مهارات تدريبية في الرياضيات

الثاني عشر الأدبي

إعداد

م. زين ارتيمة

مهارات تدريبية في
الرياضيات الأدبي

التكامل وتطبيقاته

م. زين ارتيمه

Zain.abady54@gmail.com

مركز منارة العلم

0798935377

المغيرات _ قرب مسجد ابو بكر الصديق

م. زين ارتيمه	التكامل وتطبيقاته	مركز الدكتورة منارة العلم

* الفصل الاول : التكامل

التكامل ⟸ عملية عكس الاشتقاق.

* الاشتقاق يلغي التكامل والتكامل يلغي الاشتقاق.

ق(س) ← اشتق ← ق'(س)

ق'(س) ← تكامل ← ق(س)

الشكل التكامل : أ) ∫ مقدار . دس تكامل غير محدود

ب) $\int_{\text{عدد آخر}}^{\text{عدد}}$ مقدار . دس تكامل محدود

* يمكن ان يطلبنا اشتقاق في هذا الفصل لكن ننتبه لملاحظات مهمة خلال الاشتقاق.

١) دائماً وابداً مشتقة (التكامل المحدود) = صفر.

$\frac{د}{دس}\int_{أ}^{ب}$ ق(س). دس = صفر

لا نتعب باشتقاق مباشرة صفر

٢) اشتقاق التكامل غير المحدود لازم يكون في مساواة وطرفين ونشتق للطرفين.

طرف = طرف.

* نتذكر دائماً انه اشتقاق وتكامل مع بعض يلغوا بعض.

بشكل عام : ∫ مقدار . دس = مقدار آخر

نشتق : $\frac{د}{دس}$ ∫ مقدار . دس = $\frac{دص}{دس}$ (مقدار آخر)

مقدار = (مقدار آخر)' ← نشتق حسب القواعد

مثال ① : اذا كان ص = ∫ ٤س³ . دس جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : نشتق الطرفين : ص' = ٤س³ ← لها الاشتقاق لغى التكامل.

اشتقاق عادي

② ق(س) = ∫ (٦س³ + ٥س) . دس جد ق'(١) .

الحل : ق'(س) = ٦س³ + ٥س

ق'(١) = ٦(١)³ + ٥(١) ⟸ $\boxed{ق'(١) = ١١}$

③ ∫ ق(س) . دس = ٦س³ + ٥س جد ق(١) ثم ق'(١)

الحل : نشتق الطرفين لنحصل على ق(س) .

ق(س) = ١٨س² + ٥ ← ق(١) = ١٨ + ٥

= $\boxed{٢٣}$

ق'(س) = ٣٦س ← ق'(١) = ٣٦(١)

$\boxed{ق'(١) = ٣٦}$

④ ص = ∫ (س³ + ٥س)⁷ . دس جد ص' .

⑤ ∫ ق'(س) . دس = √(٣س² + ٥) جد ق'(س) .

⑥ ص = ∫ $\frac{٣}{س^٢ + ٤}$. دس جد $\frac{دص}{دس}$.

⑦ ص = ∫ (ظا س + جا س) دس، جد $\frac{دص}{دس}$.

⑧ وزارة (٢٠٠٨ د١) : ق(س) = ∫ (٢س² − ٣) دس ، فإن ق'(٢) =

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) ٥- ج) ٥ د) ٨

⑨ ص = $\int_{٢}^{٥}$ (س − ٣) دس فإن $\frac{دص}{دس}$ = ؟؟

$\frac{دص}{دس}$ = صفر ، لأن التكامل محدود.

* ايجاد ثوابت :

① اذا كان ∫ (ق'(س) + ٢س) دس = أس³ − ٢س وكان ق'(١) = ٢ فإن قيمة أ تكون ؟

نشتق الطرفين .

ق'(س) + ٢س = ٣أس² − ٢ نعوض (١) مكان س

ق'(١) + ٢(١) = ٣أ(١)² − ٢ ⟸ ٢ + ٢ + ٢ = ٣أ ~~−٢~~

$\frac{٦}{٣} = \frac{٣أ}{٣}$ ⟸ $\boxed{أ = ٢}$

② ∫ ق'(س) . دس = −٣س² − ٥س + جـ فإن قيمة ق'(٢) :

* امثلة وتدريبات كتاب وبعض اسئلة الوزارة

① ص = ∫ (٤س² − ٣س) .دس ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢

② ص = ∫ $\frac{٤س − ١}{س^٢ + ١}$.دس ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = −١

③ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٥ ، حيث ص = ∫ $\frac{٤س + ١}{س}$ دس .

④ ∫ عَ(س).دس = ٦س³ − ٣س² + ٦س − ٥ ، جد عَ(١)

⑤ هـ(س) = ∫(س² + ٥س) .دس فإن هـَ(−١) = (ص٢٠١٣)

أ) −٤ ب) −٦ ج) ٢ د) ٤

⑥ ∫ (قَ(س) + ٣س²) دس = س³ + أس² + ١ وكان قَ(١) = ٦ جد قيمة الثابت أ . (ش ٢٠١٦)

⑦ اذا كان هـ اقتراناً متصلاً وكان ∫ هـ(س) دس = س³ + ٢س فإن هـَ(س) =

أ) ٣س² + ٢ ب) ٣س² + ٢س ج) ٦س + ٢ د) ٦س (ش ٢٠١٨)

⑧ اذا كان ص = ∫ قَ(س). دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ تساوي :

أ) ص ب) هـ(س) ج) قَ(س) د) قً(س) (ش ٢٠١٠)

* قواعد التكامل غير المحدود

* الهدف من التكامل هو إعادة المشتقة قَ(س) إلى الاقتران الاصلي هـ(س) .

⇐ تكامل غير محدود نجري فيه فقط عملية التكامل .

جد ∫ مقدار . دس : المطلوب نعمل تكامل للمقدار ولازم عند الانتهاء من العملية نضيف (+ جـ) ثابت التكامل مهم جداً

∫ قَ(س) . دس = هـ(س) + جـ

رجعنا القاعدة الاصلية و ثابت

القواعد :

① ∫ أ . دس = أس + جـ (∫ عدد ثابت . دس = ثابت × س + جـ)

② ∫ سن . دس ← $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ شرط ن ≠ −١

نضيف للاس ١ ونقسم على الناتج .

ملاحظات مهمة للأسس :

① $\frac{١}{س^ن}$ = س−ن ، ② س^(م/ن) = $\sqrt[ن]{س^م}$

③ $\frac{س^م}{س^ن}$ = سم−ن

نستخدم هذه القواعد لتجهيز الاقتران على شكل سن ثم نجري عملية التكامل .

③ ∫ أ سن . دس = أ $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

④ الاقترانات المثلثية :

∫ جاس . دس = − جتاس + جـ

∫ جتاس . دس = جاس + جـ

∫ قا²س . دس = ظاس + جـ

⑤ الاقترانات المثلثية مع زاوية من الدرجة الاولى :

نقسم على معامل س

∫ جا (أس+ب) . دس = − $\frac{جتا(أس+ب)}{أ}$ + جـ

∫ جتا (أس+ب) . دس = $\frac{جا(أس+ب)}{أ}$ + جـ

∫ قا² (أس+ب) . دس = $\frac{ظا(أس+ب)}{أ}$ + جـ

⑥ قوس بداخله معادلة من الدرجة الاولى (أس + ب) .

∫(أس + ب)ن . دس = $\frac{(أس+ب)^{ن+١}}{أ × (ن+١)}$

امثلة: جد كلاً من التكاملات الآتية :

١) ∫ س³ . دس = $\frac{س^٤}{٤}$ + جـ

٢) ∫ −١٠٠ . دس = −١٠٠س + جـ

٣) ∫ $\frac{١}{س^٥}$. دس = ∫ س−٥ . دس = −٥س−٤ + جـ

= $\frac{−٥}{س^٤}$ + جـ

نجهز ثم نكامل

٤) ∫ $\frac{١}{جتا^٢س}$. دس = ∫ قا²س . دس = ظاس + جـ

نجهز ثم نكامل .

٥) $\int \text{ءس} =$

٦) $\int \text{س}^{٥} \,.\, \text{ءس}$ ، س $\neq$ ٠ .

٧) $\int \sqrt{\text{س}} \,.\, \text{ءس}$

٨) $\int \frac{١}{٢} \text{ءس}$.

٩) $\int \frac{٥}{\text{س}^{٥}}$

١٠) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}$

١١) $\int \text{س}^{\frac{٥}{٣}} \,.\, \text{ءس}$.

* خصائص التكامل غير المحدود

١) اذا وجدنا ثابت مضروب باقتران ، فإن الثابت يبقى كما هو ونجري التكامل على الاقتران :

$\int أ\, \text{قَ(س)} \,.\, \text{ءس} = أ\, \text{ق(س)} + \text{ج}$

كما هو الثابت — تمت العملية

٢) خاصية التوزيع :
يمكن توزيع التكامل على عمليتي الجمع والطرح ولا
لا يمكن توزيعه على الضرب والقسمة .

$\int (\text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}) \,.\, \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \,.\, \text{ءس} \pm \int \text{هـ(س)} \,.\, \text{ءس}$

امثلة : جد التكاملات الآتية :

١) $\int \text{س}^{\frac{٥}{٢}} \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{٥+٢}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} + \text{ج} = \frac{٢}{٧} \text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{ج}$

٢) مهم $\int \text{صفر} \,.\, \text{ءس} = \cancel{\text{صفر س}} + \text{ج} = \boxed{\text{ج}}$

٣) $\int ٦ \text{س}^{٢} \,.\, \text{ءس} =$

٤) $\int -٥ \text{جاس} \,.\, \text{ءس} = +٥ \text{جتاس} + \text{ج}$

٥) $\int \text{قا}^{٢}(٦\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{ظا}(٦\text{س})}{٦} + \text{ج}$

٦) $\int \text{جتا}(٣ - ٤\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{جا}(٣ - ٤\text{س})}{-٤} + \text{ج}$

٧) $\int \text{جا}(٣ - ٤\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \frac{-\text{جتا}(٣ - ٤\text{س})}{-٤} + \text{ج}$

٨) $\int (٥\text{س} + ٣)^{٧} \,.\, \text{ءس} = \frac{(٥\text{س} + ٣)^{٨}}{٨ \times ٥} + \text{ج}$

٩) $\int (٣ - ٥\text{س})^{٧} \,.\, \text{ءس} = \frac{(٣ - ٥\text{س})^{٨}}{-٥ \times ٨} + \text{ج}$

١٠) $\int (٥\text{س} + ٣)^{-٧} \,.\, \text{ءس} = \frac{(٥\text{س} + ٣)^{-٦}}{-٦ \times ٥} + \text{ج}$

١١) $\int (\text{س} + ٣)^{٢} \,.\, \text{ءس}$ — يمكن حلها بطريقتين

١٢) $\int (\text{جاس} - ٤ \text{قا}^{٢}\text{س}) \,.\, \text{ءس} =$

١٣) $\int (٣\text{س} - ٥\text{س}^{٢} + ٩) \,.\, \text{ءس} = \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٥\text{س}^{٣}}{٣} + ٩\text{س} + \text{ج}$

١٤) $\int \left(٣\text{س}^{٢} - \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}\right) \,.\, \text{ءس}$.

