{x+3}\,dx$

3) $\int x(x+2)^3\,dx$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

5) $\int \sin x \cos 2x\,dx$

6) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$

7) $\int \sec^4 x\,dx$

8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

10) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

11) $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$

12) $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$

13) $\int x \sqrt[3]{x+10}\,dx$

14) $\int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2}\right) dx$

15) $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

16) $\int (1+\sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x\,dx$

17) $\int \sin x \sec^5 x\,dx$

18) $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19) $\int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\,dx$

20) $\int_0^{\pi/2} x \sin x^2\,dx$

21) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

22) $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x\,dx$

23) $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

24) $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

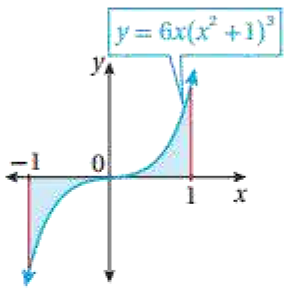
25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x}\sin x\,dx$

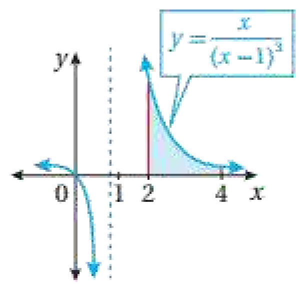
27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\cot^5 x\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

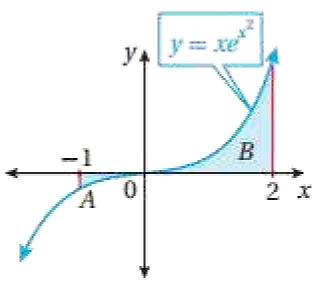
28



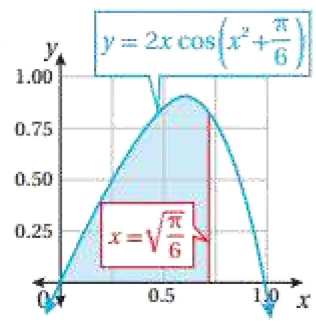
29



30



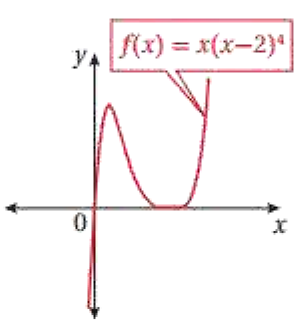
31



في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2$; $(2, 10)$

33 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}$; $(0, \frac{3}{2})$



يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$:

34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x.

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x.

36 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t\ \cos^2 \omega t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

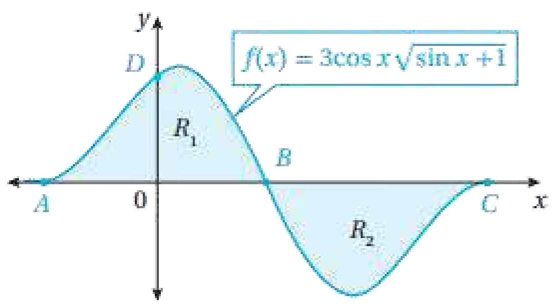
37 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ \text{mg/cm}^3$، وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$.

38 أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x-2}\, dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c\ln d$، حيث: a، وb، وc، وd ثوابت صحيحة.

39 إذا كان: $f'(x) = \tan x$، وكان: $f(3) = 5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$.

مهارات التفكير العليا (صفحة 46)

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:



40 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A، وB، وC، وD.

41 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

42 أُبيِّن أنَّ للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

43 تحدٍّ: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\, dx$.

44 تبرير: إذا كان f اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$.

45 تبرير: إذا كان a وb عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^b (1-x)^a\, dx = \int_0^1 x^a (1-x)^b\, dx$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

48 $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\, dx$

47 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

46 $\int \frac{dx}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}$

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 2

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

2) $\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

3) $\int \csc^5 x \cos^3 x\,dx$

4) $\int x\sin x^2\,dx$

5) $\int x^3 (x+2)^7\,dx$

6) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

7) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

8) $\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\,dx$

9) $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10) $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

11) $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$

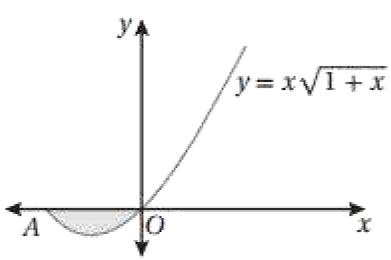
12) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$

13) $\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

14) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

15) $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

16) يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل.



في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17) $f'(x) = 16\sin x \cos^3 x;\ \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

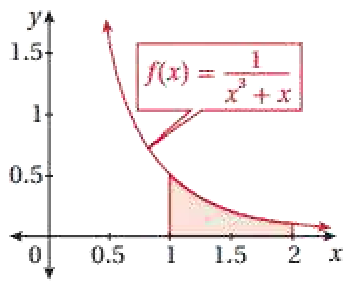
18) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}};\ (2, 1)$

19 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

الدرس 3

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

مسألة اليوم



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة منه.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد: $\int \frac{x-5}{x^2 - x - 2} \, dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 49)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} \, dx$

a) $\int \frac{x-7}{x^2 - x - 6} \, dx$

مثال 2

أجد: $\int \frac{3x^2+2}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 51)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

b) $\int \frac{x^2 - 2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} \, dx$

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} \, dx$

مثال 3

أجد: $\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 52)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx$

مثال 4

أجد: $\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 53)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$

b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$

مثال 5

أجد قيمة: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 54)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}\,dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}\,dx$

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\,dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة57)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}\,dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 57)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\,dx$ 2) $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$ 3) $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\,dx$

4) $\int \frac{3x+4}{x^2+x}\,dx$ 5) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$ 6) $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}\,dx$

7) $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$ 8) $\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$ 9) $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx$

10) $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$ 11) $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}\,dx$ 12) $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$

13) $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$ 14) $\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$ 15) $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$

16) $\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$ 17) $\int \frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}\,dx$ 18) $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

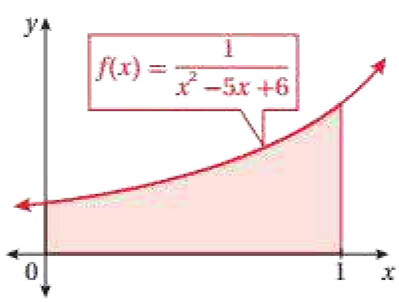
أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19) $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$ 20) $\int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$ 21) $\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$

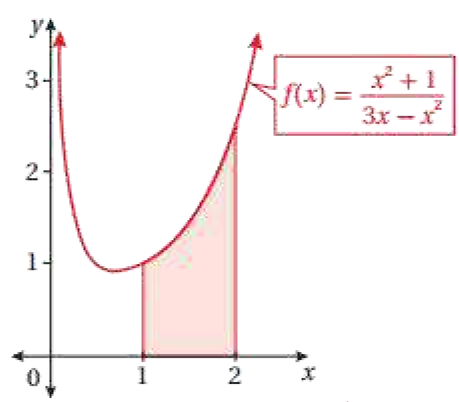
22) $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$ 23) $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$ 24) $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

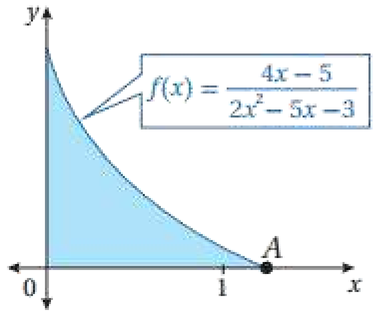
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

25)



26)





يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$:

27 أجد إحداثيي النقطة A.

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

29 $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

30 $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx$

32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)}\, dx$

مهارات التفكير العليا (صفحة 59)

تبرير: أحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مُبرِّرًا إجابتي.

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

35 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\, dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$.

36 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\, dx = 4\left(1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$.

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\, dx = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\, dx$

39 $\int \frac{x}{16x^4 - 1}\, dx$

40 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$

إرشاد للسؤال 40: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 3

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$

2) $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

3) $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx$

4) $\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$

5) $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$

6) $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$

7) $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

8) $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

9) $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10) $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$

11) $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$

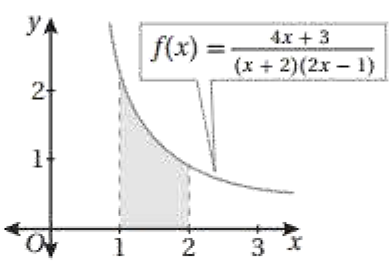
12) $\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$

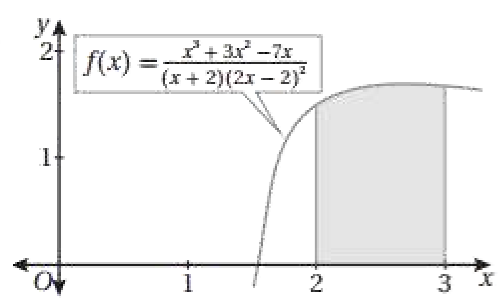
13) $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$

14) $\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$

15) $\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

16) 

17) 

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18) $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$

19) $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x+3\sin x-4}\,dx$

20) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x+5\tan x+6}\,dx$

21 أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$.

22 أُثبِت أنَّ: $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$، حيث: $p>1$.

الدرس 4

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 350 \ln(t+1)$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لكرة قدم جديدة، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الكرة في الأسواق، و $S(t)$ عدد الكرات المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x \cos x \, dx$ 2) $\int \ln x \, dx$ 3) $\int x(2x+7)^5 \, dx$ 4) $\int x e^{3-x} \, dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 63)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x \, dx$ b) $\int x^2 \ln x \, dx$ c) $\int 2x\sqrt{7-3x} \, dx$ d) $\int 3x e^{4x} \, dx$

مثال 2

أجد: $\int x^2 e^{2x} \, dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 64)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

مثال 3

أجد: $\int e^x \cos x \, dx$.

أتحقق من فهمي (صفحة 66)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

b) $\int \sec^3 x \, dx$

مثال 4

أجد: $\int x^3 \sin x \, dx$.

أتحقق من فهمي (صفحة 67)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

b) $\int x^5 e^x \, dx$

مثال 5 : من الحياة

الربح الحدّي: يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 1000x^2 e^{-0.2x}$ الربح الحدّي (بالدينار) لكل مُكيِّف تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد المُكيِّفات المَبيعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار عند بيع x مُكيِّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$، علمًا بأنَّ $P(0) = -2000$.

أتحقق من فهمي (صفحة 69)

التكلفة الحدِّية: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدِّية لكل قطعة (بالدينار) تُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ $C(10) = 200$.

مثال 6

أجد قيمة: $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$.

أتحقق من فهمي (صفحة 70)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

b) $\int_0^1 x e^{-2x}\, dx$

مثال 7

أجد الاقتران: $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

أتحقق من فهمي (صفحة 71)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2\, dx$

b) $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

أتدرب وأحل المسائل (صفحة 71)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+1) \cos x\, dx$

2) $\int x e^{x/2}\, dx$

3) $\int (2x^2 - 1) e^{-x}\, dx$

4) $\int \ln \sqrt{x}\, dx$

5) $\int x \sin x \cos x\, dx$

6) $\int x \sec x \tan x\, dx$

7) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

9) $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x\, dx$

10) $\int (x-2)\sqrt{8-x}\, dx$

11) $\int x^3 \cos 2x\, dx$

12) $\int \frac{x}{6^x}\, dx$

13) $\int e^{-x} \sin 2x\, dx$

14) $\int \cos x \ln \sin x\, dx$

15) $\int e^x \ln(1 + e^x)\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$

17) $\int_1^e \ln x^2\, dx$

18) $\int_1^2 \ln(x e^x)\, dx$

19) $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x\sec^2 3x \ dx$

20) $\int_{1}^{e} x^4 \ \ln x \ dx$

21) $\int_{0}^{\pi/2} x^2 \ \sin x \ dx$

22) $\int_{0}^{1} x(e^{-2x} + e^{-x}) \ dx$

23) $\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(1+x)^2} \ dx$

24) $\int_{0}^{1} x\, 3^x \ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

25) $\int x^3 e^{x^2} \ dx$

26) $\int \cos(\ln x) \ dx$

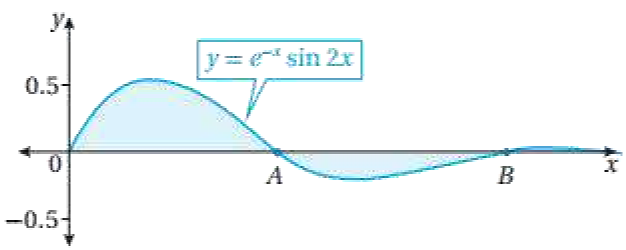
27) $\int x^3 \sin x^2 \, dx$

28) $\int e^{\cos x} \ \sin 2x \ dx$

29) $\int \sin\sqrt{x} \ dx$

30) $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} \ dx$

إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x} \ \sin 2x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



31) أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

32) أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

33) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t\,e^{-t/2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

34) $f'(x) = (x+2)\sin x \,;\, (0, 2)$

35) $f'(x) = 2xe^{-x} \,;\, (0, 3)$

36) دورة تدريبية: تقدَّمت دعاء لدورة تدريبية مُتقدِّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمُعدَّل: $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بَدْء الدورة.

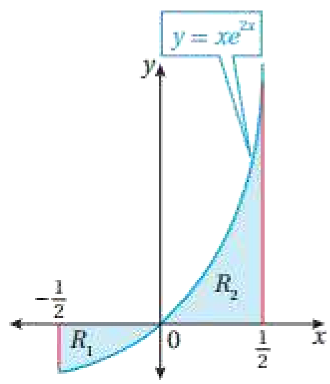
مهارات التفكير العليا (صفحة 73)

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{1/2}^{3} x^2 \ln 2x \, dx = 9\ln 6 - \frac{215}{72}$.

38 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{\pi-2}{16}$.

39 تبرير: إذا كان: $\int_{0}^{a} xe^{x/2} \, dx = 6$، فأُثبِت أنَّ a يُحقِّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

40 تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \, dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرِّرًا إجابتي.



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$، حيث: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

41 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1، والمنطقة R_2.

42 أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي e : $(e-2)$.

تحدٍّ: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كلٍّ ممّا يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

44 $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

43 $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1 + (n+1)\ln x) + C$

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 4

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

3 $\int xe^{-x} \, dx$

2 $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

1 $\int x \cos 4x \, dx$

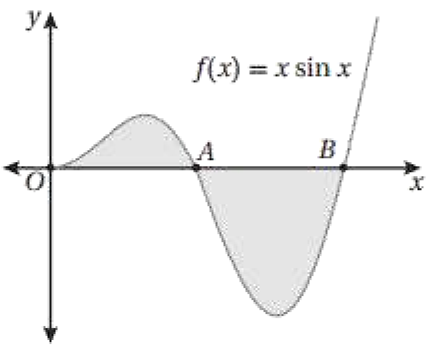
❹ $\int (x^2+1)\ln x\,dx$ ❺ $\int \ln x^3\,dx$ ❻ $\int e^{2x}\sin x\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

❼ $\int_1^e \ln x\,dx$ ❽ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ ❾ $\int_0^\pi x\cos\frac{1}{4}x\,dx$

❿ $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\cos 2x\,dx$ ⓫ $\int_1^e \ln(x+1)\,dx$ ⓬ $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

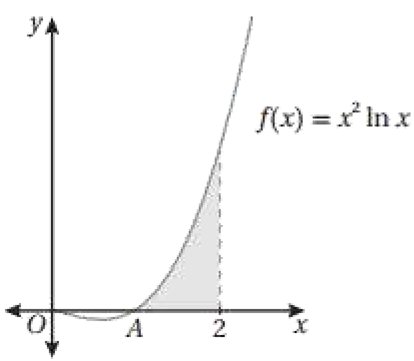
⓭ أُثبِت أنَّ: $\int_2^4 \ln x\,dx = 6\ln 2 - 2$.



إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x\sin x$، حيث: $x \geq 0$،
فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

⓮ أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

⓯ أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.



إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2\ln x$، حيث: $x \geq 0$،
فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

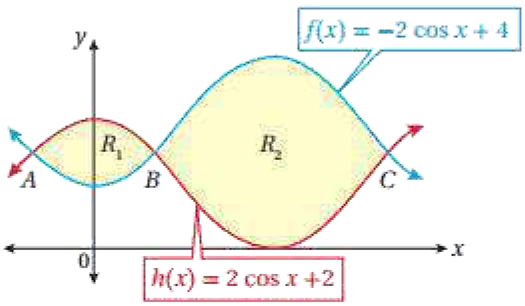
⓰ أجد إحداثيي النقطة A.

⓱ أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

الدرس 5
المساحات والحجوم
Areas and Volumes

مسألة اليوم

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُبيِّن منحنيي الاقترانين: $f(x) = -2\cos x + 4$،
و $h(x) = 2\cos x + 2$:



1 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A، و B، و C.

2 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1، والمنطقة R_2.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

2 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = \sin x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \frac{\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 77)

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2 + 1$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 3$.

b) أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $g(x) = 2 - \sin x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

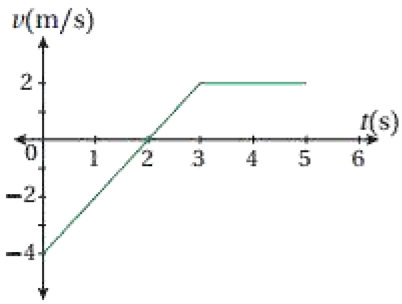
مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$، و $g(x) = 4x - x^2$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 79)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = x + 2$.

مثال 3



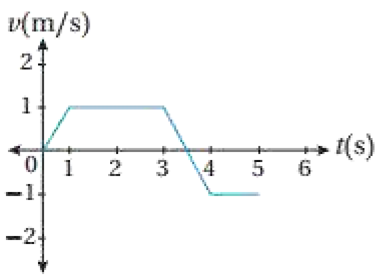
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

2 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

3 الموقع النهائي للجُسَيْم.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 81)



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

b) المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

c) الموقع النهائي للجُسَيْم.

مثال 4

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$، والمحور x، من $x = -1$ إلى $x = 2$ حول المحور x.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 82)

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$ حول المحور x.

مثال 5

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x$، و $g(x) = x^3$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي حول المحور x.

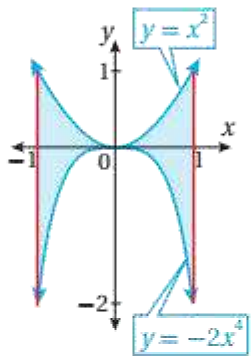
أتحقّق من فهمي (صفحة 85)

أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2$ حول المحور x.

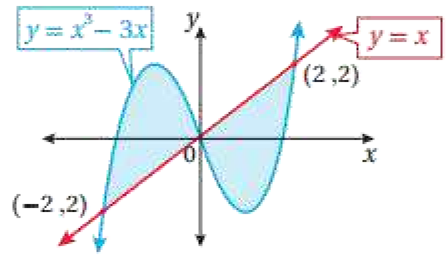
أتدرّب وأحُلّ المسائل (صفحة 85)

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

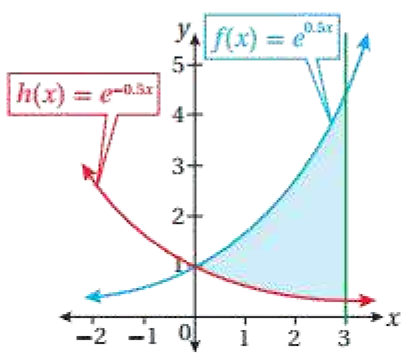
1



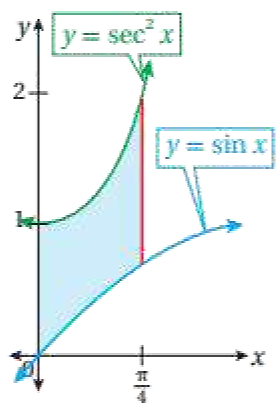
2



3



4



5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$، و $g(x) = 2x^2$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 4^x$، و $g(x) = 3^x$، والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوّل.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = \cos x$، والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$، في الربع الأوّل.

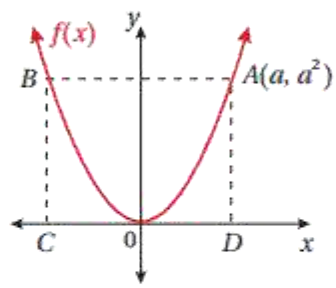
8 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = |x|$، و $g(x) = x^4$.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$، و $g(x) = -x^2 + 2x$.

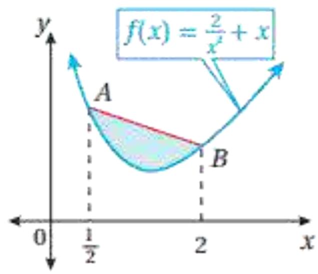
10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x^2$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 1$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$، و $h(x) = 4\sqrt{x}$.

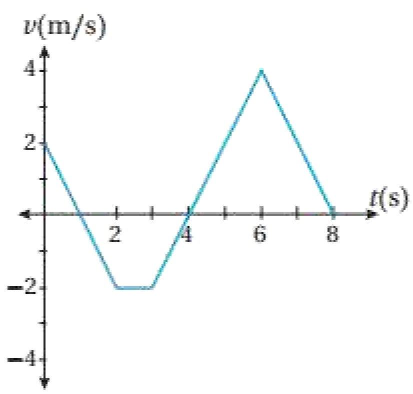
12 يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.



13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$. إذا كان الإحداثي x لكلٍّ من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 8]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

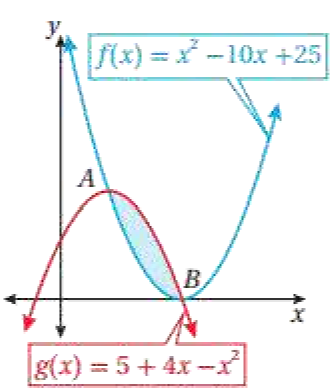


14 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

15 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

16 الموقع النهائي للجُسَيْم.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25$، و $g(x) = 5 + 4x - x^2$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



17 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

18 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

19 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$، والمحور x، حول المحور x.

20 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^3$ حول المحور x.

21 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 1 + \sec x$، في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والمستقيم $y = 3$ حول المحور x.

مهارات التفكير العليا (صفحة 87)

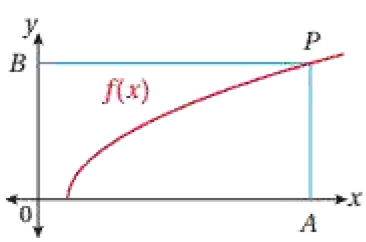
تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^2$، و $y = x^{1/2}$.

23 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^3$، و $y = x^{1/3}$.

24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^n$، و $y = x^{1/n}$، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مُبرِّرًا إجابتي.

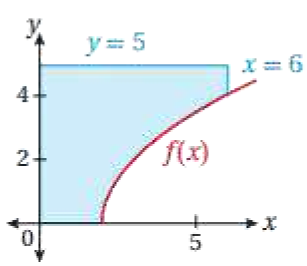
تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{2x-2}$، حيث: $x \geq 1$. إذا كانت النقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، حيث $\overline{PA}$ يوازي المحور y، و $\overline{PB}$ يوازي المحور x، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

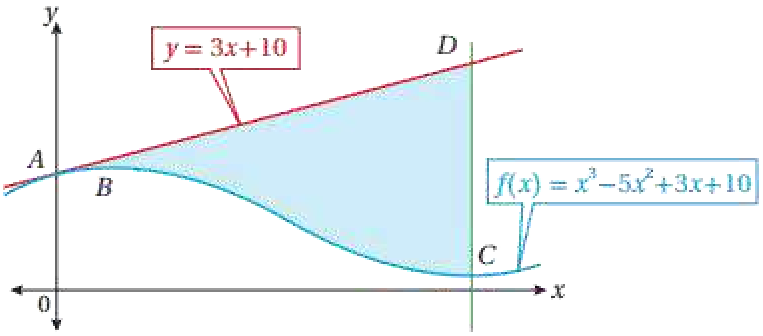


25 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $y = 4$، والمحورين الإحداثيين.

26 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $x = 9$، والمحور x.

27 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأوَّل، ومنحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x-2}$، والمستقيمين: $x = 6$، و $y = 5$. أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة حول المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.



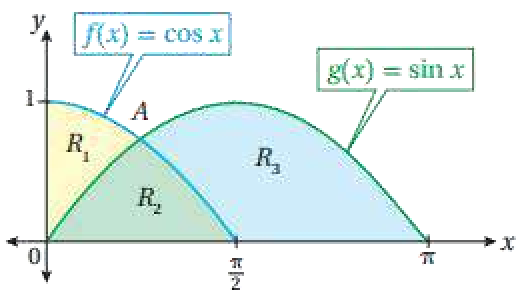


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى كلٍّ من الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$، والمستقيم: $y = 3x+10$. إذا مَرَّ المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور y، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة B، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C، وقطع الخطُّ الموازي للمحور y والمارُّ بالنقطة C المستقيمَ: $y = 3x + 10$ في النقطة D؛ فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28 أجد إحداثيات كلٍّ من النقطة B، والنقطة C.

29 أُثبِت أنَّ $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A، مُبرِّرًا إجابتي.

30 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة، مُبرِّرًا إجابتي.

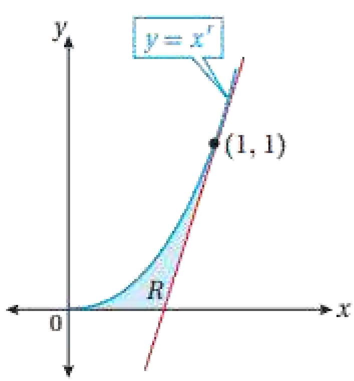


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $h(x) = \sin x$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

31 أجد إحداثيي النقطة A.

32 أجد مساحة كلٍّ من المناطق: R_1, R_2, R_3.

33 أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي: $\sqrt{2} : 2$.



تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^r$، حيث: $r > 1$، والمحور x، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$:

34 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $\left(\frac{r-1}{r}, 0\right)$.

35 أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أنَّ مساحة المنطقة R هي $\frac{r-1}{2r(r+1)}$ وحدة مربعة.

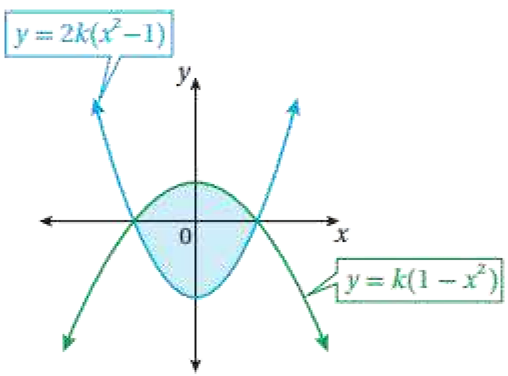
36 أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يُمكِن.

تحـدٍّ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1,3)$ يقطع منحنى الاقتران مَرَّة أُخرى عند النقطة P، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

37 إحداثيات النقطة P.

38 مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

39 تبريــر: المنطقة المُظلَّلة في الشــكل المجــاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كلٌّ منهمــا المحور x عندما $x = -1$، و $x = 1$. إذا كانــت معادلتا القطعين هما: $y = 2k(x^2 - 1)$، و $y = k(1 - x^2)$، وكانــت مســاحة المنطقــة المُظلَّلة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k.



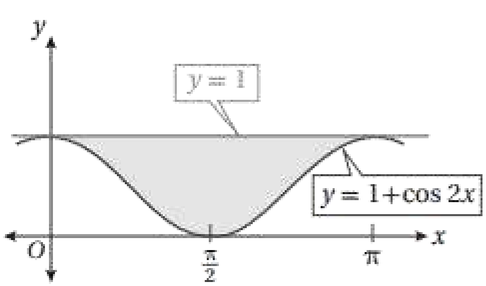
أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 5

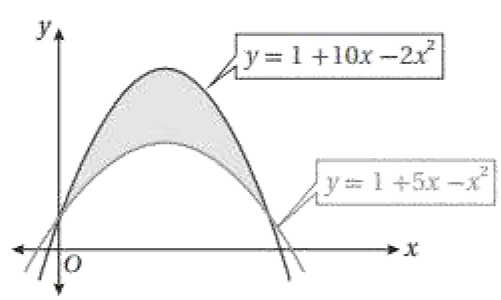
المساحات والحجوم
Areas and Volumes

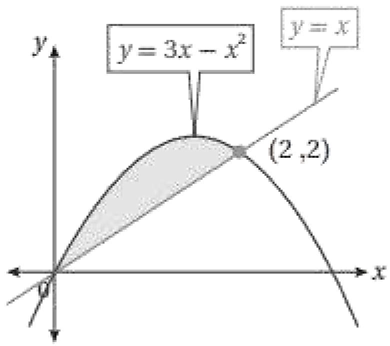
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

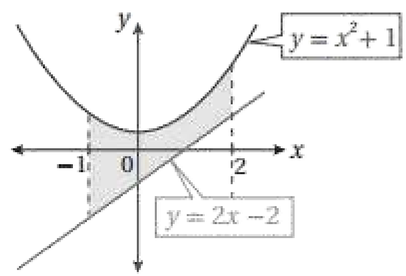
1



2



3


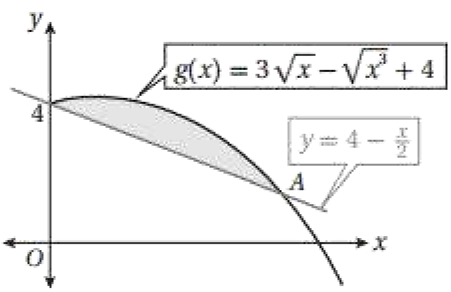
4


5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = 2-x$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{x}$، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = 1-\cos x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

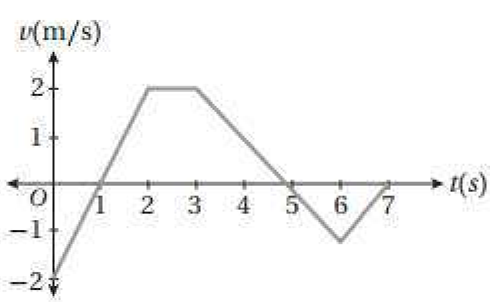
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$، والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



8 أجد إحداثيي النقطة A.

