طريق التفوق

في الرياضيات الفرع الأدبي | توجيهي

المنهاج الجديد

التكامل

436 سؤال

مع الإجابات الكاملة لها تشمل جميع الأسئلة

كتاب الطالب وكتاب التمارين

إعداد

د.خالد جلال

للتواصل مع المعلم

0799948198

أ.إياد الحمد

للتواصل مع المعلم

0795604563

الوحدة الرابعة

التكامل

للتوجيهي الأدبي

436 سؤال

منهاجي
متعة التعليم الهادف

د.خالد جلال

0799948198

أ.إياد الحمد

0795604563

منهاجي

متعة التعليم الهادف

الفهرس

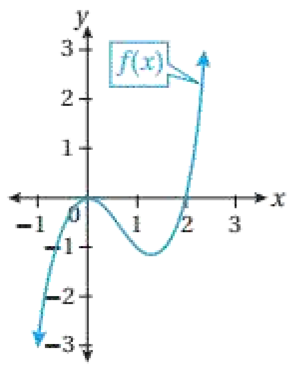
الجزء الأول الأسئلة

الجزء الثاني الإجابات

الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

مسألة اليوم



يُبيِّن الشـكل المجاور منحنى الاقتـران $f(x)$، هل يُمكِنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمْتُ أنَّ مشتقته هي: $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟

الأمثلة وأتحقق من فهمي

مثال 1

أجد اقترانًا أصليًا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1) $f(x) = 6x^5$

2) $f(x) = -3x^{-4}$

أتحقق من فهمي (صفحة 9)

أجد اقترانًا أصليًا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 5x^4$

b) $f(x) = -9x^{-10}$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 9\, dx$

2) $\int x^{10}\, dx$

3) $\int \sqrt{x}\, dx$

4) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 11)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6 \, dx$

b) $\int x^8 \, dx$

c) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

d) $\int \frac{1}{x^5} \, dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int (6x^2 + 2x) \, dx$

2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5} \right) dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 12)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \left(x^3 - 2x^{5/3} \right) dx$

b) $\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+2)(x-2) \, dx$

2) $\int \frac{8x^3 + 5x}{x} \, dx$

3) $\int x \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 13)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2} \, dx$

b) $\int (3x + 2)(x - 1) \, dx$

c) $\int x (x^3 - 7) \, dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 14)

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = x^7$ 2) $f(x) = -2x^6$ 3) $f(x) = -10$ 4) $f(x) = 8x$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5) $\int 6x \, dx$ 6) $\int (7x - 5) \, dx$ 7) $\int (3 - 4x) \, dx$

8) $\int \frac{10}{\sqrt{x}} \, dx$ 9) $\int 2x^{3/2} \, dx$ 10) $\int (2x^4 - 5x + 10) \, dx$

11) $\int (2x^3 - 2x) \, dx$ 12) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right) dx$ 13) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

14) $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} \, dx$ 15) $\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}} \, dx$ 16) $\int (x - 1)^2 \, dx$

17) $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} \, dx$ 18) $\int \sqrt{x}(x - 1) \, dx$ 19) $\int (2x - 3)(3x - 1) \, dx$

مهارات التفكير العليا (صفحة 14)

20) أكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل: $\int (2x + 1)(x - 1) \, dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x + 1)(x - 1) \, dx = \int (2x + 1) \, dx \times \int (x - 1) \, dx$$
$$= (x^2 + x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رنيم، ثم أُصحِّحه.

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

21) $\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^2 dx$ 22) $\int (x - 1)(x - 3)(x + 5) \, dx$

23) تبرير: إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، مُبرِّرًا إجابتي.

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (4x+2)\,dx$

2) $\int 2x^{-4}\,dx$

3) $\int (6x^2-4x)\,dx$

4) $\int (3-x-2x^5)\,dx$

5) $\int \left(x^{-2}+x^{5/2}\right)dx$

6) $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)dx$

7) $\int (3x^{-2}+6x^{-1/2}+x-4)\,dx$

8) $\int \left(10x^4+8x^{-3}\right)dx$

9) $\int \left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx$

10) $\int \left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

11) $\int \left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$

12) $\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13) $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

14) $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$

15) $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

16) $\int x\sqrt{x}\,dx$

17) $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

18) $\int x^2(1-x^3)\,dx$

19) $\int (x+4)^2\,dx$

20) $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

21) $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$

22) $\int x(x+1)^2\,dx$

23) $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

24) $\int (x-5)(x+5)\,dx$

الدرس 2

الشرط الأوَّلي
Initial Condition

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق، و $S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

الأمثلة وأتحقق من فهمي

مثال 1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 16)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

مثال 2 : من الحياة

التكلفة الحدِّية: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي JD 583.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 17)

التكلفة الحدِّية: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار.
أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2200.

مثال 3

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 18)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 4

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 20)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 20)

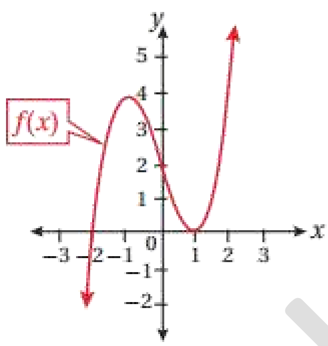
في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = x-3;\ (2, 9)$
2) $f'(x) = x^2-4;\ (0, 7)$
3) $f'(x) = 6x^2-4x+2;\ (1, 9)$
4) $f'(x) = \sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2;\ (4, 11)$
5) $f'(x) = (x+2)^2;\ (1, 7)$
6) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}-x;\ (4, 0)$

---

7) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x+3$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 5)$.

8) إذا كان ميـل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هـو: $f'(x) = \frac{x^2+10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5, 2)$.



9) يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 3x^2-3$. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.

بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قُطْره y سنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t^{-\frac{2}{3}}, t>0$، وكان نصف قُطْر البالون بعد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10) قاعدة العلاقة y بدلالة t.

11) نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

12) أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، وt عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

13 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

14 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $3\ \text{m}$، وكانت سرعته المتجهة هي $1\ \text{m/s}$ بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

15 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $2\ \text{m/s}$، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا (صفحة 21)

16 تبرير: تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 2
الشرط الأوَّلي
Initial Condition

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1 $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$

2 $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

3 $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

4 $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$ 5 $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$ 6 $f'(x) = -\frac{10}{x^2}; (1, 15)$

7 إذا كان ميـــل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

8 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

9 إذا كان ميــل المماس لمنحنــى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$، ومَرَّ منحناهــا بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

10 **الإيراد الحـدِّي:** يُمثِّل الاقتــران: $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تبــاع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

إرشاد: يُمثِّل الإيراد الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

11 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

12 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$، حيث t الزمن بالثواني، و a التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَــيْم حركته من نقطة الأصل بســرعة متجهة مقدارها 72 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الدرس 3

التكامل المحدود
Definite Integral

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدّية الشهرية (بالدينار) لكل درّاجة نارية يُنتِجها أحد مصانع الدرّاجات، حيث x عدد الدرّاجات المُنتَجة شهريًا، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x درّاجة شهريًا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 درّاجة إلى 600 درّاجة شهريًا.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_{0}^{1} (2x - 5)\, dx$

2) $\int_{-4}^{3} x(4 - 3x)\, dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 23)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{1}^{4} (8x - \sqrt{x})\, dx$

b) $\int_{-1}^{2} (1 - x)(1 + 3x)\, dx$

مثال 2

إذا كان: $\int_{1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 24)

إذا كان: $\int_0^k 6x^2 \, dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

مثال 3

إذا كان: $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$, $\int_0^5 g(x)\,dx = -4$, $\int_5^7 f(x)\,dx = 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\int_0^5 (4f(x) + g(x)) \, dx$

2) $\int_5^0 5g(x) \, dx$

3) $\int_0^7 f(x) \, dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 26)

إذا كان: $\int_{-1}^{1} h(x) \, dx = 7$, $\int_4^1 f(x) \, dx = 2$, $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 5$، فأجـد قيمـة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x)) \, dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x) \, dx$

c) $\int_{1}^{-1} 4h(x) \, dx$

مثال 4

1) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x) \, dx$.

2) إذا كان: $f(x) = |x-1|$، فأجد قيمة: $\int_0^5 f(x) \, dx$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 27)

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1 + x & , x < 1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x) \, dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |x - 3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{4} f(x) dx$.

مثال 5 : من الحياة

التغيُّــر في الأرباح: يُمثِّــل الاقتــران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشــهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شــهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشــهرية إلى 1100 جهــاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهــزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

أتحقّق من فهمي (صفحة 29)

مُعتمِدًا المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5، أجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز.

أتدرّب وأحُلّ المسائل (صفحة 29)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2 \, dx$

2) $\int_{-3}^{-2} 6 \, dx$

3) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3) \, dx$

4) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x} \, dx$

5) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

6) $\int_{-2}^{3} (-x^2 + 4x - 5) \, dx$

7) $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2) \, dx$

8) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2) \, dx$

9) $\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2} \, dx$

10) $\int_{1}^{4} x^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$

11) $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/5}) \, dx$

12) $\int_{1}^{9} \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 dx$

13) $\int_{-1}^{4} |3x - 6| \, dx$

14) $\int_{0}^{3} |x-2| \, dx$

15) $\int_{2}^{3} \frac{x^2 - 1}{x+1} \, dx$

---

16) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_{0}^{4} f(x) \, dx$.

17 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} -x^2+5 &, x<0 \\ x+5 &, x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

إذا كان: $\int_1^2 f(x)\ dx = -4, \int_1^5 f(x)\ dx = 6, \int_1^5 g(x)\ dx = 8$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

20 $\int_1^2 (3f(x)+x)\, dx$

19 $\int_5^1 (g(x)-2)\, dx$

18 $\int_2^2 g(x)\, dx$

23 $\int_1^5 \left(4f(x)+g(x)\right) dx$

22 $\int_1^5 \left(f(x)-g(x)\right)\ dx$

21 $\int_2^5 f(x)\, dx$

---

24 إذا كان: $\int_1^m (6x-10)\ dx = 4$، فأجد قيمة الثابت m.

25 تغيُّر التكلفة: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 6x+1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًا.

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

مهارات التفكير العليا (صفحة 30)

27 أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_0^2 (x^2+x)\, dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$= -\frac{14}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أصحِّحه.

28 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^n (1-x)\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ، حيث $n > 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

29 تحدٍّ: إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\, dx = 4a^2$ ، فأجد قيمة الثابت a.

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 3

التكامل المحدود
Definite Integral

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_1^5 10x^{-2}\, dx$
2. $\int_0^2 (2x^3 - 4x + 5)\, dx$
3. $\int_1^4 \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx$
4. $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$
5. $\int_0^5 (|x+3| - 5)\, dx$
6. $\int_0^6 x(6-x)\, dx$
7. $\int_1^2 (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\, dx$
8. $\int_0^7 |2x-1|\, dx$
9. $\int_{-3}^4 |x|\, dx$
10. $\int_1^2 \frac{x^2 + x^3}{x}\, dx$
11. $\int_3^4 (6x^2 - 4x)\, dx$
12. $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\, dx$

إذا كان: $\int_{-3}^{2} g(x)\, dx = -2$ ، $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx = 4$ ، $\int_{-3}^{2} f(x)\, dx = 5$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. $\int_2^2 f(x)\, dx$
14. $\int_1^2 (f(x) - 5)\, dx$
15. $\int_{-3}^2 \left(-2f(x)+5g(x)\right) dx$
16. $\int_2^{-3} (g(x) + 2x)\, dx$
17. $\int_2^{-3} \left(f(x) + g(x)\right) dx$
18. $\int_{-3}^2 \left(4f(x)-3g(x)\right) dx$

19 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\, dx$.

20 سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

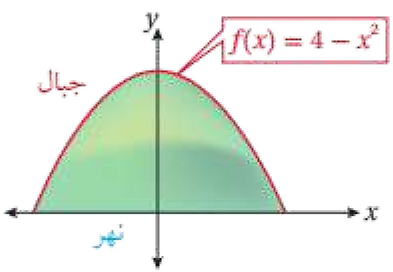
21 إذا كان: $\int_{2}^{3} (x^2 - a)\, dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس 4

المساحة
Area

مسألة اليوم

يُمثِّل الجزء المُظلَّل بالأخضر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها سلسلة من الجبال، ويُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحدَّ الفاصل بين سلسلة الجبال والمنطقة الزراعية، ويُمثِّل المحور x حافة النهر الذي يُطِلُّ على المنطقة الزراعية. أجد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية، علمًا بأنَّ x و y مَقيسان بالكيلومتر.