١٥) $\int (٤\text{س} - ٣\text{جاس}) \,.\, \text{ءس}$

١٦) $\int \text{س}\,(٢\text{س} - ١) \,.\, \text{ءس}$ — لم نأخذ اي قواعد لتكامل الضرب ، اذاً نضرب ثم نكامل .

$\int (٢\text{س}^{٢} - \text{س}) \,.\, \text{ءس} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

١٧) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}} \,.\, \text{ءس}$ — نأخذ عامل مشترك (نجهز ثم نكامل) .

$\int \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} - ٥)}{\cancel{\text{س}}} \,.\, \text{ءس} = \int (\text{س} - ٥) \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٥\text{س} + \text{ج}$

١٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}} \,.\, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}} \,.\, \text{ءس}$ — نستخدم قوانين الأسس .

$\int \text{س}^{٢ - \frac{١}{٣}} \,.\, \text{ءس} - \int ٥\, \text{س}^{١ - \frac{١}{٣}} \,.\, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{٥}{٣}} \,.\, \text{ءس} - \int ٥ \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \,.\, \text{ءس}$

$\frac{٣\,\text{س}^{\frac{٨}{٣}}}{٨} - ٥ \frac{\text{س}^{\frac{٢+٣}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} = \frac{٣}{٨} \text{س}^{\frac{٨}{٣}} - ٣ \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$

١٩) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣} \,.\, \text{ءس}$

٢٠) ∫ $\frac{س^3+64}{س+4}$. ءس ، س ≠ -٤

٢١) ∫ (١٠س² - $\sqrt[6]{س}$ + ٣قا²س) . ءس

٢٢) ∫ (٢-س) (٤س+١) . ءس .

لطيف ٢٣) ∫ ٣ ظاس قاس . ءس

٢٤) ∫ $\frac{س^2+6س+8}{س+2}$. ءس ، س ≠ -٢

٢٥) ∫ ($\frac{1}{قا^2س}$ + جتا²س) . ءس .

٢٦) ∫ ($\frac{س^2+3}{5س}$) . ءس .

٢٧) ∫ √س (√س + $\frac{1}{\sqrt{س}}$) . ءس

٢٨) ∫ $\frac{3}{(قاس)^{-2}}$. ءس .

فكرة: جد قاعدة الاقتران ق الذي تُعطى مشتقته بالقاعدة : ق'(س) = ٣س² - ٦س + ٥ علماً بأن ق(١) = ٧

الحل : ق(س) = ∫ ق'(س) . ءس

ق(س) = ∫ (٣س² - ٦س + ٥) . ءس

ق(س) = $\frac{3س^3}{3}$ - $\frac{6س^2}{2}$ + ٥س + جـ

ق(س) = س³ - ٣س² + ٥س + جـ   استخدم ق(١) = ٧

٧ = (١)³ - ٣(١)² + ٥(١) + جـ ⇐ ومنه $\boxed{جـ = ٧}$

∴ ق(س) = س³ - ٣س² + ٥س + ٧

سؤال - ق'(س) = ٦س - ٨س³ + ٥ ، وكان ق(-١) = ٢ ، جد قاعدة الاقتران ق .

- ق'(س) = ٢س - ٥ ، وكان ق(٢) = ٤ جد قيمة ق(١) .

- ق'(س) = ٣س(٦ - ٥س) + ٤س³ وكان ق(٢) = -١ جد قيمة ق(١)

- ق'(س) = $\frac{س^4+6س+8س^3}{س}$ ، س ≠ صفر وكان ق(١) = ١٣ جد قاعدة الاقتران ق .

- ل'(س) = ٦س² - ٦س³ - ٢س ، جد قيمة ل(٣) - ل(١) .

الحل : نجد ل(س) ⇐ ل(س) = ∫ ل'(س) . ءس

ل(س) = ∫ (٦س² - ٦س³ - ٢س) . ءس

= $\frac{6س^3}{3}$ - $\frac{6س^4}{4}$ - $\frac{2س^2}{2}$ + جـ

∴ $\boxed{ل(س) = ٢س^3 - \frac{3}{2}س^4 - س^2 + جـ}$

ل(٣) - ل(١) :

٢(٣)³ - $\frac{3}{2}$(٣)⁴ - (٣)² + جـ - [٢(١)³ - $\frac{3}{2}$(١)⁴ - (١)² + جـ]

٥٤ - $\frac{243}{2}$ - ٩ + ~~جـ~~ - ٢ + $\frac{3}{2}$ + ١ - ~~جـ~~

٥٤ - $\frac{240}{2}$ - ١٠ = ٤٤ - ١٢٠ = -٧٦ .

فكرة: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي (٣س² + ٤) جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحنى ق يمر بالنقطة (٣ ، ٤٢) .

تذكير : ميل المماس = ق'(س) .

وزارة

انسى الـ جـ

(٢٠٠٨ ش) ∫ (٣س² - ٢س) . ءس

(٢٠٠٨ ص) ∫ (جاس - ٢) . ءس ، ∫ (٦س² - ٢س) . ءس

(٢٠٠٩ ش) ∫ (٣ - ٢س) . ءس ، ∫ ل . ءس حيث ل ثابت .

(٢٠٠٩ ص) ∫ س²(٨س + ٣) . ءس ، ∫ (١ - جاس) . ءس .

(٢٠١٠ ص) ∫ جاس . ءس ، ∫ (س + ١)(س - ٣) . ءس

(٢٠١٢ ش) ∫ $\sqrt[3]{س}$. ءس ، ∫ (-جاس + ١) . ءس

(٢٠١٢ ص) ∫ ($\frac{قا^2س}{3}$ - ٢س + ١٢) . ءس

(٢٠١٥ ص) جد ∫ $\frac{س^2 - \sqrt{س}\,جاس}{\sqrt{س}}$. ءس

(٢٠١٧ ص) ∫ ($\frac{3}{جتا^2س}$ - $\frac{1}{\sqrt[5]{س^3}}$) . ءس

* التكامل المحدود

- نستخدم نفس قواعد التكامل غير المحدود.

- الفرق هو تعويض ارقام في نهاية عملية التكامل.

* لن نرى (جـ) في هذا التكامل فقط ارقام.

- بشكل عام التكامل المحدود للاقتران ق في الفترة [أ، ب] ... ق(ب) − ق(أ)

$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(س)\,ءس = \text{ق}(س)\Big]_{أ}^{ب}$

ب ← الحد العلوي

أ ← الحد السفلي

التكامل يحذف المشتقة.

$= \text{ق}(ب) - \text{ق}(أ)$ ⟸ نعوض الحدود

*** التعويض فقط بعد الانتهاء من عملية التكامل كاملة (اي تجهيز أو شيء آخر يتم قبل التعويض)

* الفترة [أ، ب] الاول هو السفلي (أ)

الآخر هو العلوي (ب)

* قاعدة سريعة: $\int_{أ}^{ب} \text{ثابت}\,.ءس = \text{الثابت} \times (ب - أ)$

(اذا كان عنا عدد ثابت فناتج تكامله هو حاصل ضرب العدد في طرح الحدين.)

ملاحظة $\int_{أ}^{ب} \text{قَ}(س)\,ءس = \text{ق}(س)\Big]_{أ}^{ب}$

لاننا ان التكامل يحذف الفتحة.

امثلة جد ناتج ما يلي:

١) $\int_{١}^{٢} ٣س^{٢}\,ءس = \frac{٣}{٣}س^{٣}\Big]_{١}^{٢} = (٢)^{٣} - (١)^{٣}$

$= ٨ - ١ = \boxed{٧}$

٢) $\int_{١}^{٢} ٣\,ءس = ٣(٢ - ١)$

$= ٣ \times ١ = \boxed{٣}$

٣) $\int_{٢}^{-١} (٣س^{٢} - ١٢س + ٥)\,ءس = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥س\Big]_{٢}^{-١}$

$\left((-١)^{٣} - ٦(-١)^{٢} + ٥(-١)\right) - \left((٢)^{٣} - ٦(٢)^{٢} + ٥(٢)\right)$

$= -١٢ - (-٦) = \boxed{-٦}$

٤) $\int_{١}^{٤} \sqrt{س}\,ءس$ تجهيز.

٥) $\int_{٤}^{٩} \frac{٦}{\sqrt{س}}\,ءس$

٦) $\int_{٠}^{١} ١٤(س)^{\frac{١}{٢}}\,ءس$

٧) $\int^{٦} -٢\,ءس$

٨) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{٨\sqrt[٣]{س}}\,ءس$

٩) $\int_{٠}^{٢} (٢س + ٨س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧)\,ءس$.

١٠) $\int_{-٢}^{٢} (٣س - ٢)(س + ١)\,ءس$.

١١) $\int_{١}^{٢} ٣س(٤ - ٢س^{٢})\,ءس$

١٢) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢}\,ءس$

١٣) $\int_{٠}^{٢} (\text{[illegible]} - \text{[illegible]}س^{٢} + ٣)\,ءس$ *** فكرة لطيفة

١٤) $\int_{٠}^{-٢} \frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١}\,ءس$

الفكرة الثانية تكامل (مشتقة).

مثال (١١): اذا كان ق(٢) = −٤ و ق(٥) = ١٠ جد $\int_{٢}^{٥} \text{قَ}(س)\,ءس$.

الحل: نتذكر ان التكامل يلغي المشتقة: $\int_{٢}^{٥} \text{قَ}(س)\,ءس$

$\therefore \text{ق}(س)\Big]_{٢}^{٥} = \text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)$

$= ١٠ - -٤$

$= \boxed{١٤}$

مثال (٢) : اذا كان ق(س) = ٢س جد $\int_{٢}^{٤}$ ق'(س) . دس

الحل : $\int_{٢}^{٤}$ ق'(س) . دس = ق(س) $\Big]_{٢}^{٤}$

= ق(٤) − ق(٢)

= ٢(٤) − ٢(٢)

= ٨ − ٤ = $\boxed{٤}$

مثال (٣) : اذا كان ق(٤) = ٥ ، ق(٦) = ١٠

جد $\int_{٢}^{٤}$ ق'(س + ٢) . دس   لاحظ القوس يلي مع ق

$\boxed{٥}$

مثال (٤) : اذا كان الاقتران ق معرف على الفترة [١، ٥] وكان ق'(س) = ٢س + ١ ، جد ق(٥) − ق(١) .

الحل : نكامل ق'(س) لنحصل على ق(س) .