9 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

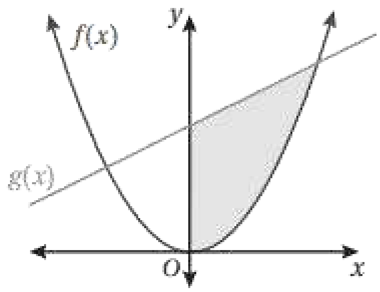
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 7]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



10 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

11 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

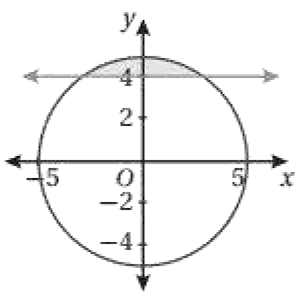
12 الموقع النهائي للجُسَيْم.



13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$، و $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.
أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

14 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\ln x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = e$، و $x = e^3$ حول المحور x.

15 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{2x}$، و $g(x) = x^2$ حول المحور x.

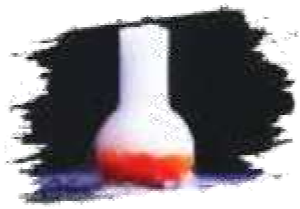


16 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 = 25$. إذا دار الجزء المُظلَّل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول المحور x لتشكيل مُجسَّم، فأجد حجم المُجسَّم الناتج، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 6

المعادلات التفاضلية
Differential Equations

مسألة اليوم



تتغيَّر درجة حرارة سائل كيميائي بارد، بعد وضعه في غرفة دافئة، بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dA}{dt} = 2(20 - A)$، حيث A درجة حرارة السائل بمقياس سيلسيوس، و t الزمن بالساعات:

1) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد درجة حرارة السائل بعد t ساعة، علمًا بأنَّ درجة حرارته عند وضعه في الغرفة هي $5°C$.

2) بعد كم ساعةً تصبح درجة حرارة السائل $18°C$؟

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y' + y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $y = e^{-x}$ 2 $y = 2\cos x$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 92)

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 4e^{x} + 5e^{3x}$ b) $y = \sin x$

مثال 2

أجـد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^{x} - 6x^{2}$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(1, 0)$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 94)

أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(0, 7)$.

مثال 3

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\frac{dy}{dx} = -xy^2$

2) $\frac{dy}{dx} = x + xy$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$

4) $(1 + x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 96)

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

مثال 4

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

1) $\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y, \; y(0) = 0$

2) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 2$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 98)

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x}, y(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

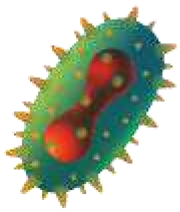
مثال 5

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$، حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 0.5$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 100)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$، حيث t الزمن بالثواني، وs موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 1$.

مثال 6 : من الحياة



أمراض: انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$ ، حيث s عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا من اكتشاف المرض:

1 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا، علمًا بأنَّ عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالبًا.

2 بعد كم يومًا يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالبًا؟

أتحقَّق من فهمي (صفحة 102)

غزلان: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000-P)$ ، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بَدْء دراسة عليها:

a) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 2500 غزال.

b) بعد كم سنةً يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل (صفحة 102)

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $y = \sqrt{x} ; xy' - y = 0$

2 $y = x\ln x - 5x + 7; y'' - \frac{1}{x} = 0$

3 $y = \tan x ; y' + y^2 = 1$

4 $y = e^x + 3xe^x ; y'' - 2y' + y = 0$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

5) $\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$

6) $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$

7) $\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$

8) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

9) $\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$

10) $e^{-1/x}\frac{dy}{dx} = x^{-2}y^2$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$

12) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sin^2 y}{x^3+2}$

13) $\frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$

14) $\frac{dy}{dx} = 2x^3(y^2-1)$

15) $y\frac{dy}{dx} = \sin^3 x\ \cos^2 x$

16) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

17) $\frac{dy}{dx} = y\ln\sqrt{x}$

18) $(2x+1)(x+2)\frac{dy}{dx} = -3(y-2)$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

19) $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}\,;\ y(1) = 2$

20) $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}\,;\ y(0) = 1$

21) $\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x\cos^2 y\,;\ y(0) = \frac{\pi}{4}$

22) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\ e^{\sin x}}{e^y}\,;\ y(\pi) = 0$

23) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}\,;\ y(3) = 8$

24) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}\,;\ y(e) = 1$

25) تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيّارة بعد t ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ السيّارة تحرَّكت من وضع السكون.

26) ذئاب: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$، حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بَدْء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 300 ذئب.

كرة: تنكمش كرة، ويتغيَّر نصف قُطْرها بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$، حيث r طول نصف قُطْر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني بعد بَدْء انكماش الكرة:

27) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قُطْر الكرة بعد t ثانية، علمًا بأنَّ طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

28) بعد كم ثانيةً يصبح طول نصف قُطْر الكرة 10 cm؟

حشرات: يتغيَّر عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد بَدْء ملاحظة الحشرات:

29 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

30 أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

31 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y \cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

32 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $x(x+1)\frac{dy}{dx} = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

مهارات التفكير العليا (صفحة 104)

تحدٍّ: أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

33 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

34 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$

35 $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$

تبرير: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تحلُّل مادة مُشِعَّة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$، حيث x الكتلة المتبقية من المادة المُشِعَّة بالملّيغرام بعد t يومًا، و $\lambda > 0$:

36 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة الحلِّ العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$، حيث a ثابت، مُبرِّرًا إجابتي.

37 إذا كان عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو الوقت اللازم لتحلُّل نصف هذه المادة، و a كتلة المادة الابتدائية، فأُثبِت أنَّ عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$، مُبرِّرًا إجابتي.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

تبرير: تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38 أجـد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حـلًّا للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مُبرِّرًا إجابتي.

39 أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(5, 4)$، مُبرِّرًا إجابتي.

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 6
المعادلات التفاضلية
Differential Equations

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$
3. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3}{y}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

7. $\frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \ \sin 4x ; y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$
8. $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} ; y(0) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} ; y(0) = 0$
10. $\frac{dy}{dx} = x e^{y - x^2} ; y(1) = 0$
11. $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}, y(4) = \ln 2$
12. $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2 ; y(2) = -0.1$

بكتيريا: يتغيَّر عدد الخلايا البكتيرية في مجتمع بكتيري بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y^{0.8}$، حيث y عدد الخلايا، و t الزمن بالأيام:

13 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد t يومًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 100000 خلية.

14 أجد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد أسبوع.

15 تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt}=-\frac{v^2}{100}, t\geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيّارة بعد t ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ سرعتها المتجهة الابتدائية هي 20 m/s.

16 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $e^y\frac{dy}{dx}=10+2\sec^2 x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

17 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(6, 4)$.

اختبار نهاية الوحدة (صفحة 105)

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\,dx$ هي:

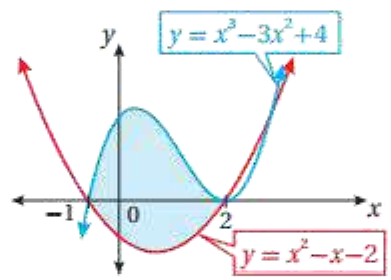
a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ d) $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

2 قيمة: $\int_{-4}^{4}(4-|x|)\,dx$ هي:

a) 0 b) 4 c) 16 d) 8

3 يُبيِّن الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y=x^3-3x^2+4$، و$y=x^2-x-2$، في الفترة $[-1, 2]$.



التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة هو:

a) $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+x+6)\,dx$

b) $\int_{-1}^{2}(-x^3+4x^2-x-6)\,dx$

c) $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2-x+2)\,dx$

d) $\int_{-1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

4 حلُّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=2xy$ الذي تُحقِّقه النقطة $(0, 1)$ هو:

a) $y=e^{x^2}$ b) $y=x^2y$

c) $y=x^2y+1$ d) $y=\frac{x^2y^2}{2+1}$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

6 $\int \left(\tan 2x+e^{3x}-\frac{1}{x}\right)dx$

7 $\int \csc^2 x\,(1+\tan^2 x)\,dx$

8 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}\,dx$

9 $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$

10 $\int \sec^2(2x-1)\,dx$

11 $\int \cot(5x+1)\,dx$

12 $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx$

13 $\int_0^{\pi}\cos^2 0.5x\,dx$

14 $\int_0^{2}|x^3-1|\,dx$

15 $\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x+\cos 4x)\,dx$

16 $\int_0^{\pi/3}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos 2x\right)dx$

17 $\int_0^{\pi/8}\sin 2x\cos 2x\,dx$

18 $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

19 $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$

20 $\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

21 $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}\,dx$

22 $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\,dx$

23 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-3\cos x}\,dx$

24 $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

25 $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\, dx$

26 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\, dx$

27 $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\, dx$

28 $\int (x+1)^2 \sqrt{x-2}\, dx$

29 $\int x \csc^2 x\, dx$

30 $\int (x^2-5x)\, e^x\, dx$

31 $\int x \sin 2x\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

32 $\int_0^1 t 3^{t^2}\, dt$

33 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x\, dx$

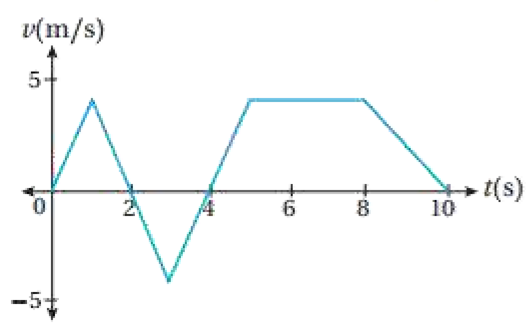
34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}\, dx$

35 $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-x}{x^2+x-2}\, dx$

36 $\int_1^2 \frac{32x^2+4}{16x^2-1}\, dx$

37 $\int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x\, dx$

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x=0$ عندما $t=0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعًا:



38 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

39 أجد المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

40 أجد الموقع النهائي للجُسَيْم.

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)=\sqrt{x}$، و $g(x)=x^2$.

42 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)=x^3$، و $g(x)=x$.

43 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)=-x$، و $g(x)=x^2+2$، والمستقيمين: $x=-2$، و $x=2$.

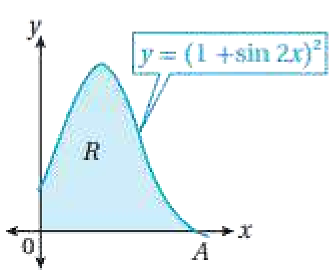
44 أُثبِت أنَّ: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}\, dx = 3+\frac{1}{2}\ln 2$.

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

45 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

46 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

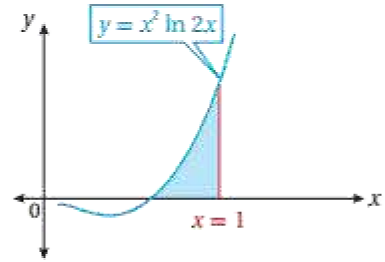
يُمثِّل الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y=(1+\sin 2x)^2$، حيث: $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$:

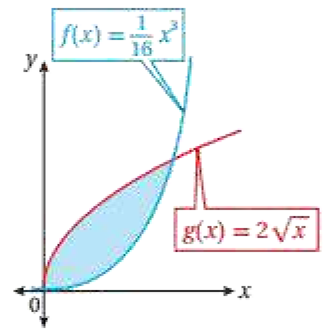


47 أجد إحداثيي النقطة A.

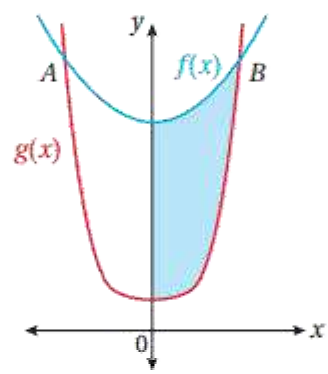
48 أجد مساحة المنطقة R.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

49 

50 

يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 14$، و $g(x) = x^4 + 2$:



51 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

52 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

53 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x\, e^{-x}}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 2$ حول المحور x.

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

54 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$

55 $\frac{dy}{dx} = xe^x \sec y$

56 $3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$

57 $x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

58 $\frac{dy}{dx} + 4y = 8\ ;\ y(0) = 3$

59 $\frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)}\ ;\ y(-3) = 0$

أسماك: يتغيَّر عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = 0.2x$، حيث x عدد الأسماك، و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

60 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

61 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

62 تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300\,x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 75 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة من المُنتَج 400 قطعة.

تمت بحمد الله

إجابات وحدة التكامل

تتضمن

كتاب الطالب

و

كتاب التمارين

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الأول

تكاملات إقترانات خاصة (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 8
	$P(t)=\int(200e^{0.1t}+150e^{-0.03t})dt=\frac{200}{0.1}e^{0.1t}+\frac{150}{-0.03}e^{-0.03t}+C$ $=2000e^{0.1t}-5000e^{-0.03t}+C$ $P(0)=2000-5000+C$ $200000=-3000+C\Rightarrow C=203000$ $P(t)=2000e^{0.1t}-5000e^{-0.03t}+203000$ $P(12)=2000e^{1.2}-5000e^{-0.36}+203000\approx 206152$ إذن، سيكون عدد الخلايا بعد 12 يوما 206152 خلية تقريبًا.
	أتحقق من فهمي صفحة 10
a	$\int(5x^2-3e^{7x})dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{7}e^{7x}+C$
b	$\int_0^{\ln 3}8e^{4x}\,dx=\frac{8}{4}e^{4x}\Big\vert_0^{\ln 3}=2(e^{4\ln 3}-e^0)=2(e^{\ln 3^4}-e^0)$ $=2(81-1)=160$
c	$\int\sqrt{e^{1-x}}dx=\int(e^{1-x})^{1/2}dx=\int e^{(1-x)/2}dx=-2e^{(1-x)/2}+C$
d	$\int(3^x+2\sqrt{x})dx=\frac{3^x}{\ln 3}+2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})+C=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$\int\cos(3x-\pi)\,dx=\frac{1}{3}\sin(3x-\pi)+C$
b	$\int(\csc^2(5x)+e^{2x})dx=-\frac{1}{5}\cot 5x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

c

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x)\, dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{6+\sqrt{3}}{8}$$

أتحقق من فهمي صفحة 14

a

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

b

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(3x - x) - \cos(3x + x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x)\, dx = \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{6}\right) - (0 - 0) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

c	$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int (\frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}) dx$ $= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$ $= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx$ $= -\cot x + \csc x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 16
a	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx = -\cos x - 5\ln\|x\| + C$
b	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \ln\|3x+2\| + C$
c	$\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right) dx = x - 7\ln\|x\| - 2x^{-1} + C$
d	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \ln\|x^2+3x\| + C$
e	$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$ $= -\frac{1}{2} \ln\|1+\cos 2x\| + C$ $= -\frac{1}{2} \ln(1+\cos 2x) + C$
f	$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln\|\sin x\| + C$
g	$\int \frac{e^x}{e^x+7} dx = \ln\|e^x+7\| + C = \ln(e^x+7) + C$
h	$\int \csc x \, dx = \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx$ $= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx$ $= -1 \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -\ln\|\csc x + \cot x\| + C$

أتحقق من فهمي صفحة 17

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x+\frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 19

a	$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1+x)\,dx + \int_{1}^{3} 2x\,dx$ $= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{1} + x^2\Big\vert_{1}^{3}$ $= \left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(-1+\frac{1}{2}\right) + 9 - 1 = 10$
b	$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \le 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx$ $= \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{-2}^{1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big\vert_{1}^{2}$ $= \left(1-\frac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 5$
c	$f(x) = \begin{cases} x^2-1, x < -1 \\ 1-x^2, -1 \le x \le 1 \\ x^2-1, x > 1 \end{cases}$ $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = \int_{-4}^{-1} (x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{0} (1-x^2)\,dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big\vert_{-4}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-1}^{0}$ $= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{64}{3}+4\right) + (0-0) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)$ $= \frac{56}{3}$

	أتحقق من فهمي صفحة 20
	$R(t) = \int \frac{21}{0.07t+5} dt$ $= \frac{21}{0.07} \int \frac{0.07}{0.07t+5} dt = 300 \ln\|0.07t+5\| + C$ $R(0) = 300 \ln 5 + C$ $0 = 300 \ln 5 + C \Rightarrow C = -300 \ln 5$ $R(t) = 300 \ln\|0.07t+5\| - 300 \ln 5 = 300 \ln \left\|\frac{0.07t+5}{5}\right\|$ $= 300 \ln\|0.014t+1\|$
	أتحقق من فهمي صفحة 23
a	$s(t) = \int v(t)dt = \int 3\cos t\, dt = 3\sin t + C$ $s(0) = 3\sin 0 + C$ $0 = 3\sin 0 + C \Rightarrow C = 0$ $s(t) = 3\sin t$ $s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin(\frac{\pi}{6}) = 1.5 \text{ m}$
b	$s(2\pi) - s(0) = 3\sin(2\pi) - 3\sin(0) = 0 \text{ m}$
c	$\|v(t)\| = \|3\cos t\| = \begin{cases} 3\cos t, 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ -3\cos t, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ 3\cos t, \frac{3\pi}{2} < t \le 2\pi \end{cases}$ $\int_0^{2\pi} \|v(t)\|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t\, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\, dx$ $= 3\sin t\|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ $= (3-0) - (-3-3) + (0-(-3)) = 12 \text{ m}$

	تدرب وأحل المسائل صفحة 27 – 24
1	$\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})dx = \int \left(e^{2x-3} - x^{1/2}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
2	$\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right)dx = \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x})dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$
3	$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)dx = -\frac{4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + C$
4	$\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right)dx = 3\sec x - \frac{2}{5}\ln\|x\| + C$
5	$\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx = \int \left(e^x - 2 + \frac{1}{e^x}\right)dx$ $= \int (e^x - 2 + e^{-x})dx$ $= e^x - 2x - e^{-x} + C$
6	$\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)dx = \frac{1}{3}\cos(5-3x) + 2x + \frac{4}{3}x^3 + C$
7	$\int (e^x + 1)^2 dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$
8	$\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))dx$ $= -e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$
9	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\|x\| + C$
10	$\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right)dx = -\cot(3x+2) + 5\ln\|x\| + C$
11	$\int \frac{e^x+1}{e^x}dx = \int (1 + e^{-x})dx = x - e^{-x} + C$
12	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\|e^x + 4\| + C = \ln(e^x + 4) + C$

13	$\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx = \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x + 4} dx$ $= \ln\left\|\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right\| + C = \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right) + C$
14	$\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{-\frac{1}{3}}{5 - \frac{x}{3}} dx$ $= -3 \ln\left\|5 - \frac{x}{3}\right\| + C$
15	$\int \frac{1}{1 - \sin x} dx = \int \frac{1}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} dx$ $= \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$ $= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$ $= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x) dx$ $= \tan x + \sec x + C$
16	$\int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) dx = \int (\sec^2 x + e^x) dx$ $= \tan x + e^x + C$
17	$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx = 2 \ln\|x\| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$
18	$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx$ $= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$
19	$\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{6x + 9}{3x^2 + 9x - 1} dx$ $= \frac{1}{3}\ln\left\|3x^2 + 9x - 1\right\| + C$

20	$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$ $= \int\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$ $= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$
21	$\int\left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}+\sin^2 x\csc x\right)dx = \int(\csc^2 x+\cot x\csc x+\sin x)dx$ $= -\cot x-\csc x-\cos x+C$
22	$\int(\sec x+\tan x)^2dx = \int(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\tan^2 x)dx$ $= \int(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\sec^2 x-1)dx$ $= \int(2\sec^2 x+2\sec x\tan x-1)dx$ $= 2\tan x+2\sec x-x+C$
23	$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln(e^x+e^{-x})+C$
24	$\int\frac{x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert+C$
25	$\int(9\cos^2 x-\sin^2 x-6\sin x\cos x)dx$ $= \int(9\cos^2 x-(1-\cos^2 x)-6\sin x\cos x)dx$ $= \int(10\cos^2 x-1-6\sin x\cos x)dx$ $= \int\left(10\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)-1-3\sin 2x\right)dx$ $= \int(5+5\cos 2x-1-3\sin 2x)dx = \int(4+5\cos 2x-3\sin 2x)dx$ $= 4x+\frac{5}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x+C$

26	$\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx=\int(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$ $=\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$ $=\int \cos 2x\,dx$ $=\frac{1}{2}\sin 2x+C$
27	$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\;dx=4\sin\frac{1}{2}x\Big\vert_0^{\pi}=4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=4$
28	$\lvert\sin x\rvert=\begin{cases}\sin x & ,0\le x\le\pi\\ -\sin x & ,\pi<x\le 2\pi\end{cases}$ $\int_0^{2\pi}\lvert\sin x\rvert\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\;dx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin x\;dx$ $=-\cos x\vert_0^{\pi}+\cos x\vert_{\pi}^{2\pi}$ $=-(\cos\pi-\cos 0)+\cos 2\pi-\cos\pi$ $=-(-2)+1-(-1)=4$
29	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3\tan^2 x\;dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}3(\sec^2 x-1)\,dx$ $=3(\tan x-x)\vert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ $=3\left(\tan\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-3\left(\tan\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$ $=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$
30	$\int_1^{e}\frac{8x}{x^2+1}\,dx=4\int_1^{e}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$ $=4\ln\lvert x^2+1\rvert\vert_1^{e}$ $=4\ln(e^2+1)-4\ln 2\;=4\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$

31	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x + \sin 2x) \, dx$ $= \left(-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{6}}$ $= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6} - (-\frac{1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0)$ $= \frac{5}{16}$
32	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x} dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x} dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x(\frac{1}{\sin^2 x})} dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \, dx$ $= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x) dx$ $= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} - (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4})$ $= \frac{3\sqrt{3}+\pi-6}{24}$
33	$\int_0^3 (x - 5^x) \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big\|_0^3$ $= \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} - (0 - \frac{1}{\ln 5}) = \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$

34	$|x^2-4x+3| = \begin{cases} x^2-4x+3 & ,x<1 \\ -x^2+4x-3, & 1\le x\le 3 \\ x^2-4x+3 & ,x>3 \end{cases}$ $\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$ $= \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx + \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\Big|_3^4$ $= \frac{1}{3}-2+3-0+(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)+\frac{64}{3}-32+12$ $-(9-18+9)=4$
35	$|x-3| = \begin{cases} 3-x & ,x\le 3 \\ x-3 & ,x>3 \end{cases}$ $\int_1^4 (3-|x-3|)\,dx = \int_1^3 (3-(3-x))\,dx + \int_3^4 (3-(x-3))\,dx$ $= \int_1^3 x\,dx + \int_3^4 (6-x)\,dx$ $= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 + \left(6x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^4$ $= \frac{9}{2}-\frac{1}{2}+24-8-(18-\frac{9}{2}) = \frac{13}{2}$
36	$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (x^2+4)\,dx + \int_0^1 (4-x)\,dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_{-1}^0 + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$ $= 0-\left(-\frac{1}{3}-4\right)+4-\frac{1}{2}-0$ $= \frac{47}{6}$

37	$A=\int_2^4 (e^{0.5x}-2)\,dx=(2e^{0.5x}-2x)\Big\vert_2^4$ $=2e^2-8-(2e-4)$ $=2e^2-2e-4$
38	$\int_a^{3a}\frac{2x+1}{x}\,dx=\int_a^{3a}2+\frac{1}{x}\,dx$ $=(2x+\ln\vert x\vert)\vert_a^{3a}$ $=6a+\ln 3a-2a-\ln a$ $=4a+\ln 3$ $\Rightarrow 4a+\ln 3=\ln 12$ $\Rightarrow 4a=\ln 12-\ln 3$ $4a=\ln\frac{12}{3}$
39	$\int_0^a\frac{x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{2x}{x^2+a^2}\,dx$ $=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\Big\vert_0^a$ $=\frac{1}{2}(\ln(2a^2)-\ln(a^2))=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$
40	$A=\int_1^a\frac{4}{x}\,dx=4\ln\vert x\vert\vert_1^a=4\ln a-4\ln 1=4\ln a$ $\Rightarrow 4\ln a=10\Rightarrow \ln a=\frac{5}{2}\Rightarrow a=e^{\frac{5}{2}}$
41	$f(x)=\int\cos\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)dx=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)+C$ $f(\pi)=2\sin(\frac{1}{2}\pi+\pi)+C$ $3=2\sin\frac{3\pi}{2}+C$ $3=-2+C \quad\Rightarrow C=5 \quad\Rightarrow f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\pi)+5 \quad\Rightarrow f(0)=5$

42	$y=\int \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx=\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{-2}+C=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+C$ $y\|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})+C$ $1=\frac{1}{2}+C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1+\sin 2x}{2}$
43	$y=\int (e^{2x}-2e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+C$ $y\|_{x=0}=\frac{1}{2}+2+C$ $1=\frac{5}{2}+C \Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}-\frac{3}{2}$
44	$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}(9+\sin 3x)\,dx=\left(9x-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big\|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$ $=9\pi-\frac{1}{3}\cos 3\pi-\pi+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $=8\pi+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ $=8\pi+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 8\pi+\frac{1}{2}=a\pi+b$ ونظرًا لأن a و b نسبيّان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون: $a=8\,,b=\frac{1}{2}$

45	$f(x)=\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$ $f(0)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)+C$ $0=0+C \Rightarrow C=0$ $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$
46	$s(t)=\int e^{-2t}\,dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}+C$ $s(0)=-\frac{1}{2}+C=3 \Rightarrow C=\frac{7}{2}$ $3=-\frac{1}{2}+C \Rightarrow C=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{7}{2}$
47	$s(100)=-\frac{1}{2}e^{-200}+\frac{7}{2} \approx 3.5\,m$
48	$P(t)=\int -0.51e^{-0.03t}\,dt=\frac{-0.51}{-0.03}e^{-0.03t}+C=17e^{-0.03t}+C$ $P(0)=17+C$ $500=17+C \Rightarrow C=483$ $P(t)=17e^{-0.03t}+483$
49	$P(10)=17e^{-0.3}+483 \approx 496$
50	$P(t)=\int(0.15-0.9e^{0.006t})\,dt$ $=0.15t-\frac{0.9}{0.006}e^{0.006t}+C$ $=0.15t-150e^{0.006t}+C$ $P(0)=-150+C$ $30=-150+C \Rightarrow C=180$ $P(t)=0.15t-150e^{0.006t}+180$
51	$P(10)=1.5-150e^{0.06}+180 \approx 22.2\text{ cm}^3$

52	$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$ $A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx) = (-\cos x)\|_0^{\pi} + (\cos x)\|_{\pi}^{2\pi}$ $= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$ ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي: $A = 2\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2(-\cos x)\|_0^{\pi} = 2(-\cos\pi + \cos 0) = 2(2) = 4$
53	$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x \, dx$ $+ (-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x \, dx)$ والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي: $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = -2\cos 2x\|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(-1-1) = 4$
54	نقسم البسط والمقام على $\cos x$ $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)} dx$ $= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)} dx$ $= \ln\|\tan x - 1\| + C$
55	نضرب البسط والمقام في $\csc x$ $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1} dx$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1} dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\|2\csc x + 1\| + C$

56	$\int \frac{1}{x\ln x^3}\,dx = \int \frac{1}{3x\ln x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \frac{1}{3}\ln\lvert\ln x\rvert + C$
57	$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right)dx = \left(\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert 2x+3\rvert\right)\Big\vert_1^a$ $= \left(\ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 5\right)$ $= \ln a - \frac{1}{2}\ln(2a+3) + \frac{1}{2}\ln 5$ $= \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5$ $\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}\ln 5 = 0.5\ln 5$ $\Rightarrow \ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$ $\Rightarrow a^2 = 2a+3 \quad \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \quad \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$ $\Rightarrow a = 3 \quad ,a = -1$ مرفوضة لأن $a > 0$
58	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cos 3x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sin 3x\,dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x)\,dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = 0$
59	$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi\sin kx)\,dx = \left(x + \frac{\pi}{k}\cos kx\right)\Big\vert_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}$ $= \frac{\pi}{3k} + \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4k} - \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{4}$ $= \frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2})$ $\Rightarrow \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2}) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$