الأمثلة وأتحقق من فهمي

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 33)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 3$.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 5$، و $x = 2$.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 34)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

مثال 3

أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنــى الاقتــران: $f(x) = 3x^2 - 12$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 3$.

أتحقّق من فهمي (صفحة 36)

أجد مســاحة المنطقة المحصــورة بين منحنــى الاقتــران: $f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = -3$.

مثال 4

1) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.

2) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.

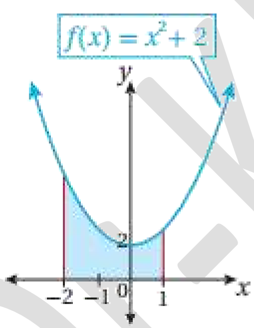
أتحقّق من فهمي (صفحة 38)

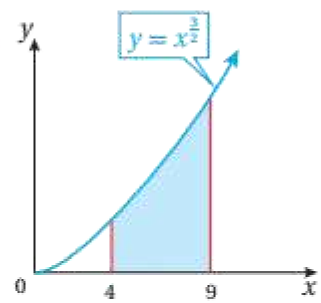
a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

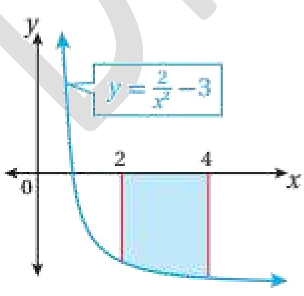
b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

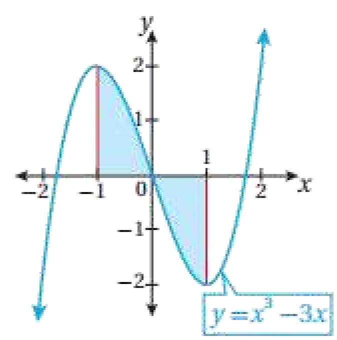
أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 39)

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

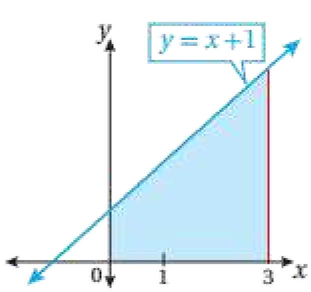
1)


2)


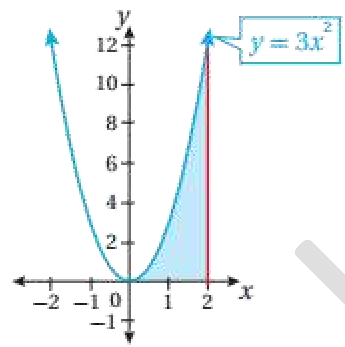
3)


4)


5



6



---

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

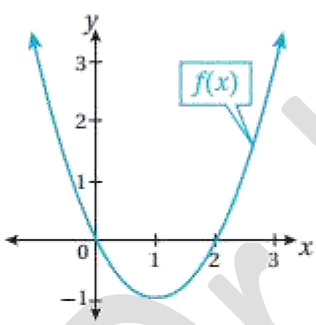
9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$.

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و $x = 5$.

12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = (x+1)(x-4)$، والمحور x.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$:



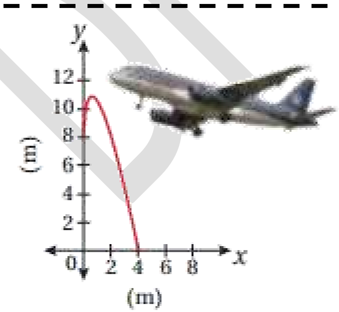
13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

14 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$.

15 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.

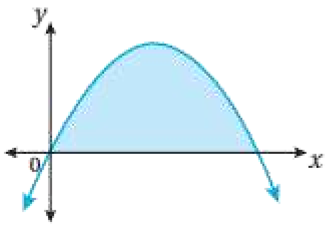
---

16 يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \le x \le 4$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.



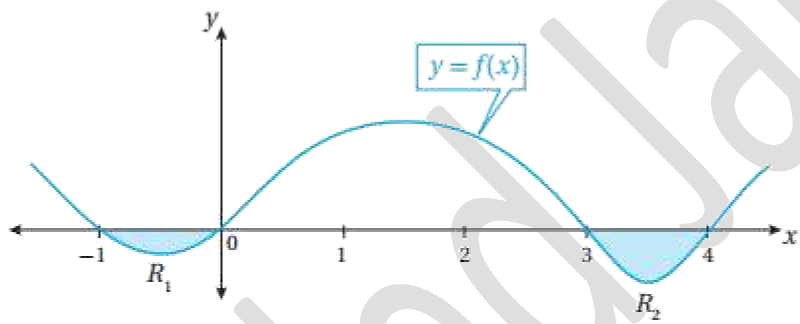
منهاجي
متعة التعليم الهادف

مهارات التفكير العليا (صفحة 40)



17 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

18 تبرير: يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.



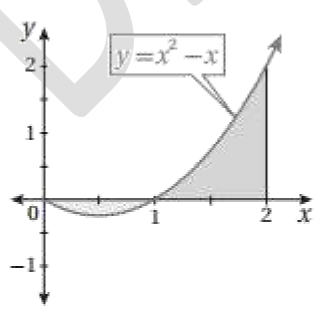
أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 4

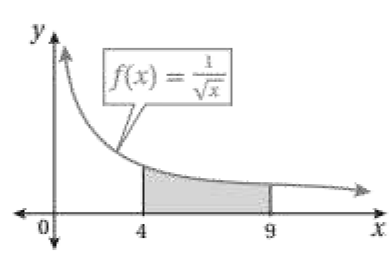
المساحة
Area

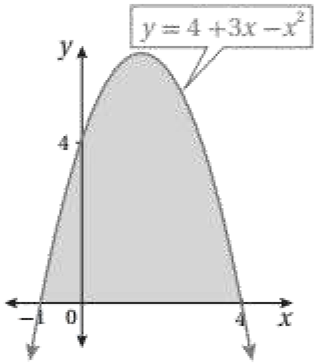
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

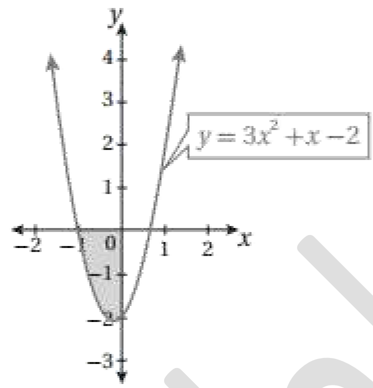
1

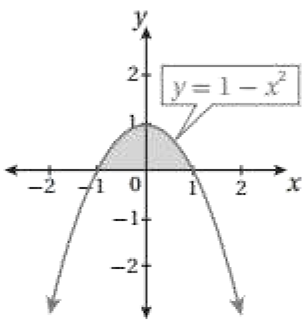


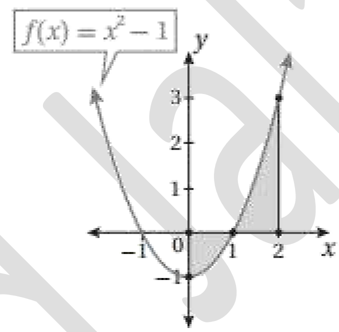
2



3


4


5


6


7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 (2 - x)$، والمحور x.

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

مسألة اليوم

يتغيَّر عدد الطلبة الذين يلتحقون بإحدى الجامعات الجديدة سنويًّا بمُعدَّل: $P'(t)=\frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$، حيث $P(t)$ عدد الطلبة المُلتحِقين بالجامعة، و t الزمن بالسنوات منذ تأسيس الجامعة. أجد عدد الطلبة الذين درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها، علمًا بأنَّ عددهم عند تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

الأمثلة و أتحقق من فهمي

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^x+8)\,dx$

2) $\int (5\cos x+\sqrt{x})\,dx$

3) $\int \left(4\sin x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 43)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2+7e^x)\,dx$

b) $\int \left(9\cos x+\frac{4}{x^3}\right)dx$

c) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\sin x\right)dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x}+6\sin x\right)dx$

2) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$

3) $\int \frac{2x^5-4}{x}\,dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 45)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx$ b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (2x+7)^5 \, dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} dx$ 3) $\int 2e^{4x+3} dx$

4) $\int 2\sin(4x+3) \, dx$ 5) $\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$ 6) $\int \frac{1}{8x-1} dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة47)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6 \, dx$ b) $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

c) $\int 4\cos(3x-7) \, dx$ d) $\int (\sin 5x + e^{2x}) \, dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) \, dx$ f) $\int \frac{5}{3x+2} dx$

مثال 4 : من الحياة

بيئة: في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبيَّن أنَّ مُعدَّل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُنمذَج بالاقتران: $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$، حيث $R(t)$ عدد البراميل المُنتَجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بَدْء ضَخِّ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخِّ من البئر، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

أتحقّق من فهمي (صفحة 49)

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان.

أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنَّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$ 2) $\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$ 3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$ 4) $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 50)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$ b) $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$ d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 (6e^{-3x}+12x^3)\,dx$ 2) $\int_{-1}^{2} (x+1)^3\,dx$ 2) $\int_{-1}^{2} (x+1)^3\,dx$

أتحقّق من فهمي (صفحة 51)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^2 (4e^{2x}+7)\,dx$ b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx$ c) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 52)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) dx$ 2) $\int \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right) dx$ 3) $\int (e^x+1)^2\, dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x+2)\, dx$ 5) $\int \left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right) dx$ 6) $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right) dx$

7) $\int \left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right) dx$ 8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx$ 9) $\int \left(\sin(2x-3)+e^{6x-4}\right) dx$

10) $\int 4\cos(6x+1)\, dx$ 11) $\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$ 12) $\int \left(e^{6x}+(1-2x)^6\right) dx$

13) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$ 14) $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$ 15) $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\, dx$

16) $\int \frac{e^x+7}{e^x}\, dx$ 17) $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\, dx$ 18) $\int \left(4x^3+2+3\sin(5-3x)\right) dx$

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\, dx$ 20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\, dx$ 21) $\int \frac{1+xe^x}{x}\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22) $\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right) dx$ 23) $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\, dx$ 24) $\int_3^4 (2x-6)^4\, dx$

---

25) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

26) $f'(x)=5e^x;\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 27) $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2};(1,-1)$ 28) $f'(x)=e^{-x}+x^2;(0,4)$

---

29) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=2x+\frac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e,e^2).

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

31 أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

طب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$.

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات التفكير العليا (صفحة 53)

34 أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x}\,dx$، وكان حَلُّه على النحو المجاور.
أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أصحِّحه.

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{2\times 1}{2x}\,dx$$
$$= \int \frac{2}{2x}\,dx$$
$$= \ln|2x| + C$$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

37 $\int (x^2+2x+1)^5\,dx$

36 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$

35 $\int \sqrt{e^x}\,dx$

---

38 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int (x-1)^3\,dx$ | $\int \frac{1}{x+1}\,dx$ | $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ | $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$

2) $\int (5e^x+4)\,dx$

3) $\int \left(1-e^{2x-3}\right)dx$

4) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

5) $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$

6) $\int \left(5-\sin(5-5x)\right)dx$

7) $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}\,dx$

8) $\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx$

9) $\int \left(3\cos x+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

10) $\int (3x+2)^5\,dx$

11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

12) $\int \left(e^{2x}-\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$

13) $\int \left(\sin(2x+3)+\cos(3x+2)\right)dx$

14) $\int \left(\frac{1}{8}x^{3/2}-\frac{4}{x}\right)dx$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx$

17) $\int_0^1 e^x(4-e^x)\,dx$

18) $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

---

19) إذا كان ميـل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=6e^{2x}+2e^{-x}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

20) $f'(x)=e^{-x}\,;\,(0,3)$

21) $f'(x)=\frac{3}{x}-4\,;\,(1,0)$

22) $f'(x)=4e^x-2\,;\,(0,1)$

23 **تلوُّث:** يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

24 أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$$\int \left(3\sin(3x+1)\right) dx \qquad \int (3\sin 3x + 1)\, dx$$

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالمِلّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب $(mg/\ cm^3)$. إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

الأمثلة وأتحقق من فهمي

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^2 (x^3+1)^7\ dx$

2) $\int 2x\sqrt{x^2+6}\ dx$

3) $\int \cos x\, e^{\sin x}\ dx$

4) $\int \frac{\ln x}{x}\ dx$

5) $\int x^4 \sin(x^5-8)\ dx$

6) $\int \sin^3 x \cos x\ dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 58)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2 (2x^3-3)^4\ dx$

b) $\int x\, e^{x^2+1}\ dx$

c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\ dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

e) $\int x^3 \cos(x^4-5)\ dx$

f) $\int \cos^4 x \sin x\ dx$

مثال 2 : من الحياة

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات. إذا كان: $p'(x)=\frac{-136\,x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر الحذاء، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر الحذاء الواحد 30 JD عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