ق(س) = $\int_{١}^{٥}$ ق'(س) . دس = $\int_{١}^{٥}$ (٢س + ١) . دس

س² + س $\Big]_{١}^{٥}$ = (٥)² + ٥ − ((١)² + ١)

= ٣٠ − ٢ = $\boxed{٢٨}$

مثال (٥) : اذا كان $\int_{٥}^{٢}$ ق'(س) . دس = ١٣ ، وكان ق(٥) = −١٧ جد قيمة ق(٢)

الحل : $\int_{٥}^{٢}$ ق'(س) . دس = ق(س) $\Big]_{٥}^{٢}$ = ١٣

ق(٢) − ق(٥) = ١٣ $\xRightarrow{\text{نعوض}}$ ق(٢) − (−١٧) = ١٣

−١٧   −١٧

∴ $\boxed{\text{ق(٢) = −٤}}$

مثال (٦) : ص = $\int_{١}^{٢}$ (٤س³ − ٣س² + ٣) . دس ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر ، لايجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ نشتق الطرفين ومشتقة التكامل المحدود تساوي صفر .

قاعدة : التكامل عند نفس الرقم يساوي صفر

$\int_{م}^{م}$ مقدار . دس = صفر .

* أحدى الخصائص

مثال (١) : $\int_{١}^{١}$ ٣ . دس = ٣(١ − ١) = صفر

٢) $\int_{٤}^{٤}$ (٣س² + ٥) . دس = س³ + ٥س $\Big]_{٤}^{٤}$

= (٦٤ + ٢٠) − (٦٤ + ٢٠) = صفر .

* ايجاد ثوابت (مجاهيل)

- الفكرة تعطي تكامل محدود = عدد ويطلب ايجاد ثابت إما في الحدود يكون او في المقدار .

أمثلة : جد قيمة الثابت في كل مما يلي :

١) $\int_{١}^{ب}$ ٦س . دس = ٩ ، جد قيمة ب .

$\frac{٦}{٢}$س² $\Big]_{١}^{ب}$ = ٩ ⟸ ٣ب² − ٣(١)² = ٩
+٣   +٣

$\frac{٣ب^2}{٣} = \frac{١٢}{٣}$ ⟸ $\sqrt{ب^2} = \sqrt{٤}$ ⟸ ب = +٢ او ب = −٢

٢) $\int_{-١}^{م}$ ٤ . دس = ٢٠ ، جد م . ⟸ ٤(م − −١) = ٢٠

٤م + ٤ − ٤ = ٢٠ − ٤ ⟸ $\frac{٤م}{٤} = \frac{١٦}{٤}$ $\boxed{م = ٤}$.

٣) $\int_{٤}^{هـ}$ ٣س² . دس = صفر $\boxed{٤}$

٤) $\int_{٤}^{هـ}$ ٣س² . دس = −١٢٨ $\boxed{−٤}$

مثال : اذا كان $\int$ ق(س) . دس = س^{٢/٣} + جـ جد $\int_{٢٧}^{٦٤}$ ق(س) . دس .   مهم

هذا السؤال معطى ناتج التكامل غير المحدود ← اذا لغينا وجود جـ صار نفسه التكامل المحدود .

∴ س^{٢/٣} $\Big]_{٢٧}^{٦٤}$

$(\sqrt[3]{٦٤})^2 - (\sqrt[3]{٢٧})^2$ ← يمكن ان ناخذ الجذر ثم الاس .

= ٤² − ٣² = ١٦ − ٩

= $\boxed{٧}$

مثال : ق(٥) = ٦ ، ق(٩) = ١٠ وكان $\int_{٥}^{٩}$ م ق'(س) . دس = ١٢

جد قيمة (م) .

م. زين ارتيمه | التكامل وتطبيقاته | مركز الدكتورة منارة العلم

٢٠١٩ صيفية $\int \frac{س^2 - 9س + 18}{س - 3}\, دس$ (١٠ علامات)

* خصائص التكامل المحدود

أولاً: الخصائص الخطية:

1) $\int_{أ}^{ب} ل\, ق(س)\, دس = ل \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ ل: ثابت

2) $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm ع(س))\, دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس \pm \int_{أ}^{ب} ع(س)\, دس$

أمثلة

① اذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\, دس = 6$ ، $\int_{1}^{3} هـ(س)\, دس = -2$ جد ما يلي:

أ) $\int_{1}^{3} 2ق(س)\, دس = 2\int_{1}^{3} ق(س)\, دس$

$= 2 \times 6 = 12$

ب) $\int_{1}^{3} (3هـ(س) - 6ق(س) + 4)\, دس$ نوزع التكامل

$3\int_{1}^{3} هـ(س)\, دس - 6\int_{1}^{3} ق(س)\, دس + \int_{1}^{3} 4\, دس$

$3 \times -2 - 6 \times 6 + 4(3 - 1)$

$-6 - 36 + 8 = -34$

② $\int_{-1}^{2} 2ل(س)\, دس = $ [illegible] ، $\int_{-1}^{2} ع(س)\, دس = 5$ ، جد

لـ قبل أي شيء نجد نقسم على ٢ $\Leftarrow \boxed{\int_{-1}^{2} ل(س) = -1}$

أ) $\int_{-1}^{2} \frac{5ع(س)}{2}\, دس = \frac{5}{2} \int_{-1}^{2} ع(س)\, دس$

$= \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

ب) $\int_{-1}^{2} (2ع(س) - 3ل(س) - 2س)\, دس$ $س^2$

$2\int_{-1}^{2} ع(س)\, دس - 3\int_{-1}^{2} ل(س)\, دس - \int_{-1}^{2} 2س\, دس$

$2 \times 5 - 3 \times -1 - ((2)^2 - (-1)^2)$

$10 + 3 - 3 = \boxed{10}$

* الخصائص المهمة:

[1] خاصية تساوي حدود التكامل. **

$\int_{أ}^{أ} ق(س)\, دس = صفر$

اذا كان الحد العلوي = الحد السفلي ⟸ الناتج صفر.

أمثلة ① $\int_{5}^{5} ق(س)\, دس = صفر$.

② $\int_{ب}^{ب} (4س + 3س^2 - 5)\, دس = صفر$ انتبه للحدود

③ $\int_{هـ}^{هـ} \frac{س - 2}{س^2 - 4س + 4}\, دس = صفر$.

④ $\int_{5}^{5} (7س + 4)\, دس = م$ جد $\int_{1}^{5} (3س^2 + 2س)\, دس$. فكرة

من هنا م = صفر ⟸ $\int_{1}^{5} (3س^2 + 2س)\, دس$

$س^3 + س^2 \Big]_{1}^{5} = 125 + 25 - ((1)^3 + (1)^2)$

$= \boxed{151}$

[2] خاصية قلب حدود التكامل. ***

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\, دس$

- عند قلب حدود التكامل نعكس اشارة الناتج.

أمثلة

① اذا كان $\int_{4}^{5} ق(س)\, دس = 4$ جد $\int_{5}^{4} ق(س)\, دس$.

الحل: خاصية قلب الحدود: $\int_{5}^{4} ق(س)\, دس = -4$

② $\int_{1}^{4} 2ق(س)\, دس = 12$ جد $\int_{4}^{1} (ق(س) + 2س)\, دس$

الحل نجد $\boxed{\int_{1}^{4} ق(س)\, دس = 6}$ وزع.

$\int_{4}^{1} ق(س)\, دس + \int_{4}^{1} 2س\, دس$

خاصية قلب الحدود $-6 + س^2 \Big]_{4}^{1} = -6 + (1 - 16)$

$= -6 - 15 = \boxed{-21}$

③ $\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{2} = 3$ جد $\int_{2}^{-1} (3ل(س) + 4)\, دس$

④ $\int_{4}^{1} (3ق(س) - 5)\, دس = 9$ جد $\int_{1}^{4} (2ق(س) + 1)\, دس$ فكرة كتاب

[3] خاصية الاضافة. جمع تكاملين محدودين.

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

بداية — نهاية — مشترك — بداية — نهاية — مشترك

جميع التكاملات تحتوي على ق(س)، انتبه للبداية والنهاية.

أمثلة:

1) اذا كان $\int_{1}^{5} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 2$ ، $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ جد $\int_{5}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$.

يمكن الوصول من خلال المعطيات الى تكامل يبدأ بـ 5 وينتهي بـ 6 لكن نحتاج تجهيز.

$$\int_{5}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{5}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= -1 + 4$$

$$= \boxed{3}$$

تجهيز: $\int_{1}^{5} \frac{2}{2}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{2}{2}$

$\therefore \int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 1$

نحتاج عكسه $\int_{5}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -1$

خاصية قلب الحدود

2) $\int_{-1}^{2} \frac{\text{ق}(\text{س})}{3}\,\text{دس} = 5$ ، $\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ جد قيمة:

$$\int_{6}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{6}^{-1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

تجهيز: $\int_{-1}^{2} \frac{\text{ق}(\text{س})}{3}\,\text{دس} = \frac{5}{1} \times 3 \Leftarrow \int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 15$

$\int_{6}^{-1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -\int_{-1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -4$

$\int_{6}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -4 + 15 = \boxed{11}$

فكرة تكاملين لها أسماء مختلفة. — كتاب

اذا كان $\int_{-1}^{2} \frac{\text{ل}(\text{س})}{2}\,\text{دس} = 3$ ، $\int_{2}^{-1} (\text{هـ}(\text{س})+1)\,\text{دس} = 5$

جد قيمة $\int_{-1}^{2} \left(3\text{هـ}(\text{س}) - 2\text{س} + 3\text{ل}(\text{س})\right)\,\text{دس}$

سؤال تجهيزات كثيرة.

الحل: $\int_{-1}^{2} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس} = 6$ ، $\int_{2}^{-1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} + 1(-1-2) = 5$

$+3 \qquad +3$

$\therefore \int_{2}^{-1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = 8$

وزع التكامل: $3\int_{-1}^{2} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{-1}^{2} 2\text{س}\,\text{دس} + 3\int_{-1}^{2} \text{ل}(\text{س})\,\text{دس}$

$$= 3\times -8 - [\text{س}^2]_{-1}^{2} + 3\times 6$$

$$= -24 - 3 + 18 = \boxed{9}$$

* الاقتران المتشعب. (خاصية الاضافة)

أمثلة:

1) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} ، & 0 < \text{س} < 2 \\ 3\text{س}^2 ، & 2 \le \text{س} < 5 \end{cases}$

جد $\int_{0}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل: $\int_{0}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{2} 2\text{س}\,\text{دس} + \int_{2}^{5} 3\text{س}^2\,\text{دس}$

$$= [\text{س}^2]_{0}^{2} + [\text{س}^3]_{2}^{5}$$

$$= 4 - 0 + 125 - 8$$

$$= \boxed{121}$$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س}^3 + 5 ، & 0 \le \text{س} < 3 \\ 7 ، & 3 \le \text{س} < 7 \end{cases}$

نختار القاعدة الانسب

جد $\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$$\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{3}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{1}^{3} (4\text{س}^3 + 5)\,\text{دس} + \int_{3}^{5} 7\,\text{دس}$$

$$= [\text{س}^4 + 5\text{س}]_{1}^{3} + 7(5-3)$$

$$= 81 + 15 - (1+5) + 7\times 2$$

$$= 96 - 6 + 14 = \boxed{104}$$

* ايجاد ثوابت (مجاهيل)

أمثلة

1) $\int_{2+\text{أ}}^{\text{أ}^2-4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 0$ ، جد قيمة أ.