60	$v(t) = \begin{cases} 2t+4 \ , & 0 \le t \le 6 \\ 16t - t^2 - 44 \ , & 6 < t \le 10 \end{cases}$ $s(t) = \int v(t)\, dt$ عندما $0 \le t \le 6$: $s(t) = \int (2t+4)\, dt = t^2 + 4t + C_1$ $s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\Rightarrow s(t) = t^2 + 4t \ , 0 \le t \le 6$ $s(5) = 25 + 20 = 45 \text{ m}$
61	عندما $6 < t \le 10$: $s(t) = \int (16t - t^2 - 44)\, dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2$ لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t = 6$ موقعا ابتدائيا بالنسبة للفترة $(6, 10]$ $s(6) = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$ ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0, 6]$ $s(t) = t^2 + 4t \ , 0 \le t \le 6$ $s(6) = 6^2 + 4(6) = 60$ $60 = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$ $60 = -48 + C_2 \Rightarrow C_2 = 108$ $\Rightarrow s(t) = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + 108 \ , 6 < t \le 10$ ، $s(9)$
62	$A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln\lvert x+3 \rvert \Big\rvert_0^{45}$ $= \ln 48 - \ln 3 = \ln 16$ $\frac{1}{2}A = \int_0^{k} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln\lvert x+3 \rvert \Big\rvert_0^{k}$ $= \ln(k+3) - \ln 3 = \ln\frac{k+3}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\ln 16 = \ln\frac{k+3}{3} \quad \Rightarrow k = 9$

الدرس الأول

تكاملات إقترانات خاصة (كتاب التمارين)

1	$\int 4e^{-5x}\,dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$
2	$\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$
3	$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$
4	$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x})\,dx = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$
5	$\int (\cot x \csc x - 2e^x)dx = -\csc x - 2e^x + C$
6	$\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx = \int \left(3\cos 3x - (\sec^2 x - 1)\right)dx$ $= \sin 3x - \tan x + x + C$
7	$\int \cos 3x\,(1 + \csc^2 x)\,dx = \int \cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ $= \int \cos x + \cot x \csc x\,dx = \sin x - \csc x + C$
8	$\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2}dx = \int \left(x - 1 - \frac{2}{x + 2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\ln\lvert x + 2\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$
10	$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int (\sec^2 x + x^{-2})dx = \tan x - \frac{1}{x} + C$
11	$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3 - 3x^2\rvert + C$
12	$\int \ln e^{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$

13	$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x-\sin x)+C$
14	$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert + C$
15	$\int \frac{3-2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}dx = \int\left(3\csc^2\frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x\right)dx$ $= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + C$
16	$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\lvert e^x+4\rvert\big\rvert_0^1 = \ln(e+4) - \ln 5 = \ln\frac{e+4}{5}$
17	$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int_1^2\frac{3}{3x-2}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert\Big\rvert_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$
18	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$
19	$\int_{-1}^1 \lvert 3x-2\rvert dx = \int_{-1}^{\frac{2}{3}}(2-3x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^1(3x-2)dx$ $= \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big\rvert_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)\Big\rvert_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{13}{3}$
20	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x + 3\sin x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+8\sin^2 x + 3\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+4(1-\cos 2x)+3\sin 2x)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(5-4\cos 2x + 3\sin 2x)dx = \left(5x - 2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi-2}{4}$

21	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln\lvert\cos x\rvert\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{2}\ln 2$
22	$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - (2\sin x\cos x)^2)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$
23	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x\sec x + \tan^2 x)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x\sec x + \sec^2 x - 1)dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + 2\tan x\sec x - 1)dx$ $= (2\tan x + 2\sec x - x)\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$
24	$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2}\right)dx = \left(2x - \frac{4}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert\right)\Big\rvert_0^1$ $= 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 2 = 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$
25	$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 (2x+1)dx + \int_3^5 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\rvert_1^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_3^5$ $= 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2} = 22$

26	$\int_1^k \frac{4}{2x-1} dx = 1$ $\Rightarrow 2\ln\lvert 2x-1\rvert \Big\rvert_1^k = 1$ $\Rightarrow 2\ln\lvert 2k-1\rvert = 1$ $\Rightarrow 2\ln(2k-1) = 1 \quad \Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2} \quad , k > \frac{1}{2}$ لأن $\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$
27	$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7}$ $\Rightarrow (e^x - e^{-x}) \Big\rvert_0^{\ln a} = \frac{48}{7} \quad \Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$ $\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0 \quad \Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0 \quad \Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$ $\Rightarrow a = -\frac{1}{7}$ (ترفض) , $a = 7$
28	$A = \int_0^{\pi} 2\cos^2 \frac{1}{2}x \, dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx = (x + \sin x) \Big\rvert_0^{\pi} = \pi$
29	$f(x) = \int (e^{-x} + x^2) dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$ $f(0) = -1 + C$ $4 = -1 + C \Rightarrow C = 5 \quad \Rightarrow f(x) = -e^{-x} +$ [illegible] $+$ [illegible]
30	$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx = 3\ln\lvert x\rvert - 4x + C$ $f(x) = 3\ln\lvert x\rvert - 4x + C$ $f(1) = -4 + C$ $0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow f(x) = 3\ln\lvert x\rvert - 4x + 4$

31	$s(3)-s(0)=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3 \frac{-t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\|_0^3=-\frac{1}{2}\ln 10\text{ m}$
32	$d=\int_0^3 \|v(t)\|\,dt=\int_0^3 \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big\|_0^3=\frac{1}{2}\ln 10\text{ m}$
33	$s\left(\frac{\pi}{2}\right)-s(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\,dt=-2\cos 3t\|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\text{ m}$
34	$6\sin 3t=0\Rightarrow 3t=0,\pi\Rightarrow t=0,\frac{\pi}{3}$ $d=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\|v(t)\|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\|6\sin 3t\|dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}6\sin 3t\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-6\sin 3t\,dt$ $=-2\cos 3t\|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cos 3t\|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2+2+0-2(-1)=6\text{ m}$
35	عندما $0\le t\le 6$ $s(t)=\int(8t-t^2)dt=4t^2-\frac{1}{3}t^3+C_1$ $s(0)=0-0+C_1$ $0=0+C_1\Rightarrow C_1=0$ $\Rightarrow s(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3\quad ,0\le t\le 6$ عندما $t>6$ $s(t)=\int\left(15-\frac{1}{2}t\right)dt=15t-\frac{1}{4}t^2+C_2$ الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$ نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة $s(6)=144-\frac{216}{3}=72$ $s(6)=90-9+C_2$ $72=81+C_2\Rightarrow C_2=-9$ $\Rightarrow s(t)=15t-\frac{1}{4}t^2-9\quad ,t>6\qquad\Rightarrow s(40)=191\text{ m}$

الدرس الثاني
التكامل بالتعويض (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 28
	$G(t)=\int \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}dt$ افرض أنّ: $u=1+5e^{-0.6t}$ $\frac{du}{dt}=-3e^{-0.6t} \Rightarrow dt=\frac{du}{-3e^{-0.6t}}$ $G(t)=\int \frac{60000e^{-0.6t}}{u^2}\times\frac{du}{-3e^{-0.6t}}$ $=\int -20000u^{-2}du$ $=20000u^{-1}+C \quad \Rightarrow \quad G(t)=\frac{20000}{1+5e^{-0.6t}}+C \quad \Rightarrow$ $25000=\frac{10000}{3}+C \Rightarrow C=\frac{65000}{3}$ $\Rightarrow G(t)=\frac{20000}{1+5e^{-0.6t}}+\frac{65000}{3} \quad \Rightarrow G(20) \approx 41666\text{ kg}$
	أتحقق من فهمي صفحة 32
a	$u=x^3-5 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$ $\int 4x^2\sqrt{x^3-5}dx=\int 4x^2\sqrt{u}\times\frac{du}{3x^2} \quad =\int \frac{4}{3}u^{\frac{1}{2}}du$ $=\frac{8}{9}u^{\frac{3}{2}}+C \quad =\frac{8}{9}\sqrt{(x^3-5)^3}+C$

b	$u=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx=2\sqrt{x}du$ $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx=\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{u}\times 2\sqrt{x}du$ $=\int e^{u}du$ $=e^{u}+C$ $=e^{\sqrt{x}}+C$
c	$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$ $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int \frac{u^3}{x}\times xdu$ $=\int u^3 du$ $=\frac{1}{4}u^4+C$ $=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$
d	$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$ $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx=\int \frac{\cos u}{x}\times xdu$ $=\int \cos u\, du =\sin u+C =\sin(\ln x)+C$
e	$u=\cos 5x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-5\sin 5x \Rightarrow dx=\frac{du}{-5\sin 5x}$ $\int \cos^4 5x\,\sin 5x\,dx=\int u^4 \sin 5x \times \frac{du}{-5\sin 5x}$ $=\int -\frac{1}{5}u^4 du =-\frac{1}{25}u^5+C$ $=-\frac{1}{25}\cos^5 5x+C$

f	$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x2^{x^2}dx = \int x2^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2}2^u du$ $= \frac{1}{2}\frac{2^u}{\ln 2} + C$ $= \frac{1}{\ln 2}2^{x^2-1} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 34
a	$u = 1 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \quad , x = \frac{u-1}{2}$ $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^{\frac{1}{2}}} \times \frac{du}{2}$ $= \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$ $= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$ $= \frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} + C$
b	$u = x^4 - 8 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3} \quad , x^4 = u + 8$ $\int x^7(x^4-8)^3dx = \int x^7u^3 \times \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int x^4u^3du$ $= \frac{1}{4}\int (u+8)u^3du = \frac{1}{4}\int (u^4 + 8u^3)du$ $= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}u^5 + 2u^4\right) + C = \frac{1}{20}(x^4-8)^5 + \frac{1}{2}(x^4-8)^4 + C$

c	$u = 1 - e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{-e^x} \quad , e^x = 1 - u$ $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx = \int \frac{e^{3x}}{u^2} \times \frac{du}{-e^x}$ $= \int -\frac{e^{2x}}{u^2} du$ $= \int \frac{-(1-u)^2}{u^2} du$ $= \int \frac{-1 + 2u - u^2}{u^2} du$ $= \int \left(-u^{-2} + \frac{2}{u} - 1\right) du$ $= (u^{-1} + 2\ln\|u\| - u) + C$ $= \frac{1}{1-e^x} + 2\ln\|1 - e^x\| - 1 + e^x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 35
a	$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = 3x^{\frac{2}{3}} du \quad , \quad x = u^3$ $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{3x^{\frac{2}{3}} du}{u^3 + u}$ $= \int \frac{3u^2}{u^3 + u} du$ $= \int \frac{3u}{u^2 + 1} du$ $= \frac{3}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du$ $= \frac{3}{2} \ln(u^2 + 1) + C$ $= \frac{3}{2} \ln\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right) + C$

b	$u = 1 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du \quad , \quad x = 1 - u$ $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx = \int x\sqrt[3]{u^2} \times -du$ $= \int -(1-u)\sqrt[3]{u^2}\,du$ $= \int -(1-u)u^{\frac{2}{3}}du$ $= \int \left(-u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{5}{3}}\right) du$ $= -\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}} + C$ $= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}(1-x)^{\frac{8}{3}} + C$ $= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^8} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 37
	$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}dx$ $u = 9 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \frac{-135}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$ $= -135u^{\frac{1}{2}} + C$ $p(x) = -135\sqrt{9+x^2} + C$ $p(4) = -135\sqrt{9+16} + C = -135(5) + C$ $30 = -675 + C \Rightarrow C = 705$ $p(x) = 705 - 135\sqrt{9+x^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 39
a	$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)dx$ $u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\,(1-u^2)\frac{du}{-\sin x}$ $= \int (u^2-1)du$ $= \frac{1}{3}u^3 - u + C$ $= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
b	$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \cos^5 x \sin^2 x\,dx = \int \cos^5 x\, u^2 \frac{du}{\cos x}$ $= \int \cos^4 x\, u^2\, du$ $= \int (1-\sin^2 x)^2\, u^2\, du$ $= \int (1-u^2)^2\, u^2\, du$ $= \int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du$ $= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$ $= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

	أتحقق من فهمي صفحة 41
a	$\int \tan^4 x\ dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx$ $= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x\, dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$ $= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\Rightarrow \int \tan^4 x\ dx = \int u^2 \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$ $= \int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$ $= \frac{1}{3}u^3 - \tan x + x + C$ $= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

$$\int \cot^5 x \, dx = \int \cot x \cot^4 x \, dx$$
$$= \int \cot x (\cot^2 x)^2 \, dx$$
$$u = \csc x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$\Rightarrow \int \cot^5 x \, dx = \int \cot x (u^2 - 1)^2 \times \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$= \int (u^2-1)^2 \, \frac{du}{-u}$$
$$= \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{-u} \, du = \int \left(-u^3 + 2u - \frac{1}{u}\right) \, du$$
$$= -\frac{1}{4}u^4 + u^2 - \ln|u| + C = -\frac{1}{4}\csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$$

حلّ ثانٍ:

b

$$\int \cot^5 x \, dx = \int \cot^3 x \cot^2 x \, dx = \int \cot^3 x (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^3 x \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x \cot^2 x \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int (\cot^3 x - \cot x) \csc^2 x \, dx + \int \cot x \, dx$$

في التكامل الأول افرض $u = \cot x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$
$$\int \cot^5 x \, dx = \int (u^3 - u) \csc^2 x \, \frac{du}{-\csc^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \int (u - u^3) \, du + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 + \ln|\sin x| + C$$
$$= \frac{1}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + \ln|\sin x| + C$$

c	$u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx = \int \sec^4 x \, u^6 \times \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int \sec^2 x \, u^6 \, du$ $= \int (1 + \tan^2 x) \, u^6 \, du$ $= \int (1 + u^2) \, u^6 \, du$ $= \int (u^6 + u^8) \, du$ $= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$ $= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 43
a	$u = x + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du, \; x = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 2 \Rightarrow u = 3$ $\int_0^2 x(x+1)^3 dx = \int_1^3 (u-1) u^3 du$ $= \int_1^3 (u^4 - u^3) du$ $= \left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{4} u^4\right)\Big\|_1^3$ $= \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - \left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4\right)$ $= \frac{142}{5} = 28.4$

b	$u = \sec x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 3$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 4$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}dx = \int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x}$ $= \int_3^4 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_3^4 = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 44
1	$u = 2x^3 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int \frac{1}{6}u^4\, du$ $= \frac{1}{30}u^5 + C$ $= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$
2	$u = x + 3 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 3$ $\int x^2\sqrt{x+3}\, dx = \int x^2 \sqrt{u}\, du$ $= \int (u-3)^2\sqrt{u}\, du$ $= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$

3	$u = x+2 \Rightarrow dx = du \quad , x = u-2$ $\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du$ $= \int (u-2)u^3\, du$ $= \int (u^4 - 2u^3)\, du$ $= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$ $= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$
4	$u = x+4 \Rightarrow dx = du \quad , x = u-4$ $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} du$ $= \int \frac{u-4}{\sqrt{u}} du$ $= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$
5	$\int \sin x \cos 2x\, dx = \int \sin x\,(2\cos^2 x - 1) dx$ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x \cos 2x\, dx = \int \sin x\,(2u^2 - 1) \times \frac{du}{-\sin x}$ $= \int (1 - 2u^2) du$ $= u - \frac{2}{3}u^3 + C$

6	$u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \quad , e^x = u - 1$ $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$ $= \int \frac{e^{2x}}{u} du$ $= \int \frac{(u-1)^2}{u} du$ $= \int \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right) du$ $= \frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln\lvert u\rvert + C$ $= \frac{1}{2}(e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) + C$
7	$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1 + \tan^2 x) dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int \sec^4 x \; dx = \int \sec^2 x\,(1 + u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int (1 + u^2)\, du = u + \frac{1}{3}u^3 + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$
8	$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx$ $u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int u\, du$ $= \frac{1}{2}u^2 + C \quad = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

9	$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$ $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x\,du$ $= \int \sin u\,du$ $= -\cos u + C$ $= -\cos(\ln x) + C$
10	$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$ $= \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C$
11	$u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$ $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} dx = \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}}$ $= \int 2u^{-2} du$ $= -2u^{-1} + C = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C$
12	$u = x + 1 \Rightarrow dx = du\,,\ x = u - 1$ $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}} du$ $= \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}} du$ $= \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$

13	$u = x + 10 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 10$ $\int x\sqrt[3]{x+10}\,dx = \int (u-10)u^{\frac{1}{3}}\,du$ $= \int \left(u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}}\right) du$ $= \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}u^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(x+10)^4} + C$
14	$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$ $\int \sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\,dx = \int \sec^2\frac{x}{2}\,u^7 \times \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$ $= 2\int u^7\,du = \frac{1}{4}u^8 + C = \frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2} + C$
15	$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int (\sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x})\,dx$ $= \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$ $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^u \times \frac{du}{\cos x}$ $= \tan x + \int e^u\,du$ $= \tan x + e^u + C \quad = \tan x + e^{\sin x} + C$

16	$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x \, dx = \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) \cos^3 x \frac{du}{\cos x}$ $= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) \cos^2 x \, du$ $= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - \sin^2 x) \, du$ $= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - u^2) \, du$ $= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - u^2) \, du$ $= \int \left(1 - u^2 + u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{7}{3}}\right) du$ $= u - \frac{1}{3} u^3 + \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10} u^{\frac{10}{3}} + C$ $= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{3}{4} \sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10} \sin^{\frac{10}{3}} x + C$
17	$\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x \cos^{-5} x \, dx$ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x \, u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$ $= -\int u^{-5} \, du = \frac{1}{4} u^{-4} + C$ $= \frac{1}{4} \cos^{-4} x + C \quad = \frac{1}{4} \sec^4 x + C$

18	$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx = \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x)\, dx$ $= \int \tan x \sec x\,(\sec x + \sec^2 x)\, dx$ $u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan x \sec x \Rightarrow dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$ $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan x \sec x\,(u + u^2)\, \frac{du}{\tan x \sec x}$ $= \int (u + u^2)\, du = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + C$ $= \frac{1}{2}\sec^2 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$
19	$\sqrt{1-\cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x} = \|\sin 2x\|$ لكن الزاوية 2x تكون ضمن الربع الأول عندما $0 < x < \frac{\pi}{4}$ لذا فإن $\sin 2x > 0$ ويكون $\|\sin 2x\| = \sin 2x$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x\, dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 x \cos x\, dx$ $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 \cos x\, \frac{du}{\cos x}$ $= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 \Big\|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

20	$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi^2}{4}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin u \, \frac{du}{2x}$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u \, du$ $= -\frac{1}{2} \cos u \Big\|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$ $= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \approx 0.891$
21	$u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$ $= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^2$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3}(1) - 2(1)\right)\right)$ $= \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

22	$u=\tan x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sec^2 x \Rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$ $x=0 \Rightarrow u=0$ $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow u=\sqrt{3}$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x\, dx=\int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x\, u^5 \frac{du}{\sec^2 x}$ $=\int_0^{\sqrt{3}} u^5\, du$ $=\frac{1}{6}u^6\Big\|_0^{\sqrt{3}}$ $=\frac{9}{2}$
23	$u=(x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2(x-1) \Rightarrow dx=\frac{du}{2(x-1)}$ $x=0 \Rightarrow u=1$ $x=2 \Rightarrow u=1$ $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_1^1 (x-1)e^u \frac{du}{2(x-1)}=0$
24	$u=2+\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\, du$ $x=1 \Rightarrow u=3$ $x=4 \Rightarrow u=4$ $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\, du=\int_3^4 2\sqrt{u}\, du=\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_3^4=\frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}$

25	$u = 1 + x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x^3}\right)^2}dx = \int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2}\frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}\,du = -\frac{20}{3}u^{-1}\Big\vert_1^2 = \frac{10}{3}$
26	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x}\sin x\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x \frac{du}{-\sin x}$ $= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u\,du$ $= -\frac{2^u}{\ln 2}\Big\vert_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $= -\frac{1}{\ln 2}\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\right) \approx 0.256$

27	$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x \, dx = \int_1^0 \csc^2 x \, u^5 \frac{du}{-\csc^2 x}$ $= \int_1^0 -u^5 \, du$ $= -\frac{1}{6}u^6 \Big\|_1^0$ $= \frac{1}{6}$
28	$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)^3 dx + \int_0^1 6x(x^2+1)^3 dx$ $u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = -1 \Rightarrow u = 2$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $A = -\int_2^1 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_1^2 6xu^3 \frac{du}{2x}$ $= \int_1^2 3u^3 du + \int_1^2 3u^3 du = \int_1^2 6u^3 du$ $= \frac{6}{4}u^4 \Big\|_1^2$ $= \frac{45}{2}$

29	$A=\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}dx$ $u=x-1 \Rightarrow dx=du \quad , \quad x=u+1$ $x=2 \Rightarrow u=1$ $x=4 \Rightarrow u=3$ $A=\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}dx=\int_1^3 \frac{u+1}{u^3}du$ $=\int_1^3 (u^{-2}+u^{-3})du=\left(-u^{-1}-\frac{1}{2}u^{-2}\right)\Big\|_1^3$ $=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)+1+\frac{1}{2}$ $=\frac{10}{9}$
30	$u=x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $x=-1 \Rightarrow u=1$ $x=0 \Rightarrow u=0$ $x=2 \Rightarrow u=4$ $A=-\int_{-1}^0 xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx=-\int_1^0 xe^u\frac{du}{2x}+\int_0^4 xe^u\frac{du}{2x}$ $=-\int_1^0 \frac{1}{2}e^u du+\int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$ $=-\frac{1}{2}e^u\Big\|_1^0+\frac{1}{2}e^u\Big\|_0^4$ $=-\frac{1}{2}e^0+\frac{1}{2}e^1+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0$ $=\frac{1}{2}(e^4+e)-1 \approx 27.658$

31	$u = x^2 + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$ $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$ $A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x \cos u \frac{du}{2x}$ $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u \, du$ $= \sin u \Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0.366$
32	$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2x(4x^2 - 10)^2\, dx$ $u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$ $f(x) = \int 2xu^2 \frac{du}{8x} = \int u^2 \frac{du}{4}$ $= \frac{1}{4}\int u^2\, du$ $= \frac{1}{12}u^3 + C$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 + C$ $f(2) = \frac{1}{12}(216) + C = 10 \Rightarrow C = -8$ $10 = 18 + C \Rightarrow C = -8$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$

33	$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2 e^{-0.2x^3}dx$ $u=-0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{-0.6x^2}$ $f(x)=\int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2}=-\frac{10}{6}\int e^u\,du$ $=-\frac{5}{3}e^u+C$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+C$ $f(0)=-\frac{5}{3}+C$ $\frac{3}{2}=-\frac{5}{3}+C \Rightarrow C=\frac{19}{6}$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+\frac{19}{6}$
34	نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة $f(x)=0$ $x(x-2)^4=0 \Rightarrow x=0\ ,x=2$ نقطة التقاطع $(0,0)$ ، فتكون نقطة التماس $(2,0)$ ويمكن التحقق بحساب $f'(2)$: $f'(x)=(x-2)^4+4x(x-2)^3$ $f'(2)=(2-2)^4+4(2)(2-2)^3=0$
35	$A=\int_0^2 x(x-2)^4\,dx$ $u=x-2 \Rightarrow dx=du\ ,\ x=u+2$ $x=0 \Rightarrow u=-2$ $x=2 \Rightarrow u=0$ $A=\int_0^2 x(x-2)^4\,dx=\int_{-2}^0 (u+2)u^4\,du=\left(\frac{1}{6}u^6+\frac{2}{5}u^5\right)\Big\|_{-2}^0=\frac{32}{15}$

36	$s(t) = \int \sin\omega t \ \cos^2\omega t \, dt$ $u = \cos\omega t \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\omega \sin\omega t \Rightarrow dt = \frac{du}{-\omega \sin\omega t}$ $s(t) = \int \sin\omega t \ u^2 \frac{du}{-\omega \sin\omega t}$ $= \frac{-1}{\omega}\int u^2 \ du = \frac{-1}{3\omega}u^3 + C$ $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t + C$ لكن $s(0) = 0$ لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل. $s(0) = -\frac{1}{3\omega} + C \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{3\omega} + C \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3\omega}$ $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t + \frac{1}{3\omega}$
37	$C(t) = \int C'(t)dt = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}dt$ $u = 1 + e^{-0.01t} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -0.01e^{-0.01t} \Rightarrow dt = \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$ $C(t) = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2} \times \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}} = \int u^{-2} \ du$ $= -u^{-1} + K$ (استعمل الرمز K لثابت التكامل بدل C المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران C). $C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + K$ $C(0) = -(2)^{-1} + K$ $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow K = 1$ $\Rightarrow C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + 1$ $C(t) = \frac{-1}{1+e^{-0.01t}} + 1$

38	$u = e^x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ $e^x = u + 2$ $x = \ln 3 \Rightarrow u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1$ $x = \ln 4 \Rightarrow u = e^{\ln 4} - 2 = 4 - 2 = 2$ $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{4x}}{u} \frac{du}{e^x} = \int_1^2 \frac{e^{3x}}{u}\, du$ $= \int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u}\, du$ $= \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u}\, du$ $= \int_1^2 \left(u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}\right) du$ $= \left(\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 + 12u + 8\ln\lvert u\rvert\right)\Big\rvert_1^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 12(2) + 8\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 3(1)^2 + 12(1) + 8\ln 1\right)$ $= \frac{70}{3} + 8\ln 2$
39	$f(x) = \int \tan x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ $f(3) = -\ln\lvert\cos 3\rvert + C$ $5 = -\ln\lvert\cos 3\rvert + C \Rightarrow C = 5 + \ln\lvert\cos 3\rvert$ $f(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert + 5 + \ln\lvert\cos 3\rvert = \ln\left\lvert\frac{\cos 3}{\cos x}\right\rvert + 5$

40	$f(x)=0 \Rightarrow 3\cos x\sqrt{1+\sin x}=0$ $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}, x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ $\sin x=-1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$ يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، ونريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين C,B) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A) أصغر حلين موجبين هما: $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$ بوضع n = 0 $\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ أكبر حل سالب هو: $x=-\frac{\pi}{2}$، بوضع n = -1 $\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ أما النقطة D فإحداثياها هما: $D(0,f(0))=(0,3)$
41	$A=A_1+A_2=A(R_1)+A(R_2)$ $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x\sqrt{1+\sin x})\,dx+\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(3\cos x\sqrt{1+\sin x})\,dx\right)$ $u=1+\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$ $x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$ $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=2$ $x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow u=0$ $A=3\int_0^2 \cos x\sqrt{u}\frac{du}{\cos x}+\left(-3\int_2^0 \cos x\sqrt{u}\frac{du}{\cos x}\right)$ $=3\int_0^2\sqrt{u}\,du+3\int_0^2\sqrt{u}\,du$ $=6\int_0^2\sqrt{u}\,du=4u^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^2=4(2\sqrt{2}-0)=8\sqrt{2}$

<table>
<tr><td>42</td><td>
من حل السؤال السابق نجد أن:

$$A(R_1)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx=\int_0^2 3\sqrt{u}\,du=4\sqrt{2}$$

$$A(R_2)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)dx=-\int_2^0 3\sqrt{u}\,du=4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(R_1)=A(R_2)$$
</td></tr>
<tr><td>43</td><td>
$$u=1+x^{\frac{3}{4}}\ \Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow dx=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du,\quad x^{\frac{3}{4}}=u-1$$

$$x=1\ \Rightarrow u=2$$

$$x=16\ \Rightarrow u=9$$

$$\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx=\int_2^9\frac{x^{\frac{1}{2}}}{u}\,\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du$$

$$=\frac{4}{3}\int_2^9\frac{x^{\frac{3}{4}}}{u}\,du=\frac{4}{3}\int_2^9\frac{u-1}{u}\,du=\frac{4}{3}\int_2^9\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{4}{3}(u-\ln|u|)\Big|_2^9=\frac{4}{3}\left(7-\ln\frac{9}{2}\right)$$
</td></tr>
<tr><td>44</td><td>
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$$

$$u=\frac{\pi}{2}-x\ \Rightarrow dx=-du$$

$$x=0\ \Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow u=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f(\sin u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx$$
</td></tr>
</table>

45	$u = 1 - x \quad \Rightarrow dx = -du \quad , x = 1 - u$ $x = 0 \ \Rightarrow u = 1$ $x = 1 \ \Rightarrow u = 0$ $\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b\,du$ $= \int_0^1 u^b(1-u)^a\,du = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$
46	$u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} \Rightarrow dx = x\ln x\,du$ $\int \frac{dx}{x\ln x\,(\ln(\ln x))} = \int \frac{x\ln x\,du}{ux\ln x} = \ln\lvert u\rvert + C = \ln\lvert\ln(\ln x)\rvert + C$
47	$u = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x - \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x - \sin x}$ $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{u} \times \frac{du}{\cos x - \sin x}$ $= \int \frac{-(\cos x - \sin x)}{u} \times \frac{du}{\cos x - \sin x}$ $= -\int \frac{1}{u}du = -\ln\lvert u\rvert + C$ $= -\ln\lvert\sin x + \cos x\rvert + C$
48	$u = 1 + \sin x \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \quad , \ \sin x = u - 1$ $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3 dx = \int 2\sin x\cos x\,u^3 \frac{du}{\cos x}$ $= \int 2(u-1)u^3 du$ $= \int (2u^4 - 2u^3)du$ $= \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$ $= \frac{2}{5}(1+\sin x)^5 - \frac{1}{2}(1+\sin x)^4 + C$

الدرس الثاني
التكامل بالتعويض (كتاب التمارين)

1	$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$
2	$u = 1 - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} du$ $\int \left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2} dx = \int u^2 \sin\frac{x}{2} \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} du = \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C$ $= \frac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$
3	$\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x} x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$ $= \int u^3 \csc^2 \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$ $= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$
4	$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