أتحقَّق من فهمي (صفحة 60)

تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة (بالمئات) من المُنتَج. إذا كان: $p'(x)=\frac{-300\,x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة 75 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 4x(x^2+1)^3\,dx$

2) $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$

3) $\int_{-1}^3 8x\,e^{x^2}\,dx$

أتحقَّق من فهمي (صفحة 62)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^1 x^2(x^3-1)^4\,dx$

b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2-x^4)^7}\,dx$

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل (صفحة 62)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

2) $\int x^2(2x^3+5)^4\,dx$

3) $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

4) $\int x^6 e^{1-x^7}\,dx$

5) $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$

6) $\int (3x^2-1)\,e^{x^3-x}\,dx$

7) $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$

8) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

9) $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\,dx$

10) $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$

11) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

12) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

13) $\int e^x(2+e^x)^5\,dx$

14) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

15) $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^2 (2x-1)\,e^{x^2-x}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

18) $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

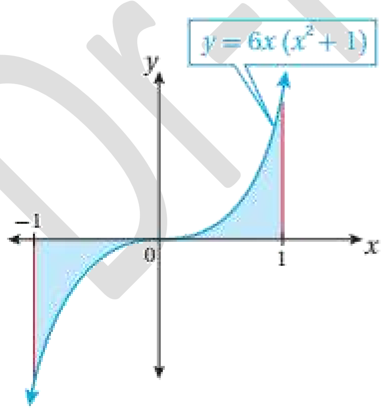
19) $\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$

20) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

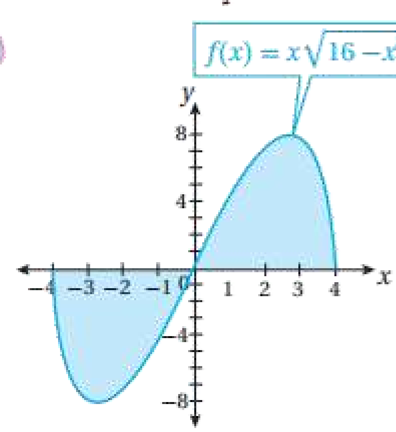
21) $\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22)



23)



في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

24) $f'(x) = xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

25) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}; (0, -1)$

---

26) يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

27) زراعـة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سـعر دونم أرض زراعية فـي الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سـنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعره الآن JD 5000.

28) سـكّان: أشـارت دراسـة إلى أنَّ عدد السـكّان في إحدى المدن يتغيَّر سـنويًا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$، حيث t عدد السـنوات منذ عام 2015م، و $P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

مهارات التفكير العليا (صفحة 64)

29) أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int x(x^3+1)\,dx$ $\quad$ $\int x\cos x^2\,dx$ $\quad$ $\int 3x^2 e^{1+x^3}\,dx$ $\quad$ $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

30 أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^1 4u^3\,du$$
$$= u^4 \Big|_0^1$$
$$= 1$$

X

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

31 تحدٍّ: إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$، فأجد قيمة الثابت k.

أسئلة إضافية من كتاب التمارين

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

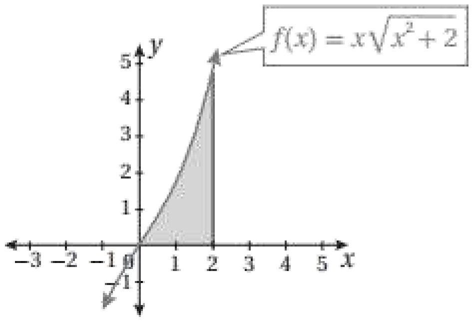
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$
2. $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$
3. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$
6. $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7. $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$
8. $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\,dx$
9. $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
10. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$

11 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



12 **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتـران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدِّي (بالدينـار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشـركات، حيث x عدد القطع المَبيعـة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتـران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

14 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}, \left(0, \frac{3}{2}\right)$

13 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 ; (2, 10)$

---

15 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

اختبار نهاية الوحدة (صفحة 65)

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+C$ b) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

c) $x^2-\frac{1}{x}+C$ d) $x^2+\frac{1}{x}+C$

2) إذا كان: $\int_0^2 kx\ dx = 6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

3) قيمة: $\int_0^3 (-x^2+3x)\ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

4) قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\ dx$ هي:

a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ d) $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

5) قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

6) التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x)=4x-x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x-x^2)\ dx$

b) $\int_0^4 (4x-x^2)\ dx$

c) $\int_1^0 (4x-x^2)\ dx$

d) $\int_0^1 (4x-x^2)\ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7) $\int 3x^{-1/2}\ dx$

8) $\int (8x-10x^2)\ dx$

9) $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

10) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

11) $\int (5x^2-2e^{7x})\ dx$

12) $\int (2x+3e^{4x+5})\ dx$

13) $\int \frac{x^2-6}{2x}\ dx$

14) $\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\ dx$

16) $\int 2x\, e^{x^2-1}\ dx$

17 $\int 4e^x(3+e^{2x})\ dx$

18 $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\ dx$

19 $\int x\sin(3+x^2)\ dx$

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\ dx$

21 $\int \left(x - \sin(7x+2)\right)\ dx$

22 $\int (e^{3x} - e^{-3x})\ dx$

23 $\int \frac{2}{1-5x}\ dx$

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

25 الإيراد الحدّي: يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنّ $R(20) = 30000$.

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\ dx = 4, \int_{-5}^{5} f(x)\ dx = 10,$ $\int_{-5}^{-1} g(x)\ dx = 11$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx$

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\ dx$

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\ dx$

31 $\int_{1}^{3} \frac{x^3+2x^2}{x}\ dx$

32 $\int_{1}^{5} |3-x|\ dx$

33 $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\ dx$

34 $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\ dx$

35 $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}\ dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\ dx$

37 $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\ dx$

38 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , x<0 \\ 4-x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$.

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2;\ (0, 6)$

41 $f'(x) = \frac{\sqrt{20}}{x^2};\ (1, 400)$

42 $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2};\ (1, 1)$

43 $f'(x) = 5e^x - 4;\ (0, -1)$

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5};\ (2, 10)$

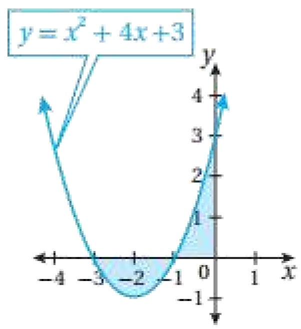
45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالمِلّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2 + 36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

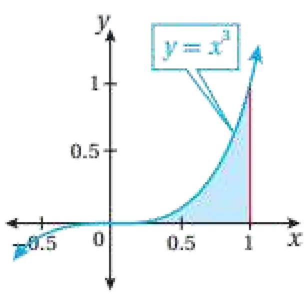
47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

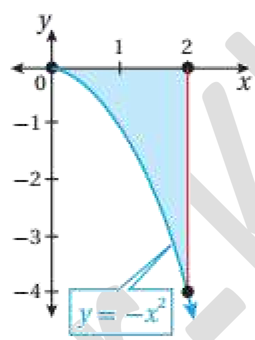
48



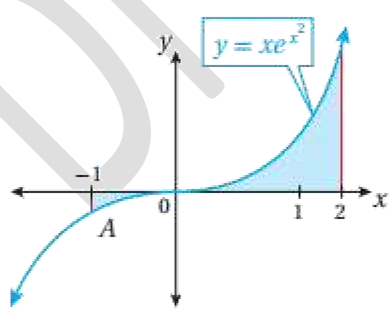
49



50



51



تمت بحمد الله

إجابات وحدة التكامل

تتضمن

كتاب الطالب

و

كتاب التمارين

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الأول

التكامل غير المحدود (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 8
	$f(x) = \int (3x^2 - 4x)dx = x^3 - 2x^2 + C$ لكن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,0)$ ، إذن: $C = 0$ ومنه فإن قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 - 2x^2$
	أتحقق من فهمي صفحة 9
a	$f(x) = 5x^4$ $G(x) = x^5 + C$
b	$f(x) = -9x^{-10}$ $G(x) = x^{-9} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 11
a	$\int 6dx = 6x + C$
b	$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C$ $= \frac{1}{9}x^9 + C$
c	$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx$ $= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$ $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

d	$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx$ $= -\frac{1}{4}x^{-4} + C$ $= -\frac{1}{4x^4} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 12
a	$\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right) dx = \int x^3 dx - 2\int x^{\frac{5}{3}} dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$ $= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + C$
b	$\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx = 3\int x^2 dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$ $= 3\int x^2 dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}} dx$ $= x^3 - 6\left(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right) + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 13
a	$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2}\right) dx$ $= \int (x^2 - 8x) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$
b	$\int (3x+2)(x-1) dx = \int (3x^2 - 3x + 2x - 2) dx$ $= \int (3x^2 - x - 2) dx$ $= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

c	$\int x(x^3-7)dx = \int (x^4-7x)dx$ $= \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + C$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 14
1	$f(x) = x^7$ $G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$
2	$f(x) = -2x^6$ $G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$
3	$f(x) = -10$ $G(x) = -10x + C$
4	$f(x) = 8x$ $G(x) = 4x^2 + C$
5	$\int 6x\,dx = 3x^2 + C$
6	$\int (7x-5)\,dx = \frac{7}{2}x^2 - 5x + C$
7	$\int (3-4x)\,dx = 3x - 2x^2 + C$
8	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 20x^{\frac{1}{2}} + C$ $= 20\sqrt{x} + C$
9	$\int 2x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
10	$\int (2x^4 - 5x + 10)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$
11	$\int (2x^3 - 2x)dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$

12	$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x^3}\right)dx=\int\left(3x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $=\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$
13	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x^{-2}-x^{-3})dx$ $=-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$
14	$\int\frac{4x^3-2}{x^3}dx=\int\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx$ $=\int(4-2x^{-3})dx$ $=4x+x^{-2}+C=4x+\frac{1}{x^2}+C$
15	$\int\frac{2x+8}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)dx$ $=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}+8x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+16x^{\frac{1}{2}}+C$ $=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+16\sqrt{x}+C$
16	$\int(x-1)^2dx=\int(x^2-2x+1)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$
17	$\int\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$ $=\int(x^2-2x+4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

18	$\int \sqrt{x}(x-1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
19	$\int (2x-3)(3x-1)dx = \int (6x^2 - 2x - 9x + 3)dx$ $= \int (6x^2 - 11x + 3)dx$ $= 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + C$
20	$\int f(x) \times g(x)dx \neq \int f(x)dx \times \int g(x)dx$ $\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2 - 2x + x - 1)dx$ $= \int (2x^2 - x - 1)dx$ $= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
21	$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ $= \int (1 + x^{-2})^2 dx = \int (1 + 2x^{-2} + x^{-4})dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$
22	$\int (x-1)(x-3)(x+5)dx = \int (x^2 - 3x - x + 3)(x+5)dx$ $= \int (x^2 - 4x + 3)(x+5)dx$ $= \int (x^3 + x^2 - 17x + 15)dx$ $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 15x + C$

23	$\int\left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx=\frac{2}{x}+10x+C$ $\int\left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx=\int\left(\frac{P}{2}x^{-2}+Q\right)dx$ $=-\frac{P}{2}x^{-1}+Qx+C$ $=-\frac{P}{2x}+Qx+C$ $\Longrightarrow -\frac{P}{2}=2$ و $Q=10$ $\Longrightarrow P=-4$ و $Q=10$

الدرس الأول

التكامل غير المحدود (كتاب التمارين)

1	$\int (4x+2)dx = 2x^2 + 2x + C$
2	$\int 2x^{-4}dx = -\frac{2}{3x^3} + C$
3	$\int (6x^2 - 4x)dx = 2x^3 - 2x^2 + C$
4	$\int (3 - x - 2x^5)dx = 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^6 + C$
5	$\int \left(x^{-2} + x^{\frac{5}{2}}\right)dx = -x^{-1} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$
6	$\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx = x^3 + \frac{2}{x} + C$
7	$\int \left(3x^{-2} + 6x^{-\frac{1}{2}} + x - 4\right)dx = -3x^{-1} + 12x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$
8	$\int (10x^4 + 8x^{-3})dx = 2x^5 - 4x^{-2} + C$
9	$\int \left(\frac{2}{x^3} - 3\sqrt{x}\right)dx = \int \left(2x^{-3} - 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ $= -x^{-2} - 2x^{\frac{3}{2}} + C$ $= -\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x^3} + C$
10	$\int \left(8x^3 + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(8x^3 + 6x - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $= 2x^4 + 3x^2 - 8x^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2x^4 + 3x^2 - 8\sqrt{x} + C$