الحل: خاصية تساوي الحدود تعطي قيمة التكامل صفر

$\text{أ}^2 - 4 = 2 + \text{أ} \Leftarrow \text{أ}^2 - \text{أ} - 6 = 0 \Leftarrow (\text{أ} - 3)(\text{أ} + 2) = 0$

$\boxed{\text{أ} = 3}$ او $\boxed{\text{أ} = -2}$

٢) $\int_{1}^{ب} (2س-1)\,دس = 0$ ، جد قيمة ب . سابكل مباشر

$\boxed{ب = 1}$

$[س^2 - س]_{1}^{ب} = 0$

$ب^2 - ب - (1-1) = 0 \Rightarrow ب^2 - ب = 0 \Rightarrow ب(ب-1) = 0$

ومنه $\boxed{ب = 0}$ أو $\boxed{ب = 1}$

٣) $\int_{م^3+1}^{7} ق(س)\,دس = 0$ ، جد قيمة الثابت م . $\boxed{-2}$

٤) $\int_{م}^{1} (2س-3)\,دس = 0$ ، جد قيمة م . $\boxed{1 ، 2}$

٥) $\int_{م-1}^{5م+7} ق(س)\,دس = 0$ ، جد قيمة م . $\boxed{-3}$

٦) $\int_{3}^{م} (2-4س)\,دس = 0$ ، جد قيمة م . $\boxed{-2 ، 3}$

٧) $\int_{0}^{ل} (2س-1)\,دس = 6$ ، جد قيمة ل $\boxed{-2 ، 3}$

(ص ٢.١٩) $\int_{1}^{5} (ق(س) - 7)\,دس = 2$ ، $\int_{5}^{1} 3هـ(س)\,دس = 9$

جد قيمة $\int_{1}^{5} (ق(س) + هـ(س))\,دس$ (١٠ علامات)

(ص ٢.١٠) إذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -3$ ، $\int_{هـ}^{ب} ق(س)\,دس = 4$

فإن $\int_{أ}^{هـ} ق(س)\,دس = $ ⋯

أ) 1 ب) -7

ج) -1 د) 7

(ص ٢.١٣) : $\int_{-1}^{6} ق(س)\,دس = 8$ ، $\int_{-1}^{3} 2ق(س)\,دس = 10$

أوجد $\int_{3}^{6} (ق(س) + 2س)\,دس$. $\boxed{30}$

* التكامل بالتعويض

نستخدم التكامل بالتعويض في حالة وجود حاصل ضرب او قسمة اقترانين احدهما مشتقة الآخر. (قد يكون احد الاقترانين فيه جذر او أس).

$\int$ اقتران × مشتقته ← $\int \text{ق(س)} \times \text{ق}'\text{(س)} \, .\, \text{دس}$

خطوات الحل: ١) نفرض الاقتران ص

٢) نشتق الطرفين $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'\text{(س)}}{1}$

٣) نجد دس بدلالة دص ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

** ٤) اذا كان التكامل محدود نستبدل بحدود لتسريع الحل. هو دائماً تُنفذ

٥) نعوض في التكامل عن ص، دس

مثلاً: $\int \text{ص} \times \cancel{\text{ق}'\text{(س)}} \, . \, \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ق}'\text{(س)}}}$

$= \int \text{ص} \, . \, \text{دص}$.

٦) نكامل حسب القواعد وعند الانتهاء لا ننسى +جـ ونستبدل ص بقيمتها اذا كان التكامل غير محدود.

* قد نحتاج التجهيزات التي درسناها سابقاً ... المسألة (خاصية الجذر)

بشكل عام: الصور العامة للحالات التي نستخدم فيها التعويض.

١) $\int$ مشتقة اقتران . $(\text{اقتران})^{\text{ن}}$ دس أو $\int \frac{\text{مشتقة}}{(\text{اقتران})^{\text{ن}}}$ دس

حالة أس للاقتران.

٢) $\int$ مشتقة اقتران × $\sqrt[\text{م}]{\text{اقتران}}$ دس أو $\int \frac{\text{مشتقة}}{\sqrt[\text{م}]{\text{اقتران}}}$ دس

٣) $\int$ مشتقة زاوية جا / جتا / قا (الزاوية)

* لا ننسى اذا كان في المقام جتا نرفعها للبسط وتصبح قا ⇐ $\frac{1}{\text{جتا}} = \text{قا}$

ص الفرض: ما داخل الاس، ما داخل الجذر، ما داخل الزاوية (الكبير).

أمثلة: جد ناتج مايلي:

(وزارة ٢٠١٩) (١٢ علامة)

١) $\int (\text{س}^2 - 1)\sqrt{\text{س}^3 - 3\text{س}} \, . \, \text{دس}$

الحل: نفرض ما تحت الجذر ⇐ $\text{ص} = \text{س}^3 - 3\text{س}$ ②

نشتق: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 - 3$ ③ نعدل $\text{دص} = (3\text{س}^2 - 3)\,\text{دس}$

ومنه $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2 - 3}$ عامل مشترك حتى يتشابه مع العوض.

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3(\text{س}^2 - 1)}$ ① ⇐ نعوض $\int \cancel{(\text{س}^2 - 1)} \times \text{ص}^{\frac{1}{2}} \, . \, \frac{\text{دص}}{3\cancel{(\text{س}^2 - 1)}}$

$\frac{1}{3}\int \text{ص}^{\frac{1}{2}} \, . \, \text{دص} = \frac{1}{3} \times \frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$ ← مقام المقام بسط

$= \frac{2}{9}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$ نرجع نستبدل.

$= \frac{2}{9}(\text{س}^3 - 3\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

٢) $\int 3\text{س}^2 (\text{س}^3 + 5)^2 \, . \, \text{دس}$

الحل: $\text{ص} = \text{س}^3 + 5$ ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$ ← $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\int \cancel{3\text{س}^2} \times \text{ص}^2 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2}} = \int \text{ص}^2 \, . \, \text{دص}$

$\frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ} \Leftarrow \frac{(\text{س}^3 + 5)^3}{3} + \text{جـ}$

٣) $\int 21\,(3\text{س}^2 + 4\text{س})(\text{س}^3 + 2\text{س}^2)^7 \, . \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 2\text{س}^2$ ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 + 4\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2 + 4\text{س}}$

$\int 21\,\cancel{(3\text{س}^2 + 4\text{س})}\,\text{ص}^7 \, . \, \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2 + 4\text{س}}}$

$\int 21\,\text{ص}^7 \, . \, \text{دص} = \frac{21\,\text{ص}^8}{8} + \text{جـ}$

$= \frac{21}{8}(\text{س}^3 + 2\text{س}^2)^8 + \text{جـ}$

4) $\int (2س+1)\sqrt{س^2+س+5}\ .ءس$

5) $\int 6\ جتا(2س-1)\ .ءس$

الحل: $ص = 2س - 1 \Leftarrow \frac{ءص}{2} = \frac{\cancel{2}ءس}{\cancel{2}} \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{2}$

$\int \frac{6}{2}^{3}\ جتاص\ .\frac{ءص}{2} = 3\ جاص + ج$

$= 3\ جا(2س-1) + ج$

أو (استخدام قواعد سريعة) تم طرحها سابقاً (خطي)

1) $\int (أس+ب)^{ن}\ .ءس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ \times (ن+1)} + ج$

2) $\int جا(أس+ب)\ .ءس = \frac{-جتا(أس+ب)}{أ} + ج$

$\int جتا(أس+ب)\ .ءس = \frac{جا(أس+ب)}{أ} + ج$

$\int قا^2(أس+ب)\ .ءس = \frac{ظا(أس+ب)}{أ} + ج$

(ط2) $\int 6\ جتا(2س-1)\ .ءس = \frac{\cancel{6}^{3}\ جا(2س-1)}{\cancel{2}_{1}} + ج$

6) $\int_{0}^{2} \frac{6س}{\sqrt[3]{(س^2+1)}}\ .ءس$ قبل أي محاولة للحل نجهز (ارفع للبسط و حول جذر لأس)

$\int_{0}^{2} 6س\ (س^2+1)^{-\frac{1}{3}}\ .ءس$ الآن افرض

$ص = س^2 + 1$

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

ومنه $ءس = \frac{ءص}{2س}$

الحدود $س = 0 \leftarrow ص = 0 + 1 = \boxed{1}$

$س = 2 \leftarrow ص = 5$

$\int_{1}^{5} \cancel{6}^{3}\ \cancel{س}\ (ص)^{-\frac{1}{3}}\ .\frac{ءص}{\cancel{2س}}$

$3 \left[\frac{ص^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{2}{3}} \right]_{1}^{5}$

$\frac{9}{2} \left[\sqrt[3]{ص^2} \right]_{1}^{5}$

الاجابة النهائية $\boxed{\frac{9}{2}\sqrt[3]{25} - \frac{9}{2}}$

7) $\int_{3}^{0} \frac{1}{\sqrt{5س+1}}\ .ءس \xleftarrow{ارفع} \int_{3}^{0} (5س+1)^{-\frac{1}{2}}\ .ءس$ $\boxed{\frac{-6}{5}}$

$\boxed{ص = 5س + 1}$

$\frac{ءص}{ءس} = 5$

$\boxed{ءس = \frac{ءص}{5}}$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = 3 \leftarrow ص = 16$

$\int_{16}^{1} ص^{-\frac{1}{2}}\ .\frac{ءص}{5} = \left[\frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{16}^{1}$

أو مباشرة $\Leftarrow \left[\frac{2(5س+1)^{\frac{-1}{2}+1}}{1 \times 5} \right]_{16}^{1}$

الحلول

8) $\int 3س\ (س^2+1)^{-5}\ .ءس$ — $\boxed{\frac{-3}{8(س^2+1)^4} + ج}$

9) $\int 2س\ قا^2(1-س^2)\ .ءس$ — $\boxed{-ظا(1-س^2) + ج}$

10) $\int_{1}^{-1} (4س-1)\sqrt[3]{2س^2-س-1}\ .ءس$ — $\boxed{\frac{3}{4}\sqrt[3]{16} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{25}}$

11) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{[illegible]}}\ .ءس$ — $\boxed{\frac{5}{4}(\sqrt[5]{25} - 1)}$

12) $\int_{-1}^{2} 6(1-2س)^{5}\ .ءس$ — $\boxed{صفر}$

13) $\int 12\ جا(1-4س)\ .ءس$ — $\boxed{3\ جتا(1-4س) + ج}$

14) $\int (1-2س)(س-س^2)^{4}\ .ءس$

15) $\int 6س^2 \sqrt[5]{(2س^3-3)^2}\ .ءس$

16) $\int (2س-3س^2)\ قا^2(س^3-س^2)\ .ءس$

17) $\int \frac{3س-9}{(س^2-6س)^2}\ .ءس$ لطيف جداً

18) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2}\ .ءس$ تجهيز وقاعدة مباشرة.