5	$u = x+2 \Rightarrow dx = du \quad , \qquad x = u-2$ $\int x^3(x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$ $= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{3}{5}u^{10} + \frac{4}{3}u^9 - u^8 + C$ $= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$
6	$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx$ $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$ $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$
7	$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\, du = 2\int e^u\, du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$
8	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin(2\ln 2x)}{x} dx$ $u = 2\ln 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$ $\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$ $= -\frac{1}{2}\cos(2\ln 2x) + C = -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$

9	$u=\tan x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$ $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)dx = \int \cos^3 u\, du = \int \cos u \cos^2 u\, du$ $= \int \cos u\,(1-\sin^2 u)du$ $v=\sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\cos u \Rightarrow \cos u\, dx = dv$ $\int \cos u\,(1-\sin^2 u)du = \int (1-v^2)dv = v-\frac{1}{3}v^3+C$ $=\sin u-\frac{1}{3}\sin^3 u+C$ $=\sin(\tan x)-\frac{1}{3}\sin^3(\tan x)+C$ ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة: $\int \sec^2 x \cos(\tan x)\left(1-\sin^2(\tan x)\right)dx$ وبتعويض واحد فقط هو $u=\sin(\tan x)$.
10	$u=4x+1 \Rightarrow 4dx=du \quad , \quad 4x=u-1$ $x=20 \Rightarrow u=81$ $x=6 \Rightarrow u=25$ $\int_6^{20}\frac{8x}{\sqrt{4x+1}}dx=\int_{25}^{81}\frac{u-1}{2\sqrt{u}}du=\int_{25}^{81}\left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)du$ $=\left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_{25}^{81}=(243-9)-\left(\frac{125}{3}-5\right)=\frac{592}{3}$
11	$u=\sqrt{x-1} \Rightarrow u^2=x-1 \Rightarrow 2udu=dx$ $x=5 \Rightarrow u=2 \quad ، \quad x=2 \Rightarrow u=1$ $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2\frac{2u}{1+u}du=\int_1^2\left(2-\frac{2}{u+1}\right)du$ $=(2u-2\ln\vert u+1\vert)\vert_1^2=(4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)=2-2\ln\frac{2}{3}$

12	$u = 1 + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx = \int_2^1 \frac{2\sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u} du$ $= \int_2^1 \frac{2 - 2u}{u} du = \int_1^2 \frac{2u - 2}{u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u}\right) du$ $= (2u - 2\ln\lvert u\rvert)\rvert_1^2 = (4 - 2\ln 2) - (2 - 0) = 2 - 2\ln 2$
13	$u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $x = 4 \Rightarrow u = 3$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$ $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} du = \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2}u^4 \Big\rvert_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$
14	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x\, du$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du = \int_0^1 e^u du = e^u\rvert_0^1 = e - 1$
15	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$ ، $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\, dx = \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2(1 - u^2)\, du$ $= \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2 - u^4)\, du = \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big\rvert_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\right) = \frac{47}{480}$

16	$x\sqrt{1+x}=0 \Rightarrow x=0\ ,x=-1$ $A=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\,dx$ $u=1+x \Rightarrow dx=du\quad ,\ x=u-1$ $x=0 \Rightarrow u=1$ $x=-1 \Rightarrow u=0$ $A=\int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\,dx=\int_{0}^{1} -x\sqrt{u}\,du=\int_{0}^{1}(1-u)\sqrt{u}\,du$ $=\int_{0}^{1}\left(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du=\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big\vert_{0}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
17	$f(x)=\int 16\sin x\cos^3 x\,dx$ $u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$ $f(x)=\int 16\sin x\, u^3\times\frac{du}{-\sin x}=\int -16u^3\,du=-4u^4+C$ $=-4\cos^4 x+C$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+C$ $0=-1+C \Rightarrow C=1$ $\Rightarrow f(x)=-4\cos^4 x+1$
18	$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$ $u=x^2+5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+5}+C$ $f(2)=3+C \quad\Rightarrow\quad 1=3+C \Rightarrow C=-2 \quad\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+5}-2$

19	$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ $u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$ $s(0) = 2 + C =$ $4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$ $\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$

الدرس الثالث

التكامل بالكسور الجزئية (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 47
	$A=\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx$ لإيجاد قيمة هذا التكامل نجزئ المقدار $\frac{1}{x^3+x}$ إلى كسور جزئية يمكن إيجاد تكاملاتها بسهولة كما يأتي: $\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ $\Rightarrow 1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x)$ $x=0\Rightarrow A=1$ $x=1\Rightarrow 1=2A+B+C\Rightarrow 1=2+B+C$ $x=-1\Rightarrow 1=2A+B-C\Rightarrow 1=2+B-C$ بحل هاتين المعادلتين نجد أنّ: $C=0$ ، و $B=-1$ $A=\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx$ $=\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert\Big\vert_1^2$ $=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5-\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2$ $=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$

	اتحقق من فهمي صفحة 49
a	$\frac{x-7}{x^2-x-6}=\frac{x-7}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ $\Rightarrow x-7=A(x+2)+B(x-3)$ $x=3\Rightarrow A=-\frac{4}{5}$ $x=-2\Rightarrow B=\frac{9}{5}$ $\int\frac{x-7}{x^2-x-6}dx=\int\left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{9}{5}}{x+2}\right)dx$ $=-\frac{4}{5}\ln\lvert x-3\rvert+\frac{9}{5}\ln\lvert x+2\rvert+C$
b	$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 3x-1=A(x+1)+B(x-1)$ $x=1\Rightarrow A=1$ $x=-1\Rightarrow B=2$ $\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)dx$ $=\ln\lvert x-1\rvert+2\ln\lvert x+1\rvert+C$

	اتحقق من فهمي صفحة 51
a	$\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow x+4=A(x-1)^2+B(2x-1)(x-1)+C(2x-1)$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=18$ $x=1\Rightarrow C=5$ $x=0\Rightarrow 4=A+B-C\Rightarrow B=-9$ $\int\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{18}{2x-1}+\frac{-9}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx$ $=\frac{18}{2}\ln\|2x-1\|-9\ln\|x-1\|-\frac{5}{x-1}+C$ $=9\ln\|2x-1\|-9\ln\|x-1\|-\frac{5}{x-1}+C$
b	$\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x}$ $\Rightarrow x^2-2x-4=Ax(x-2)+Bx+C(x-2)^2$ $x=2\Rightarrow B=-2$ $x=0\Rightarrow C=-1$ $x=1\Rightarrow -5=-A+B+C\Rightarrow A=2$ $\int\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{(x-2)^2}+\frac{-1}{x}\right)dx$ $=2\ln\|x-2\|+\frac{2}{x+2}-\ln\|x\|+C$

	أتحقق من فهمي صفحة 52
a	$\frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ $\Rightarrow 3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$ $x=3 \Rightarrow A=1$ $x=0 \Rightarrow 4 = 4A - 3C \Rightarrow C=0$ $x=1 \Rightarrow 7 = 5A - 2B - 2C \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx$ $= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4}\right) dx$ $= \ln\|x-3\| - \frac{1}{2}\ln\|x^2+4\| + C$
b	$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1} = \frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ $\Rightarrow 7x^2-x+1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$ $x=-1 \Rightarrow A=3$ $x=0 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow 7 = A + 2B + 2C \Rightarrow B=4$ $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1}\right) dx$ $= \int \left(\frac{3}{x+1} + 2 \times \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) dx$ $= 3\ln\|x+1\| + 2\ln\|x^2-x+1\| + C$

	أتحقق من فهمي صفحة 53
a	$\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int\left(2x+1+\frac{3x-4}{2x^2-x-1}\right)dx$ $\frac{3x-4}{2x^2-x-1} = \frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$ $\Longrightarrow 3x-4 = A(x-1)+B(2x+1)$ $x=-\frac{1}{2} \Longrightarrow A = \frac{11}{3}$ $x=1 \Longrightarrow B = -\frac{1}{3}$ $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int\left(2x+1+\frac{\frac{11}{3}}{2x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\right)dx$ $= x^2+x+\frac{11}{6}\ln\lvert 2x+1\rvert - \frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert + C$
b	$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}dx = \int\left(1+\frac{2x-1}{x^2-x}\right)dx$ $= x+\ln\lvert x^2-x\rvert + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 54
a	$\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}dx = \int_3^4\left(2x+1+\frac{6x}{x^2-4}\right)dx$ $= \left(x^2+x+3\ln\lvert x^2-4\rvert\right)\Big\vert_3^4$ $= (20+3\ln 12)-(12+3\ln 5)$ $= 8+3\ln\frac{12}{5}$

b	$\frac{3x-10}{x^2-7x+12}=\frac{3x-10}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$ $\Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)$ $x=3\Rightarrow A=1$ $x=4\Rightarrow B=2$ $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}dx=\int_5^6\left(\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}\right)dx$ $=(\ln\|x-3\|+2\ln\|x-4\|)\|_5^6$ $=\ln 3+2\ln 2-(\ln 2+2\ln 1)$ $=\ln 3+\ln 2=\ln 6$
	أتحقق من فهمي صفحة 57
a	$u=\tan x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sec^2 x\Rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$ $\int\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}dx=\int\frac{\sec^2 x}{u^2-1}\frac{du}{\sec^2 x}=\int\frac{1}{u^2-1}du$ $\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$ $\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$ $\Rightarrow 1=A(u+1)+B(u-1)$ $u=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$ $u=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$ $\int\frac{1}{u^2-1}du=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{u+1}\right)du$ $=\frac{1}{2}\ln\|u-1\|-\frac{1}{2}\ln\|u+1\|+C=\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{u-1}{u+1}\right\|+C$ $\Rightarrow\int\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right\|+C$

b	$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx = \int \frac{e^x}{(u-1)(u+4)}\frac{du}{e^x}$ $= \int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\,du$ $\frac{1}{(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4}$ $\Rightarrow 1 = A(u+4) + B(u-1) +$ $u = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$ $u = -4 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$ $\int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\,du = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+4}\right) du$ $= \frac{1}{5}\ln\lvert u-1\rvert - \frac{1}{5}\ln\lvert u+4\rvert + C = \frac{1}{5}\ln\left\lvert\frac{u-1}{u+4}\right\rvert + C$ $\Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left\lvert\frac{e^x-1}{e^x+4}\right\rvert + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 57
1	$\frac{x-10}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}$ $\Rightarrow x - 10 = A(x+5) + Bx$ $x = 0 \Rightarrow A = -2$ $x = -5 \Rightarrow B = 3$ $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5}\right) dx$ $= -2\ln\lvert x\rvert + 3\ln\lvert x+5\rvert + C$

2	$\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$ $\Rightarrow 2=A(1+x)+B(1-x)$ $x=1\Rightarrow A=1$ $x=-1\Rightarrow B=1$ $\int\frac{2}{1-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$ $=-\ln\lvert 1-x\rvert+\ln\lvert 1+x\rvert+C$ $=\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$
3	$\frac{4}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}$ $\Rightarrow 4=A(x-4)+B(x-2)$ $x=2\Rightarrow A=-2$ $x=4\Rightarrow B=2$ $\int\frac{4}{(x-2)(x-4)}dx=\int\left(\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{x-4}\right)dx$ $=-2\ln\lvert x-2\rvert+2\ln\lvert x-4\rvert+C$ $=2\ln\left\lvert\frac{x-4}{x-2}\right\rvert+C$
4	$\frac{3x+4}{x^2+x}=\frac{3x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 3x+4=A(x+1)+Bx$ $x=0\Rightarrow A=4$ $x=-1\Rightarrow B=-1$ $\int\frac{3x+4}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{4}{x}+\frac{-1}{x+1}\right)dx$ $=4\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x+1\rvert+C$

5	$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int \left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$ $\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ $\Rightarrow 4 = A(x+2)+B(x-2)$ $x=2 \Rightarrow A=1$ $x=-2 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int \left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= x+\ln\|x-2\|-\ln\|x+2\|+C$ $= x+\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|+C$
6	$\frac{3x-6}{x^2+x-2} = \frac{3x-6}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$ $\Rightarrow 3x-6 = A(x-1)+B(x+2)$ $x=-2 \Rightarrow A=4$ $x=1 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}dx = \int \left(\frac{4}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$ $= 4\ln\|x+2\|-\ln\|x-1\|+C$
7	$\frac{4x+10}{4x^2-4x-3} = \frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)} = \frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+1}$ $\Rightarrow 4x+10 = A(2x+1)+B(2x-3)$ $x=\frac{3}{2} \Rightarrow A=4$ $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow B=-2$ $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}dx = \int \left(\frac{4}{2x-3}+\frac{-2}{2x+1}\right)dx$ $= 2\ln\|2x-3\|-\ln\|2x+1\|+C$

8	$\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}=\frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$ $\Rightarrow 2x^2+9x-11=A(x+1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+1)$ $x=2\Rightarrow A=1$ $x=-1\Rightarrow B=3$ $x=-3\Rightarrow C=-2$ $\int\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x+3}\right)dx$ $=\ln\|x-2\|+3\ln\|x+1\|-2\ln\|x+3\|+C$
9	$\frac{4x}{x^2-2x-3}=\frac{4x}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 4x=A(x+1)+B(x-3)$ $x=3\Rightarrow A=3$ $x=-1\Rightarrow B=1$ $\int\frac{4x}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$ $=3\ln\|x-3\|+\ln\|x+1\|+C$
10	$\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow 8x^2-19x+1=A(x-2)^2+B(2x+1)(x-2)+C(2x+1)$ $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=2$ $x=2\Rightarrow C=-1$ $x=0\Rightarrow 1=4A-2B+C\Rightarrow B=3$ $\int\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}\right)dx$ $=\ln\|2x+1\|+3\ln\|x-2\|+\frac{1}{x-2}+C$

11	$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx = \int \left(1+\frac{6-3x}{9x^2-4}\right)dx$ $\frac{6-3x}{9x^2-4} = \frac{6-3x}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$ $\Rightarrow 6-3x = A(3x+2)+B(3x-2)$ $x=\frac{2}{3} \Rightarrow A=1$ ، $x=-\frac{2}{3} \Rightarrow B=-2$ $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx = \int \left(1+\frac{1}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\right)dx$ $= x+\frac{1}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert - \frac{2}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$
12	$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int \left(x+1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)dx$ $\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow 2-x = A(x+1)+Bx$ $x=0 \Rightarrow A=2$ $x=-1 \Rightarrow B=-3$ $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x}+\frac{-3}{x+1}\right)dx$ $=\frac{1}{2}x^2+x+2\ln\lvert x\rvert - 3\ln\lvert x+1\rvert + C$
13	$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{5-x}{-x^2-2x+3}\right)dx$ $\frac{5-x}{-x^2-2x+3} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$ $\Rightarrow x-5 = A(x-1)+B(x+3)$ $x=-3 \Rightarrow A=2$ ، $x=1 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$ $= -x+2\ln\lvert x+3\rvert - \ln\lvert x-1\rvert + C$

14	$\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ $\Longrightarrow 2x-4=A(x^2+4)+(Bx+C)(x+2)$ $x=-2\Longrightarrow A=-1$ $x=0\Longrightarrow -4=4A+2C\Longrightarrow C=0$ $x=1\Longrightarrow -2=5A+3B+3C\Longrightarrow B=1$ $\int\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}dx=\int\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{x}{x^2+4}\right)dx$ $=-\ln\|x+2\|+\frac{1}{2}\ln\|x^2+4\|+C$
15	$\int\frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx=\int\left(1+\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}\right)dx$ $\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}=\frac{-5x^2-2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $\Longrightarrow -5x^2-2=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$ $x=0\Longrightarrow B=-2$ $x=-1\Longrightarrow C=-7$ $x=1\Longrightarrow -7=2A+2B+C\Longrightarrow A=2$ $\int\frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{-7}{x+1}\right)dx$ $=x+2\ln\|x\|+\frac{2}{x}-7\ln\|x+1\|+C$
16	$\frac{3-x}{2-5x-12x^2}=\frac{x-3}{12x^2+5x-2}=\frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)}=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{3x+2}$ $\Longrightarrow x-3=A(3x+2)+B(4x-1)$ $x=\frac{1}{4}\Longrightarrow A=-1$ ، $x=-\frac{2}{3}\Longrightarrow B=1$ $\int\frac{3-x}{2-5x-12x^2}dx=\int\left(\frac{-1}{4x-1}+\frac{1}{3x+2}\right)dx$ $=-\frac{1}{4}\ln\|4x-1\|+\frac{1}{3}\ln\|3x+2\|+C$

17	$\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}=\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^2(x^2+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6}$ $\Rightarrow 3x^3-x^2+12x-6=Ax(x^2+6)+B(x^2+6)+(Cx+D)(x^2)$ $x=0\Rightarrow B=-1$ $x=1\Rightarrow 8=7A+7B+C+D$..................(1) $x=-1\Rightarrow -22=-7A+7B-C+D$.......(2) $x=2\Rightarrow 38=20A+10B+8C+4D$...... (3) بجمع(1) ، و (2) ينتج أنّ: $14B+2D=-14$ ، وبتعويض $B=-1$، نجد أن $D=0$ وبطرح (2) من (1) ينتج أنّ: $14A+2C=30$ أي أنّ $C=15-7A$ وبالتعويض في (3) ينتج أنّ: $20A-10+8(15-7A)=38$ $-36A=-72\Rightarrow A=2$ $C=15-7(2)=1$ $\int\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{x}{x^2+6}\right)dx$ $=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+6\rvert+C$
18	$\frac{5x-2}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow 5x-2=A(x-2)+B$ $x=2\Rightarrow B=8$ $x=0\Rightarrow -2=-2A+B\Rightarrow A=5$ $\int\frac{5x-2}{(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}\right)dx$ $=5\ln\lvert x-2\rvert-\frac{8}{x-2}+C$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالتعويض $u=x-2$، كما يمكن حله بالأجزاء حيث: $u=5x-2, dv=(x-2)^{-2}$

19	$\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}=\frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$ $\Rightarrow 6+3x-x^2=Ax(x+2)+B(x+2)+C(x^2)$ $x=0\Rightarrow B=3$ $x=-2\Rightarrow C=-1$ $x=1\Rightarrow 8=3A+3B+C\Rightarrow A=0$ $\int_2^4\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx=\int_2^4\left(\frac{3}{x^2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$ $=\left(-\frac{3}{x}-\ln\lvert x+2\rvert\right)\Big\|_2^4$ $=-\frac{3}{4}-\ln 6+\frac{3}{2}+\ln 4=\frac{3}{4}+\ln\frac{2}{3}$
20	$\frac{9x^2+4}{9x^2-4}=1+\frac{8}{9x^2-4}$ $\frac{8}{9x^2-4}=\frac{8}{(3x-2)(3x+2)}=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$ $\Rightarrow 8=A(3x+2)+B(3x-2)$ $x=\frac{2}{3}\Rightarrow A=2$ $x=-\frac{2}{3}\Rightarrow B=-2$ $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{2}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\right)dx$ $=\left(x+\frac{2}{3}\ln\lvert 3x-2\rvert-\frac{2}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert\right)\Big\|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$ $=\left(x+\frac{2}{3}\ln\left\lvert\frac{3x-2}{3x+2}\right\rvert\right)\Big\|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$ $=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln 3=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\ln 3$

21	$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{2-x}+\frac{C}{(2-x)^2}$ $\Rightarrow 17-5x=A(2-x)^2+B(2-x)(2x+3)+C(2x+3)$ $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow A=2$ $x=2\Rightarrow C=1$ $x=0\Rightarrow 17=4A+6B+3C\Rightarrow B=1$ $\int_0^1\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx=\int_0^1\left(\frac{2}{2x+3}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{(2-x)^2}\right)dx$ $=\left(\ln\lvert 2x+3\rvert-\ln\lvert 2-x\rvert+\frac{1}{2-x}\right)\Big\rvert_0^1$ $=\ln 5+1-\ln 3+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\ln\frac{10}{3}$
22	$\frac{4}{16x^2+8x-3}=\frac{4}{(4x-1)(4x+3)}=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{4x+3}$ $\Rightarrow 4=A(4x+3)+B(4x-1)$ $x=\frac{1}{4}\Rightarrow A=1$ $x=-\frac{3}{4}\Rightarrow B=-1$ $\int_1^4\frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{4x-1}+\frac{-1}{4x+3}\right)dx$ $=\left(\frac{1}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert-\frac{1}{4}\ln\lvert 4x+3\rvert\right)\Big\rvert_1^4$ $=\left(\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{4x-1}{4x+3}\right\rvert\right)\Big\rvert_1^4$ $=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{15}{19}-\ln\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{35}{19}$

23	$\frac{5x+5}{x^2+x-6}=\frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$ $\Rightarrow 5x+5=A(x+3)+B(x-2)$ $x=2\Rightarrow A=3$ $x=-3\Rightarrow B=2$ $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx=\int_3^4\left(\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)dx$ $=(3\ln\lvert x-2\rvert+2\ln\lvert x+3\rvert)\rvert_3^4$ $=3\ln 2+2\ln 7-2\ln 6=\ln\frac{98}{9}$
24	$\frac{4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow 4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$ $x=0\Rightarrow A=1$ ، $x=2\Rightarrow C=2$ $x=1\Rightarrow 4=A-B+C\Rightarrow B=-1$ $A=\int_3^4\frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$ $=\left(\ln\lvert x\rvert-\ln\lvert x-2\rvert-\frac{2}{x-2}\right)\Big\rvert_3^4$ $=\left(\ln\left\lvert\frac{x}{x-2}\right\rvert-\frac{2}{x-2}\right)\Big\rvert_3^4=1+\ln\frac{2}{3}$
25	$A=\int_0^1\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$ $\Rightarrow 1=A(x-2)+B(x-3)$ $x=3\Rightarrow A=1$ ، $x=2\Rightarrow B=-1$ $A=\int_0^1\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}+\frac{-1}{x-2}\right)dx$ $=(\ln\lvert x-3\rvert-\ln\lvert x-2\rvert)\rvert_0^1=\ln\frac{4}{3}$

26	$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx$ $\frac{x^2+1}{3x-x^2} = -1 + \frac{3x+1}{3x-x^2}$ $\frac{3x+1}{3x-x^2} = \frac{3x+1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x} \Rightarrow 3x+1 = A(3-x) + Bx$ $x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ ، $x = 3 \Rightarrow B = \frac{10}{3}$ $A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3-x}\right) dx$ $= \left(-x + \frac{1}{3}\ln\lvert x\rvert - \frac{10}{3}\ln\lvert 3-x\rvert\right)\Big\rvert_1^2 = -1 + \frac{11}{3}\ln 2$
27	$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow A\left(\frac{5}{4}, 0\right)$
28	$A = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}\,dx = \ln\lvert 2x^2-5x-3\rvert\Big\rvert_0^{\frac{5}{4}} = \ln\frac{49}{8} - \ln 3 = \ln\frac{49}{24}$ ملاحظة: البسط هو مشتقة المقام، فلا داعي لتجزئة الكسر.
29	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{u+u^2} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-1}{u+u^2}\,du$ $\frac{-1}{u+u^2} = \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} \Rightarrow -1 = A(1+u) + Bu$ $u = 0 \Rightarrow A = -1$ ، $u = -1 \Rightarrow B = 1$ $\int \frac{-1}{u+u^2}\,du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du$ $= -\ln\lvert u\rvert + \ln\lvert 1+u\rvert + C$ $\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \ln\lvert 1+\cos x\rvert + C$ $= \ln\left\lvert\frac{1+\cos x}{\cos x}\right\rvert + C = \ln\lvert 1+\sec x\rvert + C$

30	$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x \Rightarrow dx=2udu$ $\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{x}}dx=\int \frac{1}{u^4+u^3}2udu=\int \frac{2}{u^3+u^2}du$ $\frac{2}{u^3+u^2}=\frac{2}{u^2(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u+1}$ $\Rightarrow 2=Au(u+1)+B(u+1)+Cu^2$ $u=0 \Rightarrow B=2$ ، $u=-1 \Rightarrow C=2$ ، $u=1 \Rightarrow 2=2A+2B+C$ $\Rightarrow A=-2 \quad \Rightarrow \int \frac{2}{u^3+u^2}du=\int \left(\frac{-2}{u}+\frac{2}{u^2}+\frac{2}{u+1}\right)du$ $=-2\ln\lvert u\rvert-\frac{2}{u}+2\ln\lvert u+1\rvert+C$ $=2\ln\left\lvert\frac{u+1}{u}\right\rvert-\frac{2}{u}+C$ $=2\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$
31	$u=e^x \Rightarrow \frac{du}{dx}=e^x=u \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$ $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int \frac{u^2}{u^2+3u+2}\times\frac{du}{u}=\int \frac{u}{u^2+3u+2}du$ $\frac{u}{u^2+3u+2}=\frac{u}{(u+1)(u+2)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u+2}$ $\Rightarrow u=A(u+2)+B(u+1)$ $u=-1 \Rightarrow A=-1$ $u=-2 \Rightarrow B=2$ $\int \frac{u}{u^2+3u+2}du=\int \left(\frac{-1}{u+1}+\frac{2}{u+2}\right)du$ $=-\ln\lvert u+1\rvert+2\ln\lvert u+2\rvert+C$ $\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx=-\ln(e^x+1)+2\ln(e^x+2)+C$

32	$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\,dx = \int \frac{\cos x}{u(u^2-4)} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du$ $\frac{1}{u(u^2-4)} = \frac{1}{u(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$ $\Rightarrow 1 = A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2)$ $u = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$ $u = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{8}$ $u = -2 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$ $\int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-2} + \frac{\frac{1}{8}}{u+2} \right) du$ $= -\frac{1}{4}\ln\lvert u\rvert + \frac{1}{8}\ln\lvert u-2\rvert + \frac{1}{8}\ln\lvert u+2\rvert + C$ $\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\,dx$ $= -\frac{1}{4}\ln\lvert \sin x\rvert + \frac{1}{8}\ln\lvert \sin x - 2\rvert + \frac{1}{8}\ln\lvert \sin x + 2\rvert + C$

33	الحل الأول بضرب كل من البسط و المقام بـ e^{-x} $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$ الحل الثاني بالتعويض: $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$ $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+u} \times \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u(1+u)}du$ $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$ $\Rightarrow 1 = A(1+u) + Bu$ $u = 0 \Rightarrow A = 1$ $u = -1 \Rightarrow B = -1$ $\int \frac{1}{u(1+u)}du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}\right)du = \ln\|u\| - \ln\|u+1\| + C$ $\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1) + C$ $= \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^{-1} + C = -\ln(e^{-x}+1) + C$
34	$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1)\Big\|_0^{\ln 2}$ $= \ln e^{\ln 2} - \ln(e^{\ln 2}+1) - (\ln e^0 - \ln(e^0+1))$ $= \ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

35

$$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}=\frac{A}{2x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 5x^2-8x+1=A(x-1)^2+B(2x)(x-1)+C(2x)$$

$$x=0\Rightarrow A=1$$

$$x=1\Rightarrow C=-1$$

$$x=-1\Rightarrow 14=4A+4B-2C\Rightarrow B=2$$

$$\int_4^9\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx=\int_4^9\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}\right)\Big|_4^9$$

$$=\frac{1}{2}\ln 9+2\ln 8+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln 4-2\ln 3-\frac{1}{3}$$

$$=\ln 3+\ln 64+\frac{1}{8}-\ln 2-\ln 9-\frac{1}{3}=\ln\frac{32}{3}-\frac{5}{24}$$

36

$$u=\sqrt{x}\quad\Rightarrow u^2=x\Rightarrow dx=2u\,du$$

$$x=9\quad\Rightarrow u=3$$

$$x=16\quad\Rightarrow u=4$$

$$\int_9^{16}\frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx=\int_3^4\frac{2u}{u^2-4}\,2u\,du=\int_3^4\frac{4u^2}{u^2-4}\,du$$

$$=\int_3^4\left(4+\frac{16}{u^2-4}\right)du$$

$$\frac{16}{u^2-4}=\frac{16}{(u-2)(u+2)}=\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+2}$$

$$\Rightarrow 16=A(u+2)+B(u-2)$$

$$u=2\quad\Rightarrow A=4\ ،\ u=-2\quad\Rightarrow B=-4$$

$$\int_3^4\left(4+\frac{16}{u^2-4}\right)du=\int_3^4\left(4+\frac{4}{u-2}+\frac{-4}{u+2}\right)du$$

$$=(4u+4\ln|u-2|-4\ln|u+2|)\big|_3^4$$

$$=4\left(1+\ln\frac{5}{3}\right)$$

37	$\frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3} = 2 - \frac{x+2}{2x^2+5x+3}$ $\frac{x+2}{2x^2+5x+3} = \frac{x+2}{(x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3}$ $\Longrightarrow x+2 = A(2x+3) + B(x+1)$ $x = -1 \Longrightarrow A = 1$ $x = -\frac{3}{2} \Longrightarrow B = -1$ $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+3}\right) dx$ $= \left(2x - \ln\|x+1\| + \frac{1}{2}\ln\|2x+3\|\right)\Big\|_0^1 = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$
38	$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$ $u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}, \quad 1+\sqrt{x} = u^2 \Longrightarrow \sqrt{x} = u^2 - 1$ $\Longrightarrow dx = 4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}du = 4u(u^2-1)du$ $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx = \int \frac{u}{(u^2-1)^2} 4u(u^2-1)du = \int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du$ $\frac{4u^2}{u^2-1} = 4 + \frac{4}{u^2-1}$ $\frac{4}{u^2-1} = \frac{4}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$ $\Longrightarrow 4 = A(u+1) + B(u-1)$ ، $u = 1 \Rightarrow A = 2$ ، $u = -1 \Rightarrow B = -2$ $\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du = \int \left(4 + \frac{2}{u-1} + \frac{-2}{u+1}\right) du$ $= 4u + 2\ln\|u-1\| - 2\ln\|u+1\| + C$ $= 4u + 2\ln\left\|\frac{u-1}{u+1}\right\| + C$