11	$\int\left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx=\int\left(7x^{-2}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx$ $=-7x^{-1}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$ $=-\frac{7}{x}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C$
12	$\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{3}x^2+3x^{-2}\right)dx$ $=\frac{1}{9}x^3-3x^{-1}+C$ $=\frac{1}{9}x^3-\frac{3}{x}+C$
13	$\int\frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $=\int\left(4x^{-2}+2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $=-4x^{-1}-4x^{-\frac{1}{2}}+C \quad =-\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+C$
14	$\int\frac{4-x^2}{2+x}dx=\int\frac{(2-x)(2+x)}{2+x}dx$ $=\int(2-x)dx$ $=2x-\frac{1}{2}x^2+C$
15	$\int\frac{x^2-1}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $=\int(1-x^{-2})dx$ $=x+x^{-1}+C$ $=x+\frac{1}{x}+C$

16	$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
17	$\int \frac{x^2-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx$ $= \int (x+1)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x + C$
18	$\int x^2(1-x^3)dx = \int (x^2 - x^5)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + C$
19	$\int (x+4)^2 dx = \int (x^2 + 8x + 16)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + C$
20	$\int \frac{5-x}{x^5}dx = \int \left(\frac{5}{x^5} - \frac{x}{x^5}\right)dx$ $= \int (5x^{-5} - x^{-4})dx$ $= -\frac{5}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-3} + C$ $= -\frac{5}{4x^4} + \frac{1}{3x^3} + C$
21	$\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1}dx$ $= \int (x+1)dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x + C$

22	$\int x(x+1)^2 dx = \int x(x^2+2x+1)dx$ $= \int (x^3+2x^2+x)dx$ $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
23	$\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x}} dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right) dx$ $= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} + C$
24	$\int (x-5)(x+5)dx = \int (x^2-25)dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 25x + C$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس الثاني

الشرط الأولي (كتاب الطالب)

مسألة اليوم صفحة 15	
$s(t) = \int 500\sqrt[4]{t}dt$ $= \int 500t^{\frac{1}{4}}dt$ $= 500 \times \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C = 400t^{\frac{5}{4}} + C$ بما أن $s(0) = 0$ ، إذن $C = 0$ ومنه $s(t) = 400\sqrt[4]{t^5}$	
أتحقق من فهمي صفحة 16	
$f(x) = \int (6x^2 + 5)dx$ $f(x) = 2x^3 + 5x + C$ $9 = 2(1)^3 + 5(1) + C$ $C = 2$ $f(x) = 2x^3 + 5x + 2$	
أتحقق من فهمي صفحة 17	
$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)dx$ $C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$ $2200 = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K$ $2200 = 100 + 100 + K$ $K = 2000$ $C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$	

أتحقق من فهمي صفحة 18	
$s(t)=\int v(t)dt=\int(36t-3t^2)dt=18t^2-t^3+C$ $0=18(0)^2-(0)^3+C$ $C=0$ $s(t)=18t^2-t^3$ $s(3)=18(3)^2-(3)^3$ $=135$ إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $135\ m$	
أتحقق من فهمي صفحة 20	
$v(t)=\int a(t)dt$ $=\int(4t-4)dt=2t^2-4t+C_1$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$ ، فإن $v(0)=5$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $5=2(0)^2-4(0)+C_1 \implies C_1=5$ $v(t)=2t^2-4t+5$ $s(t)=\int v(t)dt=\int(2t^2-4t+5)dt=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t+C_2$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0)=0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t+C_2$ $0=\frac{2}{3}(0)^3-2(0)^2+5(0)+C_2 \implies C_2=0$ $s(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t$ $s(3)=\frac{2}{3}(3)^3-2(3)^2+5(3)=15$ موقع الجسيم بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $15\ m$	

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 20
1	$f(x)=\int (x-3)dx$ $=\frac{1}{2}x^2-3x+C$ $9=\frac{1}{2}\times(2)^2-3(2)+C \Rightarrow C=13 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+13$
2	$f(x)=\int (x^2-4)dx$ $=\frac{1}{3}x^3-4x+C$ $7=\frac{1}{3}\times(0)^3-4(0)+C \Rightarrow C=7 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+7$
3	$f(x)=\int (6x^2-4x+2)dx$ $=2x^3-2x^2+2x+C$ $9=2(1)^3-2(1)^2+2(1)+C \Rightarrow C=7 \Rightarrow f(x)=2x^3-2x^2+2x+7$
4	$f(x)=\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$ $=\int \left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^2\right)dx$ $=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+C$ $11=\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}(4)^3+C \Rightarrow C=11 \Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+11$
5	$f(x)=\int (x+2)^2dx$ $=\int (x^2+4x+4)dx \quad =\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C$ $7=\frac{1}{3}(1)^3+2(1)^2+4(1)+C \Rightarrow C=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+\frac{2}{3}$

6	$f(x)=\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-x\right)dx$ $=\int\left(3x^{-\frac{1}{2}}-x\right)dx \quad =6x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2+C \quad =6\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ $0=6\sqrt{4}-\frac{1}{2}(4)^2+C \Rightarrow C=-4 \Rightarrow f(x)=6\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-4$
7	$y=\int(0.4x+3)dx$ $=0.2x^2+3x+C$ $5=0.2(0)^2+3(0)+C$ $C=5$ $y=0.2x^2+3x+5$
8	$f(x)=\int\frac{x^2+10}{x^2}dx$ $=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)dx \quad =\int(1+10x^{-2})dx$ $=x-10x^{-1}+C$ $=x-\frac{10}{x}+C \Rightarrow C=-1 \Rightarrow f(x)=x-\frac{10}{x}-1$
9	$f(x)=\int(3x^2-3)dx$ $=x^3-3x+C$ منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,2)$ إذن: $2=(0)^3-3(0)+C \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$
10	$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}dt$ $=12t^{\frac{1}{3}}+C$ $=12\sqrt[3]{t}+C$ $30=12\sqrt[3]{8}+C$ $C=6 \qquad y=12\sqrt[3]{t}+6$

11	$y = 12\sqrt[3]{27} + 6$ $= 42$ إذن، نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: $42\ cm$
12	$h(t) = \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}\right) dt$ $= \int \left(0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$ $= 0.12t^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$ $= 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$ بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها $2\ ft$، فإن $h(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $2 = 0.12\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + C$ $C = 2$ $h(t) = 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$
13	$s(t) = \int v(t)dt$ $= \int (2t+3)dt$ $= t^2 + 3t + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C $s(t) = t^2 + 3t + C$ $0 = (0)^2 + 3(0) + C$ $C = 0$ $s(t) = t^2 + 3t$ $s(3) = (3)^2 + 3(3)$ $= 18$ موقع الجسيم بعد 3 ثوان من بدء الحركة هو: $18\ m$

14	$v(t) = \int a(t)dt$ $= \int t^2 dt$ $= \frac{1}{2}t^3 + C_1$ بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$ ، فإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 $1 = \frac{1}{2}(1)^3 + C_1$ $C_1 = \frac{1}{2}$ $v(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}$ $s(t) = \int v(t)dt$ $= \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}\right) dt$ $= \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + C_2$ $3 = \frac{1}{8}(0)^4 + \frac{1}{2}(0) + C_2$ $C_2 = 3$ $s(t) = \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t + 3$ $s(2) = \frac{1}{8}(2)^4 + \frac{1}{2}(2) + 3$ $= 5$ موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $5\ m$

15

$$v(t) = \int a(t)dt$$
$$= \int (9 - 2t)dt$$
$$= 9t - t^2 + C_1$$

بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $2\ m/s$ ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

$$v(t) = 9t - t^2 + C_1$$
$$2 = 9(0) - (0)^2 + C_1$$
$$C_1 = 2$$
$$v(t) = 9t - t^2 + 2$$
$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int (9t - t^2 + 2)dt$$
$$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$$

بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يعد شرطًا أوليًا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + C_2$$
$$0 = \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) + C_2$$
$$C_2 = 0$$
$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 2t$$
$$s(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)$$
$$= \frac{58}{3}$$

موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $\frac{58}{3}\ m$

16	$f'(x) = ax + b$ $f(x) = \int (ax + b)dx$ $= \frac{a}{2}x^2 + bx + C$ ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2,8)$ هو 7 معناها: $f'(-2) = 7$ وكذلك $f(-2) = 8$ منحنى الاقتران يقطع محور y عند النقطة $(0,18)$ معناه: $f(0) = 18$ $f'(-2) = 7 \quad \Rightarrow a(-2) + b = 7$ $\Rightarrow -2a + b = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$ $f(-2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{2}(-2)^2 + b(-2) + C = 8$ $\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ $f(0) = 18 \Rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$ $\Rightarrow C = 18$ نعوض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على: $2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$ $\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$ نجمع طرفي المعادلتين (1) و(4) فنحصل على: $-a = 2 \Rightarrow a = -2$ نعوض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$ قاعدة الاقتران هي: $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

17	$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$ $f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$ $= \int (4 - 100x^{-2}) dx$ $= 4x + 100x^{-1} + C$ $= 4x + \frac{100}{x} + C$ للاقتران f نقطة حرجة عن $(a, 10)$ إذن: $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$ $f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$ $\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2}$ $\Rightarrow 4a^2 = 100$ $\Rightarrow a^2 = 25$ $\Rightarrow a = \pm 5$ لكن $a > 0$ إذن $a = 5$، ومنه $f(5) = 10$ $10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$ $\Rightarrow C = -30$ وتكون قاعدة الاقتران: $f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$

الدرس الثاني
الشرط الأولي (كتاب التمارين)

1	$f(x)=\int(3x-2)\,dx=\frac{3}{2}x^2-2x+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+C$ $f(-1)=2\Rightarrow\frac{3}{2}+2+C=2\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$
2	$f(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$ $f(4)=5\Rightarrow\frac{16}{3}+4+C=5\Rightarrow C=-\frac{13}{3}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-\frac{13}{3}$
3	$f(x)=\int-x(x+1)\,dx=\int(-x^2-x)\,dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ $f(-1)=5\Rightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=5\Rightarrow C=\frac{31}{6}$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{31}{6}$

4	$f(x)=\int\left(x^3-\frac{2}{x^2}+2\right)dx=\int(x^3-2x^{-2}+2)\,dx$ $=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{x}+2x+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{x}+2x+C$ $f(1)=3\Rightarrow\frac{1}{4}+2+2+C=3\Rightarrow C=-\frac{5}{4}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{x}+2x-\frac{5}{4}$
5	$f(x)=\int(x+\sqrt{x})\,dx=\int\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ $f(1)=2\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+C=2\Rightarrow C=\frac{5}{6}$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{5}{6}$
6	$f(x)=\int-\frac{10}{x^2}\,dx=\int-10x^{-2}\,dx=10x^{-1}+C=\frac{10}{x}+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{10}{x}+C$ $f(1)=15\Rightarrow 10+C=15\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=\frac{10}{x}+5$
7	$f(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ $\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ $f(9)=25\Rightarrow\frac{54}{3}+C=25\Rightarrow C=7\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+7$
8	$f(x)=\int\frac{2}{x^2}\,dx=\int 2x^{-2}\,dx=-2x^{-1}+C=-\frac{2}{x}+C$ $\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x}+C$ $f(2)=4\Rightarrow -1+C=4\Rightarrow C=5\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x}+5$

9	$f(x) = \int (3x^2 - 12x + 8)\,dx = x^3 - 6x^2 + 8x + C$ $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + C$ $f(0) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ لإيجاد الإحداثيات لنقاط تقاطع المنحنى مع محور x نفرض y=0 $0 = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-4) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 2, x = 4$
10	$R(x) = \int (x^2 - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ $\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$ $R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$
11	$s(t) = \int (3t^2 - 12t + 11)\,dt = t^3 - 6t^2 + 11t + C$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + C$ $s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$ $\Rightarrow s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) = 8 - 24 + 22 = 6\,m$
12	$v(t) = \int (6t - 30)\,dt = 3t^2 - 30t + C$ $\Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + C$ $v(0) = 72 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 72 \Rightarrow C = 72$ $\Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + 72$ $s(t) = \int (3t^2 - 30t + 72)\,dt = t^3 - 15t^2 + 72t + C$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + C$ $s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t$ $\Rightarrow s(3) = (3)^3 - 15(3)^2 + 72(3) = 27 - 135 + 216 = 108\,m$

الدرس الثالث

التكامل المحدود (كتاب الطالب)