19) $\int 2\ قا^2(2-س)\ .ءس = 2\frac{ظا(2-س)}{-1} + ج$ قاعدة.

20) $\int ([illegible])(س^2-4س+1)^{5}\ .ءس$

21) $\int 2س^3\ جا(س^4+1)\ .ءس$

22) $\int_{0}^{2} \sqrt{4س+1}\ .ءس$

23) $\int_{-1}^{-1} 3س^2(س^3-1)^{3}\ .ءس$ انتبه للحدود.

* فكرة كتاب

اذا علمت ان ق$(-8) = 5$ ، ق$(27) = -6$ ، فجد $\int_{-2}^{3} 3س^2\ قَ(س^3)\ ءس$

الحل: نفرض ما داخل قَ $\Leftarrow ص = س^3 \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = 3س^2$

ومنه: $\boxed{ءس = \frac{ءص}{3س^2}}$ استبدل الحدود $س = 3 \leftarrow ص = (3)^3 = 27$

$س = -2 \leftarrow ص = (-2)^3 = -8$

$\int_{-8}^{27} \cancel{3س^2}\ قَ(ص)\ .\frac{ءص}{\cancel{3س^2}} = \int_{-8}^{27} قَ(س)\ .ءس = ق(27) - ق(-8)$

$= -6 - 5 = \boxed{-11}$

١) مثال: $\int_{0}^{2} ق(س)\,دس = 3$ ، جد $\int_{-1}^{2} 8س\, ق(س^2+1)\,دس$

الحل: افرض: ص = $س^2 + 1$ ← $\frac{دص}{دس} = 2س$ ← $دس = \frac{دص}{2س}$

استبدل: س = ٢ ← ص = $(2)^2 + 1 = 5$

س = -١ ← ص = $(-1)^2 + 1 = 2$

عكس المعطى

$\int_{2}^{5} \cancel{8س}\, ق(ص)\,\frac{دص}{\cancel{2س}} = 4\int_{2}^{5} ق(ص)\,دص$

$4 \times -3 = -12$

أسئلة وزارة

(٢٠١٥ ص) ٤) أ) ١) $\int \frac{س^2 - \sqrt{س}\,جاس}{\sqrt{س}}\,دس$ (٣ علامات)

٢) $\int_{1}^{7} 4ق(س)\,دس = 8$ ، $\int_{5}^{7} ق(س)\,دس = -9$ ، جد $\int_{1}^{5} \left(3ق(س) - \frac{3}{2}س^2\right)\,دس$.

(٢٠١٣ ش) ١) ١) ق(١) = -٦ ، ق(٣) = ٨ ، $\int_{1}^{3} قَ(س)\,دس =$

أ) صفر ب) ٢ جـ) -١٤ د) ١٤

٣) $\int 4قا^2س\,دس$ يساوي:

أ) ٤ ظا س + جـ ب) ظا س + جـ جـ) ٤ قا س + جـ د) ٤ ظا² س + جـ

٤) $\int_{0}^{1} \sqrt{س}\,دس$ يساوي:

أ) ١ ب) $\frac{2}{3}$ جـ) $\frac{3}{2}$ د) ٢

٣) أ) ٢) $\int \frac{6س - 4}{3س^2 - 4س + 1}\,دس$ (٥ علامات)

ب) $\int_{-2}^{5} ق(س)\,دس = 6$ ، $\int_{5}^{-2} \frac{1}{2} ع(س)\,دس = 4$ ، جد (٦ علامات)

$\int_{-2}^{5} \left(3ق(س) + ع(س) - س\right)\,دس$

دائرة

(٢٠١٩ ص) ٢) ٢) $\int (1 - س)^{0}\,دس$ يساوي: (٣ علامات)

٣) $\int_{-1}^{1} 3\,دس$

٤) $\int \frac{4}{س^{-3}}\,دس$ لا ننسى + جـ

(٢٠١١ ص) ١) أ) ١) ق(س) = $\int (4س^3 + 2س)\,دس$ ، فإن قَ(١) يساوي:

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) ١٤

٢) $\int_{2}^{1} ق(س)\,دس = 5$ ، $\int_{2}^{3} 2ق(س)\,دس = 9$ ، فإن $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس$:

أ) ٤ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٤

٣) ق(٢) = ٥ ، ق(١) = ٢ ، $\int_{1}^{2} قَ(س)(س+1)\,دس$ تساوي:

أ) ١ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥

٢) أ) $\int \left(قاس + \frac{3}{س}\right)\,دس$ (٣ علامات)

(٥ علامات)

ب) $\int 3\sqrt[3]{6س - س^2}\,(6 - 2س)\,دس$ (٥ علامات)

جـ) $\int^{2} \frac{ق(س)}{2}\,دس = 6$ ، جد قيمة $\int^{2} \left(3س^2 + 3ق(س)\right)\,دس$

(٢٠١٦ ص) ١) ٢) $\int \frac{6س + 4}{جتا^2(3س^2 + 4س)}\,دس$ (٤ علامات)

ب) $\int_{1}^{6} \left(3 - ق(س)\right)\,دس = 7$ ، $\int_{2}^{6} ق(س)\,دس = -5$ جد (٤ علامات)

$\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{2} ق(س) - 4س\right)\,دس$.

(٢٠١٨ ص) ١) أ) ١) $\int ق(س)\,دس = 3س^2 - 2$ ، فإن قَ(٢) =

أ) ٦ ب) ١٠ جـ) ٤ د) ١٢

٢) ق(٢) = -٨ ، ق(٤) = ١٢ ، قيمة $\int_{2}^{4} قَ(س)\,دس$ تساوي:

أ) -٤ ب) ٤ جـ) ٢٠ د) -٢٠

٤) قيمة $\int_{2}^{3} 6\,دس$.

ب) $\int_{0}^{3} \frac{ق(س)}{4}\,دس = 3$ ، $\int_{5}^{3} ق(س)\,دس = 4$ ، ما قيمة (٦ علامات)

$\int_{0}^{5} \left(3ق(س) + 2س + 4\right)\,دس$ ؟

جـ) ٢) $\int 3س^4\, جتا(س^5 + 2)\,دس$. (٤ علامات)

* تطبيقات التكامل

[1] تطبيقات هندسية

← تذكير: ميل المماس = مشتقة الاقتران

$= ق'(س) = \frac{دص}{دس}$

المطلوب: ايجاد قاعدة الاقتران (ق(س)):

1) نكامل (ميل المماس المعطى) تكامل غير محدود ولا ننسى كتابة $\boxed{+جـ}$.

2) يعطي السؤال نقطة الهدف منها ايجاد قيمة $\boxed{جـ}$.

مثال (1): جد قاعدة الاقتران ق، علماً بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: $ق'(س) = 3س^2 - 8س$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة (−1، 3).

الحل: نجري عملية التكامل على ق' لايجاد ق.

$\int ق'(س)\, دس = \int (3س^2 - 8س)\, دس$

$ق(س) = \frac{3س^3}{3} - \frac{8س^2}{2} + جـ$

$ق(س) = س^3 - 4س^2 + جـ$ نعوض النقطة لايجاد قيمة جـ

$ق(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + جـ$

$3 = -1 - 4 + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 8}$

$\therefore ق(س) = س^3 - 4س^2 + 8$

مثال (2): جد قاعدة الاقتران ص = ق(س)، علماً بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^2+9}$ وأن النقطة (−4، 1) تقع على منحنى الاقتران ص.

الحل: $\frac{دص}{دس} \times \frac{س\sqrt{س^2+9}}{1}$ ضرب تبادلي.

$\int دص = \int س\sqrt{س^2+9}\, .\, دس$ نضيف للطرفين اشارة التكامل.

نستخدم الفرض والتعويض لحل التكامل $ع = س^2 + 9$

$\frac{دع}{دس} = 2س$

$\frac{دع}{2س} = دس$

$ص = \int س\, .\, ع^{\frac{1}{2}}\, .\, \frac{دع}{2س}$

$ص = \frac{1}{2}\int ع^{\frac{1}{2}}\, .\, دع$ $\left(دس = \frac{دع}{2س}\right)$

$ص = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ع^{\frac{3}{2}} + جـ$ قلبت مباشرة، نستبدل ع بقيمتها.

(اذا اردنا التعويض قبل نستبدل قيمة س = −4 بقيمة ع)

$ص = \frac{1}{3}\sqrt{(س^2+9)^3} + جـ$

نعوض (−4، 1) لايجاد جـ

$1 = \frac{1}{3}\sqrt{((-4)^2+9)^3} + جـ \Leftarrow 1 = \frac{1}{3}\sqrt{(16+9)^3} + جـ$

$1 = \frac{1}{3}(\sqrt{25})^3 + جـ \Leftarrow 1 = \frac{1}{3}(5)^3 + جـ \Leftarrow جـ = 1 - \frac{125}{3}$ عادي

$\boxed{جـ = -\frac{122}{3}}$ ومنه $ص = \frac{1}{3}\sqrt{(س^2+9)^3} - \frac{122}{3}$

مثال (3): اذا علمت ان ميل المماس لنقطة (س، ص) تعطى بالعلاقة $\boxed{ق'(س) = 6\sqrt[3]{2س-1}}$ وان منحناه يمر بالنقطة (1، 5) فجد ق(4).

الحل: $\int ق'(س)\, دس = \int 6\sqrt[3]{2س-1}\, .\, دس$ ← قاعدة خطية

$ق(س) = \int 6\,(2س-1)^{\frac{1}{3}}\, دس$

$ق(س) = 6 \times \frac{(2س-1)^{\frac{1+3}{3}}}{\frac{4}{3}\times 2} + جـ$

$ق(س) = \frac{9}{4}(2س-1)^{\frac{4}{3}} + جـ$ ← نعوض النقطة لايجاد $\boxed{جـ}$

$ق(1) = \frac{9}{4}\sqrt[3]{((2\times1)-1)^4} + جـ \Leftarrow 5 = \frac{9}{4}\times\sqrt[3]{1} + جـ$

$5 = \frac{9}{4} + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{11}{4}}$ ومنه $جـ = 5 - \frac{9}{4}$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{9}{4}\sqrt[3]{(2س-1)^4} + \frac{11}{4}$

المطلوب $\Leftarrow ق(4) = \frac{9}{4}\sqrt[3]{(2\times14-1)^4} + \frac{11}{4}$

$= \frac{9}{4}\times(\sqrt[3]{27})^4 + \frac{11}{4} = \frac{9}{4}\times 81 + \frac{11}{4}$

$ق(4) = \frac{729+11}{4} = \frac{740}{4} = \boxed{185}$

الأسئلة :

١) ميل المماس لمنحنى الاقتران : $(٦ - ٢س + ٩س^{٣})$ جد قاعدة الاقتران ه علماً بأن ه(١) = ٥ .