39	$\frac{x}{16x^4-1}=\frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)}=\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{2x+1}$ $\Rightarrow x=(Ax+B)(2x-1)(2x+1)+C(4x^2+1)(2x+1)+D(4x^2+1)(2x-1)$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{8}$ $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow D=\frac{1}{8}$ $x=0\Rightarrow 0=-B+C-D\Rightarrow B=0$ $x=1\Rightarrow 1=3A+3B+15C+5D\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$ $\int\frac{x}{16x^4-1}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}x}{4x^2+1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x+1}\right)dx$ $=-\frac{1}{16}\ln(4x^2+1)+\frac{1}{16}\ln\|2x-1\|+\frac{1}{16}\ln\|2x+1\|+C$ $=\frac{1}{16}\ln\left\|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right\|+C$
40	$u=x^{\frac{1}{6}}\Rightarrow\ \frac{du}{dx}\Rightarrow\frac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}}\Rightarrow dx=6x^{\frac{5}{6}}du=6u^5du$ $u=x^{\frac{1}{6}}\Rightarrow x=u^6\Rightarrow\sqrt{x}=u^3,\sqrt[3]{x}=u^2$ $\Rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{6u^5}{u^3-u^2}du$ $=\int\frac{6u^3}{u-1}du$ $=\int\left(6u^2+6u+6+\frac{6}{u-1}\right)du$ $=2u^3+3u^2+6u+6\ln\|u-1\|+C$ $=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\|\sqrt[6]{x}-1\|+C$

الدرس الثالث

التكامل بالكسور الجزئية (كتاب التمارين)

1	$\frac{4}{x^2+4x} = \frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$ $A(x+4) + B(x) = 4$ $x = 0 \Rightarrow A = 1$ $x = -4 \Rightarrow B = -1$ $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \ln\|x\| - \ln\|x+4\| + C = \ln\left\|\frac{x}{x+4}\right\| + C$
2	$\frac{6}{x^2-9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$ $A(x+3) + B(x-3) = 6$ $x = 3 \Rightarrow A = 1$ $x = -3 \Rightarrow B = -1$ $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) dx$ $= \ln\|x-3\| - \ln\|x+3\| + C = \ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\| + C$

3	$\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}=\frac{x^2-3x+8}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ $A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)=x^2-3x+8$ $x=2\Rightarrow A=\frac{2}{3}$ ، $x=-1\Rightarrow C=-4$ $x=0\Rightarrow A-2B-2C=8\Rightarrow\frac{2}{3}-2B+8=8\Rightarrow B=\frac{1}{3}$ $\int\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$ $=\frac{2}{3}\ln\|x-2\|+\frac{1}{3}\ln\|x+1\|+\frac{4}{x+1}+C$
4	$\frac{x-10}{x^2-2x-8}=\frac{x-10}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-4)=x-10$ $x=4\Rightarrow A=-1$ $x=-2\Rightarrow B=2$ $\int\frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x+2}\right)dx$ $=-\ln\|x-4\|+2\ln\|x+2\|+C$
5	$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}$ $=1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+1)=5x-1$ $x=-1\Rightarrow A=2$ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=1$ $\int\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$ $=x+2\ln\|x+1\|+\frac{1}{2}\ln\|2x-1\|+C$

6	$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$ $A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)=2x^2-x+6$ $x=-1 \Rightarrow A=3$ $x=0 \Rightarrow 2A+C=6 \Rightarrow 6+C=6 \Rightarrow C=0$ $x=1 \Rightarrow 3A+2B+2C=7 \Rightarrow 9+2B=7 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx=\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{-x}{x^2+2}\right)dx$ $=3\ln\|x+1\|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$
7	$\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ $A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)=8x+24$ $x=-1 \Rightarrow A=1$ ، $x=3 \Rightarrow C=12$ $x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=24 \Rightarrow 9-3B+12=24 \Rightarrow B=-1$ $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x-3}+\frac{12}{(x-3)^2}\right)dx$ $=\ln\|x+1\|-\ln\|x-3\|-\frac{12}{x-3}+C$
8	$\frac{8x}{x^3+x^2-x-1}=\frac{8x}{x^2(x+1)-(x+1)}=\frac{8x}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$ $=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$ $A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2=8x$ $x=-1 \Rightarrow B=4$ ، $x=1 \Rightarrow C=2$ $x=0 \Rightarrow -A-B+C=0 \Rightarrow -A-4+2=0 \Rightarrow A=-2$ $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\int\left(\frac{-2}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx$ $=-2\ln\|x+1\|-\frac{4}{x+1}+2\ln\|x-1\|+C=2\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|-\frac{4}{x+1}+C$

9	$\frac{4}{x^3-2x^2}=\frac{4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$ $A(x)(x-2)+B(x-2)+C(x^2)=4$ $x=0 \Rightarrow B=-2$ ، $x=2 \Rightarrow C=1$ $x=1 \Rightarrow -A-B+C=4 \Rightarrow -A+2+1=4 \Rightarrow A=-1$ $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx$ $=-\ln\|x\|+\frac{2}{x}+\ln\|x-2\|+C=\ln\left\|\frac{x-2}{x}\right\|+\frac{2}{x}+C$
10	$\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $A(x)(x+1)+B(x+1)+C(x^2)=x-1$ $x=0 \Rightarrow B=-1$ ، $x=-1 \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow 2A+2B+C=0 \Rightarrow 2A-2-2=0 \Rightarrow A=2$ $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx=\int_1^5\left(\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-2}{x+1}\right)dx$ $=\left(2\ln\|x\|+\frac{1}{x}-2\ln\|x-2\|\right)\Big\|_1^5=\left(\frac{1}{x}+2\ln\left\|\frac{x}{x-2}\right\|\right)\Big\|_1^5=2\ln\frac{5}{3}-\frac{4}{5}$
11	$\frac{4-x}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$ $A(x-2)+B=4-x$ $x=2 \Rightarrow B=2$ $x=0 \Rightarrow -2A+B=4 \Rightarrow -2A+2=4 \Rightarrow A=-1$ $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx=\int_7^{12}\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$ $=\left(-\ln\|x-2\|-\frac{2}{x-2}\right)\Big\|_7^{12}=-\ln 10-\frac{1}{5}+\ln 5+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\ln\frac{1}{2}$

12

$$\frac{4}{x^2+8x+15}=\frac{4}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3)+B(x+5)=4$$

$$x=-5 \Rightarrow A=-2 \quad ، \quad x=-3 \Rightarrow B=2$$

$$\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx=\int_1^2\left(\frac{-2}{x+5}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=(-2\ln|x+5|+2\ln|x+3|)\big|_1^2=\left(2\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|\right)\Big|_1^2$$

$$=2\ln\frac{5}{7}-2\ln\frac{2}{3}=2\ln\frac{15}{14}$$

13

$$\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}=5+\frac{-x+10}{2x^2-5x}=5+\frac{10-x}{x(2x-5)}=5+\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-5}$$

$$A(2x-5)+B(x)=10-x$$

$$x=0 \Rightarrow A=-2 \quad ، \quad x=\frac{5}{2} \Rightarrow B=3$$

$$\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx=\int_1^2\left(5+\frac{-2}{x}+\frac{3}{2x-5}\right)dx$$

$$=\left(5x-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Big|_1^2=10-2\ln 2-5-\frac{3}{2}\ln 3=5-\ln 12\sqrt{3}$$

14

$$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$A(2x-3)^2+B(x+1)(2x-3)+C(x+1)=25$$

$$x=-1 \Rightarrow A=1 \quad ، \quad x=\frac{3}{2} \Rightarrow C=10$$

$$x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=25 \Rightarrow 9-3B+10=25 \Rightarrow B=-2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx=\int_2^5\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{2x-3}+\frac{10}{(2x-3)^2}\right)dx$$

$$=\left(\ln|x+1|-\ln|2x-3|-\frac{5}{2x-3}\right)\Big|_2^5=\left(\ln\left|\frac{x+1}{2x-3}\right|-\frac{5}{2x-3}\right)\Big|_2^5$$

$$=\left(\ln\frac{6}{7}-\frac{5}{7}\right)-(\ln 3-5)=\frac{30}{7}+\ln\frac{2}{7}$$

15	$\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{x^2-x-6}=1+\frac{16-2x}{(x-3)(x+2)}=1+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$ $A(x+2)+B(x-3)=16-2x$ $x=3\Rightarrow A=2$ ، $x=-2\Rightarrow B=-4$ $\int_0^2\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx=\int_0^2\left(1+\frac{2}{x-3}+\frac{-4}{x+2}\right)dx$ $=(x+2\ln\lvert x-3\rvert-4\ln\lvert x+2\rvert)\vert_0^2$ $=2-4\ln 4-2\ln 3+4\ln 2=2-2\ln 12$
16	$A=\int_1^2\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$ $\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1)+B(x+2)=4x+3$ $x=-2\Rightarrow A=1$ ، $x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=2$ $A=\int_1^2\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$ $=(\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert 2x-1\rvert)\vert_1^2$ $=(\ln 4+\ln 3)-(\ln 3+0)=\ln 4$
17	$A=\int_2^3\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$ $\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8}=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$ $=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{1}{4}+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-2}+\frac{C}{(2x-2)^2}$ $A(2x-2)^2+B(x+2)(2x-2)+C(x+2)=3x^2-4x-2$ $x=-2\Rightarrow A=\frac{1}{2}$ ، $x=1\Rightarrow C=-1$ $x=0\Rightarrow 4A-4B+2C=-2\Rightarrow 2-4B-2=-2\Rightarrow B=\frac{1}{2}$ $A=\int_2^3\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx=\int_2^3\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-2}+\frac{-1}{(2x-2)^2}\right)dx$

18	$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x}$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}du$ $\dfrac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \dfrac{Au+B}{u^2+1} + \dfrac{C}{u-1}$ $(Au+B)(u-1) + C(u^2+1) = u+1$ $u = 1 \Rightarrow C = 1$ $u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$ $u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right)du$ $= -\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln\lvert u-1\rvert + C = -\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln\lvert e^x-1\rvert + C$
19	$u = \sin x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x}$ $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}du$ $\dfrac{5}{u^2+3u-4} = \dfrac{5}{(u+4)(u-1)} = \dfrac{A}{u+4} + \dfrac{B}{u-1}$ $A(u-1) + B(u+4) = 5$ $u = 1 \Rightarrow B = 1$ $u = -4 \Rightarrow A = -1$ $\displaystyle\int \frac{5}{u^2+3u-4}du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\ln\lvert u+4\rvert + \ln\lvert u-1\rvert + C$ $\displaystyle\Rightarrow \int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = -\ln(4+\sin x) + \ln\lvert -1+\sin x\rvert + C$ $= \ln\left\lvert \dfrac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right\rvert + C$

20	$u = \tan x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$ $\int \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \int \dfrac{1}{u^2 + 5u + 6} du$ $\dfrac{1}{u^2 + 5u + 6} = \dfrac{1}{(u+3)(u+2)} = \dfrac{A}{u+3} + \dfrac{B}{u+2}$ $A(u+2) + B(u+3) = 1$ $u = -3 \Rightarrow A = -1$ ، $u = -2 \Rightarrow B = 1$ $\Rightarrow \int \dfrac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\dfrac{-1}{u+3} + \dfrac{1}{u+2}\right) du = \ln\|u+2\| - \ln\|u+3\| + C$ $\Rightarrow \int \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \ln \left\|\dfrac{2 + \tan x}{3 + \tan x}\right\| + C$
21	$\dfrac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{4x}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x-3) = 4x$ $x = 3 \Rightarrow A = 3$ ، $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $\int_0^1 \dfrac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{1}{x+1}\right) dx = (3\ln\|x-3\| + \ln\|x+1\|)\Big\|_0^1$ $= (3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln \dfrac{16}{27}$
22	$\dfrac{1}{2x^2 + x - 1} = \dfrac{1}{(2x-1)(x+1)} = \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(2x-1) = 1$ $x = -1 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{3}$ ، $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = \dfrac{2}{3}$ $\int_1^p \dfrac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \int_1^p \left(\dfrac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right) dx$ $= \left(\dfrac{1}{3}\ln\|2x-1\| - \dfrac{1}{3}\ln\|x+1\|\right)\Big\|_1^p = \left(\dfrac{1}{3}\ln\|2p-1\| - \dfrac{1}{3}\ln\|p+1\|\right) - \left(-\dfrac{1}{3}\ln 2\right)$ $= \dfrac{1}{3}\ln\left\|\dfrac{2(2p-1)}{p+1}\right\| = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{4p-2}{p+1}\right) \quad , p > 1$

الدرس الرابع
التكامل بالأجزاء (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 60
	$S(t) = \int 350 \ln(t+1)\, dt$ $u = \ln(t+1) \qquad dv = 350\, dt$ $du = \frac{1}{t+1} dt \qquad v = 350\, t$ $\int u dv = uv - \int v du$ $\int 350 \ln(1+t) dt = 350t \ln(t+1) - \int \frac{350t}{t+1} dt$ $= 350t \ln(t+1) - \int (350 - \frac{350}{t+1}) dt$ $= 350t \ln(t+1) - 350t + 350 \ln(t+1) + C$ $S(t) = 0 - 0 + 0 + C = 0 \quad \Rightarrow C = 0$ $S(t) = 350t \ln(t+1) - 350t + 350 \ln(t+1)$
	أتحقق من فهمي صفحة 63
a	$u = x \qquad dv = \sin x\, dx$ $du = dx \qquad v = -\cos x$ $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C$
b	$u = \ln x \qquad dv = x^2\, dx$ $du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{1}{3} x^3$ $\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

c	ملاحظة: يمكن حل هذه المسألة بطريقة التعويض $u=\sqrt{7-3x}$ أو $u=7-3x$ وثانيا حلها بالأجزاء: $u = x \qquad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}$ $\int x\sqrt{7-3x}\,dx = -\frac{2}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ $= -\frac{2}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$
d	$u = 3x \qquad dv = e^{4x}\,dx$ $du = 3dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int 3xe^{4x}\,dx = \frac{3}{4}xe^{4x} - \int \frac{3}{4}e^{4x}\,dx$ $= \frac{3}{4}xe^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C$
	اتحقق من فهمي صفحه 64
a	$u = x^2 \qquad dv = \sin x\,dx$ $du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$ $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\,dx$ $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$ $u = 2x \qquad dv = \cos x\,dx$ $du = 2\,dx \qquad v = \sin x$ $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx$ $= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

b	$u = x^3 \quad dv = e^{4x}\,dx$ $du = 3x^2 dx \quad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4}x^2 e^{4x}\,dx$ $u = \frac{3}{4}x^2 \quad dv = e^{4x}\,dx$ $du = \frac{3}{2}x\,dx \quad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \int \frac{3}{8}x e^{4x}\,dx$ $u = \frac{3}{8}x \quad dv = e^{4x}\,dx$ $du = \frac{3}{8}\,dx \quad v = \frac{1}{4}e^{4x}$ $\int x^3 e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \int \frac{3}{32}e^{4x}\,dx$ $= \frac{1}{4}x^3 e^{4x} - \frac{3}{16}x^2 e^{4x} + \frac{3}{32}x e^{4x} - \frac{3}{128}e^{4x} + C$
	اتحقق من فهمي صفحة 66
a	$\int \frac{\sin x}{e^x}dx = \int \sin x\, e^{-x}\,dx$ $u = \sin x \quad dv = e^{-x}\,dx$ $du = \cos x\,dx \quad v = -e^{-x}$ $\int \sin x\, e^{-x}\,dx = -\sin x\ e^{-x} - \int -e^{-x}\cos x\,dx$ $\int \sin x\, e^{-x}\,dx = -\sin x\ e^{-x} + \int e^{-x}\cos x\,dx$ $u = \cos x \quad dv = e^{-x}\,dx$ $du = -\sin x\,dx \quad v = -e^{-x}$ $\int \sin x\, e^{-x}\,dx = -\sin x\ e^{-x} + e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$ $\Rightarrow 2\int \sin x\, e^{-x}\,dx = e^{-x}(-\sin x + \cos x) + C$ $\int \sin x\, e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(-\sin x + \cos x) + C$

b

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$

$du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

اتحقق من فهمي صفحة 67

a

افرض أن: $g(x) = \cos 4x$ ، $f(x) = x^4$، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^4		$\cos 4x$
$4x^3$	+	$\frac{1}{4}\sin 4x$
$12x^2$	-	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
$24x$	+	$-\frac{1}{64}\sin 4x$
24	-	$\frac{1}{256}\cos 4x$
0	+	$\frac{1}{1024}\sin 4x$

$$\int x^4 \cos 4x\, dx =$$

$$\frac{1}{4}x^4 \sin 4x + \frac{1}{4}x^3 \cos 4x - \frac{3}{16}x^2 \sin 4x - \frac{3}{32}x \cos 4x + \frac{3}{128}\sin 4x + C$$

b

افرض أن: $g(x) = e^x$, $f(x) = x^5$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^5	+	e^x
$5x^4$	-	e^x
$20x^3$	+	e^x
$60x^2$	-	e^x
$120x$	+	e^x
120	-	e^x
0		e^x

$$\int x^5 e^x\, dx = e^x\left(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120\right) + C$$

أتحقق من فهمي صفحة 69

$$C(x) = \int (0.1x + 1)e^{0.03x}\, dx$$

$u = 0.1x + 1 \qquad dv = e^{0.03x}\, dx$

$du = 0.1dx \qquad v = \frac{1}{0.03}e^{0.03x}$

$$\int (0.1x+1)e^{0.03x}\, dx = (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \int \frac{0.1}{0.03}e^{0.03x}\, dx$$

$$= \frac{10}{3}(x+10)e^{0.03x} - \frac{1000}{9}e^{0.03x} + C$$

$$C(10) = \frac{200}{3}e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + C = 200 \Longrightarrow C \approx 260$$

$$\Longrightarrow C(x) = \frac{10}{3}e^{0.03x}\left(x - \frac{70}{3}\right) + 260$$

أتحقق من فهمي صفحة 70

a

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e x^{-2}\, dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

b	$u = x \qquad dv = e^{-2x}\,dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big\vert_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$ $= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big\vert_0^1 + -\frac{1}{4}e^{-2x}\Big\vert_0^1$ $= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 71
a	$\int (x^3+x^5)\sin x^2\,dx = \int x^3 \sin x^2\,dx + \int x^5 \sin x^2\,dx$ نجد كل تكامل على حدة. فنجد التكامل الأيسر كما يأتي: $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ $\int x^3 \sin x^2\,dx = \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 \sin y\,dy$ $= \frac{1}{2}\int y\sin y\,dy$ $u = y \quad dv = \sin y$ $du = dy \quad v = -\cos y$ $\int y\sin y\,dy = -y\cos y - \int -\cos y\,dy$ $= -y\cos y + \sin y$ $\int x^3 \sin x^2\,dx == -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + C$ ونجد التكامل الأيمن كما يأتي: $\int x^5 \sin x^2\,dx = \int x^5 \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\int x^4 \sin y\,dy$ $= \frac{1}{2}\int y^2 \sin y\,dy$ $u = y^2 \quad dv = \sin y$ $du = 2y\,dy \quad v = -\cos y$ $\int y^2 \sin y\,dy = -y^2\cos y - \int -2y\cos y\,dy$ $= -y^2\cos y + 2y\sin y - 2\int \sin y\,dy$ $= -y^2\cos y + 2y\sin y + 2\cos y$ $\int x^5 \sin x^2\,dx = \frac{-1}{2}x^4\cos x^2 + x^2\sin x^2 + \cos x^2 + C$ $\int (x^3+x^5)\sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 - \frac{1}{2}x^4\cos x^2 + x^2\sin x^2 + \cos x^2 + C$

b	$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ $\int x^5 e^{x^2}\,dx = \int x^5 e^y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2} x^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\int y^2 e^y\,dy$ $u = y^2 \qquad dv = e^y\,dy$ $du = 2y dy \qquad v = e^y$ $\int y^2 e^y\,dy = y^2 e^y - \int 2y e^y\,dy$ $= y^2 e^y - 2y e^y + \int 2e^y\,dy$ $= y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y$ $\int x^5 e^{x^2}\,dx = (\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1)e^{x^2} + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 71
1	$u = x + 1 \qquad dv = \cos x\,dx$ $du = dx \qquad v = \sin x$ $\int (x+1)\cos x\,dx = (x+1)\sin x - \int \sin x\,dx$ $= (x+1)\sin x + \cos x + C$
2	$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ $du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$ $\int x e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2xe^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ $= 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + C$

3	$u = 2x^2 - 1 \qquad dv = e^{-x}\,dx$ $du = 4x\,dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int (2x^2-1)e^{-x}\,dx = -(2x^2-1)e^{-x} + \int 4xe^{-x}\,dx$ بالأجزاء مرة أخرى: $u = 4x \qquad dv = e^{-x}\,dx$ $du = 4\,dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int (2x^2-1)e^{-x}\,dx = -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} + \int 4e^{-x}\,dx$ $= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x} + C$ $= -e^{-x}(2x^2+4x+3) + C$
4	$\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int \frac{1}{2}\ln x\,dx$ $u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{2}\,dx$ $du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x$ $\int \frac{1}{2}\ln x\,dx = \frac{1}{2}x\ln x - \int \frac{1}{2}\,dx$ $= \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$
5	$\int x\sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx$ $u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \sin 2x\,dx$ $du = \frac{1}{2}\,dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\int x\sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x\,dx$ $= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$

6	$u = x \qquad dv = \sec x \tan x \; dx$ $du = dx \qquad v = \sec x$ $\int x \sec x \tan x \; dx = x \sec x - \int \sec x \; dx$ $= x \sec x - \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$ $= x \sec x - \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$ $= x \sec x - \ln\lvert \sec x + \tan x \rvert + C$
7	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x\csc^2 x \; dx$ $u = x \qquad dv = \csc^2 x \; dx$ $du = dx \qquad v = -\cot x$ $\int x\csc^2 x \; dx = -x \cot x + \int \cot x \; dx$ $= -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$ $= -x \cot x + \ln\lvert \sin x \rvert + C$
8	$u = \ln x \qquad dv = x^{-3} \, dx$ $du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = -\frac{1}{2} x^{-2}$ $\int x^{-3} \ln x \; dx = -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x - \int -\frac{1}{2} x^{-2} \frac{1}{x} \, dx$ $= -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x + \int \frac{1}{2} x^{-3} \, dx$ $= -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x - \frac{1}{4} x^{-2} + C$ $= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

9	$u = 2x^2 \qquad dv = \sec^2 x \tan x \, dx$ $du = 4x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}\tan^2 x$ ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض، حيث: $y = \tan x \,, dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$ ومنه: $v = \int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \sec^2 x \, y \frac{dy}{\sec^2 x} = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\tan^2 x$ $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = 2x^2\left(\frac{1}{2}\tan^2 x\right) - \int 2x\tan^2 x \, dx$ بالأجزاء مرة أخرى: $u = 2x \qquad dv = \tan^2 x \, dx = (\sec^2 x - 1)dx$ $du = 2\, dx \qquad v = \tan x - x$ $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$ $= x^2\tan^2 x - \left(2x(\tan x - x) - \int 2\,(\tan x - x)dx\right)$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 + 2\int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x\right)dx$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 - 2\ln\lvert\cos x\rvert - x^2 + C$ $= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + x^2 - 2\ln\lvert\cos x\rvert + C$
10	هذه المسألة يمكن حلها بالتعويض ($u = 8 - x$ أو $u = \sqrt{8 - x}$) وحلها بالأجزاء كالآتي: $u = x - 2 \qquad dv = (8 - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}}$ $\int (x - 2)\sqrt{8 - x} dx = (x - 2) \times -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(8 - x)^{\frac{3}{2}} dx$ $= -\frac{2}{3}(x - 2)(8 - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(8 - x)^{\frac{5}{2}} + C$

11

بالأجزاء 3 مرات، نستخدم طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^3	+	$\cos 2x$
$3x^2$	-	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
6	-	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
0		$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$\int x^3\cos 2x\;dx=\frac{1}{2}x^3\sin 2x+\frac{3}{4}x^2\cos 2x-\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x+C$$

12

$$\int\frac{x}{6^x}dx=\int x6^{-x}dx$$

$u=x \qquad dv=6^{-x}\,dx$

$du=\;dx \qquad v=-\frac{6^{-x}}{\ln 6}$

$$\Longrightarrow \int x6^{-x}dx=-x\frac{6^{-x}}{\ln 6}+\int\frac{6^{-x}}{\ln 6}dx$$

$$=-x\frac{6^{-x}}{\ln 6}-\frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2}+C$$

13

$u=e^{-x} \qquad dv=\sin 2x\;dx$

$du=-e^{-x}\,dx \qquad v=\frac{-1}{2}\cos 2x$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\int\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x\,dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$u=\frac{1}{2}e^{-x} \qquad dv=\cos 2x\;dx$

$du=-\frac{1}{2}e^{-x}\,dx \qquad v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx+\frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

14	$u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x\, dx$ $du = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \qquad v = \sin x$ $\int \cos x \ln \sin x\, dx = \sin x \ln \sin x - \int \cos x\, dx$ $= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$
15	$u = \ln(1+e^x) \qquad dv = e^x\, dx$ $du = \frac{e^x}{1+e^x}\, dx \qquad v = e^x$ $\int e^x \ln(1+e^x)\, dx = e^x \ln(1+e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ $= e^x \ln(1+e^x) - \int \left(e^x + \frac{-1}{1+e^x}\right) dx$ $= e^x \ln(1+e^x) - \int \left(e^x + \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx$ $= e^x \ln(1+e^x) - e^x - \ln(1+e^{-x}) + C$
16	وجدنا في المثال 3 أنّ: $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$
17	$\int_1^e \ln x^2\, dx = \int_1^e 2 \ln x\, dx$ $u = 2 \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{2}{x}\, dx \qquad v = x$ $\int_1^e 2 \ln x\, dx = 2x \ln x \vert_1^e - \int_1^e 2dx$ $= 2x \ln x \vert_1^e - 2x \vert_1^e$ $= 2e \ln e - 2 \ln 1 - 2e + 2 = 2e - 0 - 2e + 2 = 2$

18	$\int_1^2 \ln(xe^x)\,dx = \int_1^2 (\ln x + \ln e^x)dx$ $= \int_1^2 (\ln x + x)dx = \int_1^2 \ln x\,dx + \int_1^2 x dx$ نجد $\int_1^2 \ln x\,dx$ بطريقة الأجزاء: $dv = dx$ $u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}\,dx$ $v = x$ $\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\|_1^2 - \int_1^2 dx = x\ln x\|_1^2 - x\|_1^2 = 2\ln 2 - \ln 1 - 2 + 1$ $= 2\ln 2 - 1$ $\int_1^2 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big\|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \int_1^2 \ln(xe^x)\,dx = 2\ln 2 - 1 + \frac{3}{2} = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$
19	$u = x$ $dv = \sec^2 3x\,dx$ $du = dx$ $v = \frac{1}{3}\tan 3x$ $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x\sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\tan 3x\,dx$ $= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx$ $= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\ln\cos 3x\Big\|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$ $= \frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4}$ $= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

20

$u = \ln x \qquad dv = x^4\,dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = \dfrac{1}{5}x^5$

$$\int_1^e x^4 \ln x\; dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4\,dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{25}x^5\Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{5}e^5 - 0 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5+1}{25}$$

21

نجد $\int x^2 \sin x\,dx$ بلستخدام طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2	$+$	$\sin x$
$2x$	$-$	$-\cos x$
2	$+$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \pi - 2$$

22

$u = x \qquad dv = (e^{-2x} + e^{-x})\,dx$

$du = dx \qquad v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$

$$\int_0^1 x(e^{-2x}+e^{-x})\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

23	$u = xe^x$ $\quad dv = (1+x)^{-2}\,dx$ $du = (xe^x + e^x)\,dx = e^x(x+1)\,dx$ $\quad v = -(1+x)^{-1}$ $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = -xe^x(1+x)^{-1}\Big\|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{(1+x)}\,dx$ $= -\frac{xe^x}{1+x}\Big\|_0^1 + e^x\|_0^1$ $= -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{1}{2}e - 1$
24	$u = x$ $\quad dv = 3^x\,dx$ $du = dx$ $\quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$ $\int_0^1 x3^x\,dx = x\frac{3^x}{\ln 3}\Big\|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3}\,dx$ $= x\frac{3^x}{\ln 3}\Big\|_0^1 - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}\Big\|_0^1$ $= \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{(\ln 3)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^2} = \frac{3\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$
25	$y = x^2 \Longrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^3 e^y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2}x^2 e^y dy = \int \frac{1}{2} y e^y dy$ $u = \frac{1}{2}y$ $\quad dv = e^y dy$ $du = \frac{1}{2}\,dy$ $\quad v = e^y$ $\int \frac{1}{2} y e^y dy = \frac{1}{2} y e^y - \int \frac{1}{2} e^y dy$ $= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y + C$ $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