مسألة اليوم صفحة 22	
$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهريًا هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(600) - f(300) = \int_{300}^{600} \left(500 - \frac{x}{3}\right) dx = \left(500x - \frac{x^2}{6}\right)\Big\vert_{300}^{600}$ $= \left(500(600) - \frac{(600)^2}{6}\right) - \left(500(300) - \frac{(300)^2}{6}\right)$ $= 105000$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 300 إلى 400 دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 105000 دينار.	
أتحقق من فهمي صفحة 23	
$\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx = \int_1^4 \left(8x - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big\vert_1^4$ $= \left(4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big\vert_1^4$ $= \left(4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right) = \frac{166}{3}$	a

b	$\int_{-1}^{2}(1-x)(1+3x)dx = \int_{-1}^{2}(1+3x-x-3x^2)dx$ $= \int_{-1}^{2}(1+2x-3x^2)dx$ $= (x+x^2-x^3)\Big\|_{-1}^{2}$ $= (2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$ $= -3$
	أتحقق من فهمي صفحة 24
	$\int_{0}^{k} 6x^2dx = 2$ $2x^3\Big\|_0^k = 2$ $2k^3 - 2(0)^3 = 2$ $2k^3 = 2$ $k^3 = 1$ $k = 1$
	أتحقق من فهمي صفحة 26
a	$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{-1}^{1}3h(x)dx$ $= \int_{-1}^{1}f(x)dx + 3\int_{-1}^{1}h(x)dx$ $= 5+3(7)$ $= 26$
b	$\int_{-1}^{4}f(x)dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx + \int_{1}^{4}f(x)dx$ $= \int_{-1}^{1}f(x)dx - \int_{4}^{1}f(x)dx$ $= 5-2$ $= 3$

c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$ $= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= -4(7)$ $= -28$
	أتحقق من فهمي صفحة 27
a	بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(1+x)dx + \int_{1}^{2} 2x dx$ $= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{-2}^{1} + x^2\Big\|_{1}^{2}$ $= \left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right) + (2^2-1^2)$ $= \frac{9}{2}$
b	أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $f(x) = \|x-3\| = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(3-x)dx + \int_{3}^{4}(x-3)dx$ $= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_{-1}^{3} + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big\|_{3}^{4}$ $= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$ $= \frac{17}{2}$

	أتحقق من فهمي صفحة 29
	$P'(x) = 165 - 0.1x$ مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400 دراجة إلى 1500 جهاز هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(1500) - f(1400) = \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)dx$ $= (165x - 0.05x^2)\|_{1400}^{1500}$ $= (165(1500) - 0.05(1500)^2) - (165(1400) - 0.05(1400)^2)$ $= 2000$ إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400 جهاز إلى 1500 جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهريًا بمقدار 2000 دينار.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 29
1	$\int_{-1}^{3} 3x^2dx = x^3\|_{-1}^{3}$ $= (3)^3 - (-1)^3$ $= 28$
2	$\int_{-3}^{-2} 6dx = 6x\|_{-3}^{-2}$ $= 6(-2) - 6(-3)$ $= 6$
3	$\int_0^2 (3x^2 + 4x + 3)dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)\|_0^2$ $= \left((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)\right) - \left((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0)\right)$ $= 22$

4	$\int_1^8 8\sqrt[3]{x}dx = \int_1^8 8x^{\frac{1}{3}}dx$ $= 6x^{\frac{4}{3}}\Big\vert_1^8$ $= 6\sqrt[3]{x^4}\Big\vert_1^8$ $= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{0^4}$ $= 96$
5	$\int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\vert_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^9$ $= \left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1}\right) = \frac{4}{3}$
6	$\int_{-2}^3 (-x^2 + 4x - 5)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right)\Big\vert_{-2}^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 5(3)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2)\right)$ $= -\frac{80}{3}$
7	$\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2 - 4)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\vert_1^3$ $= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) = \frac{2}{3}$
8	$\int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^3$ $= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right) = 36$

9	$\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$ $= \int_1^4 \left(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \left(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big\|_1^4 \quad = \left(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = \frac{5}{2}$
10	$\int_1^4 x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^4 x^3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$ $= \int_1^4 \left(x^{\frac{7}{2}}+x^2\right)dx$ $= \left(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{x^9}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_1^4$ $= \left(\frac{2}{9}\sqrt{4^9}+\frac{1}{3}(4)^3\right)-\left(\frac{2}{9}\sqrt{1^9}+\frac{1}{3}(1)^3\right) = \frac{1211}{9}$
11	$\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{5}}\right)dx \quad = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\right)\Big\|_1^8$ $= \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}\right)-\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4}\right) = 10+\frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}$
12	$\int_1^9 (2+\sqrt{x})^2dx = \int_1^9 (4+4\sqrt{x}+x)dx$ $= \int_1^9 \left(4+4x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx$ $= \left(4x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_1^9 \quad = \frac{424}{3}$

13

$$\int_{-1}^{4} |3x-6|\,dx$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|3x-6| = \begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x \geq 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2: فإنني أجزئ التكامل عنده،

$$\int_{-1}^{4} |3x-6|\,dx = \int_{-1}^{2} (6-3x)\,dx + \int_{2}^{4} (3x-6)\,dx$$

$$= \left(6x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= \left(6(2) - \frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(6(-1) - \frac{3}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{3}{2}(4)^2 - 6(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(2)^2 - 6(2)\right) = \frac{39}{2}$$

14

$$\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x<2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{0}^{3} |x-2|\,dx = \int_{0}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$= \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left(2(2) - \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(2(0) - \frac{1}{2}(0)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)\right) = \frac{5}{2}$$

15

$$\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx$$

$$= \int_{2}^{3} (x-1)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_{2}^{3} = \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2\right) = \frac{3}{2}$$

16	بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 (2x+1)dx + \int_3^4 (10-x)dx$ $= (x^2+x)\Big\vert_0^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_3^4$ $= ((3)^2+3) - ((0)^2+0) + \left(10(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(10(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)$ $= \frac{37}{2}$
17	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 (-x^2+5)dx + \int_0^2 (x+5)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x\right)\Big\vert_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x\right)\Big\vert_0^2$ $= \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + 5(0)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + 5(-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(2)^2 + 5(2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 5(0)\right)$ $= \frac{50}{3}$
18	$\int_2^2 g(x)dx = 0$
19	$\int_5^1 (g(x)-2)dx = \int_5^1 g(x)dx - \int_5^1 2dx$ $= (-8) - \left((2x)\vert_5^1\right)$ $= (-8) - \left((2(1)) - (2(5))\right) = 0$
20	$\int_1^2 (3f(x)+x)dx = \int_1^2 3f(x)dx + \int_1^2 xdx$ $= 3\int_1^2 f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_1^2$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) = -\frac{21}{2}$
21	$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$ $= -(-4) + 6 = 10$

22	$\int_1^5 (f(x)-g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx$ $= 6-8$ $= -2$
23	$\int_1^5 (4f(x)+g(x))dx = \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6)+8 = 32$
24	$\int_1^m (6x-10)dx = 4$ $(3x^2-10x)\Big\|_1^m = 4$ $(3m^2-10m) - \left(3(1)^2 - 10(1)\right) = 4$ $3m^2-10m+7=4$ $3m^2-10m+3=0$ $(3m-1)(m-3)=0$ $3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$, $m-3=0 \Rightarrow m=3$
25	$C'(x) = 6x+1$ مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًا هو: $f(b)-f(a) = \int_a^b C'(x)dx$ $f(20)-f(10) = \int_{10}^{20} (6x+1)dx$ $= (3x^2+x)\Big\|_{10}^{20}$ $= (3(20)^2+20) - (3(10)^2+10)$ $= 910$ إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًا بمقدار 910 دينار.

26	$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$ $N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$ $= 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big\|_0^4 = 112\sqrt{t^5}\Big\|_0^4 = 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5} = 3584$ إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.
27	خالد لم يراعي ترتيب حدود التكامل عند التعويض. $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) = \frac{14}{3}$
28	$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$ $= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$ $= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
29	$\int_1^5 (2ax + 7)\, dx = 4a^2$ $(ax^2 + 7x)\Big\|_1^5 = 4a^2$ $\left(a(5)^2 + 7(5)\right) - \left(a(1)^2 + 7(1)\right) = 4a^2$ $25a + 35 - a - 7 = 4a^2$ $24a + 28 = 4a^2 \Rightarrow 4a^2 - 24a - 28 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0$ $(a-7)(a+1) = 0$ $a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7 \quad , a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

الدرس الثالث

التكامل المحدود (كتاب التمارين)

1	$\int_1^5 10x^{-2}dx = -10x^{-1}\Big\vert_1^5$ $= -\frac{10}{x}\Big\vert_1^5 = (-2)-(-10) = 8$
2	$\int_0^2 (2x^3-4x+5)dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 5x\right)\Big\vert_0^2$ $= 8 - 8 + 10 = 10$
3	$\int_1^4 \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{2x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$ $= \int_1^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}\right)dx$ $= \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big\vert_1^4$ $= \left(\frac{256}{7} + \frac{128}{5}\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{4}{5}\right) = \frac{254}{7} + \frac{124}{5} = \frac{2138}{35}$
4	$\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int_3^6 \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right)dx$ $= \int_3^6 (x^2 - 6 + 9x^{-2})dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - 9x^{-1}\right)\Big\vert_3^6 = \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - \frac{9}{x}\right)\Big\vert_3^6$ $= \left(72 - 36 - \frac{3}{2}\right) - (9 - 18 - 3) = \frac{93}{2}$

5	$\|x+3\| = \begin{cases} -x-3, & x<-3 \\ x+3, & x \ge -3 \end{cases}$ $\int_0^5 (\|x+3\|-5)dx = \int_0^5 (x+3-5)dx$ $= \int_0^5 (x-2)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\|_0^5 = \left(\frac{25}{2} - 10\right) - (0-0) = \frac{5}{2}$
6	$\int_0^6 x(6-x)dx = \int_0^6 (6x - x^2)dx$ $= \left(3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^6 = \left(108 - \frac{216}{3}\right) - (0) = \frac{108}{3} = 36$
7	$\int_1^2 \left(6x - \frac{12}{x^4} + 3\right)dx = \int_1^2 (6x - 12x^{-4} + 3)dx$ $= (3x^2 + 4x^{-3} + 3x)\Big\|_1^2$ $= \left(3x^2 + \frac{4}{x^3} + 3x\right)\Big\|_1^2$ $= \left(12 + \frac{1}{2} + 6\right) - (3+4+3) = \frac{17}{2}$
8	$\|2x-1\| = \begin{cases} -2x+1, & x<\frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ $\int_0^7 \|2x-1\|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^7 (2x-1)dx$ $= (-x^2 + x)\Big\|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2 - x)\Big\|_{\frac{1}{2}}^7$ $= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0) + (49-7) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{85}{2}$

9	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ $\int_{-3}^{4} \lvert x\rvert dx = \int_{-3}^{0} -x dx + \int_{0}^{4} x dx$ $= -\frac{1}{2}x^2\Big\vert_{-3}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big\vert_{0}^{4}$ $= (0) - \left(-\frac{9}{2}\right) + (8) - (0) = \frac{25}{2}$
10	$\int_{1}^{2} \frac{x^2 + x^3}{x} dx = \int_{1}^{2} \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{x}\right) dx$ $= \int_{1}^{2} (x + x^2) dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{1}^{2} = \left(2 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} = \frac{23}{6}$
11	$\int_{3}^{4} (6x^2 - 4x) dx = (2x^3 + 2x^2)\vert_{3}^{4}$ $= (128 + 32) - (54 + 18) = 88$
12	$\int_{10}^{10} \frac{x + 1}{x^2} dx = 0$
13	$\int_{2}^{2} f(x) dx = 0$
14	$\int_{1}^{2} (f(x) - 5) dx = \int_{1}^{2} f(x) dx - \int_{1}^{2} 5 dx$ $= \int_{1}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^{2} f(x) dx + \int_{1}^{2} -5 dx$ $= -4 + 5 + (-5x)\vert_{1}^{2}$ $= 1 + (-10) - (-5)$ $= -4$
15	$\int_{-3}^{2} (-2f(x) + 5g(x)) dx = -2\int_{-3}^{2} f(x) dx + 5\int_{-3}^{2} g(x) dx$ $= -2(5) + 5(-2) = -20$
16	$\int_{2}^{-3} (g(x) + 2x) dx = \int_{2}^{-3} g(x) dx + \int_{2}^{-3} 2x dx$ $= -(-2) + (x^2)\vert_{2}^{-3} = 2 + 9 - 4 = 7$