$\boxed{ه(س) = ٦س - س^{٢} - \frac{٩}{٤}س^{٤} + ٥}$

٢) $ه(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢}+٨}}$ وكان منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٠، ٤)

$\boxed{ه(س) = \frac{٣}{٢}(س^{٢}+٨)^{\frac{٢}{٣}} - ٢}$

٣) جد ه(١) ، علماً بأن ميل المماس يساوي $٢٥(٥س+٤)^{٤}$ وان منحنى الاقتران ه يمر بالنقطة (-١، ٧)

$\boxed{ه(س) = (٥س+٤)^{٥} + ٦}$

٤) ميل المماس تُعطى بالعلاقة : $لَ(س) = ٢س(٤ - ٣س)$ فجد قاعدة الاقتران ل ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٣) .

$\boxed{ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣}$

٥) ميل المماس : $هَ(س) = \frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ ، س ≠ ٠ ، جد ه(س) علماً بأن منحنى الاقتران ه يمر بالنقطة (-١، ٥) .

$\boxed{ه(س) = س^{٢} - ٥س - ١}$

وزارة

(٢٠١١ ص) : اذا كان ميل المماس لمنحنى ه(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $(٤س^{٣} - ٦س)$ جد قاعدة الاقتران ه علماً بأن منحنى ه يمر بالنقطة (٢، ٥) .

$\boxed{ه(س) = س^{٤} - ٣س^{٢} + ١}$

(٢٠١٤ ص) ميل المماس لمنحنى الاقتران ه(س) يساوي $(٢ - \frac{١}{س^{٢}})$ ويمر بالنقطة $(\frac{١}{٢}، ١)$ جد قاعدة ه .

$\boxed{ه(س) = ٢س + \frac{١}{س} - ٢}$

(٢٠١٦ ص) ميل المماس يساوي $\frac{٣ - س^{٢}}{س^{٢}}$ جد قاعدة الاقتران علماً بأن ه يمر بالنقطة (-١، ٦) .

$\boxed{ه(س) = \frac{-٣}{س} - س + ٢}$

(٢٠١٨ ص) الميل يساوي $(٤س - ٢)^{٣}$ ، جد قاعدة الاقتران ه علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١، ٨)

$\boxed{ه(س) = \frac{(٤س-٢)^{٤}}{١٦} + ٧}$

(٢٠١٩ ش) ميل المماس لمنحنى ه(س) يساوي $٦(١ - ٢س)^{٥}$ ، جد ه(١) علماً بأن منحنى الاقتران ه(س) يمر بالنقطة $(٠، \frac{١}{٢})$. ٤ علامات .

$\boxed{ه(س) = -\frac{(١-٢س)^{٦}}{٢} + ١ \quad ، \quad ه(١) = \frac{١}{٢}}$

(٢٠١٩ الخطة الجديدة) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ه(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $(\frac{٣}{س^{٢}} - ٥)$ ، س ≠ ٠ . جد قاعدة الاقتران ه ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١، ٢)

(٩ علامات)

$\boxed{ه(س) = -\frac{٣}{س} - ٥س + ١٠}$

(٢٠١٩ قديم) $قَ(س) = \frac{٣}{س^{٢}}$ ، يمر بالنقطة (١، ٢) (٤ علامات)

(٢٠١٨ ص قديم) $قَ(س) = ٤\sqrt[٣]{س}$ يمر بالنقطة (١، ٠)

$\boxed{ه(س) = ٣س^{\frac{٤}{٣}} - ٣}$

* تطبيقات فيزيائية

ن : الزمن

تذكير: ف : المسافة   ع : السرعة   ت : تسارع

ف ← ع ← ت (مشتقة ، اشتق)

الآن اصبحت العملية عكسية (بترجع رجوع).

التسارع ← سرعة ← المسافة (تكامل ، تكامل)

ت(ن) ← ∫ ع(ن) ← ∫ ف(ن) .

ملاحظات

١) بعد انهاء التكامل ما ننسى نضيف [جـ] ثم نجد قيمتها من خلال معلومة تُعطى في السؤال.

مثال: ع(١) = ٤ ← مكان السرعة . (مكان الزمن)

ثم نعوض قيمة [جـ] الناتج في المعادلة .

* اذا طلب تعويض زمن معين نعوض في الأخير بعد الانتهاء من كتابة المعادلة .

٢) السرعة الابتدائية ← ع(٠) ← ن = ٠

٣) موقعه الابتدائي ← ف(٠) ← ن = ٠ (نعوض في ف)

٤) الموقع يعني المسافة ← ف(ن)

اذا ذكر (جد القاعدة بعد مرور ن ثانية) نجري التكامل ونجد [جـ] ولا نعوض شيء آخر.

* امثلة

١) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي ف(٠) = ٤ ، إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٦ - ٢ن + ٦ن²) م/ث ، جد موقعه بعد مرور ثلاث ثواني من بدء الحركة.

الحل: ف(٠) = ٤ ← تساعدنا لنوجد قيمة [جـ]

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن ⟸ ف(ن) = ∫ (٦ - ٢ن + ٦ن²) . دن

ف(ن) = ٦ن - ن² + ٢ن³ + جـ   نجد [جـ] من خلال المعلومة

ف(٠) = ٦(٠) - (٠)² + ٢(٠)³ + جـ = ٤ ⟸ [جـ = ٤]

∴ ف(ن) = ٦ن - ن² + ٢ن³ + ٤

⟸ المطلوب ف(٣) = ٦(٣) - (٣)² + ٢(٣)³ + ٤

= ١٨ - ٩ + ٥٤ + ٤

[ف(٣) = ٦٧ م]

٢) ع(ن) = (٢ن + ٥) م/ث ، جد موقع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م .

[ف(٢) = -٣]

٣) ع(ن) = ٦(١ + ٢ن)² م/ث ، جد الموقع بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥م

[ف(١) = ٧]

٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث ان تسارعها بعد مرور ن ثانية من انطلاقها تُعطى بالعلاقة : ت(ن) = (١٢ن - ٢٠) م/ث² ، اذا علمت ان موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م وان سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث ، فجد:

١- سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها .

٢- موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثواني من انطلاقها .

الحل: اعطى معلومتين ف(٠) و ع(٠) لاننا سنوجد [جـ] مرتين

١) ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن ⟸ ع(ن) = ∫ (١٢ن - ٢٠) . دن

ع(ن) = ٦ن² - ٢٠ن + جـ ⟸ ع(٠) = ٦(٠)² - ٢٠(٠) + جـ

ومنه [جـ = ٣] ∴ ع(ن) = ٦ن² - ٢٠ن + ٣

المطلوب: ع(٢) = ٦(٢)² - ٢٠(٢) + ٣

= -١٣ م/ث

التكامل وتطبيقاته

٤) الموقع: ف(ن) = ∫ ع(ن) ءن

ف(ن) = ∫ (٦ن^٢ − ٢٠ن + ٣) ءن

ف(ن) = ٢ن^٣ − ١٠ن^٢ + ٣ن + جـ   نجد (جـ)

ف(٠) = ٢(٠)^٣ − ١٠(٠)^٢ + ٣(٠) + جـ = ٢

∴ جـ = ٢   ومنه ف(ن) = ٢ن^٣ − ١٠ن^٢ + ٣ن + ٢

المطلوب: ف(٣) = ٢(٣)^٣ − ١٠(٣)^٢ + ٣(٣) + ٢

ف(٣) = −٢٥ م.

٥) يتحرك جسم على خط مستقيم، وبتسارع ثابت مقداره ت(ن) = ١٢ م/ث^٢، اذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣

جد: ١) سرعة الجسم بعد مرور ٤ ثواني من بدء الحركة

ع(٤) = −٤٣

٢) موقع الجسم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة.

ف(٣) = −٣٦

٦) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن − ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ف(ن) = ٦ جا(٢ن − ١) + جـ

٧) تتحرك نقطة مادية بحيث ان سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة:
ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث، جد موقع النقطة المادية بعد مرور اربع ثوان من بدء الحركة علماً بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م

ف(٤) = ٦٦

٨) علاقة التسارع: ت(ن) = ٤٨(١ − ٢ن)^٣، الموقع الابتدائي ف(٠) = ٣م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢م/ث، جد:

أ) سرعة بعد مرور ثانية واحدة.

ع(١) = ٢

ب) موقع الجسم بعد مرور ثانيتين.

ف(٢) = −١٢٤/١٠

٩) ع(ن) = (٣ن − ١)(٤ن + ١) م/ث، جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ف(ن) = ٤ن^٣ − ن^٢/٢ − ن + جـ

ب) موقع الجسم بعد ثانيتين، علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م

ف(٢) = ٣٥ م

وزارة

(٢٠٠٨ ش) ع(ن) = ٣ن^٢ − ٢ن، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٣ ثواني علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥.

(٢٠٠٨ ص): ت(ن) = ١٢ م/ث^٢، جد سرعة الجسم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية ع(٠) = ٧م/ث.

(٢٠٠٩ ش) ع(ن) = ٣(ن + ١)^٢، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ١م.

(٢٠١٣ ش) ت(ن) = ٨ م/ث^٢، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٥ ثانية من بدء حركته علماً بأن سرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ وموضعه الابتدائي ف(٠) = ١٠م

(٢٠١٦ ص) ع(ن) = ٦(ن + ١)^٢، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٨ م.

(٢٠١٧ ص) ت(ن) = ٨ن ، جد المسافة التي تقطعها الجسم بعد مرور ن ثانية ، علماً بأن السرعة الابتدائية ع(١) = ٤ م/ث وموقعه الابتدائي ف(١) = ٣م .

(٢٠١٨ ص) ع(ن) = (٦ن + ٤) م/ث ، جد موقع النقطة المادية بعد مرور (٥) ثوان من بدء حركتها علماً بأن موقعها الابتدائي ف(١) = ٣م .