26	$y=\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dy \quad , \quad x=e^y$ $\int \cos(\ln x)\,dx = \int x\cos y\; dy = \int e^y \cos y\, dy$ من المثال محلول الصفحات 55و56 في كتاب الطالب نجد أنّ: $\int e^y\cos y\,dy = \frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)+C$ $\Rightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}e^{\ln x}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$ $=\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$
27	$y=x^2 \Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$ $\int x^3\sin x^2\,dx = \int x^3\sin y\frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2}x^2\sin y\,dy = \int \frac{1}{2}y\sin y\,dy$ $u=\frac{1}{2}y \qquad dv=\sin y\,dy$ $du=\frac{1}{2}\,dy \qquad v=-\cos y$ $\int \frac{1}{2}y\sin y\,dy = -\frac{1}{2}y\cos y+\int\frac{1}{2}\cos y\,dy$ $=-\frac{1}{2}y\cos y+\frac{1}{2}\sin y+=-\frac{1}{2}x^2\cos x^2+\frac{1}{2}\sin x^2+C$
28	$y=\cos x \Rightarrow dx=\frac{dy}{-\sin x}$ $\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx = \int e^y(2\sin x\cos x)\frac{dy}{-\sin x} = \int -2ye^y\,dy$ $u=-2y \qquad dv=e^y dy$ $du=-2\,dy \qquad v=e^y$ $\int -2ye^y dy = -2ye^y+\int 2e^y dy$ $=-2ye^y+2e^y+C$ $\Rightarrow \int e^{\cos x}\sin 2x\,dx = -2\cos x\, e^{\cos x}+2e^{\cos x}+C$

29	$y=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2y} \Rightarrow dx = 2y\,dy$ $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int 2y\sin y\,dy$ $u=2y \qquad dv=\sin y\,dy$ $du=2\,dy \qquad v=-\cos y$ $\int 2y\sin y\,dy = -2y\cos y + \int 2\cos y\,dy$ $= -2y\cos y + 2\sin y + C$ $\Rightarrow \int \sin\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}+C$
30	$y=x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$ $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^3e^y}{(y+1)^2}\frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2}x^2\frac{e^y}{(y+1)^2}dy = \int \frac{\frac{1}{2}ye^y}{(y+1)^2}dy$ $u=\frac{1}{2}ye^y \qquad dv=\frac{1}{(y+1)^2}dy$ $du = \frac{1}{2}(ye^y+e^y)\,dy = \frac{1}{2}e^y(y+1)\,dy \qquad v=\frac{-1}{y+1}$ $\int \frac{\frac{1}{2}ye^y}{(y+1)^2}dy = \frac{-ye^y}{2(y+1)} + \int\frac{1}{y+1}\times\frac{1}{2}e^y(y+1)dy$ $= \frac{-ye^y}{2(y+1)}+\frac{1}{2}\int e^y dy \quad = \frac{-ye^y}{2(y+1)}+\frac{1}{2}e^y+C$ $= \frac{-x^2e^{x^2}}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}e^{x^2}+C = \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)}+C$
31	الاحداثيان x للنقطتين A و B هما أصغر حلين موجبين للمعادلة: $f(x)=e^{-x}\sin 2x = 0$ $\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi, 2\pi, \dots$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \quad \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2},0\right), B(\pi,0)$

32

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x\ dx+\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x}\sin 2x\ dx\right)$$

للتبسيط سنجد أولاً: $\int e^{-x}\sin 2x\ dx$ (التكامل غير المحدود)

$$u=e^{-x} \qquad dv=\sin 2x\,dx$$

$$du=-e^{-x}dx \qquad v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\int\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x\ dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$u=\frac{1}{2}e^{-x} \qquad dv=\cos 2x\,dx$$

$$du=-\frac{1}{2}e^{-x}dx \qquad v=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x\ dx$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\ dx+\frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\ dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x+C$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\ dx=-\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)+C$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{5}e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}e^{-\pi}+\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{5}\left(1+e^{-\pi}+2e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

33	$s(t) = \int te^{-\frac{t}{2}}dt$ $u = t \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}dt$ $du = dt \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$ $s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C$ $s(0) = 0 - 4 + C$ $0 = 0 - 4 + C \Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$
34	$f(x) = \int (x+2)\sin x \, dx$ $u = x + 2 \qquad dv = \sin x \, dx$ $du = dx \qquad v = -\cos x$ $f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x \, dx$ $= -(x+2)\cos x + \sin x + C$ $f(0) = -2 + 0 + C$ $2 = -2 + 0 + C \Rightarrow C = 4$ $f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$
35	$f(x) = \int 2xe^{-x} \, dx$ $u = 2x \qquad dv = e^{-x} \, dx$ $du = 2dx \qquad v = -e^{-x}$ $f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} \, dx$ $= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ $f(0) = 0 - 2 + C$ $3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$ $f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$

36	$N(t)=\int (t+6)e^{-0.25t}dt$ $u=t+6 \qquad dv=e^{-0.25t}dt$ $du=dt \qquad v=-4e^{-0.25t}$ $N(t)=-4(t+6)e^{-0.25t}+\int 4e^{-0.25t}dt$ $=-4(t+6)e^{-0.25t}-16e^{-0.25t}+C$ $N(0)=-24-16+C \quad \Rightarrow C=80$ $\Rightarrow N(t)=-4(t+6)e^{-0.25t}-16e^{-0.25t}+80$
37	$u=\ln 2x \qquad dv=x^2dx$ $du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\frac{1}{3}x^3$ $\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2\ln 2x\ dx=\frac{1}{3}x^3\ln 2x\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}-\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{3}x^2\ dx$ $=\frac{1}{3}x^3\ln 2x\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}-\frac{1}{9}x^3\Big\|_{\frac{1}{2}}^{3}=9\ln 6-\frac{215}{72}$
38	$u=x \qquad dv=\sin 5x\sin 3x\ dx=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)dx$ $du=dx \qquad v=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 5x\sin 3x\ dx$ $=x\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x\right)dx$ $=x\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\left(-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{128}\cos 8x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}\right)+0-\frac{1}{128}-\frac{1}{8}+\frac{1}{128}=\frac{\pi-2}{16}$

39

$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x}dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$

$$\int_0^a xe^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a - \int_0^a 2e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a - 4e^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a$$

$$= 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 \Rightarrow 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 = 6$$

لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-\frac{x}{2}}$ $\Rightarrow\ a = 2 + e^{-\frac{1}{2}a}$

40

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$u = \ln x \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du \quad , \qquad x = e^u$$

$$\int (\ln x)^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e^u du$$

بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:

$f(u)$ ومشتقاته المتكررة		$g(u)$ وتكاملاته المتكررة
u^2	+	e^u
$2u$	-	e^u
2	+	e^u
0		e^u

$$\int u^2e^u du = e^u(u^2 - 2u + 2) + C \quad = x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \qquad v = x$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\, dx$$

$u = 2\ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{2}{x}dx \qquad v = x$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + \int 2dx \quad = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

41	$A_1 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x}\,dx \quad , \qquad A_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx$ نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x}\,dx$ بالأجزاء: $u = x \qquad dv = e^{2x}dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ $\Rightarrow A(R_1) = -\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\Big\|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = \frac{e-2}{4e}$ $A(R_2) = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\Big\|_{0}^{\frac{1}{2}} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
42	$\frac{A(R_1)}{A(R_2)} = \frac{\frac{e-2}{4e}}{\frac{1}{4}} = \frac{e-2}{e} \Rightarrow A(R_1) : A(R_{12}) = (e-2) : e$
43	$u = \ln x \qquad dv = x^n dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \int \frac{1}{n+1}x^n dx$ $= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C$ $= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1 + (n+1)\ln x) + C$
44	$u = x^n \qquad dv = e^{ax}dx$ $du = nx^{n-1}dx \qquad v = \frac{1}{a}e^{ax}$ $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

الدرس الرابع

التكامل بالأجزاء (كتاب التمارين)

1	$u = x \qquad dv = \cos 4x\, dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 4x$ $\int x\cos 4x\, dx = \frac{1}{4}x\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x\, dx = \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$
2	$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ $du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ $\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ $= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$
3	$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$ $du = dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$
4	$u = \ln x \qquad dv = (x^2+1)dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3 + x$ $\int (x^2+1)\ln x\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + C$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

5	$\int \ln x^3\,dx = \int 3\ln x\,dx$ $u = 3\ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{3}{x}dx \qquad v = x$ $\int 3\ln x\,dx = 3x\ln x - \int 3\,dx = 3x\ln x - 3x + C$
6	$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x\,dx$ $du = 2e^{2x}dx \qquad v = -\cos x$ $\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x\,dx$ $u = 2e^{2x} \qquad dv = \cos x\,dx$ $du = 4e^{2x}dx \qquad v = \sin x$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - \int 4e^{2x}\sin x\,dx$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$ $\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + C$ $\Rightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$
7	$u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$ $\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\big\|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\big\|_1^e - x\big\|_1^e = e - e + 1 = 1$
8	$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{-1}{x}$ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\|_1^2 + \int_1^2 x^{-2}\,dx = \frac{-\ln x}{x}\Big\|_1^2 - \frac{1}{x}\Big\|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

9

$$u = x \qquad dv = \cos\frac{1}{4}x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = 4\sin\frac{1}{4}x$$

$$\int_0^{\pi} x\cos\frac{1}{4}x\ dx = 4x\sin\frac{1}{4}x\Big|_0^{\pi} - \int_1^2 4\sin\frac{1}{4}x\ dx$$

$$= 4x\sin\frac{1}{4}x\Big|_0^{\pi} + 16\cos\frac{1}{4}x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16$$

10

$$u = e^{3x} \qquad dv = \cos 2x\,dx$$

$$du = 3e^{3x}dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \int \frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x\,dx$$

$$u = \frac{3}{2}e^{3x} \qquad dv = \sin 2x\,dx$$

$$du = \frac{9}{2}e^{3x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \int \frac{9}{4}e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}\left(2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{13}\left(2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3\right)$$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

11

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$$\int_1^e \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= x\ln(x+1)|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x+1)|_1^e - (x - \ln(x+1))|_1^e$$

$$= e\ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1)) + (1 - \ln 2)$$

$$= (1+e)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$$

12

$$\int x^2e^x\,dx$$

سنستخدم هنا طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2)|_0^1 = e - 2$$

13

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{x}dx \qquad v = x$

$$\int_2^4 \ln x\,dx = x\ln x|_2^4 - \int_2^4 dx = x\ln x|_2^4 - x|_2^4$$

$$= 4\ln 4 - 2\ln 2 - 2 = 8\ln 2 - 2\ln 2 - 2 = 6\ln 2 - 2$$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

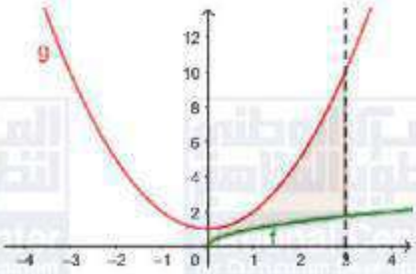
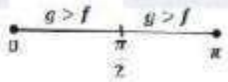
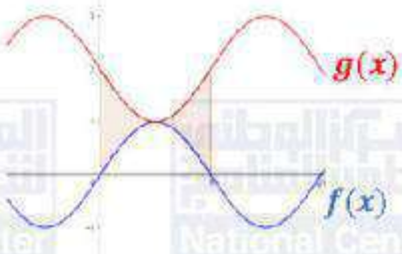
14	إن الإحداثيين x للنقطتين A, B هما أول حلين موجبين للمعادلة: $x \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \ldots$ ومنه: $A(\pi, 0), B(2\pi, 0)$
15	$Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx)$ $u = x \quad dv = \sin x \, dx$ $du = dx \quad v = -\cos x$ $\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$ $Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx)$ $= (-x\cos x + \sin x)\Big\|_0^{\pi} + (x\cos x - \sin x)\Big\|_{\pi}^{2\pi}$ $= \pi + 2\pi - (-\pi) = 4\pi$
16	$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$ $\Rightarrow A(1,0)$
17	$Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$ $u = \ln x \quad dv = x^2 dx$ $du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{1}{3}x^3$ $Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x \Big\|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2 \, dx$ $= \frac{1}{3}x^3 \ln x \Big\|_1^2 - \frac{1}{9}x^3 \Big\|_1^2$ $= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

الدرس الخامس

المساحات و الحجوم (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 74
1	$f(x) = h(x)$ $-2\cos x + 4 = 2\cos x + 2 \quad \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ الإحداثي x للنقطة A هو أكبر حل سالب لهذه المعادلة و هو $x = -\frac{\pi}{3}$: $\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{3}, f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\pi}{3}, 3\right)$ إحداثيا x للنقطتين B, C هما أصغر حلين موجبين للمعادلة، وهما: $x = \frac{\pi}{3}$ ، و : $x = \frac{5\pi}{3}$ $\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, 3\right) \quad , \quad C\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{5\pi}{3}, 3\right)$
2	$A(R_1) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (h(x) - f(x))dx$ $= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x + 2 - (-2\cos x + 4))dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos x - 2)dx$ $= 4\sin x - 2x\Big\|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - \left(-2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$ $A(R_2) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (f(x) - h(x))dx$ $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (-2\cos x + 4 - (2\cos x + 2))dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (2 - 4\cos x)dx$ $= 2x - 4\sin x\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$ $= \frac{10\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \quad = 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$

	أتحقق من فهمي صفحة 77
a	$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{x}$ هذه المعادلة ليس لها حلول إذ أن المنحنيين لا يتقاطعان كما في الشكل أدناه.  $A = \int_0^3 (x^2 + 1 - \sqrt{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^3$ $= 9 + 3 - 2\sqrt{3} - 0 = 12 - 2\sqrt{3}$
b	$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 - \sin x = \sin x$ $\Longrightarrow \sin x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$   نجد أن $g \geq f$ لكل قيم x، إذن: $A = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x))dx = \int_0^{\pi} ((2 - \sin x) - \sin x)dx$ $= \int_0^{\pi} (2 - 2\sin x)dx$ $= 2x + 2\cos x\|_0^{\pi} = 2\pi - 4$

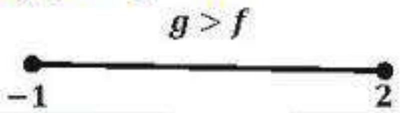
إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

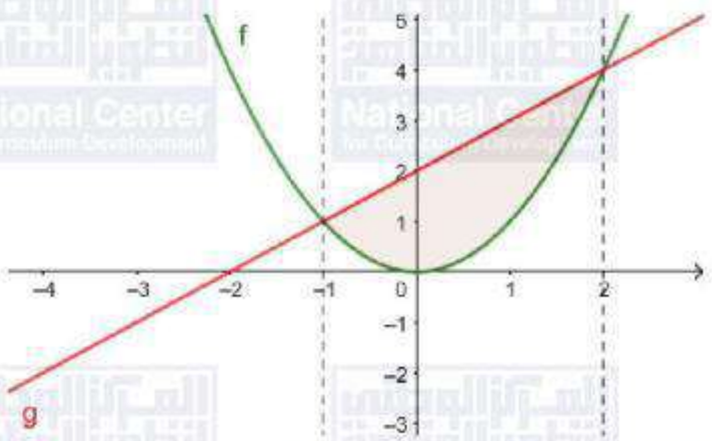
أتحقق من فهمي صفحة 79

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = -1$$





نلاحظ أن $f > g$ لكل قيم x في الفترة $(-1, \infty)$، إذن:

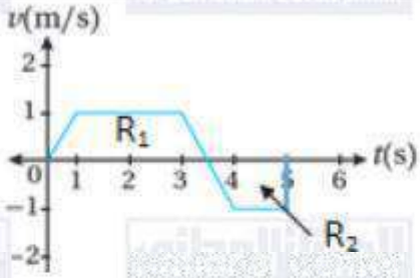
$$A = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 81

a



لتكن الإزاحة D

$$D = s(5) - s(0) = \int_{0}^{5} v(t)\,dt$$

$$= A(R_1) - A(R_2)$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 3.5)(1) - \frac{1}{2}(1 + 1.5)(1)$$

$$= 1.5 \text{ m}$$

b

المسافة التي قطعها الجسيم هي: $\int_0^5 |v(t)|\,dt$

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt = A(R_1) + A(R_2)$$

$$= \frac{1}{2}(5.5) + \frac{1}{2}(2.5)$$

$$= 4\text{ m}$$

c

في الفرع a وجدنا أن:

$$s(5) - s(0) = 1.5$$

وبتعويض $s(0) = 3$ نجد أنّ:

$$s(5) - 3 = 1.5 \Rightarrow s(5) = 4.5$$ - - - - - - - - -

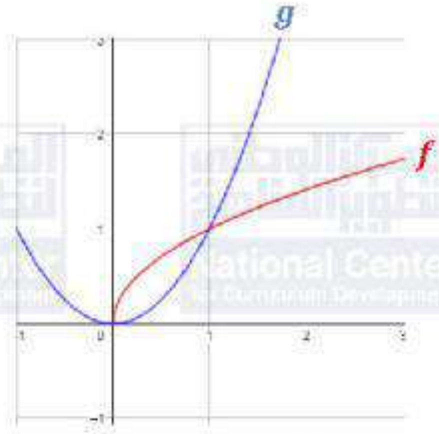
أتحقق من فهمي صفحة 82

$$V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 = \int_1^4 \frac{\pi}{x^2}\,dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_1^4 = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

أتحقق من فهمي صفحة 85

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x - x^4 = 0 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \qquad x = 1$$



نلاحظ أن منحنى f يقع فوق منحنى g في الفترة $(0, 1)$

$$V = \int_0^1 \pi\left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \pi(x - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0\right) = 0.3\pi$$

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 85
1	$A=\int_{-1}^{1}\left(x^2-(-2x^4)\right)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+2x^4)dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Big\vert_{-1}^{1}$ $=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{22}{15}$
2	$A=\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx+\int_{0}^{2}\left(x-(x^3-3x)\right)dx$ $=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big\vert_{-2}^{0}+\left(2x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\vert_{0}^{2}$ $=(0)-(4-8)+(8-4)-(0)=8$
3	$A=\int_{0}^{3}(e^{0.5x}-e^{-0.5x})dx=(2e^{0.5x}+2e^{-0.5x})\Big\vert_{0}^{3}$ $=(2e^{1.5}+2e^{-1.5})-(2+2)$ $=2e^{1.5}+2e^{-1.5}-4$
4	$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2x-\sin x)dx$ $=(\tan x+\cos x)\Big\vert_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ $=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(0+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$
5	$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{1}{2}x^2+6=2x^2\Rightarrow\frac{3}{2}x^2=6\Rightarrow x^2=4$ $\Rightarrow x=2,\quad x=-2$ $A=\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+6-2x^2\right)dx$ $=\int_{-2}^{2}\left(6-\frac{3}{2}x^2\right)dx=\left(6x-\frac{1}{2}x^3\right)\Big\vert_{-2}^{2}$ $=(12-4)-(-12+4)=16$

6	$f(x) = g(x) \Rightarrow 3^x = 4^x \Rightarrow x = 0$ $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (4^x - 3^x)dx = \left(\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3}\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3}\right) - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3}\right)$ $= \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3} \approx 0.344$
7	$f(x) = g(x) \Rightarrow e^x = \cos x$ نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير السالب: $x = 0$ في الربع الأول: يكون $\cos x \leq 1$ بينما $e^x \geq 1$ ، إذن: $e^x \geq \cos x$ $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - \cos x)dx = (e^x - \sin x)\|_0^{\frac{\pi}{2}}$ $= \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) - (1 - 0)$ $= e^{\frac{\pi}{2}} - 2$
8	$g(x) = f(x) \Rightarrow x^4 = \|x\| \Rightarrow x^4 = x \text{ or } x^4 = -x$ $x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$ $x^4 = -x \Rightarrow x^4 + x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ إذن، يتقاطع المنحنيان عند $x = -1, x = 0, x = 1$ ، ويكون في الفترتين $f(x) > g(x)$ $A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx$ نجزئ هذا التكامل بسبب تغيير قاعدة $f(x)$ حول $x = 0$، نحسب هذه المساحة على النحو الآتي: $A = \int_{-1}^0 (-x - x^4)dx + \int_0^1 (x - x^4)dx$ $= \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_0^1$ $= (0) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0) = \frac{3}{5}$

9

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 3x^3-x^2-10x=-x^2+2x$$

$$\Rightarrow 3x^3-12x=0\Rightarrow 3x(x^2-4)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=-2, x=2$$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 2- و0 مثل 1- نجد أنّ:

$$f(-1)=-3-1+10=6, g(-1)=-1-2=-3$$

← $f(x)>g(x)$ في الفترة $(-2,0)$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 0 و2 مثل 1 نجد أنّ:

$$f(1)=3-1-10=-8, g(1)=-1+2=1$$

← $f(x)<g(x)$ في الفترة $(0,2)$

$$A=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(3x^3-x^2-10x-(-x^2+2x)\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-x^2+2x-(3x^3-x^2-10x)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(3x^3-12x)dx+\int_{0}^{2}(12x-3x^3)dx$$

$$=\left(\frac{3}{4}x^4-6x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(6x^2-\frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{2}=24$$

10

$$f(x)=g(x)\Rightarrow e^x=x^2$$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لمعرفة أن $f(x)>g(x)$ في الفترة $[0,\infty)$

$$A=\int_{0}^{1}(e^x-x^2)dx=\left(e^x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\left(e-\frac{1}{3}\right)-(1-0)\ =e-\frac{4}{3}$$

11

$$f(x)=h(x)\Rightarrow \frac{1}{2}x^2=4\sqrt{x}\Rightarrow \frac{1}{4}x^4=16x\Rightarrow x^4-64x=0$$

$$\Rightarrow x(x^3-64)=0\Rightarrow x=0, x=4$$

$h(x)>f(x)$ في الفترة $(0,4)$

$$A=\int_{0}^{4}(h(x)-f(x))dx=\int_{0}^{4}\left(4\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_{0}^{4}=\left(\frac{64}{3}-\frac{32}{3}\right)-(0)\ =\frac{32}{3}$$

12	من التماثل فإن $B(-a,a^2)$ لتكن مساحة المنطقة المطلوبة هي: $\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-a}^{a}$ $=\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(-a^3+\frac{1}{3}a^3\right)=2a^3-\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3$ مساحة المستطيل $ABCD$ هي: $2a\times a^2=2a^3$ إذن، المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة AB تساوي $\frac{2}{3}$ مساحة المستطيل $ABCD$.
13	$A\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{17}{2}\right)$ $B(2,f(2))=\left(2,\frac{5}{2}\right)$ ميل AB: $\frac{\frac{17}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}-2}=-4$ $\Leftarrow$ معادلة المستقيم AB: $y-\frac{5}{2}=-4(x-2)$ $\Rightarrow y=\frac{21}{2}-4x$ المساحة المطلوبة هي: $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{2}-4x-(2x^{-2}+x)\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{2}-5x-2x^{-2}\right)dx$ $=\left(\frac{21}{2}x-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{x}\right)\Big\vert_{\frac{1}{2}}^{2}=21-10+1-\left(\frac{21}{4}-\frac{5}{8}+4\right)=\frac{27}{8}$
14	لتكن الإزاحة D. $D=s(8)-s(0)=\int_0^8 v(t)\,dt=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^4 v(t)\,dt+\int_4^8 v(t)\,dt$ $\int_0^1 v(t)\,dt$ يساوي مساحة المثلث الأيسر في الرسم البياني وهي: $\frac{1}{2}(1)(2)=1$ $\int_1^4 v(t)\,dt$ يساوي معكوس مساحة شبه المنحرف في الرسم البياني فهو يساوي: $-\frac{1}{2}(1+3)(2)=-4$ $\int_4^8 v(t)\,dt$ يساوي مساحة المثلث الأيمن في الرسم البياني وهي: $\frac{1}{2}(4)(4)=8$ إذن، إزاحة الجسيم هي: $s(8)-s(0)=1+(-4)+8=5\text{ m}$

15	المسافة التي قطعها الجسيم هي : $\int_0^8 \lvert v(t)\rvert dt$ $\int_0^8 \lvert v(t)\rvert dt = \int_0^1 \lvert v(t)\rvert dt + \int_1^4 \lvert v(t)\rvert dt + \int_4^8 \lvert v(t)\rvert dt$ $= 1 + 4 + 8 = 13 \text{ m}$
16	$s(8) - s(0) = 5$ وبتعويض $s(0) = 5$ نجد أنّ: $s(8) - 5 = 5 \Rightarrow s(8) = 10 \text{ m}$
17	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2$ $\Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ $\Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2$ $\Rightarrow A(2,9), B(5,0)$
18	$V = \int_2^5 \pi((5+4x-x^2)^2 - (x^2-10x+25)^2)dx$ $V = \int_2^5 \pi(12x^3 - 144x^2 + 540x - 600)dx$ $= 12\pi \int_2^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50)dx$ $= 12\pi\left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 50x\right)\Big\vert_2^5$ $= 12\pi(\left(\frac{1}{4}(5)^4 - 4(5)^3 + \frac{45}{2}(5)^2 - 50(5)\right)$ $-\left(\frac{1}{4}(2)^4 - 4(2)^3 + \frac{45}{2}(2)^2 - 50(2)\right)) = 81\pi$
19	$V = \int_0^\pi \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin x\, dx = -\pi \cos x\vert_0^\pi$ $= -\pi(\cos\pi - \cos 0) = 2\pi$

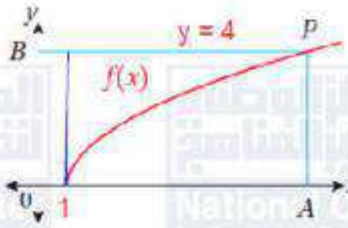
إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

20	$x^3=\sqrt{x}\Rightarrow x^6=x\Rightarrow x^6-x=0\Rightarrow x(x^5-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$ لكل $x\in(0,1)$ يكون $\sqrt{x}>x^3$ $V=\int_0^1 \pi\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx=\pi\int_0^1(x-x^6)dx$ $=\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{7}x^7\right)\Big\|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-0\right)=\frac{5\pi}{14}$
21	$1+\sec x=3\Rightarrow \sec x=2\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3},x=\frac{\pi}{3}$ نلاحظ أن المنحنيين يقعان فوق المحور x وأن $f(x)=1+\sec x<3$ في الفترة $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ $\int \sec x\,dx=\int \sec x\times\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx$ $=\int\frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx=\ln\|\sec x+\tan x\|+C$ $V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\pi(9-(1+\sec x)^2)dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(9-(1+2\sec x+\sec^2 x))dx$ $=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(8-2\sec x-\sec^2 x)dx$ $=\pi(8x-2\ln\|\sec x+\tan x\|-\tan x)\Big\|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$ $=\pi\left(\left(\frac{8\pi}{3}-2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}\right)-\left(\frac{-8\pi}{3}-2\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right)\right)$ $=\pi\left(\frac{16\pi}{3}+2\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)-2\sqrt{3}\right)$
22	$x^2=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow x(x^3-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$ $A=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

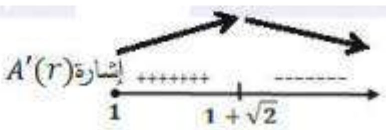
إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

23	$x^3 = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x^9 = x \Rightarrow x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8-1) = 0$ $\Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$ $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, (\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{512} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} > x^3,\ \ 0 < x < 1$ $(\frac{-1}{8})^{\frac{1}{3}} = \frac{-1}{2}, (\frac{-1}{8})^3 = \frac{-1}{512} \Rightarrow x^3 > x^{\frac{1}{3}},\ \ -1 < x < 0$ $A = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{3}} - x^3\right)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big\vert_{-1}^{0} + \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 0 = 1$
24	أولا: إذا كان n زوجيًا يتقاطع المنحنيان عند $x = 0, x = 1$ (كما في السؤال22) $A = \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big\vert_{0}^{1} = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} - 0$ $= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$ ثانيا: إذا كان n فرديًا يتقاطع المنحنيان عند $x = 0, x = 1, x = -1$ (كما في السؤال23) $A = \int_{-1}^{0}\left(x^n - x^{\frac{1}{n}}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right)dx$ $= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right)\Big\vert_{-1}^{0} + \left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $= 0 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) + \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{-1+n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}$ $= \frac{2(n-1)}{n+1}$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

25	$\sqrt{2x-2}=0 \Rightarrow x=1$  نقسم المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى قسمين برسم المستقيم $x=1$، ونجد المساحة كما يأتي: $A=\int_0^1 4\,dx+\int_1^9\left(4-\sqrt{2x-2}\right)dx$ $=(4x)\Big\|_0^1+\left(4x-\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big\|_1^9$ $=4-0+36-\frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}-(4-0)=\frac{44}{3}$
26	$A=\int_1^9\sqrt{2x-2}\,dx=\frac{1}{3}(2x-2)^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^9=\frac{1}{3}\left((16)^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{64}{3}$
27	$2\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$ نقسم المنطقة إلى قسمين برسم المستقيم $x=2$، ونجد الحجم كما يأتي: $V=\pi\int_0^2 5^2\,dx+\pi\int_2^6\left(5^2-\left(2\sqrt{x-2}\right)^2\right)dx$ $=\pi\int_0^2 25\,dx+\pi\int_2^6(25-(4x-8))\,dx$ $=50\pi+\pi\int_2^6(33-4x)\,dx=50\pi+\pi(33x-2x^2)\Big\|_2^6$ $=50\pi+\pi(33(6)-72-66+8)\|$ $=118\pi$
28	$y=x^3-5x^2+3x+10$ $f'(x)=3x^2-10x+3=0 \Rightarrow (3x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=3$ نقطة القيمة العظمى هي: $B\left(\frac{1}{3},f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{283}{27}\right)$ نقطة القيمة الصغرى هي: $C(3,f(3))=(3,1)$