17	$\int_{2}^{-3}(f(x)+g(x))dx = \int_{2}^{-3} f(x)dx + \int_{2}^{-3} g(x)dx$ $= -5+2 = -3$
18	$\int_{-3}^{2}(4f(x)-3g(x))dx = 4\int_{-3}^{2} f(x)dx - 3\int_{-3}^{2} g(x)dx$ $= 4(5)-3(-2) = 26$
19	$\int_{-3}^{6} f(x)dx = \int_{-3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{6} f(x)dx$ $= \int_{-3}^{2} x^2dx + \int_{2}^{6}(8-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^{2} + \left(8x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_{2}^{6}$ $= \left(\frac{8}{3}\right)-(-9)+(48-18)-(16-2) = \frac{83}{3}$
20	$P(t) = \int_{0}^{8}\left(5+3t^{\frac{2}{3}}\right)dt$ $= \left(5t+\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right)\Big\vert_{0}^{8}$ $= \left(40+\frac{288}{5}\right)-(0)$ $= \frac{488}{5}$
21	$\int_{2}^{3}(x^2-a)dx = 5$ $\left(\frac{1}{3}x^3-ax\right)\Big\vert_{2}^{3} = 5$ $(9-3a)-\left(\frac{8}{3}-2a\right) = 5$ $\frac{17}{3}-a = 5$ $a = \frac{2}{3}$

الدرس الرابع

المساحة (كتاب الطالب)

مسألة اليوم صفحة 31

$f(x) = 4 - x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \ \Rightarrow 4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (2 + x)(2 - x) = 0$$
$$\Rightarrow x = -2 \ , \ x = 2$$

وهي تمثل حدود التكامل

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$
$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

أتحقق من فهمي صفحة 33

$f(x) = x + 3$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow x = -3$$

بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1, 3]$، إذن نهملها.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 1)dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 1\right) \quad = 8$$

إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 34	
$f(x) = x^2 - 4$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow x = 2 \;, \quad x = -2$ بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملهما. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x $A = -\int_{-1}^{1}(x^2-4)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big\|_{-1}^{1} = \frac{22}{3}$	
أتحقق من فهمي صفحة 36	
$f(x) = x^2 + 2x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x(x+2) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \;, x = -2$ بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين: $[-3, -2]$ و $[-2, -1]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, -2]$، وليكن $-\frac{5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f\left(-\frac{5}{2}\right) > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, -2]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-2, -1]$، وليكن $-\frac{3}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-2, -1]$ $A = \int_{-3}^{-2}(x^2+2x)dx - \int_{-2}^{-1}(x^2+2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{-2}^{-1}$ $= 2$ إذن، المساحة هي: 2 وحدة مربعة.	

	أتحقق من فهمي صفحة 38
a	$f(x) = x^2 + 5x + 4$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = -4 \, , x = -1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-4, -1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-4, -1]$ $A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-4}^{-1} = \frac{9}{2}$ إذن، المساحة هي: $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.
b	$f(x) = x^3 - 9x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$ $\Rightarrow x(x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \, , x = -3 \, , x = 3$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3, 0]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 3]$ $A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big\|_{0}^{3}$ $= \left((0) - \left(\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2\right) - (0)\right) = \frac{81}{2}$

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 39
1	$A=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big\vert_{-2}^{1}$ $=\left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right)-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)$ $=9$
2	$A=\int_{4}^{9}x^{\frac{3}{2}}dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big\vert_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big\vert_{4}^{9}$ $=\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right)-\left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)$ $=\frac{422}{5}$
3	$A=-\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx=-\int_{2}^{4}(2x^{-2}-3)dx$ $=\int_{2}^{4}(-2x^{-2}+3)dx$ $=(2x^{-1}+3x)\Big\vert_{2}^{4}=\left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big\vert_{2}^{4}\quad=\frac{11}{2}$
4	$A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-3x)dx$ $=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+3x)dx$ $=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_{0}^{1}$ $=(0)-\left(\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(-\frac{1}{4}(1)^4+\frac{3}{2}(1)^2\right)-(0)$ $=\frac{5}{2}$

<table>
<tr><td>5</td><td>

$A=\int_0^3 (x+1)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^3$

$=\left(\frac{1}{2}(3)^2+3\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2+0\right)=\frac{15}{2}$

</td></tr>
<tr><td>6</td><td>

$A=\int_0^2 3x^2dx=x^3\Big|_0^3$

$=(3^3)-(0^3)=27$

</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

$f(x)=3x^2-2x+2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0 \implies 3x^2-2x+2=0$

نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(3)(2)=-20$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2

نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(1)=3(1)^2-2(1)=1>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$

$A=\int_0^2 (3x^2-2x+2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right)\Big|_0^2$

$=\left(\frac{1}{3}(2)^3-(2)^2+2(2)\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3-(0)^2+2(0)\right)$

$=\frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

$f(x)=9-x^2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0 \implies 9-x^2=0$

$\implies (3+x)(3-x)=0$

$\implies x=-3, x=3$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=9-(0)^2=9>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,3]$

$A=\int_{-3}^3 (9-x^2)dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^3$

$=\left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)=36$

</td></tr>
</table>

9	$f(x) = x^3 + 4x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 + 4) = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ مميز العبارة التربيعية $(x^2 + 4)$ سالب، لذا لا أصفار لها. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 0]$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$ $A = -\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 + 4x)dx$ $= \left(-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\Big\|_{0}^{2} = \frac{25}{4}$
10	$f(x) = -7 + 2x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow -7 + 2x - x^2 = 0$ نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$ بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عددًا ضمن الفترة $[1, 4]$، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = -7 + 2(1) - (1)^2 = -6 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[1, 4]$ $A = -\int_{1}^{4} (-7 + 2x - x^2)dx$ $= \int_{1}^{4} (7 - 2x + x^2)dx$ $= \left(7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{1}^{4}$ $= \left(7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3\right)$ $= 27$ إذن، المساحة هي: 27 وحدة مربعة.

11	$f(x) = 5 - x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies 5 - x = 0$ $\implies x = 5$ نختار عددًا ضمن الفترة $[3, 5]$، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[3, 5]$ $A = \int_3^5 (5 - x)dx = \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $= \left(\left(5(5) - \frac{1}{2}(5)^2\right) - \left(5(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)\right) = 2$
12	$f(x) = (x + 1)(x - 4)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \implies (x + 1)(x - 4) = 0$ $\implies x = -1 , x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 4]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = (0 + 1)(0 - 4) = -4 < 0$ بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1, 4]$ $A = -\int_{-1}^4 (x + 1)(x - 4)dx = -\int_{-1}^4 (x^2 + x - 4x - 4)dx$ $= -\int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4)dx$ $= \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big\|_{-1}^4$ $= \left(-\frac{1}{3}(4)^3 + \frac{3}{2}(4)^2 + 4(4)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{3}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right)$ $= \frac{125}{6}$ إذن، المساحة هي: $\frac{125}{6}$ وحدة مربعة.

13	$f(x) = x^2 - 2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,2]$ $A = -\int_0^2 (x^2-2x)dx = \int_0^2 (-x^2+2x)dx$ $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_0^2$ $= \left(-\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2\right) = \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة.
14	$A = \int_2^3 (x^2-2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_2^3 = \left((9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right) = \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
15	$A = \int_{-1}^0 (x^2-2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_{-1}^0 = (0) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$ إذن، المساحة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
16	$A = \int_0^4 (8 + 8\sqrt{x} - 6x)dx = \int_0^4 \left(8 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x\right)dx$ $= \left(8x + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x^2\right)\Big\|_0^4$ $= \left(8x + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} - 3x^2\right)\Big\|_0^4$ $= \left(8(4) + \frac{16}{3}\sqrt{4^3} - 3(4)^2\right) - (0)$ $= \frac{80}{3}$ إذن، مساحة سطح الجناح هي $\frac{80}{3}$ متر مربع

17	$y = kx(4-x)$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $y = 0 \Longrightarrow \ kx(4-x) = 0$ $\Longrightarrow \ x = 0 \ or \ x = 4$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$ $A = \int_0^4 (kx(4-x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx$ $= \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big\|_0^4$ $= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$ $= \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \ \Rightarrow \ k = 3$
18	$R_1 = 2 \ \Rightarrow -\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$ $\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$ $R_2 = 3 \ \Rightarrow -\int_{3}^{4} f(x)dx = 3$ $\Rightarrow \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$ $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$ $\Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3)$ $\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$ $= -2 + 13$ $= 11$

الدرس الرابع

المساحة (كتاب التمارين)

1	$A = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$ $= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_1^2$ $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1$
2	$A = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $= \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 2\,x^{\frac{1}{2}}\Big\vert_4^9 = 6 - 4 = 2$
3	$A = \int_{-1}^4 (4 + 3x - x^2)dx$ $= \left(4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-1}^4$ $= \left(16 + 24 - \frac{64}{3}\right) - \left(-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{125}{6}$
4	$A = -\int_{-1}^0 (3x^2 + x - 2)dx$ $= -\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big\vert_{-1}^0$ $= -\left((0) - \left(-1 + \frac{1}{2} + 2\right)\right) = \frac{3}{2}$

5	$A = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$ $= \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_{-1}^{1}$ $= \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$
6	$A = \int_{0}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx$ $= (1-x^2)\Big\|_0^1 + (x^2-1)\Big\|_1^2 = 2$
7	$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ $\Rightarrow x = -1, x = 1$ $A = \int_{-1}^{1}(3-3x^2)dx$ $= (3x - x^3)\Big\|_{-1}^{1}$ $= (3-1) - (-3+1) = 4$
8	$x^3 - 5x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x - 6) = 0$ $\Rightarrow x(x-6)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = 6, x = -1$ $A = \int_{-1}^{0}(x^3 - 5x^2 - 6x)dx + \int_{0}^{6}(-x^3 + 5x^2 + 6x)dx$ $= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x^2\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big\|_{0}^{6}$ $= (0) - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - 3\right) + (-324 + 360 + 108) - (0) = \frac{1741}{12}$
9	$x^2(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$ $A = \int_{0}^{2}x^2(2-x)dx \quad = \int_{0}^{2}(2x^2 - x^3)dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{2} \quad = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - (0)$ $= \frac{4}{3}$

الدرس الخامس
تكاملات إقترانات خاصة (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 42
	أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$ $P(t)=\int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}dt=\int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}dt$ $=\int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}}dt$ $=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$ ثانيًا، نجد ثابت التكامل C: بما أن عدد طلاب الجامعة عند التأسيس 2000 طالب، إذن $P(0)=2000$ $P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+C$ $P(0)=-10000(0+1)^{-\frac{1}{2}}+C \Rightarrow 2000=-10000+C$ $\Rightarrow C=12000 \Rightarrow P(t)=-10000(t+1)^{-\frac{1}{2}}+12000$ ثالثًا، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس: $P(3)=-10000(3+1)^{-\frac{1}{2}}+12000 \approx 7000$ إذن، عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس هو 7000 طالب.
	أتحقق من فهمي صفحة 43
a	$\int(5x^2+7e^x)dx=\frac{5}{3}x^3+7e^x+C$
b	$\int\left(9\cos x+\frac{4}{x^3}\right)dx=\int(9\cos x+4x^{-3})dt$ $=9\sin x-2x^{-2}+C=9\sin x-\frac{2}{x^2}+C$

c	$\int (\sqrt[3]{x} - \sin x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin x\right) dx$ $= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 45
a	$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx = \ln\|x\| + 8e^x + C$
b	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx = -\cos x - 5\ln\|x\| + C$
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) dx$ $= \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right) dx$ $= x - 7\ln\|x\| - x^{-1} + C \quad = x - 7\ln\|x\| - \frac{1}{x} + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 47
a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C$ $= \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1}dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C \quad = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\, dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C$ $= \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$

d	$\int(\sin 5x+e^{2x})dx=\frac{1}{5}\times-\cos 5x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$ $=-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$
e	$\int(6x^2-3e^{7x+1})dx=2x^3-\frac{3}{7}e^{7x+1}+C$
f	$\int\frac{5}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert+C$
	أتحقق من فهمي صفحة 49
	أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$ $P(t)=\int 105e^{0.03t}dt=\frac{105}{0.03}e^{0.03t}+C$ $=3500e^{0.03t}+C$ ثانيًا، نجد ثابت التكامل C: بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0)=3500$ $P(t)=3500e^{0.03t}+C$ $P(0)=3500e^{0}+C \Rightarrow 3500=3500+C \Rightarrow C=0$ $\Rightarrow P(t)=3500e^{0.03t}$ ثالثًا، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات): $P(10)=3500e^{0.03(10)} \approx 4725$ إذن، عدد سكان المدينة عام 2020 هو 4725 ساكنًا.
	أتحقق من فهمي صفحة 50
a	$\int\frac{2x+3}{x^2+3x}dx=\ln\lvert x^2+3x\rvert+C$
b	$\int\frac{9x^2}{x^3+8}dx=\int\frac{3(3x^2)}{x^3+8}dx$ $=3\int\frac{3x^2}{x^3+8}dx=3\ln\lvert x^3+8\rvert+C$

c	$\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}dx$ $= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}dx$ $= \frac{1}{8}\ln\|4x^2+8x\| + C$
d	$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\ln\|e^{3x}+5\| + C$
	أتحقق من فهمي صفحة 51
a	$\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big\|_0^2$ $= \left(2e^{2(2)}+7(2)\right) - \left(2e^{2(0)}+7(0)\right)$ $= 2e^4+12$
b	$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\|_0^4$ $= \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big\|_0^4$ $= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(4)+1}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(0)+1}\right) \quad = \frac{4}{3}$
c	$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}dx$ $= 4\ln\|x^2+1\|\,\Big\|_0^4$ $= \left(4\ln\|(4)^2+1\|\right) - \left(4\ln\|(0)^2+1\|\right) \quad = 4\ln 17$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 52
1	$\int \left(\frac{1}{2}e^x+3x\right)dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2 + C$