(٢٠١٩ ش) ت(ن) = (٢ن + $\frac{1}{2}$) م/ث^2 جد سرعة الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة إذا علمت أن ع(٢) = ١٠ م/ث. (٤ علامات)

(٢٠١٩ ص) يتحرك جسم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن) = ١٠ م/ث^2 ، اذا كانت سرعته الابتدائية ع(١) = ٥ م/ث ، فإن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة:

أ) ع(ن) = (-١٠ن - ٥) م/ث   ب) ع(ن) = -١٠ن + ٥

ج) ع(ن) = ١٠ن - ٥   د) ع(ن) = ١٠ن + ٥

(٢٠١٩ تكميلي) : يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (١٢ن + ٥) م/ث ، اذا علمت ان موقعه الابتدائي ف(١) = ٣م ، فإن موقعه بعد مرور ثانية واحدة من انطلاقه يساوي :

أ) ١١ م   ب) ١٤م   ج) ١٧   د) ٢٠م

فكرة: جد موقع جسم بعد مرور (٥ ثواني) من بدء الحركة ، اذا انعدم تسارعه علماً بأن سرعته الابتدائية ع(١) = ٥م/ث وموقعه الابتدائي ف(١) = ٥م .

الحل : انعدم التسارع ⟸ ت(ن) = صفر .

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن ⟸ ع(ن) = ∫ ٠ دن

ع(ن) = جـ عوض ⟸ ع(١) = جـ = ٥ ∴ $\boxed{جـ = ٥}$

ومنه ع(ن) = ٥ ⟸ ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ ٥ دن ⟸ ف(ن) = ٥ن + جـ عوض

ف(١) = ٥(١) + جـ = ٥ ⟸ $\boxed{جـ = ٠}$

ومنه : ف(ن) = ٥ن + ٠ ⟸ المطلوب ف(٥) = ٥(٥) + ٠

$\boxed{ف(٥) = ٢٥ م}$

فكرة: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث تعطى سرعته بالعلاقة الآتية : ع(ن) = ٣ن^2 + ٤ن ، جد موقعه بعد مرور ٣ ثواني علماً بأن موقعه بعد ثانية واحدة يساوي ٨م . ف(١) = ٨

الحل : ف(ن) = ∫ ع(ن) دن ⟸ ف(ن) = ∫ ٣ن^2 + ٤ن دن

ف(ن) = ن^3 + ٢ن^2 + جـ ⟸ عوض ف(١) = (١)^3 + ٢(١)^2 + جـ =

١ + ٢ + جـ = ٨ ⟸ $\boxed{جـ = ٥}$

ف(ن) = ن^3 + ٢ن^2 + ٥ ⟸ المطلوب ف(٣) = (٣)^3 + ٢(٣)^2 + ٥

ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٥ ⟸ $\boxed{ف(٣) = ٥٠ م}$

المساحة

* سنجد المساحة من خلال التكامل المحدود.

* اذا طلب السؤال ايجاد مساحة منطقة مغلقة محصورة سيكون لدينا حالتين للحل:

الحالة الاولى

(1) منطقة محصورة بين اقتران ق(س) ومحور السينات ومستقيمين س = أ ، س = ب او قد يذكر فترة [أ ، ب] بدل مستقيمين.

خطوات الحل:

* نساوي الاقتران بالصفر لايجاد قيم س.

ق(س) = 0 ← ينتج لدينا قيم لـ س يجب ان نتأكد منها كالتالي:-

أ- القيمة الناتجة تقع بين [أ ، ب] إذا نرتبهم من الصغير للكبير، (سنوخذ القيمة)

[أ ، جـ ، ب] و سيصبح لدينا مساحتين

المساحة = $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س).دس + $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س).دس

نجري التكامل المحدود فرديًا ثم نجمع المساحتين

ب- اذا القيمة الناتجة لا تقع بينهم، (تهمل) و نجري تكامل محدود واحد والناتج هو المساحة.

* ملاحظات مهمة:

1- لا يوجد مساحة سالبة (دائمًا موجبة) يوجد حل للسالب ⇐ استخدم قيمة مطلقة. | |

2- يكون التكامل المحدود سالب، اذا كانت المنطقة المطلوب مساحتها تحت محور السينات.

مثال (1) جد المساحة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = 2س + 4 ومحور السينات والمستقيمين: س = 1 ، س = 4.

الحل: نساوي الاقتران بالصفر ونجد قيم س.

ق(س) = 2س + 4 = 0 ⇐ 2س = -4 ⇐ س = $\frac{-4}{2}$ ⇐ $\boxed{س = -2}$

نتحقق هل $\boxed{-2}$ تقع بين 1 و 4 ⇐ لا ⇐ تهمل.

∴ المساحة = $\int_{1}^{4}$ (2س + 4).دس = [س² + 4س]$_{1}^{4}$

= (16 + 16) - ((1)² + 4(1))

= 32 - 5 = 27 وحدة مربعة.

مثال (2) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = 3س² - 12 ومحور السينات والمستقيمان س = -1 ، س = 3.

الحل: (1) ق(س) = 3س² - 12 = 0 ⇐ 3س² = 12 ⇐ س² = $\frac{12}{3}$ ⇐ س² = 4

ومنه س = 2 ، -2

(2) نتأكد من القيم: س = -2 لا تقع بين -1 ، 3 ⇐ تهمل

س = 2 ← توخذ لانها تقسم المستقيم $\boxed{س = 2}$

(3) المساحة = $\int_{-1}^{2}$ (3س² - 12).دس = [س³ - 12س]$_{-1}^{2}$

= (8 - 24) - (-1 - (-1)12) = -27

نأخذ قيمة مطلقة ⇐ المساحة = |-27| = 27 وحدة مربعة.

مثال (3) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² - 2س و محور السينات على الفترة [1 ، 4].

الحل: 1) ق(س) = س² - 2س = 0 ⇐ س(س - 2) = 0

س = 0 ، س = 2

2) نتأكد من القيم: س = 0 خارج الفترة [1 ، 4] ⇐ تهمل ✗

س = 2 تقع بين [1 ، 4] اذا يجب أن نجد المساحة من خلال تكاملين.

$$\text{المساحة} = \underbrace{\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس}_{م_١} + \underbrace{\int_{٢}^{٤} ق(س)\,دس}_{م_٢}$$

$$م_١ = \int_{١}^{٢} (س^٢ - ٢س)\,دس = \left[\frac{س^٣}{٣} - س^٢\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{(٢)^٣}{٣} - (٢)^٢\right) - \left(\frac{(١)^٣}{٣} - (١)^٢\right) = \frac{-٢}{٣}$$

تحت محور السينات نأخذ قيمة مطلقة

$$\therefore م_١ = \left|\frac{-٢}{٣}\right| = \boxed{\frac{٢}{٣}}$$

$$م_٢ = \int_{٢}^{٤} (س^٢ - ٢س)\,دس = \left[\frac{س^٣}{٣} - س^٢\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٦٤}{٣} - ١٦\right) - \left(\frac{٨}{٣} - ٤\right) = \boxed{\frac{٢٠}{٣}}$$

$$\text{المساحة} = م_١ + م_٢$$

$$= \frac{٢}{٣} + \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$$ وحدة مربعة.

أسئلة متنوعة: جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، و محور السينات على الفترة المحددة :

١) $ق(س) = ١٢ - ٤س$ ، $[١، ٢]$ $\boxed{٦}$

٢) $ق(س) = ٣س^٢ - ١٢س$ ، $[٠، ٢]$ $\boxed{١٦}$

٣) $ق(س) = ٦ - ٢س$ ، $[١، ٤]$ ([illegible]) $\boxed{٥}$

٤) $ق(س) = ١٢$ ، $س = -١$ ، $س = ٢$ $\boxed{٣٦}$

٥) $ق(س) = ٥ - ٢س$ ، $س = -٢$ ، $س = ٢$ $\boxed{\frac{٤١}{٣}}$

٦) $ق(س) = ٣س^٢ - ٣$ ، $س = -٤$ ، $س = -٢$ $\boxed{٥٠}$

٧) $ق(س) = ٦ - ٦س^٢$ ، $[-٢، ٠]$ $\boxed{١٢}$

٨) $ق(س) = ٤س^٣$ ، $[-١، ١]$ $\boxed{٢}$

٩) $ق(س) = ٣س^٢ - ٤٨$ ، $[٣، ٥]$ $\boxed{٣٤}$

** ١٠) $ق(س) = -س^٢ - ٤$ ، $[-١، ١]$ $\boxed{\frac{٢٦}{٣}}$

الحالة الثانية: ٢- اقتران مع محور السينات بدون حدود.

خطوات الحل :

- نساوي الاقتران بالصفر ⇐ ق(س) = صفر لنجد قيم س.

نحلل لنجد قيم س و من خلال القيم سنجد تكامل حدود.

احنا رح نعمل حدود التكامل

$$\text{المساحة} = \int_{\text{الصغير}}^{\text{الكبير}} ق(س)\,دس$$

مثال (١): جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = $س^٢ + ٣س$ ، ومحور السينات.

الحل : ١) $ق(س) = ٠ \Leftarrow س^٢ + ٣س = ٠ \Leftarrow س(س + ٣) = ٠$

ومنه $س = ٠$ ، $س = -٣$ ⇐ حدود التكامل

فوق ← كبير ، صغير ← تحت.

٢) $$\text{المساحة} = \int_{-٣}^{٠} (س^٢ + ٣س)\,دس = \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{٣س^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠}$$

$$= \cancel{\frac{(٠)^٣}{٣}} + \cancel{\frac{٣(٠)^٢}{٢}} - \left(\frac{(-٣)^٣}{٣} + \frac{٣(-٣)^٢}{٢}\right)$$

$$= -٩ + \frac{٢٧}{٢} = \frac{-٩}{٢}$$

$$\text{المساحة} = \int_{-٣}^{٠} |ق(س)|\,دس = \frac{٩}{٢}$$ وحدة مربعة.

مثال (٢): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = $س^٢ - ٢س - ٣$ ، ومحور السينات.

الحل : ١) $ق(س) = س^٢ - ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -١$ ← الادنى (تحت)

← الاعلى (فوق).

٢) $$\text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} (س^٢ - ٢س - ٣)\,دس = \left[\frac{س^٣}{٣} - س^٢ - ٣س\right]_{-١}^{٣}$$

$$= \cancel{\frac{٢٧}{٣}} - \cancel{٩} - ٩ - \left(\frac{-١}{٣} - ١ + ٣\right)$$

$$= -٩ + \frac{١}{٣} - ٢ = \frac{-٣٣ + ١}{٣} = \boxed{\frac{-٣٢}{٣}}$$

$$\text{المساحة} = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة.

تدريب: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٤س − س² $\boxed{\frac{32}{3}}$

ب) ق(س) = ٤س³ − ١٢س² $\boxed{27}$

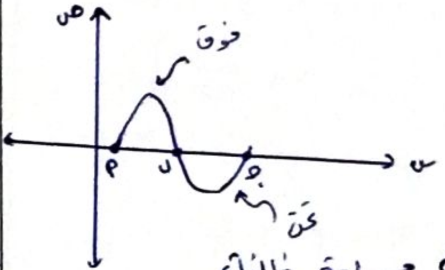
ج) ق(س) = س² − ٩ $\boxed{36}$

د) ق(س) = ٤س − ٤ − س²

وخلال الحل انتبه للمساحات السالبة !!.