	النقطة A تقع على محور y إذن إحداثياها هما: $A(0, f(0)) = (0, 10)$ ميل المنحنى عند A هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = 0 - 0 + 3 = 3$ معادلة مماس المنحنى $f(x)$ عند النقطة A هي (حيث $f'(0) = 3$): $y - 10 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 10$ وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ نفسها. إذن، $\overleftrightarrow{AD}$ مماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة A.
30	$A = \int_0^3 \left(3x + 10 - (x^3 - 5x^2 + 3x + 10)\right) dx$ $= \int_0^3 (5x^2 - x^3)\, dx = \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_0^3 = 45 - \frac{81}{4} - 0 = \frac{99}{4}$
31	$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ or $x = \frac{5\pi}{4}$ نلاحظ من الرسم المعطى أن x تقع في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$. إذن، إحداثيا النقطة A هما: $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
32	$A(R_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$ $= (\sin x + \cos x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1$ $A(R_2) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ $= -\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$ $A(R_3) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx$ $= (-\cos x - \sin x)\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + (-\cos x)\Big\|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sqrt{2}$

33	$\frac{A(R_1)}{A(R_2)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن، $A(R_1):A(R_2)=\sqrt{2}:2$
34	$y=x^r\ ,y'=rx^{r-1}$ ميل المماس عند $(1,1)$ هو: r معادلة المماس هي: $y-1=r(x-1)\Rightarrow y=rx+1-r$ لإيجاد المقطع x لهذا المماس نضع $y=0$ في معادلته: $0=rx+1-r\Rightarrow x=\frac{r-1}{r}$ إذن، يقطع هذا المماس المحور x في النقطة $(\frac{r-1}{r},0)$
35	مساحة المنطقة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x والمستقيمين x=0, x=1 مطروحًا منها مساحة المثلث الذي رؤوسه $(\frac{r-1}{r},0)$, $(1,0),(1,1)$، أي أنّ $A(R)$ هي: $A(R)=\int_0^1 x^r\,dx-\frac{1}{2}(1-\frac{r-1}{r})(1)$ $=\frac{x^r}{r+1}\Big\vert_0^1-\frac{1}{2r}=\frac{1}{r+1}-\frac{1}{2r}=\frac{2r-r-1}{2r(r+1)}=\frac{r-1}{2r(r+1)}$
36	$A(r)=\frac{r-1}{2r^2+2r}\ ,r\geq 1$ $A'(r)=\frac{2r^2+2r-(r-1)(4r+2)}{(2r^2+2r)^2}=\frac{-2(r^2-2r-1)}{(2r^2+2r)^2}=0$ $\Rightarrow r^2-2r-1=0\Rightarrow r=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$ ولأنّ $r\geq 1$ تكون القيمة الحرجة $1+\sqrt{2}$  إذن، قيمة r التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي: $r=1+\sqrt{2}$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

37	$f'(x) = 2x - 4$ ميل المماس عند النقطة $(1,3)$ هو: $f'(1) = -2$ ميل العمودي على المماس عند النقطة $(1,3)$ هو: $\frac{1}{2}$ معادلة العمودي: $y - 3 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ نجد نقاط تقاطع المنحنى والعمودي على المماس: $x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0$ $\Rightarrow (2x-7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}, x = 1$ $\Rightarrow P\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{17}{4}\right)$
38	$A = \int_1^{\frac{7}{2}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - (x^2 - 4x + 6)\right) dx$ $= \int_1^{\frac{7}{2}} \left(\frac{9}{2}x - \frac{7}{2} - x^2\right) dx = \left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^{\frac{7}{2}}$ $= \left(\frac{9}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3\right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right)$ $= \frac{125}{48} \approx 2.604$
39	$\int_{-1}^{1} \left(k(1-x^2) - 2k(x^2-1)\right) dx = 8$ $\Rightarrow \int_{-1}^{1} \left(k(1-x^2) + 2k(1-x^2)\right) dx = 8$ $\Rightarrow 3k \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = 8$ $3k\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-1}^{1} = 8$ $3k\left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = 8$ $3k\left(2 - \frac{2}{3}\right) = 8 \Rightarrow 3k\left(\frac{4}{3}\right) = 8 \Rightarrow k = 2$

الدرس الخامس
المساحات و الحجوم (كتاب التمارين)

1	ملاحظة هامة: يرجى تعديل المعادلة $y=1$ في الرسم إلى $y=2$ $A=\int_0^{\pi}(2-(1+\cos 2x))\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\|_0^{\pi}=(\pi-0)-(0-0)=\pi$
2	$1+10x-2x^2=1+5x-x^2\Rightarrow x^2-5x=0$ $\Rightarrow x(x-5)=0\Rightarrow x=0,x=5$ $\Rightarrow A=\int_0^5\left(1+10x-2x^2-(1+5x-x^2)\right)dx$ $=\int_0^5(5x-x^2)\,dx=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^5=\frac{125}{2}-\frac{125}{3}=\frac{125}{6}$
3	$A=\int_0^2\left(3x-x^2-(x)\right)dx=\int_0^2(2x-x^2)\,dx$ $=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$
4	$A=\int_{-1}^2\left((x^2+1)-(2x-2)\right)dx=\int_{-1}^2(x^2-2x+3)\,dx$ $=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Big\|_{-1}^2=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-3\right)=9$
5	$x^2=2-x\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow(x+2)(x-1)=0\Rightarrow x=-2,x=1$ $A=\int_{-2}^1\left((2-x)-(x^2)\right)dx=\int_{-2}^1(2-x-x^2)\,dx$ $=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-2}^1=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}$
6	$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow x^2=x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$ لكن $x\neq 0$ لأن الاقترانين غير معرفين عند $x=0$، إذن يتقاطع المنحنيان في نقطة واحدة عند $x=1$ $A=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln\|x\|+\frac{1}{x}\right)\Big\|_1^2=\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)-(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$

7	$1-\cos x=\cos x \Rightarrow 2\cos x=1 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ $\cos x>1-\cos x, \quad 0<x<\frac{\pi}{3}$ $\cos x<1-\cos x, \quad \frac{\pi}{3}<x<\pi$ $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x-(1-\cos x))\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos x-(\cos x))\,dx$ $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-2\cos x)\,dx$ $=(2\sin x-x)\big\|_0^{\frac{\pi}{3}}+(x-2\sin x)\big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$
8	$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4=4-\frac{1}{2}x \Rightarrow 3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x=0$ $\Rightarrow \sqrt{x}\left(3-x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \;\; ,x-\frac{1}{2}\sqrt{x}-3=0$ $\Rightarrow x=0 \;\; ,2x-\sqrt{x}-6=0$ $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2, \qquad \sqrt{x}>0 \Rightarrow u>0$ $2x-\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow 2u^2-u-6=0$ $(2u+3)(u-2)=0 \Rightarrow u=-\frac{3}{2}, u=2 \Rightarrow x=4$ (الحل السالب مرفوض) $\Rightarrow x=0 \;\; , \;\; x=4$ $\Rightarrow A(4,2)$
9	$A=\int_0^4\left(\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+4\right)-\left(4-\frac{1}{2}x\right)\right)dx$ $=\int_0^4\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x\right)dx=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)\Big\|_0^4$ $=16-\frac{64}{5}+4=\frac{36}{5}=7.2$
10	$s(7)-s(0)=\int_0^7 v(t)\,dt=-A_1+A_2-A_3$ $=-\frac{1}{2}(2)(1)+\frac{1}{2}(2)(4+1)-\frac{1}{2}(2)(1)=-1+5-1=3\text{ m}$

11	$d = \int_0^7 \lvert v(t)\rvert\, dt = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + 5 + 1 = 7\text{ m}$
12	$s(7) - s(0) = 3\text{ m} \Rightarrow s(7) - 2 = 3 + 2 = 5\text{ m}$
13	$\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -2$ $V = \pi\int_0^3 \left((g(x))^2 - (f(x))^2\right) dx = \pi\int_0^3 \left(\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right) dx$ $= \pi\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3 - \frac{1}{20}x^5\right)\Big\|_0^3 = \frac{153\pi}{5} = 30.6\pi$
14	$V = \pi\int_e^{e^3} (f(x))^2\, dx = \pi\int_e^{e^3} \ln x\, dx$ $u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$ $V = \pi\int_e^{e^3} \ln x\, dx = \pi(x\ln x\|_e^{e^3} - \int_e^{e^3} dx) = \pi(x\ln x\|_e^{e^3} - x\|_e^{e^3})$ $= \pi(3e^3 - e - e^3 + e) = 2\pi e^3$
15	$x^2 = \sqrt{2x} \Rightarrow x^4 = 2x \Rightarrow x^4 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{2}$ $V = \pi\int_0^{\sqrt[3]{2}} \left((\sqrt{2x})^2 - (x^2)^2\right) dx = \pi\int_0^{\sqrt[3]{2}} (2x - x^4)\, dx$ $= \pi\left(x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big\|_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi\left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5}\right) = \frac{3\pi\sqrt[3]{4}}{5}$
16	$y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3, x = 3$ $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2$ $V = \pi\int_{-3}^3 (y^2 - (4)^2)\, dx = \pi\int_{-3}^3 (25 - x^2 - 16)\, dx = \pi\int_{-3}^3 (9 - x^2)\, dx$ $= \pi\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-3}^3 = \pi((27-9) - (-27+9)) = 36\pi$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

الدرس السادس
المعادلة التفاضلية (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 91
1	$\frac{dA}{dt} = 2(20 - A)$ $\int \frac{dA}{20 - A} = \int 2\,dt$ $-\ln\lvert 20 - A\rvert = 2t + K$ (K هو ثابت التكامل) $-\ln 15 = 0 + K \Rightarrow K = -\ln 15$ (بتعويض الزمن 0 ودرجة الحرارة 5) $\Rightarrow -\ln\lvert 20 - A\rvert = 2t - \ln 15$ $\Rightarrow \ln\lvert \frac{15}{20 - A}\rvert = 2t$ إذن، يمكن نمنجة درجة الحرارة C بعد t ساعة بالعلاقة الآتية: $\ln\lvert \frac{15}{20 - A}\rvert = 2t$
2	نعوض $A = 18$ في العلاقة: $\ln\lvert \frac{15}{20-A}\rvert = 2t$ فينتج: $\ln\lvert \frac{15}{20 - 18}\rvert = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ln\frac{15}{2} = \frac{\ln 15 - \ln 2}{2} \approx 1$ إذن، تصبح درجة حرارة السائل 18°C بعد مرور ساعة واحدة تقريبًا بعد وضعه في الغرفة.
	أتحقق من فهمي صفحة 92
a	$y' = 4e^x + 15e^{3x}$ $y'' = 4e^x + 45e^{3x}$ $y'' - 4y' + 3y = 4e^x + 45e^{3x} - 4(4e^x + 15e^{3x}) + 3(4e^x + 5e^{3x}) = 0$ إذن $y = 4e^x + 5e^{3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$
b	$y' = \cos x$ $y'' = -\sin x$ $y'' - 4y' + 3y = -\sin x - 4\cos x + 3\sin x = 2\sin x - 4\cos x \neq 0$ إذن $y = \sin x$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 3y = 0$

	أتحقق من فهمي صفحة 94
	$\frac{dy}{dx}=5\sec^2x-\frac{3}{2}\sqrt{x}\Rightarrow dy=\left(5\sec^2x-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$ $\int dy=\int\left(5\sec^2x-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$ الحل العام لهذه المعادلة هو: $y=5\tan x-x^{\frac{3}{2}}+C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض النقطة $(0, 7)$ في الحل العام: $7=0-0+C\Rightarrow C=7$ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق النقطة $(0, 7)$ هو: $y=5\tan x-x^{\frac{3}{2}}++7$
	أتحقق من فهمي صفحة 96
a	$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^4}\Rightarrow 2x\,dx=y^4\,dy$ $\Rightarrow\int 2x\,dx=\int y^4\,dy\Rightarrow\frac{1}{5}y^5=x^2+C$
b	$\frac{dy}{dx}=2x-xe^y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x(2-e^y)$ $\Rightarrow\frac{dy}{2-e^y}=x\,dx$ $\Rightarrow\int x\,dx=\int\frac{1}{2-e^y}\times\frac{e^{-y}}{e^{-y}}\,dy$ $\Rightarrow\int x\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2e^{-y}}{2e^{-y}-1}\,dy$ $\Rightarrow\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}\ln\|2e^{-y}-1\|+C\Rightarrow x^2=-\ln\|2e^{-y}-1\|+C$
c	$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sin x}{y}\Rightarrow y\,dy=x\sin x\,dx$ $\Rightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ نجد $\int x\sin x\,dx$ بالأجزاء: $u=x$ $dv=\sin x\,dx$ $du=dx$ $v=-\cos x$ $\Rightarrow\int y\,dy=\int x\sin x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x-\int-\cos x\,dx$ $\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-x\cos x+\sin x+C$

d	$\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2\cos^2 x$ $\sin^2 x dy = y^2\cos^2 x\, dx$ $\frac{dy}{y^2} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx \Rightarrow \int y^{-2}\, dy = \int \cot^2 x\, dx$ $\int y^{-2}\, dy = \int (\csc^2 x - 1)\, dx$ $\Rightarrow \frac{-1}{y} = -\cot x - x + C \Rightarrow \frac{1}{y} = x + \cot x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 98
a	$dy = xy^2 e^{2x}\, dx$ $\int \frac{dy}{y^2} = \int xe^{2x}\, dx$ $u = x \qquad dv = e^{2x} dx$ $du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx$ الحل العام هو: $\Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ بتعويض $(0,1) \Rightarrow -1 = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$ الحل الخاص هو: $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{3}{4}$
b	$\frac{dy}{y} = \cos x\, dx$ الحل العام هو : $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x + C$ بتعويض $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$ الحل الخاص: $\ln\lvert y\rvert = \sin x - 1$

	أتحقق من فهمي صفحة 100
	$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1} \Rightarrow \frac{ds}{s} = t\sqrt{t+1}dt$ $\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$ $u = t+1 \Rightarrow du = dt \quad , \quad t = u-1$ $\int t\sqrt{t+1}dt = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du$ $= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$ $\int \frac{ds}{s} = \int t\sqrt{t+1}dt$ $\Rightarrow \ln\|s\| = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$ الموقع s(t) لا يمكن أن يكون 0 لأن ln 0 غير معرف ولا يمكن أن يكون سالبًا لأن s(0) = 1 واقتران الموقع متصل، ولذا يمكننا أن نحذف رمز القيمة المطلقة ونعتبر $\ln\|s\| = \ln s$ بتعويض s=1 عندما t=0 ينتج: $0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{4}{15}$ $\Rightarrow \ln s = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}$ نعوض t=3 لنجد s الموقع المطلوب: $\ln s(3) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15} = \frac{116}{15} \Rightarrow s(3) = e^{\frac{116}{15}}$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

	أتحقق من فهمي صفحة 102
a	$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000}p(1000-P)$ $\int \frac{dP}{P(1000-P)} = \int \frac{1}{20000}\,dt$ بتجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر: $\int \left(\frac{\frac{1}{1000}}{P} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000-P}\right)dP = \int \frac{1}{20000}\,dt$ حل عام: $\frac{1}{1000}\ln\|P\| - \frac{1}{1000}\ln\|1000-P\| = \frac{1}{20000}t + C$ $20\ln\|P\| - 20\ln\|1000-P\| = t + C$ $20\ln\left\|\frac{P}{1000-P}\right\| = t + C$ بتعويض $P = 2500$ عند $t = 0$ ينتج: $C = 20\ln\frac{2500}{1500} = 20\ln\frac{5}{3} \quad \Rightarrow 20\ln\left\|\frac{P}{1000-P}\right\| = t + 20\ln\frac{5}{3}$
b	نعوض $P = 1800$ في المعادلة الأخيرة: $\Rightarrow 20\ln\left(\frac{9}{4}\right) = t + 20\ln\frac{5}{3} \Rightarrow t = 20\ln\frac{27}{20} \approx 6$ إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريبًا من بدء الدراسة.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 102
1	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $xy' - y = x\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \neq 0$ إذن، $y = \sqrt{x}$ ليس حلًا للمعادلة التفاضلية $xy' - y = 0$
2	$y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - 5 = \ln x - 4$ $y'' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'' - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ إذن $y = x\ln x - 5x + 7$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' - \frac{1}{x} = 0$

3	$y' = \sec^2 x$ $y' + y^2 = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x \neq 1$ إذن $y = \tan x$ ليس حلًّا للمعادلة التفاضلية $y' + y^2 = 1$
4	$y' = e^x + 3xe^x + 3e^x = 4e^x + 3xe^x$ $y'' = 4e^x + 3xe^x + 3e^x = 7e^x + 3xe^x$ $y'' - 2y' + y = 7e^x + 3xe^x - 8e^x - 6xe^x + e^x + 3xe^x = 0$ إذن $y = e^x + 3xe^x$ هو حلّ للمعادلة التفاضلية $y'' - 2y' + y = 0$
5	$\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$ $\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 3x\,dx$ $\Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x^2 + C$
6	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = -3x\,dx$ $\int y^2 dy = \int -3x\,dx$ $\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{3}{2}x^2 + C$
7	$\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y\ dx$ $\frac{dy}{\sin y} = \cos x\ dx \quad \Rightarrow \int \csc y\,dy = \int \cos x\ dx$ نجد $\int \csc y\,dy$ على النحو الآتي: $\int \csc y\,dy = \int \csc y \times \frac{\csc y + \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= \int \frac{\csc^2 y + \csc y \cot y}{\csc y + \cot y} dy$ $= -\int \frac{-(\csc^2 y + \csc y \cot y)}{\csc y + \cot y} dy = -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert$ إذن، حل هذه المعادلة هو: $\Rightarrow -\ln\lvert\csc y + \cot y\rvert = \sin x + C$

8	$dy=\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ $\int dy=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ بالتعويض: $u=x^2+1\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\Rightarrow\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x}{u^2}\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2}du$ $=-\frac{1}{2u}+C=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$ $\Rightarrow\int dy=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx\Rightarrow y=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$
9	$\frac{dy}{dx}=xe^xe^y\Rightarrow\frac{dy}{e^y}=xe^xdx$ $\int\frac{dy}{e^y}=\int xe^xdx$ $\Rightarrow\int e^{-y}dy=\int xe^xdx\Rightarrow -e^{-y}=\int xe^xdx$ لإيجاد $\int xe^xdx$ نستخدم الأجزاء: $u=x\qquad dv=e^xdx$ $du=dx\qquad v=e^x$ $\Rightarrow\int xe^xdx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$ $\Rightarrow -e^{-y}=xe^x-e^x+C$
10	$\frac{dy}{y^2}=\frac{x^{-2}}{e^{-\frac{1}{x}}}dx=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx\Rightarrow\int y^{-2}dy=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx\Rightarrow -y^{-1}=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ لإيجاد $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ نستخدم التعويض: $u=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow dx=-x^2\,du$ $\Rightarrow\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int\frac{e^u}{x^2}\times -x^2\,du=\int -e^u\,du=-e^u+C=-e^{\frac{1}{x}}+C$ $-y^{-1}=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx\Rightarrow\frac{1}{y}=e^{\frac{1}{x}}+C$

11	$\frac{dy}{y}=\frac{x}{x-3}dx$ $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x}{x-3}dx$ $\int\frac{dy}{y}=\int\left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx$ $\ln\|y\|=x+3\ln\|x-3\|+C$
12	$\frac{dy}{\sin^2 y}=\frac{3x^2}{(x^3+2)}dx$ $\int\frac{dy}{\sin^2 y}=\int\frac{3x^2}{(x^3+2)}dx$ $\int\csc^2 y\,dy=\int\frac{3x^2}{x^3+2}dx$ $-\cot y=\ln\|x^3+2\|+C$
13	$\frac{dy}{y^3}=\ln x\,dx$ $\int\frac{dy}{y^3}=\int\ln x\,dx$ لإيجاد $\int\ln x\,dx$ نستخدم الأجزاء: $u=\ln x \qquad dv=dx$ $du=\frac{dx}{x} \qquad v=x$ $\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$ $\Rightarrow\int y^{-3}dy=\int\ln x\,dx\Rightarrow-\frac{1}{2}y^{-2}=x\ln x-x+C$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

14	$\frac{dy}{y^2-1}=2x^3dx$ $\int\frac{dy}{y^2-1}=\int 2x^3dx$ لإيجاد $\int\frac{dy}{y^2-1}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{y^2-1}=\frac{1}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}$ $A(y+1)+B(y-1)=1 \implies y=1\implies A=\frac{1}{2}$ $\implies\frac{1}{y^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{y+1} \implies\int\frac{dy}{y^2-1}=\int 2x^3dx$ $\implies\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{y+1}\right)dy=\int 2x^3dx$ $\implies\frac{1}{2}\ln\lvert y-1\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert y+1\rvert=\frac{1}{2}x^4+C \implies \ln\left\lvert\frac{y-1}{y+1}\right\rvert=x^4+C$
15	$y\,dy=\sin^3x\cos^2x\,dx$ $\int y\,dy=\int\sin^3x\cos^2x\,dx$ لإيجاد $\int\sin^3x\cos^2x\,dx$ نستخدم التعويض: $u=\cos x\implies dx=\frac{du}{-\sin x}$ $\int\sin^3x\cos^2x\,dx=\int\sin^3x\,u^2\frac{du}{-\sin x}$ $=\int-\sin^2x\,u^2\,du=\int(-1+\cos^2x)\,u^2\,du$ $=\int(-1+u^2)\,u^2\,du=\int(u^4-u^2)\,du$ $=\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x+C$ $\implies\int y\,dy=\int\sin^3x\cos^2x\,dx$ $\implies\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

16	$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}\ dx$ $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x}\, dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx \Rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$
17	$\frac{dy}{y} = \ln x^{\frac{1}{2}}\ dx$ لإيجاد $\int \ln x\, dx$ نستخدم الأجزاء: $u = \ln x \qquad dv = dx$ $du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$ $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$ $\Rightarrow \int \frac{1}{2} \ln x\ dx = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2} \ln x\ dx \Rightarrow \ln\|y\| = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$
18	$(2x+1)(x+2)dy = -3(y-2)dx$ $\int -\frac{1}{3} \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(2x+1) = 1$ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$ $x = -2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{(2x+1)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$ $\Rightarrow \int -\frac{1}{3} \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{(2x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow -\frac{1}{3} \ln\|y-2\| = \frac{1}{3} \ln\|2x+1\| - \frac{1}{3} \ln\|x+2\| + C$ $\Rightarrow -\ln\|y-2\| = \ln\|2x+1\| - \ln\|x+2\| + C$

19	$\frac{dy}{dx}=y^2\sqrt{4-x} \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=\sqrt{4-x}dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int\sqrt{4-x}\,dx$ $\int y^{-2}dy=\int(4-x)^{\frac{1}{2}}dx$ $-\frac{1}{y}=-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+C$ الحل العام نجد الحل الخاص بتعويض $(1,2)$: $-\frac{1}{2}=-2\sqrt{3}+C \Rightarrow C=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{y}=-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ الحل الخاص هو:
20	$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin^2x}{y} \Rightarrow ydy=2\sin^2x\,dx \Rightarrow \int ydy=\int 2\sin^2x\,dx$ $\int ydy=\int(1-\cos 2x)dx$ $\frac{1}{2}y^2=x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$ الحل العام : نجد الحل الخاص بتعويض $(0,1)$: $\frac{1}{2}=0+C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}y^2=x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}$ الحل الخاص :
21	$\frac{dy}{dx}=2\cos^2x\cos^2y$ $\frac{dy}{\cos^2y}=2\cos^2xdx$ $\int\frac{dy}{\cos^2y}=\int 2\cos^2xdx$ $\int\sec^2ydy=\int(1+\cos 2x)dx$ $\tan y=x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$ الحل العام : $1=0+0+C$ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ نجد الحل الخاص بتعويض $C=1$ $\tan y=x+\frac{1}{2}\sin 2x+1$ الحل الخاص :

22

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y} \Rightarrow \int e^y dy=\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$$

لإيجاد $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ نستخدم التعويض:

$$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx=\int \cos x\, e^{u}\times\frac{du}{\cos x}=\int e^u\, du=e^u+C$$

$$=e^{\sin x}+C$$

$$\Rightarrow \int e^y dy=\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$$

الحل العام : $e^y=e^{\sin x}+C$

نجد الحل الخاص بتعويض $(\pi,0)$:

$$e^0=e^0+C$$

$$\Rightarrow C=0$$

الحل الخاص : $e^y=e^{\sin x}$

23

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} \Rightarrow \int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$$

لإيجاد $\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx$ نستخدم الكسور الجزئية:

$$\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{A}{3x-8}+\frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(3x-8)=8x-18$$

$$x=2\Rightarrow B=1$$

$$x=\frac{8}{3}\Rightarrow A=5$$

$$\Rightarrow\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}dx\Rightarrow y=\int\left(\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

الحل العام: $\Rightarrow y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+C$

نجد الحل الخاص بتعويض $(3,8)$:

$$8=0+0+C \quad\Rightarrow C=8$$

الحل الخاص: $y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+8$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

24

الحل العام: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy} \Rightarrow \int y\,dy=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\ln|x|+C$

نجد الحل الخاص بتعويض $(e,1)$: $\frac{1}{2}=1+C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

الحل الخاص هو: $\frac{1}{2}y^2=\ln|x|-\frac{1}{2}$

25

$$\frac{dv}{dt}=10-0.5v \Rightarrow \frac{dv}{10-0.5v}=dt \Rightarrow \int\frac{dv}{10-0.5v}=\int dt$$

$$-2\ln|10-0.5v|=t+C \Rightarrow \ln|10-0.5v|=-\frac{t}{2}+C$$

لإيجاد الحل الخاص نعوض $v=0$، و $t=0$ في الحل العام

$$\ln 10=0+C \Rightarrow C=\ln 10$$

$$\Rightarrow \ln|10-0.5v|=-\frac{t}{2}+\ln 10 \Rightarrow \ln\left|\frac{10-0.5v}{10}\right|=-\frac{t}{2}$$

26

$$\frac{dN}{dt}=260-0.4N=0.4(650-N)$$

$$\frac{dN}{650-N}=0.4dt \Rightarrow \int\frac{dN}{650-N}=\int 0.4\,dt$$

$$\Rightarrow -\ln|650-N|=0.4t+C$$

لإيجاد الحل الخاص نعوض $N=300$، و $t=0$ في الحل العام

$$-\ln 350=0+C \Rightarrow C=-\ln 350 \Rightarrow -\ln|650-N|=0.4t-\ln 350$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{350}{650-N}\right|=0.4t$$

لا يمكن أن يكون N=650 لأن ln 0 غير معرف ولأن N=300 عندما t = 0 والاقتران N(t) متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من 650، ولذا فإن 650 – N > 0 ويكون | 650 – N | مساوٍ لـ 650 – N

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{350}{650-N}\right|=\ln\left(\frac{350}{650-N}\right)=0.4t$$

نعوض t=3 ونجد N

$$\ln\left(\frac{350}{650-N}\right)=1.2$$

$$\Rightarrow \frac{350}{650-N}=e^{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{650-N}{350}=e^{-\frac{6}{5}}$$

$$N=650-350e^{-\frac{6}{5}}\approx 545$$

إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئبًا تقريبًا.

27	$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ $\int -\frac{dr}{r^2} = \int 0.0075\, dt$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $r = 20$، و $t = 0$ في الحل العام $\frac{1}{20} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{r} = 0.0075t + \frac{1}{20} \Rightarrow r = \frac{20}{1 + 0.15t}$
28	نضع r =10 في المعادلة الناتجة: $10 = \frac{20}{1 + 0.15t} \Rightarrow 0.1 = \frac{1 + 0.15t}{20} \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t$ $\Rightarrow t = \frac{1}{0.15} \approx 6.67\ s$ إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10 cm بعد 6.67 ثانية تقريبًا بعد بدء انكماشها.
29	$\int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t)dt$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $n = 400$، و $t = 0$ في الحل العام $\ln 400 = 0 + C \Rightarrow C = \ln 400$ $\ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + \ln 400$ $\Rightarrow \ln \frac{n}{400} = 0.2(0.2t - \sin t) \Rightarrow n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$
30	نعوض t = 3 في المعادلة الأخيرة $n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t)}$ $= 400e^{0.2(0.6 - \sin 3)}$ $\approx 400e^{0.12 - 0.028} \approx 400e^{0.092} \approx 439$ إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريبًا.