2	$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int\left(1+\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx = x+2\ln\lvert x\rvert - x^{-1}+C$
3	$\int (e^x+1)^2dx = \int (e^{2x}+2e^x+1)dx$ $=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$
4	$\int \frac{1}{x}(x+2)dx = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$ $= x+2\ln\lvert x\rvert + C$
5	$\int\left(\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x}\right)dx = \int\left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$ $= -2x^{-2}+5\ln\lvert x\rvert + C$
6	$\int\left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$ $=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{6x}-7\ln\lvert x\rvert + C$
7	$\int\left(\frac{3}{x+1}-5e^{-2x}\right)dx = 3\ln\lvert x+1\rvert+\frac{5}{2}e^{-2x}+C$
8	$\int\frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \int(2x-3)^{-\frac{1}{2}}dx \quad = (2x-3)^{\frac{1}{2}}+C$
9	$\int(\sin(2x-3)+e^{6x-4})dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3)+\frac{1}{6}e^{6x-4}+C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\,dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1)+C$
11	$\int\frac{\sin x+3\cos x}{4}dx = \int\left(\frac{\sin x}{4}+\frac{3\cos x}{4}\right)dx$ $=\int\left(\frac{1}{4}\sin x+\frac{3}{4}\cos x\right)dx$ $=-\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\sin x+C$

12	$\int (e^{6x-4} + (1-2x)^6)dx = \frac{1}{6}e^{6x-4} - \frac{1}{14}(1-2x)^7 + C$
13	$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
14	$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx$ $= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx \quad = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$ $= \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$
16	$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{7}{e^x}\right)dx$ $= \int (1+7e^{-x})dx$ $= x - 7e^{-x} + C$
17	$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = \int \frac{-4\left(-\frac{1}{4}\right)}{5-\frac{1}{4}x}dx$ $= -4\ln\left\lvert 5-\frac{1}{4}x\right\rvert + C$
18	$\int (4x^3 + 2 + 3\sin(5-3x))dx = x^4 + 2x + \cos(5-3x) + C$

19	$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}\,dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert e^{2x}+3\rvert + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}\,dx = \int 3(1-4x)^{-2}\,dx$ $= \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C$ $= \frac{3}{4(1-4x)} + C$
21	$\int \frac{1+xe^x}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{xe^x}{x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx$ $= \ln\lvert x\rvert + e^x + C$
22	$\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = (x^2+3e^x-4\ln\lvert x\rvert)\Big\rvert_1^2$ $= ((2)^2+3e^2-4\ln\lvert 2\rvert) - ((1)^2+3e^1-4\ln\lvert 1\rvert)$ $= 3+3e^2-4\ln 2-3e$
23	$\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\,dx = \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}\,dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}\,dx \quad = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+10\rvert\Big\rvert_1^2$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert (2)^2+10\rvert - \frac{1}{2}\ln\lvert (1)^2+10\rvert$ $= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11$
24	$\int_3^4 (2x-6)^4\,dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5\Big\rvert_3^4$ $= \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5 \quad = \frac{32}{10}$

25	$v(t)=e^{-2t}$ $s(t)=\int e^{-2t}dt \quad \Rightarrow \quad s(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ إذن $s(0)=2$: $s(0)=-\frac{1}{2}e^{0}+C \Rightarrow 2=-\frac{1}{2}e^{0}+C \Rightarrow 2=-\frac{1}{2}+C$ $\Rightarrow C=\frac{5}{2} \Rightarrow s(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2}$
26	$f(x)=\int 5e^{x}dx$ $=5e^{x}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=5e^{x}+C \Rightarrow f(0)=5e^{0}+C$ $\Rightarrow \frac{1}{2}=5+C \Rightarrow C=-\frac{9}{2} \Rightarrow f(x)=5e^{x}-\frac{9}{2}$
27	$f(x)=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^{2}}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x}-x^{-2}\right)dx$ $=2\ln\lvert x\rvert+x^{-1}+C=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1,-1)$: $f(x)=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}+C \Rightarrow f(1)=2\ln 1+1+C \Rightarrow -1=1+C$ $\Rightarrow C=-2 \Rightarrow f(x)=2\ln\lvert x\rvert+\frac{1}{x}-2$
28	$f(x)=\int(e^{-x}+x^{2})dx$ $=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^{3}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,4)$: $f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^{3}+C \Rightarrow f(0)=-e^{0}+\frac{1}{3}(0)^{3}+C$ $\Rightarrow 4=-1+C$ $\Rightarrow C=5 \Rightarrow f(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}x^{3}+5$

29	$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right) dx$ $= x^2 + 3\ln\|x+e\| + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\|e+e\| + C$ $\Rightarrow e^2 = e^2 + 3\ln 2e + C$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e \Rightarrow f(x) = x^2 + 3\ln\|x+e\| - 3\ln 2e$
30	$P(t) = \int 0.51e^{-0.03t} dt$ $= -\frac{0.51}{0.03} e^{-0.03t} + C = -17e^{-0.03t} + C$ بما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة، إذن $P(0) = 1000$ ومنه: $P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C \Rightarrow 1000 = -17 + C \Rightarrow C = 1017$ $\Rightarrow P(t) = -17e^{-0.03t} + 1017$
31	$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$ عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 1004 سمكة تقريبًا.
32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t} dt$ $= \frac{0.9}{0.1} e^{-0.1t} + C = 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$ إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C \Rightarrow 9 = 9 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5\ cm^2$ مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي $5.5\ cm^2$ تقريبًا.
34	$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2)}{2x} dx$ $= \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln\|2x\| + C$

35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx$ $= \int e^{\frac{1}{2}x}dx$ $= 2e^{\frac{1}{2}x} + C$
36	$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2\cos x)}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3+2\sin x}dx$ $= -\frac{1}{2}\ln\lvert 3+2\sin x\rvert + C$
37	$\int (x^2+2x+1)^5 dx = \int ((x+1)^2)^5 dx$ $= \int (x+1)^{10}dx$ $= \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$
38	$\int \frac{1}{x+1}dx$ هذا التكامل هو المختلف $\int \frac{1}{x+1}dx$ كونه الوحيد الذي يُحل باللوغاريتم الطبيعي.

الدرس الخامس
تكاملات إقترانات خاصة (كتاب التمارين)

1	$\int \frac{1-x^2}{5x}dx = \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{x^2}{5x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{1}{5}x\right)dx = \frac{1}{5}\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{10}x^2 + C$
2	$\int (5e^x+4)dx = 5e^x + 4x + C$
3	$\int (1-e^{2x-3})dx = x - \frac{1}{2}e^{2x-3} + C$
4	$\int (\sin 2x - \cos 2x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$
5	$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert + C$
6	$\int (5-\sin(5-5x))dx = 5x - \frac{1}{5}\cos(5-5x) + C$
7	$\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}dx = 3\ln\left\lvert\frac{1}{3}x-2\right\rvert + C$
8	$\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx = x^2 - x + \frac{8}{5}\ln\lvert 5x+4\rvert + C$
9	$\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = 3\sin x + 5\ln\lvert x\rvert - \frac{4}{x} + C$
10	$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C$

11	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+2x+5\rvert + C$
12	$\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}\cos(2x-1) + C$
13	$\int (\sin(2x+3) + \cos(3x+2))dx$ $= -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$
14	$\int \left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - 4\ln\lvert x\rvert + C$
15	$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$ $= 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2\sqrt{x-1} + C$
16	$\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx = \int_0^1 (1+7x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ $= \frac{2}{21}(1+7x)^{\frac{3}{2}}\Big\rvert_0^1$ $= \frac{2}{21}(1+7(1))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}(1+7(0))^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{2}{21}\sqrt{512} - \frac{2}{21}$
17	$\int_0^1 e^x(4-e^x)\,dx = \int_0^1 (4e^x - e^{2x})\,dx$ $= \left(4e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big\rvert_0^1 = 4e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}$
18	$\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = (x + \ln\lvert x\rvert)\rvert_1^3 = 2 + \ln 3$
19	$y = f(x) = \int (6e^{2x} + 2e^{-x})dx = 3e^{2x} - 2e^{-x} + C$ $y = f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-x} + C \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow 3 - 2 + C = 2$ $\Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = 3e^{2x} - 2e^{-x} + 1$

20	$f(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$ $f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3$ $\Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + 4$
21	$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx$ $= 3\ln\|x\| - 4x + C$ $f(1) = 0 \Rightarrow -4 + C = 0$ $\Rightarrow C = 4$ $\Rightarrow f(x) = 3\ln\|x\| - 4x + 4$
22	$f(x) = \int (4e^{x} - 2) dx$ $= 4e^{x} - 2x + C$ $f(0) = 1 \Rightarrow 4 + C = 1$ $\Rightarrow C = -3$ $\Rightarrow f(x) = 4e^{x} - 2x - 3$
23	$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2} dt$ $= \int -\frac{1000(2t)}{1+t^2} dt$ $= -1000\ln\|1+t^2\| + C$ $N(0) = 5000 \Rightarrow -1000\ln\|1+0\| + C = 5000$ $\Rightarrow C = 5000$ $\Rightarrow N(t) = -1000\ln\|1+t^2\| + 5000$
24	التكامل الأيسر هو مجموع تكاملين لاقترانين، أحدهما مثلثي هو $f(x) = 3\sin 3x$ والأخر ثابت هو $g(x) = 1$. بينما التكامل الأيمن هو لاقتران مثلثي واحد فقط هو $h(x) = 3\sin(3x+1)$

الدرس السادس
التكامل بالتعويض (كتاب الطالب)

	مسألة اليوم صفحة 54
	أولًا نجد تكامل الاقتران: $C(t) = \int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt \quad u = t^2+16 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $C(t) = \int \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt = \int \frac{0.3t}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2t} = 0.15\int u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 2u^{\frac{1}{2}} + K = 2\sqrt{u} + K$ $= 2\sqrt{t^2+16} + K$ بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0) = 0$ ومنه: $C(t) = 2\sqrt{t^2+16} + K \Rightarrow C(0) = 2\sqrt{0^2+16} + K \Rightarrow 0 = 8 + K$ $\Rightarrow K = -8 \Rightarrow C(t) = 2\sqrt{t^2+16} - 8$ $\Rightarrow C(3) = 2\sqrt{(3)^2+16} - 8 = 2$ مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثلاث الأولى من حقنه هو $2\ mg/cm^2$
a	$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx$ $u = 2x^3 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$ $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx = \int 6x^2u^4 \times \frac{du}{6x^2}$ $= \int u^4du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(2x^3-3)^5 + C$

b	$\int xe^{x^2+1}dx = \int xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{1}{2}e^u du$ $= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$	$u = x^2+1$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $dx = \frac{du}{2x}$
c	$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx = \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$ $= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du$ $= \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 2\sqrt{2x^2+8x} + C$	$u = 2x^2+8x$ $\frac{du}{dx} = 4x+8$ $dx = \frac{du}{4x+8}$
d	$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{u^2}{x} \times xdu$ $= \int u^2 du$ $= \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$	$u = \ln x$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $dx = xdu$
e	$\int x^3\cos(x^4-5)\,dx = \int x^3\cos u \times \frac{du}{4x^3}$ $= \int \frac{1}{4}\cos u\,du$ $= \frac{1}{4}\sin u + C$ $= \frac{1}{4}\sin(x^4-5) + C$	$u = x^4-5$ $\frac{du}{dx} = 4x^3$ $dx = \frac{du}{4x^3}$
f	$\int \cos^4 x \sin x\,dx = \int u^4 \sin x \times \frac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{5}cos^5 x + C$	$u = \cos x$ $\frac{du}{dx} = -\sin x$ $dx = \frac{du}{-\sin x}$