* إيجاد المساحة من خلال رسمة اقتران مع محور السينات

* يجب الانتباه جيداً للمطلوب في السؤال (تكامل أو مساحة)



⇐ اذا طلب السؤال مساحة فالناتج دائماً موجب. بغض النظر عن موقع المنطقة المطلوب مساحتها فوق أو تحت محور السينات

⇐ اذا طلب تكامل (نحافظ على الاشارة)

- فوق محور السينات (موجب) +
- تحت محور السينات (سالب) . −

* قوانين مساحة تلزم خلال الحل:

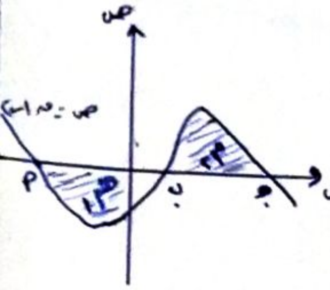
١) مساحة المربع = (ضلع)²

٢) مساحة المستطيل = الطول × العرض

٣) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع.

مثال: اعتماداً على الشكل التالي والذي يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س)، فإذا كانت المساحة.

م١ = ٨ وحدات مربعة، والمساحة م٢ = ٥ وحدات مربعة، أجد قيمة كل مما يأتي، مبرراً إجابتك:



١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = −م١ = −٨

لأن م١ تقع تحت محور السينات والتكامل يحافظ على الاشارة هنا.

٢) $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) دس = م٢ = ٥، لأن م٢ تقع فوق محور السينات.

٣) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس + $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) دس

= −٨ + ٥ = −٣

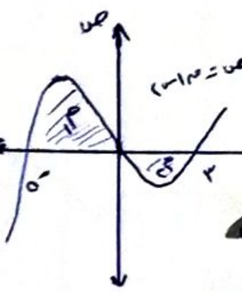
٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [أ، جـ].

المساحة = م١ + م٢

= $\int_{أ}^{ب}$ |ق(س)| دس + $\int_{ب}^{جـ}$ |ق(س)| دس

= ٨ + ٥ = ١٣ وحدة مربعة.

مثال ٢: م١ = ١٢، م٢ = ٣



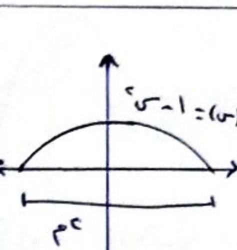
أجد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس

$\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{-٥}^{٠}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس

= ١٢ + (−٣) تحت محور السينات نأخذ اشارة سالبة.

= ١٠

مثال ٢: نافذة طول قاعدتها ٢م، محصورة بمنحنى الاقتران ص = ق(س) = ١ − س²



اذا اردنا وضع زجاج على النافذة وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟

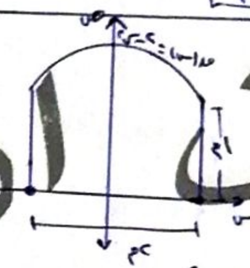
الحل: ق(س) = ٠ ← ١ − س² = ٠ ← س = −١، ١

المساحة = $\int_{-١}^{١}$ (١ − س²) دس = س − $\frac{س^3}{٣}$ $\Big]_{-١}^{١}$

م = ١ - $\frac{١}{٣}$ - (-١ + $\frac{١}{٣}$) = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$ = $\boxed{\frac{٤}{٣}}$

التكلفة = المساحة × سعر المتر المربع الواحد.

= $\frac{٤}{٣}$ × ٥ = $\boxed{\frac{٢٠}{٣}}$ دينار



مثال (٤) يمثل الشكل نافذة على شكل مستطيل طوله ٢م وارتفاعه ١م يعلوه منحنى يُعطى بالعلاقة: ق(س) = ٢ - س²

اذا اردنا وضع زجاج على النافذة وكانت تكلفة المتر المربع (٧) دنانير، جد التكلفة الكلية؟

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + المساحة تحت المنحنى

= (٢ × ١) + $\int_{-١}^{١}$ (٢ - س²) دس   (طول × عرض) (١ ← حدود الوسعة)

= ٢ + [٢س - $\frac{س^٣}{٣}$]$_{-١}^{١}$ (حدود الوسعة: ١، -١ من الطول ٢)

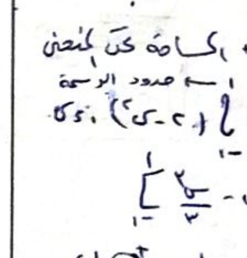
= ٢ + ٢ - $\frac{١}{٣}$ - (-٢ + $\frac{١}{٣}$)

مساحة النافذة = ٦ - $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١٦}{٣}$

التكلفة = المساحة × سعر المتر

= $\frac{١٦}{٣}$ × ٧ = $\frac{١١٢}{٣}$

مثال (٥) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور ثم اوجد $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس.



المساحة = $\int_{٠}^{٣}$ (٣ - س) دس   (محور السينات)

= [٣س - $\frac{س^٢}{٢}$]$_{٠}^{٣}$

= ٩ - $\frac{٩}{٢}$ - (صفر)

= $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة.

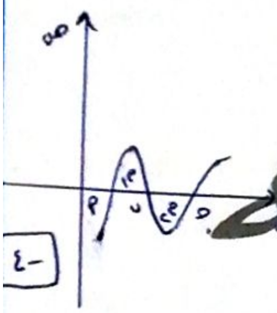
$\int_{٠}^{٣}$ (٣ - س) دس = [٣س - $\frac{س^٢}{٢}$]$_{٠}^{٣}$

= $\frac{٩}{٢}$

اسئلة سنوات سابقة

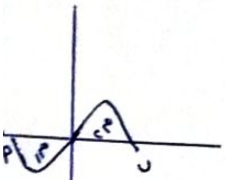
(٢٠٠٨ ص) جد المساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² - ٢س ومحور السينات. $\boxed{\frac{٤}{٣}}$

(٢٠٠٩ ش) بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) اذا كانت م١ = ٦ ، م٢ = ١٠ ، اوجد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس. $\boxed{-٤}$



(٢٠١٠ ش) جد المساحة بين ق(س) = ٦ - ٢س ومحور السينات في الفترة [٠، ٤] $\boxed{١٠}$

(٢٠١٠ ص) م١ = ٥ ، م٢ = ٣ اوجد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس. (مساحات فوق وتحت)



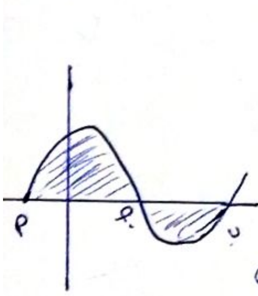
أ) ٨   ب) ٢   ج) -٨   د) -٢

- جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = ١ - س² ومحور السينات. $\boxed{\frac{٤}{٣}}$

(٢٠١٣ ش) م١ = ٩ ، م٢ = ٤ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس

أ) -١٣   ب) -٥   ج) ٥   د) ١٣

(٢٠١٢ ص)

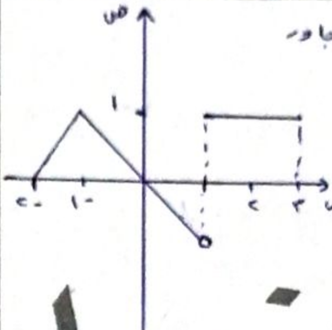


اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) في [أ، ب] اذا كانت مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي ١٤ وحدة مربعة وكان $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) دس = ٦ ، فما قيمة $\int_{ج}^{ب}$ ق(س) دس

أ) ٨   ب) ٢   ج) -٨   د) -٢

لا ننسى انه المنطقة تحت المحور

(٢٠١٥ ص) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على [-٢، ٣]، اعتماداً على الشكل جد قيمة $\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس.



الحل: التكامل هنا عبارة عن ٣ مساحات.

م١ = مساحة المثلث في الفترة [-٢، ٠]

م١ = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ١ = $\boxed{1}$ وحدة مربعة.

م٢: مساحة المثلث في الفترة [٠، ١]

م٢ = $\frac{1}{2}$ × ١ × ١ = $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

م٣: مساحة مستطيل في الفترة [١، ٣]

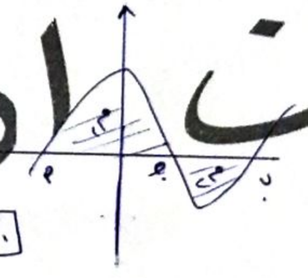
م٣ = ٢ × ١ = ٢ وحدة مربعة.

$\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس = م١ − م٢ + م٣ (فوق، تحت، فوق)

= ١ − $\frac{1}{2}$ + ٢ = $\boxed{\frac{5}{2}}$

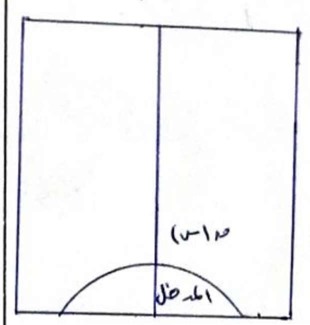
(٢٠١٣ ش) إذا علمت أن م١ = ٦، $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = −

جد م٢.



$\boxed{١٠}$

(٢٠١٧ ص) يمثل الشكل المجاور الواجهة الامامية لأحد المباني، مدخل المبنى يمثله منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − $\frac{1}{2}$ س²، ما تكلفة انشاء باب زجاجي للمدخل اذا علمت ان سعر الوحدة المربعة يساوي (٦٠) دينار.



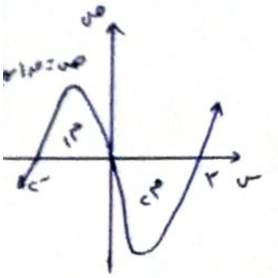
$\boxed{٣٢٠}$

(٢٠١٨ ص) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ١٢ − ٢س ومحور السينات على الفترة [٠، ٨] (٥ علامات)

(٢٠١٩ ش) " ص = ق(س) = س² − ٩ ومحور السينات في الفترة [-٤، ٤]. (٦ علامات)

(٢٠١٩ ص) ق(س) = ٤ − ٢س ومحور السينات على الفترة [١، ٣] (٣ علامات)

- معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س)، اذا علمت ان مساحة المنطقة م١ تساوي (٣) وحدات مربعة، مساحة المنطقة م٢ تساوي (٤) وحدات مربعة، فأجب عما يلي: (٦ علامات)



١) قيمة $\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس تساوي:

أ) ٧ ب) ١ ج) −١ د) −٧

٢) قيمة $\int_{-2}^{3}$ |ق(س)| دس تساوي:

أ) ٧ ب) ١ ج) ٨ د) ٩