31	$\frac{dy}{dx} = y\cos x$ $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=0، وy =1 في الحل العام $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \sin x \Rightarrow y = e^{\sin x}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -e^{\sin x}$ لا يمر بالنقطة $(0,1)$.
32	$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$ لإيجاد $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ نستخدم الكسور الجزئية: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ $A(x+1) + B(x) = 1$ $x = 0 \Rightarrow A = 1$ $x = -1 \Rightarrow B = -1$ $\Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \ln\lvert x\rvert - \ln\lvert x+1\rvert + C$ لإيجاد قيمة C نضع x=1، وy =3 في الحل العام $\ln 3 = 0 - \ln 2 + C \Rightarrow C = \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \ln\lvert x\rvert - \ln\lvert x+1\rvert + \ln 6$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert = \ln\left\lvert \frac{6x}{x+1}\right\rvert$ $\Rightarrow \lvert y\rvert = \left\lvert \frac{6x}{x+1}\right\rvert \Rightarrow y = \frac{6x}{x+1}$ ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -\frac{6x}{x+1}$ لا يمر بالنقطة $(1,3)$

33	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y^2}+y-xy$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2}(x-1)-y(x-1)=(x-1)\left(\frac{1}{y^2}-y\right)\Rightarrow\frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=(x-1)dx$ $\int\frac{dy}{\frac{1}{y^2}-y}=\int(x-1)dx\Rightarrow\int\frac{y^2}{1-y^3}dy=\int(x-1)dx$ $\frac{-1}{3}\int\frac{-3y^2}{1-y^3}dy=\int(x-1)dx\Rightarrow\frac{-1}{3}\ln\lvert 1-y^3\rvert=\frac{1}{2}x^2-x+C$
34	$\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{1}{2y-1}-\frac{2}{3y-2}\right)=x\left(\frac{3y-2-4y+2}{6y^2-7y+2}\right)=x\left(\frac{-y}{6y^2-7y+2}\right)$ $\Rightarrow\frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=x\,dx\Rightarrow\int\frac{6y^2-7y+2}{-y}dy=\int x\,dx$ $\int\left(-6y+7-\frac{2}{y}\right)dy=\int x\,dx\Rightarrow -3y^2+7y-2\ln\lvert y\rvert=\frac{1}{2}x^2+C$
35	$\frac{dy}{dx}=1+\tan^2x+\tan^2y+\tan^2x\tan^2y$ $=\sec^2x+\tan^2y(1+\tan^2x)$ $=\sec^2x+\tan^2y\sec^2x$ $=\sec^2x(1+\tan^2y)$ $=\sec^2x\sec^2y$ $\frac{dy}{\sec^2y}=\sec^2x\,dx$ $\int\frac{dy}{\sec^2y}=\int\sec^2x\,dx$ $\int\cos^2y\;dy=\int\sec^2x\,dx$ $\int\frac{1}{2}(1+\cos 2y)\;dy=\int\sec^2x\,dx$ $\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)=\tan x+C$

36	$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ $\int \frac{dx}{x} = \int -\lambda\, dt$ $\ln\|x\| = -\lambda t + C$ لكن الكمية x لا تكون سالبة ، فنحذف رمز القيمة المطلقة. $\Rightarrow \ln x = -\lambda t + C$ $x = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} \times e^{C}$, e^{C} ثابت ليكن a $\Rightarrow x = ae^{-\lambda t}$
37	$x(0) = a$ الكمية الابتدائية المطلوب: حساب الزمن الذي تكون عنده $x = \frac{1}{2}a$ ، نعوض: $\frac{1}{2}a = ae^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}$
38	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ لكي تكون العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلًا للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها. نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x $2x + 2ny\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{ny}$ نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية: $-\frac{x}{ny} = -\frac{2x}{3y} \Rightarrow 2nxy = 3xy$ $\Rightarrow n = \frac{3xy}{2xy} = \frac{3}{2}$
39	النقطة $(5, 4)$ تحقق العلاقة: $\Rightarrow 25 + \frac{3}{2}(16) = a \Rightarrow a = 49$ $\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 49$ لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y = 0$ في معادلتها $\Rightarrow x^2 = 0 + 49 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$ إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 49$ مع المحور x هما $(-7,0)$ و $(7,0)$

الدرس السادس
المعادلة التفاضلية (كتاب التمارين)

1	$\frac{dy}{dx}=3x^2y \Rightarrow \frac{dy}{y}=3x^2dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int 3x^2dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = x^3+C$
2	$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-4}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y^2-4} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2-4}=\int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{y^2-4}=\frac{1}{(y-2)(y+2)}=\frac{A}{y-2}+\frac{B}{y+2}$ $\Rightarrow A(y+2)+B(y-2)=1$ $y=-2 \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$ $y=2 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{y-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{y+2}$ $\int \frac{dy}{y^2-4}=\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{y+2}\right)dy=\int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\lvert y-2\rvert-\frac{1}{4}\ln\lvert y+2\rvert=\ln\lvert x\rvert+C \Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{y-2}{y+2}\right\rvert=\ln\lvert x\rvert+C$
3	$\frac{dy}{dx}=e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^x\times e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y}=e^xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y}=\int e^xdx$ $\Rightarrow \int e^{-y}dy=\int e^xdx \Rightarrow -e^{-y}=e^x+C$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

4	$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sec y}{ye^{x^2}} \Rightarrow \frac{ydy}{\sec y} = \frac{xdx}{e^{x^2}} \Rightarrow \int y\cos y\, dy = \int xe^{-x^2}\, dx$ نجد $\int y\cos y\, dy$ بالأجزاء (من دون إضافة ثابت التكامل): $u = y \qquad dv = \cos y\, dy$ $du = dy \qquad v = \sin y$ $\Rightarrow \int y\cos y\, dy = y\sin y - \int \sin y\, dy = y\sin y + \cos y + C$ نجد $\int xe^{-x^2}\, dx$ بالتعويض(من دون إضافة ثابت التكامل): $u = -x^2 \Rightarrow du = -2x\, dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$ $\Rightarrow \int xe^{-x^2}\, dx = \int xe^u \times \frac{du}{-2x} = -\int \frac{1}{2}e^u du = -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ نضيف ثابت التكامل في الخطوة الأخيرة: $\int y\cos y\, dy = \int xe^{-x^2}\, dx \quad \Rightarrow y\sin y + \cos y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
5	$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y} \Rightarrow \frac{y}{y-3}dy = dx \Rightarrow \int \frac{y}{y-3}dy = \int dx$ $\Rightarrow \int \left(1 + \frac{3}{y-3}\right)dy = \int dx$ $\Rightarrow y + 3\ln\|y-3\| = x + C$
6	$\frac{dy}{dx} = \frac{x\ln x}{y^2} \Rightarrow y^2dy = x\ln x\, dx \Rightarrow \int y^2dy = \int x\ln x\, dx$ نجد $\int x\ln x\, dx$ بالأجزاء: $u = \ln x \qquad dv = xdx$ $du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$ $\Rightarrow \int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$ $\int y^2dy = \int x\ln x\, dx$ $\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

7

$$\frac{dy}{dx} = -30\cos 4x \sin 4x \quad , y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow dy = -30\cos 4x \sin 4x \, dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int -15\sin 8x \, dx$$

الحل العام : $\Rightarrow y = \frac{15}{8}\cos 8x + C$

الشرط الأولي : $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{15}{8}\cos 8\left(\frac{\pi}{8}\right) + C$

$$0 = -\frac{15}{8} + C \Rightarrow C = \frac{15}{8}$$

الحل الخاص : $\Rightarrow y = \frac{15}{8}\cos 8x + \frac{15}{8}$

8

$$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 dx$$

الحل العام : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + C$

الشرط الأولي : $y(0) = 2 \Rightarrow 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$

الحل الخاص : $\Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^3 + 2$

9

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} \quad , y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \cos y \, dy = 4\sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \cos y \, dy = \int 4\sqrt{x} dx$$

الحل العام : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

الشرط الأولي : $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

الحل الخاص : $\Rightarrow \sin y = \frac{8}{3}x\sqrt{x}$

10

$$\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2} \quad , y(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{y}e^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}} = xe^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{y}} = \int xe^{-x^2}dx$$

نجد $\int xe^{-x^2}dx$ بالتعويض:

$$u = -x^2 \Rightarrow du = -2xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{y}} = \int xe^{-x^2}dx = \int xe^{u} \times \frac{du}{-2x} = \int -\frac{1}{2}e^{u}du = -\frac{1}{2}e^{u} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

الحل العام : $\Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

الشرط الأولي : $y(1) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2e} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2e}$

الحل الخاص : $\Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{2}e^{-x^2} + 1 - \frac{1}{2e}$

11

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \quad , y(4) = \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = xdx$$

الحل العام : $\Rightarrow \int e^{y}dy = \int xdx \Rightarrow e^{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$

الشرط الأولي : $y(4) = \ln 2 \Rightarrow 2 = 8 + C \Rightarrow C = -6$

الحل الخاص : $\Rightarrow e^{y} = \frac{1}{2}x^2 - 6$

12

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2 \quad , y(2) = -0.1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (3x^2 + 4)dx$$

$$\Rightarrow \int y^{-2}dy = \int (3x^2 + 4)dx$$

الحل العام : $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + 4x + C$

الشرط الأولي : $y(2) = -0.1 \Rightarrow 10 = 8 + 8 + C \Rightarrow C = -6$

الحل الخاص : $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^3 + 4x - 6$

13	$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y^{0.8}\quad ,y(0)=100000$ $\Rightarrow y^{-0.8}dy=\frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow \int y^{-0.8}dy=\int \frac{1}{2}dt$ $\Rightarrow 5y^{0.2}=\frac{1}{2}t+C$ الحل العام : $y(0)=100000 \Rightarrow 5\sqrt[5]{100000}=0+C \quad \Rightarrow C=50$ $\Rightarrow 5\sqrt[5]{y}=\frac{1}{2}t+50$ الحل الخاص :
14	$5\sqrt[5]{y}=\frac{1}{2}(7)+50 \Rightarrow \sqrt[5]{y}=10.7 \Rightarrow y=(10.7)^5 \quad \approx 140255$
15	$\frac{dv}{dt}=-\frac{v^2}{100}\quad ,v(0)=20$ $\Rightarrow -v^{-2}dv=\frac{1}{100}dt$ $\Rightarrow -\int v^{-2}dv=\int dt$ $\Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{100}t+C$ $v(0)=20 \Rightarrow \frac{1}{20}=0+C \Rightarrow C=\frac{1}{20}$ $\Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{100}t+\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{t+5}{100} \Rightarrow v=\frac{100}{t+5}$
16	$e^y\frac{dy}{dx}=10+2\sec^2 x \quad ,y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ $\Rightarrow e^y dy=(10+2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow \int e^y dy=\int (10+2\sec^2 x)dx$ $\Rightarrow e^y=10x+2\tan x+C$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow 1=\frac{5\pi}{2}+2+C \Rightarrow C=-1-\frac{5\pi}{2}$ $\Rightarrow e^y=10x+2\tan x-1-\frac{5\pi}{2}$

17	$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0 \quad ,y(6)=4$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int -\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \ln\|y\|=-\ln\|x\|+C$ $y(6)=4 \Rightarrow \ln 4=-\ln 6+C \Rightarrow C=\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\|=-\ln\|x\|+\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|y\|+\ln\|x\|=\ln 24$ $\Rightarrow \ln\|xy\|=\ln 24$ $\Rightarrow \|xy\|=24$ $\Rightarrow \|y\|=\frac{24}{\|x\|} \Rightarrow y=\frac{24}{x} \quad$ or $\quad \Rightarrow y=-\frac{24}{x}$ $\Rightarrow y=\frac{24}{x}$ (لأن $y=-\frac{24}{x}$ لا تحقق شروط السؤال)

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

إجابات إختبار نهاية وحدة التكامل

اختبار نهاية الوحدة صفحة 105	
1	$\int_0^2 e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots (d)$
2	$\int_{-4}^4 (4-\|x\|)\,dx = \int_{-4}^0 (4+x)\,dx + \int_0^4 (4-x)\,dx$ $= \left(4x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{-4}^0 + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_0^4$ $= -(-16+8)+(16-8)$ $= 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
3	$A = \int_{-1}^2 \left(x^3-3x^2+4-(x^2-x-2)\right)dx$ $= \int_{-1}^2 (x^3-4x^2+x+6)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$
4	$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln\|y\| = x^2 + C$ $(0,1) \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow \ln\|y\| = x^2 \Rightarrow \|y\| = e^{x^2}$ ولكن $y=-e^{x^2}$ لا يحقق النقطة $(0,1)$، إذن الحل هو $y=e^{x^2}$ ....(a)
5	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$
6	$\int\left(\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}\right)dx = \int\left(-\frac{1}{2}\times\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x}\right)dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\|\cos 2x\| + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln\|x\| + C$

7	$\int \csc^2 x\,(1+\tan^2 x)dx = \int\left(\csc^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\times\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$ $= \int(\csc^2 x + \sec^2 x)dx$ $= -\cot x + \tan x + C$
8	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+5)+C$
9	$\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}dx = \int\left(2x+11+\frac{19}{x-2}\right)dx$ $= x^2+11x+19\ln\|x-2\|+C$
10	$\int \sec^2(2x-1)dx = \frac{1}{2}\tan(2x-1)+C$
11	$\int \cot(5x+1)dx = \frac{1}{5}\int\frac{5\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)}dx = \frac{1}{5}\ln\|\sin(5x+1)\|+C$
12	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$
13	$\int_0^{\pi}\cos^2\frac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx$ $= \frac{1}{2}(x+\sin x)\|_0^{\pi} = \frac{1}{2}((\pi)+(0))-0 = \frac{\pi}{2}$
14	$\int_0^2\|x^3-1\|\,dx = \int_0^1(1-x^3)\,dx + \int_1^2(x^3-1)\,dx$ $= \left(x-\frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4-x\right)\Big\|_1^2 = \left(\frac{3}{4}\right)+\left(4-2+\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2}$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+\cos 4x)\,dx = \left(\tan x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}} = (1)-(0) = 1$
16	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos 2x\right)\,dx$ $= \left(-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

17	$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x\ dx = -\frac{1}{8}\cos 4x\Big\|_0^{\frac{\pi}{8}} = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$
18	$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx$ $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(x-2) = 4$ $x = 2 \Rightarrow A = 1$ $x = -2 \Rightarrow B = -1$ $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}$ $\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{(x-2)(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= \ln\|x-2\| - \ln\|x+2\| + C = \ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\| + C$
19	$\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)}dx$ $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(x-3) = x+7$ $x = -2 \Rightarrow B = -1$ $x = 3 \Rightarrow A = 2$ $\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}$ $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx = \int \frac{x+7}{(x-3)(x+2)}dx$ $= \int\left(\frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}\right)dx$ $= 2\ln\|x-3\| - \ln\|x+2\| + C$
20	$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x-8}dx = \frac{1}{2}\ln\|x^2-2x-8\| + C$

21	$\int \frac{x^2+3}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}dx$ $\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ $A(x^2+1)+(Bx+C)(x) = x^2+3$ $x=0 \Rightarrow A=3$ $x=1 \Rightarrow 2A+B+C=4 \Rightarrow B+C=-2$ $x=-1 \Rightarrow 2A+B-C=4 \Rightarrow B-C=-2$ $\Rightarrow B=-2\ , C=0$ $\frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}$ $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}dx$ $= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}\right)dx$ $= 3\ln\lvert x\rvert - \ln\lvert x^2+1\rvert + C = \ln\left\lvert\frac{x^3}{x^2+1}\right\rvert + C$
22	$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$ $Ax(1-x)+B(1-x)+C(x^2) = 1$ $x=0 \Rightarrow B=1$ $x=1 \Rightarrow C=1$ $x=-1 \Rightarrow -2A+2B+C=1 \Rightarrow A=1$ $\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ $\int \frac{1}{x^2(1-x)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}\right)dx$ $= \ln\lvert x\rvert - \frac{1}{x} - \ln\lvert 1-x\rvert + C$ $= \ln\left\lvert\frac{x}{1-x}\right\rvert - \frac{1}{x} + C$

23	$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x} = \int \frac{\sin x}{u^2 - 3u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{1}{3u - u^2} du$ $\frac{1}{3u - u^2} = \frac{1}{u(3-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{3-u}$ $\Rightarrow A(3-u) + Bu = 1$ $u = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ $\quad$ $u = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ $\int \frac{1}{3u - u^2} du = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{\frac{1}{3}}{3-u} \right) du = \frac{1}{3}\ln\lvert u\rvert - \frac{1}{3}\ln\lvert 3-u\rvert + C$ $= \frac{1}{3}\ln\left\lvert \frac{\cos x}{3 - \cos x} \right\rvert + C$
24	$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x, \quad dx = 2u\, du$ $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \int \frac{u}{u^2-4} \times 2u\, du = \int \frac{2u^2}{u^2-4} du = \int \left(2 + \frac{8}{u^2-4}\right) du$ $\frac{8}{u^2-4} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$ $\Rightarrow A(u+2) + B(u-2) = 8$ $u = 2 \Rightarrow A = 2$ $\quad$ $u = -2 \Rightarrow B = -2$ $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \int \left(2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2}\right) du$ $= 2u + 2\ln\lvert u-2\rvert - 2\ln\lvert u+2\rvert + C$ $= 2\sqrt{x} + 2\ln\left\lvert \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right\rvert + C$
25	$u = 1 + \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x}\, dx = \int \sec^2 x (u-1)\sqrt{u} \frac{du}{\sec^2 x}$ $= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{5}(1 + \tan x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1 + \tan x)^{\frac{3}{2}} + C$

26	$u = 4 - 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{-3}$, $x = \frac{4-u}{3}$ $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(4-u)}{u^{\frac{1}{3}}} \times \frac{du}{-3} = -\frac{1}{9}\int \left(4u^{-\frac{1}{3}} - u^{\frac{2}{3}}\right) du$ $= -\frac{1}{9}\left(6u^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}\right) + C = -\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}u^{\frac{5}{3}} + C$ $= -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}(4-3x)^{\frac{5}{3}} + C$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالأجزاء أيضا
27	$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, $dx = x\,du$ $\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx = \int \frac{xu^6}{x} du = \int u^6 du = \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{7}(\ln x)^7 + C$
28	$u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2$, $dx = du$ $\int (x+1)^2\sqrt{x-2}\, dx = \int (u+3)^2 u^{\frac{1}{2}} du$ $= \int (u^2 + 6u + 9)u^{\frac{1}{2}} du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$ $= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{2}{7}(x-2)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + 6(x-2)^{\frac{3}{2}} + C$ ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالأجزاء مرتين
29	$\int x\csc^2 x\, dx$ $u = x$ $\quad dv = \csc^2 x\, dx$ $du = dx$ $\quad v = -\cot x$ $\int x\csc^2 x\, dx = -x\cot x + \int \cot x\, dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ $= -x\cot x + \ln\|\sin x\| + C$

30	$u = x^2 - 5x \qquad dv = e^x\,dx$ $du = (2x-5)dx \qquad v = e^x$ $\int (x^2-5x)e^x\,dx = (x^2-5x)e^x - \int (2x-5)e^x\,dx$ $u = 2x-5 \qquad dv = e^x\,dx$ $du = 2dx \qquad v = e^x$ $\int (2x-5)e^x\,dx = (2x-5)e^x - \int 2e^x\,dx$ $= (2x-5)e^x - 2e^x + C$ $\int (x^2-5x)e^x\,dx = (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + 2e^x + C$ $= e^x(x^2-7x+7) + C$
31	$u = x \qquad dv = \sin 2x\,dx$ $du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\int x\sin 2x\;dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\;dx$ $= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
32	$u = t^2 \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $t = 0 \Rightarrow u = 0$ $t = 1 \Rightarrow u = 1$ $\int_0^1 t\,3^{t^2}\,dt = \int_0^1 t3^u\,\frac{du}{2t} = \frac{1}{2}\int_0^1 3^u du = \frac{3^u}{2\ln 3}\Big\|_0^1$ $= \frac{3}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

33	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\,(\csc^2 x - 1)\, dx$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\, dx$ $u = \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\, dx = \int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -u\, du - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ $= -\frac{1}{2} u^2 \Big\|_{1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \ln\|\sin x\|\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) - (\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2})$ $= \frac{1}{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
34	$u = 4 + 3\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{3\cos x}$ $x = -\pi \Rightarrow u = 4$ $x = \pi \Rightarrow u = 4$ $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4 + 3\sin x}} dx = \int_{4}^{4} \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{3\cos x} = \frac{1}{3}\int_{4}^{4} \frac{du}{\sqrt{u}} = 0$
35	$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} dx$ $= \int_{-1}^{0} \frac{x}{x+2} dx = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$ $= (x - 2\ln\|x+2\|)\|_{-1}^{0} = 0 - 2\ln 2 - (-1 - 2\ln 1) = 1 - 2\ln 2$

36	$\frac{32x^2+4}{16x^2-1}=2+\frac{6}{16x^2-1}=2+\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{4x+1}$ $\Rightarrow A(4x+1)+B(4x-1)=6$ $x=\frac{1}{4}\ \Rightarrow A=3$ $x=-\frac{1}{4}\ \Rightarrow B=-3$ $\int_1^2 \frac{32x^2+4}{16x^2-1}dx=\int_1^2\left(2+\frac{3}{4x-1}+\frac{-3}{4x+1}\right)dx$ $=\left(2x+\frac{3}{4}\ln\lvert 4x-1\rvert-\frac{3}{4}\ln\lvert 4x+1\rvert\right)\Big\rvert_1^2$ $=\left(4+\frac{3}{4}\ln 7-\frac{3}{4}\ln 9\right)-\left(2+\frac{3}{4}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 5\right)$ $=2+\frac{3}{4}\ln\frac{35}{27}$
37	$u=\ln 2x \qquad dv=x\,dx$ $du=\frac{1}{x} \qquad v=\frac{x^2}{2}$ $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x\ln 2x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big\rvert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\frac{x}{2}\ dx$ $=\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big\rvert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}-\frac{1}{4}x^2\Big\rvert_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}=\frac{1}{16}(e^2+1)$
38	$s(10)-s(0)=\int_0^{10}v(t)dt=R_1-R_2+R_3$ $=\frac{1}{2}(2)(4)-\frac{1}{2}(2)(4)+\frac{1}{2}(3+6)(4)=18\text{ m}$
39	$\int_0^{10}\lvert v(t)\rvert dt=R_1+R_2+R_3=4+4+18=26\text{ m}$
40	$s(10)-s(0)=18\Rightarrow s(10)-0=18\Rightarrow s(10)=18\text{ m}$

41	$x^2 = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$ $\Rightarrow x(x^3-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1$ $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$
42	$x = x^3 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$ $A = \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{2}$
43	$x^2 + 2 = -x \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$ هذه المعادلة التربيعية لا حلول لها، لأن المميز سالب، إذن، منحنيا الاقترانين لا يتقاطعان. $A = \int_{-2}^2 (x^2 + 2 + x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{-2}^2 = \frac{40}{3}$
44	$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ $\Rightarrow A(x+1) + B(x-1) = 1$ $x = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ $x = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$ $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int_2^5 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$ $= \left(x + \frac{1}{2}\ln\|x-1\| - \frac{1}{2}\ln\|x+1\|\right)\Big\|_2^5 = 3 + \frac{1}{2}\ln 2$
45	$D = \int_1^{10} v(t)dt = \int_1^{10} \left(\frac{1}{9}t - (t+6)^{-\frac{1}{2}}\right)dt$ $= \left(\frac{1}{18}t^2 - 2\sqrt{t+6}\right)\Big\|_1^{10} = \left(2\sqrt{7} - \frac{5}{2}\right)\text{m} \approx 2.792\text{ m}$

46	$v(t)=\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}$ لتكن d المسافة المقطوعة وهي تمثل المساحة بين منحنى $\lvert v(t)\rvert$ والمحور t بين المستقيمين $t=1,\ t=10$ $d=\int_1^{10}\lvert v(t)\rvert dt=\int_1^{10}\left\lvert\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right\rvert dt$ $\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}=0\Rightarrow\frac{t}{9}=\frac{1}{\sqrt{t+6}}\Rightarrow t\sqrt{t+6}=9\Rightarrow t^2(t+6)=81$ $\Rightarrow t^3+6t^2-81=0\Rightarrow(t-3)(t^2+9t+81)=0\Rightarrow t=3$ $\Rightarrow d=-\int_1^3\left(\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right)dt+\int_3^{10}\left(\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right)dt$ $=\left(2\sqrt{t+6}-\frac{1}{18}t^2\right)\Big\|_1^3+\left(\frac{1}{18}t^2-2\sqrt{t+6}\right)\Big\|_3^{10}=\frac{155}{18}-2\sqrt{7}\approx 3.32\text{ m}$
47	$(1+\sin 2x)^2=0\Rightarrow\sin 2x=-1$ $2x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$ هذا هو أول حل موجب للمعادلة $\Rightarrow A\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$
48	$A(R)=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2x)^2dx=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1+2\sin 2x+\sin^2 2x)dx$ $=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(1+2\sin 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)dx$ $=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$ $=\left(\frac{3}{2}x-\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big\|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{9\pi}{8}+1$
49	$x^2\ln 2x=0\Rightarrow x=0$ يهمل لأنه خارج مجال اقتران اللوغاريتم $\ln 2x=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow$ $u=\ln 2x\qquad dv=x^2\,dx$ $du=\frac{1}{x}\,dx\qquad v=\frac{1}{3}x^3$ $\int x^2\ln 2x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln 2x-\int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln 2x-\frac{1}{9}x^3+C$ $\Rightarrow A=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{7}{72}$

50	$\frac{1}{16}x^3 = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{256}x^6 - 4x = 0$ $\Rightarrow x\left(\frac{1}{256}x^5 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0,$ $x = \sqrt[5]{4(256)} = \sqrt[5]{2^{10}} = 4$ $A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{16}x^3\right) dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{64}x^4\right)\Big\|_0^4 = \frac{20}{3}$
51	$x^2 + 14 = x^4 + 2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow (x^2-4)(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ $\Rightarrow A(-2, f(-2)) = (-2, 18)$ $B(2, f(2)) = (2, 18)$
52	نلاحظ أن منحنيي f و g واقعان فوق المحور x ، وأن منحنى f فوق منحنى g في الفترة (-2,2) $\Rightarrow V = \pi \int_0^2 \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$ $= \pi \int_0^2 ((x^2+14)^2 - (x^4+2)^2)\, dx$ $= \pi \int_0^2 (-x^8 - 3x^4 + 28x^2 + 192) dx$ $= \pi\left(-\frac{1}{9}x^9 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{28}{3}x^3 + 192x\right)\Big\|_0^2 = \frac{17216\pi}{45}$
53	$V = \pi \int_1^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^2 xe^{-x} dx$ $u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$ $du = dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$ $V = \pi \int_1^2 xe^{-x} dx = \pi\left((-xe^{-x} - e^{-x})\,\|_1^2\right) = \frac{2e-3}{e^2}\pi$
54	$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\sqrt{y} = \ln\|x\| + C$

55	$\frac{dy}{\sec y} = xe^x dx \Rightarrow \int \cos y\, dy = \int xe^x dx$ $u = x \qquad dv = e^x\, dx$ $du = dx \qquad v = e^x$ $\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$ $\Rightarrow \int \cos y\, dy = \int xe^x dx$ $\Rightarrow \sin y = xe^x - e^x + C$
56	$3y^2 dy = 8x dx$ $\int 3y^2 dy = \int 8x dx \Rightarrow y^3 = 4x^2 + C$
57	$x dy = \sqrt{y}(3x+4)dx$ $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3x+4}{x} dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int \left(3 + \frac{4}{x}\right) dx$ $\Rightarrow 2\sqrt{y} = 3x + 4\ln\lvert x\rvert + C$
58	$\frac{dy}{dx} = 8 - 4y = 4(2-y)$ $\frac{dy}{2-y} = 4dx \Rightarrow \int \frac{dy}{2-y} = \int 4dx$ الحل العام : $-\ln\lvert 4-y\rvert = 4x + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $x = 0, y = 3$ في الحل العام: $-\ln 1 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ الحل الخاص: $-\ln\lvert 4-y\rvert = 4x$

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

	$\frac{dy}{5e^y} = \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}$ $\frac{1}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow A(x-2) + B(2x+1) = 1$ $x = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$ ، $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$ $\int \frac{dy}{5e^y} = \int \left(\frac{-\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2} \right) dx$ الحل العام $\frac{-e^{-y}}{5} = -\frac{1}{5}\ln\lvert 2x+1\rvert + \frac{1}{5}\ln\lvert x-2\rvert + C$ لإيجاد الحل الخاص نعوض $x = -3, y = 0$ في الحل العام: $\frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}\ln 5 + \frac{1}{5}\ln 5 + C \Rightarrow C = \frac{-1}{5}$ $\frac{-e^{-y}}{5} = -\frac{1}{5}\ln\lvert 2x+1\rvert + \frac{1}{5}\ln\lvert x-2\rvert - \frac{1}{5}$ الحل الخاص: $\Rightarrow \frac{1-e^{-y}}{5} = \frac{1}{5}\ln\left\lvert\frac{x-2}{2x+1}\right\rvert \Rightarrow 1 - e^{-y} = \ln\left\lvert\frac{x-2}{2x+1}\right\rvert$
60	$\frac{dx}{x} = 0.2\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int 0.2\,dt$ $\Rightarrow \ln\lvert x\rvert = 0.2t + C \Rightarrow x = e^{0.2t+C} = e^C(e^{0.2t}) = Ke^{0.2t}$ حيث K ثابت يساوي e^C، وبملاحظة أن عدد الأسماك x أكبر من صفر (فيكون $\lvert x\rvert = x$) $x(0) = 300 \Rightarrow 300 = Ke^{0.2(0)} \Rightarrow K = 300$ الحل الخاص: $x(t) = 300e^{0.2t}$
61	$x(5) = 300\,e^{0.2(5)} = 300e \approx 815$ إذن، عدد الأسماك في البحيرة بعد خمس سنوات هو 815 سمكة تقريبًا.
62	$p(x) = \int \frac{-300x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ ، $u = 9 + x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\Rightarrow p(u) = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}}\,\frac{du}{2x} = \int -150u^{\frac{-3}{2}}\,du = \frac{300}{\sqrt{u}} + C$ $\Rightarrow p(x) = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + C$ ، $p(4) = \frac{300}{5} + C \Rightarrow 75 = 60 + C \Rightarrow C = 15$ $\Rightarrow p(x) = 15 + \frac{300}{\sqrt{9+x^2}}$

د. خالد جلال

أ. اياد الحمد

621 سؤال

تضمن لك

العلامة الكاملة