	أتحقق من فهمي صفحة 60
	أولاً نجد تكامل الاقتران: $u = 36 + x^2$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $dx = \frac{du}{2x}$ $P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}dx = \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2x}$ $= -150\int u^{-\frac{3}{2}}du$ $= 300u^{-\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{300}{\sqrt{u}} + C = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$ بما أن سعر القطعة الواحدة هو 75 دينارًا عندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة، إذن $P(8) = 75$ ومنه: $P(8) = \frac{300}{\sqrt{36+4^2}} + C \Rightarrow 75 = \frac{300}{\sqrt{52}} + C \Rightarrow C = 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$ $\Rightarrow P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 62
a	$u = x^3 - 1$ $\frac{du}{dx} = 3x^2$ $dx = \frac{du}{3x^2}$ $x = 0 \Rightarrow u = -1$ $x = 1 \Rightarrow u = 0$ $\int_0^1 x^2(x^3-1)^4dx = \int_{-1}^{0} x^2u^4\frac{du}{3x^2}$ $= \int_{-1}^{0}\frac{1}{3}u^4du$ $= \frac{1}{15}u^5\Big\vert_{-1}^{0}$ $= \left(\frac{1}{15}(0)^5\right) - \left(\frac{1}{15}(-1)^5\right)$ $= \frac{1}{15}$

b	$\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{u^7}\times\frac{du}{-4x^3}$ $=\int_{1}^{2}-\frac{1}{4}u^{-7}du$ $=\frac{1}{24}u^{-6}\Big\vert_{1}^{2}\quad=\frac{1}{24u^6}\Big\vert_{1}^{2}$ $=-\frac{21}{512}$	$u=2-x^4$ $\frac{du}{dx}=-4x^3$ $dx=\frac{du}{-4x^3}$ $x=0\Rightarrow u=2$ $x=-1\Rightarrow u=1$
c	$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{0}^{1}\frac{u}{x}xdu$ $=\int_{0}^{1}u\,du$ $=\frac{1}{2}u^2\Big\vert_{0}^{1}\quad=\frac{1}{2}$	$u=\ln x$ $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ $dx=xdu$ $x=e\Rightarrow u=1$ $x=1\Rightarrow u=0$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 62	
1	$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}$ $=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du$ $=\int\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $=u^{\frac{1}{2}}+C\quad=\sqrt{x^2+4}+C$	$u=x^2+4$ $\frac{du}{dx}=2x$ $dx=\frac{du}{2x}$
2	$\int x^2(2x^3+5)^4dx=\int x^2u^4\times\frac{du}{6x^2}$ $=\int\frac{1}{6}u^4du$ $=\frac{1}{30}u^5+C$ $=\frac{1}{30}(2x^3+5)^5+C$	$u=2x^3+5$ $\frac{du}{dx}=6x^2$ $dx=\frac{du}{6x^2}$

3	$\int 3x\sqrt{x^2+7}dx = \int 3x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$ $= \int \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $= u^{\frac{3}{2}} + C$ $= \sqrt{(x^2+7)^3} + C$	$u = x^2+7$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $dx = \frac{du}{2x}$
4	$\int x^6 e^{1-x^7}dx = \int x^6 e^u \times \frac{du}{-7x^6}$ $= \int -\frac{1}{7}e^u du$ $= -\frac{1}{7}e^u + C$ $= -\frac{1}{7}e^{1-x^7} + C$	$u = 1-x^7$ $\frac{du}{dx} = -7x^6$ $dx = \frac{du}{-7x^6}$
5	$\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx = \int \frac{x^4}{u^3} \times \frac{du}{5x^4}$ $= \int \frac{1}{5}u^{-3}du$ $= -\frac{1}{10}u^{-2} + C$ $= -\frac{1}{10(x^5+9)^2} + C$	$u = x^5+9$ $\frac{du}{dx} = 5x^4$ $dx = \frac{du}{5x^4}$
6	$\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx = \int (3x^2-1)e^u \frac{du}{3x^2-1}$ $= \int e^u du$ $= e^u + C$ $= e^{x^3-x} + C$	$u = x^3-x$ $\frac{du}{dx} = 3x^2-1$ $dx = \frac{du}{3x^2-1}$

7	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx = \int \frac{3x-3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x-2}$ $= \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2(x-1)}$ $= \int \frac{3}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$ $= 3u^{\frac{1}{2}} + C$ $= 3\sqrt{x^2-2x+4} + C$	$u = x^2-2x+4$ $\frac{du}{dx} = 2x-2$ $dx = \frac{du}{2x-2}$
8	$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{xu} \times x du$ $= \int \frac{1}{u}du$ $= \ln\|u\| + C$ $= \ln\|\ln x\| + C$	$u = \ln x$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $dx = x du$
9	$\int \sin x(1+\cos x)^4 dx = \int \sin x\, u^4 \times \frac{du}{-\sin x}$ $= \int -u^4 du$ $= -\frac{1}{5}u^5 + C$ $= -\frac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$	$u = 1+\cos x$ $\frac{du}{dx} = -\sin x$ $dx = \frac{du}{-\sin x}$
10	$\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx = \int u^5 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x}$ $= \int \frac{1}{2}u^5 du$ $= \frac{1}{12}u^6 + C$ $= \frac{1}{12}(\sin 2x)^6 + C$	$u = \sin 2x$ $\frac{du}{dx} = 2\cos 2x$ $dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

11	$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du$ $= \int -\sin u\, du$ $= \cos u + C$ $= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$	$u = \frac{1}{x}$ $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $dx = -x^2 du$
12	$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx = \int \frac{\cos x}{e^u} \times \frac{du}{\cos x}$ $= \int \frac{1}{e^u}du$ $= \int e^{-u}du$ $= -e^{-u} + C$ $= -e^{-\sin x} + C$ $= -\frac{1}{e^{\sin x}} + C$	$u = \sin x$ $\frac{du}{dx} = \cos x$ $dx = \frac{du}{\cos x}$
13	$\int e^x(2+e^x)^5 dx = \int e^x u^5 \times \frac{du}{e^x}$ $= \int u^5 du$ $= \frac{1}{6}u^6 + C$ $= \frac{1}{6}(2+e^x)^6 + C$	$u = 2 + e^x$ $\frac{du}{dx} = e^x$ $dx = \frac{du}{e^x}$
14	$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{\cos(u)}{x} \times x\,du$ $= \int \cos u\, du$ $= \sin u + C$ $= \sin(\ln x) + C$	$u = \ln x$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $dx = x\,du$

15	$\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4dx$ $= \int (3x^2-2x-1)u^4 \times \frac{du}{3x^2-2x-1}$ $= \int u^4du$ $= \frac{1}{5}u^5 + C$ $= \frac{1}{5}(x^3-x^2-x)^5 + C$	$u = x^3-x^2-x$ $\frac{du}{dx} = 3x^2-2x-1$ $dx = \frac{du}{3x^2-2x-1}$
16	$\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}dx = \int_0^2 (2x-1)e^u \frac{du}{2x-1}$ $= \int_0^2 e^u du$ $= e^u\|_0^2$ $= e^2 - e^0$ $= e^2 - 1$	$u = x^2-x$ $\frac{du}{dx} = 2x-1$ $dx = \frac{du}{2x-1}$ $x = 2 \Rightarrow u = 2$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$
17	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{x^2} \times -x^2du$ $= \int_1^{\frac{1}{2}} -e^udu = -e^u\|_1^{\frac{1}{2}}$ $= -e^{\frac{1}{2}} + e = -\sqrt{e} + e$	$u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow dx = -x^2du$ $x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ $x = 1 \Rightarrow u = 1$
18	$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{u}}{x}xdu$ $= \int_1^3 u^{\frac{1}{2}}du$ $= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^3$ $= \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big\|_1^3 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$	$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow dx = xdu$ $x = e^3 \Rightarrow u = 3$ $x = e \Rightarrow u = 1$

19	$\int_0^1 (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2+1}dx$ $= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4x^3+4x}$ $= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4(x^3+x)}$ $= \int_1^4 \frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} du \quad = \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}}\Big\vert_1^4$ $= \frac{1}{6}\sqrt{u^3}\Big\vert_1^4 \quad = \frac{1}{6}\sqrt{4^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3} \quad = \frac{7}{6}$	$u = x^4+2x^2+1$ $\frac{du}{dx} = 4x^3+4x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3+4x}$ $x=1 \quad \Rightarrow u = 4$ $x=0 \quad \Rightarrow u = 1$
20	$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$ $= \int_1^{10} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$ $= u^{\frac{1}{2}}\Big\vert_1^{10}$ $= \sqrt{u}\Big\vert_1^{10} \quad = \sqrt{10} - 1$	$u = x^2+1$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x=3 \quad \Rightarrow u = 10$ $x=0 \quad \Rightarrow u = 1$
21	$\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx = \int_6^{10} \frac{2x+1}{u^3} \times \frac{du}{2x+1}$ $= \int_6^{10} u^{-3} du$ $= -\frac{1}{2} u^{-2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2u^2}\Big\vert_6^{10}$ $= -\frac{1}{2(10)^2} + \frac{1}{2(6)^2}$ $= \frac{2}{225}$	$u = x^2+x+4$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+1$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$ $x=2 \quad \Rightarrow u = 10$ $x=1 \quad \Rightarrow u = 6$

22	$A=-\int_{-1}^{0}6x(x^2+1)dx+\int_{0}^{1}6x(x^2+1)dx$ $=-\int_{2}^{1}6xu\times\frac{du}{2x}+\int_{1}^{2}6xu\times\frac{du}{2x}$ $=-\int_{2}^{1}3u\,du+\int_{1}^{2}3u\,du$ $=-\frac{3}{2}u^2\Big\vert_{2}^{1}+\frac{3}{2}u^2\Big\vert_{1}^{2}=9$	$u=x^2+1$ $\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $x=0\ \Rightarrow u=1$ $x=-1\ \Rightarrow u=2$ $x=1\ \Rightarrow u=2$
23	$A=-\int_{-4}^{0}x\sqrt{16-x^2}dx+\int_{0}^{4}x\sqrt{16-x^2}dx$ $=-\int_{0}^{16}x\sqrt{u}\times\frac{du}{-2x}+\int_{16}^{0}x\sqrt{u}\times\frac{du}{-2x}$ $=\int_{0}^{16}\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du+\int_{16}^{0}-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{0}^{16}+-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{16}^{0}$ $=\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\vert_{0}^{16}+-\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big\vert_{16}^{0}=\frac{128}{3}$	$u=16-x^2$ $\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$ $x=0\ \Rightarrow u=16$ $x=-4\ \Rightarrow u=0$ $x=4\ \Rightarrow u=0$
24	$f(x)=\int xe^{4-x^2}dx$ $=\int xe^{u}\frac{du}{-2x}=\int-\frac{1}{2}e^{u}du$ $=-\frac{1}{2}e^{u}+C=-\frac{1}{2}e^{4-x^2}+C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2,1)$: $f(x)=-\frac{1}{2}e^{4-x^2}+C\Rightarrow f(-2)=-\frac{1}{2}e^{4-(-2)^2}+C$ $\Rightarrow\ 1=-\frac{1}{2}+C\ \Rightarrow C=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ f(x)=-\frac{1}{2}e^{4-x^2}+\frac{3}{2}$	$u=4-x^2$ $\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{-2x}$

25	$u = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $f(x) = \int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx = \int \frac{2x}{u^2} \times \frac{du}{-2x} = \int -u^{-2} du = u^{-1} + C = \frac{1}{1-x^2} + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0,-1)$: $f(x) = \frac{1}{1-x^2} + C \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1-0^2} + C \Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x^2} - 2$
26	$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$ $\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} dt = \int \frac{-2t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = 2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $4\ m$ ، إذن، $s(0) = 4$: $s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C \Rightarrow f(0) = \frac{2}{\sqrt{1+0^2}} + C \Rightarrow 4 = 2 + C$ $\Rightarrow C = 2 \Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$

27	$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}dx$ $=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}}\times\frac{du}{0.8t^3}$ $=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ $u=0.2t^4+8000$ $\Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$ بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينار، إذن $V(0)=5000$ ومنه: $V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$ $V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C \Rightarrow 5000=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(8000)^2}+C$ $\Rightarrow 5000=\frac{400}{3}+C \Rightarrow C=\frac{14600}{3}$ $\Rightarrow V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$
28	$\int_0^{10}\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}dt=\int_5^{4+e^2}\frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $=\int_5^{4+e^2}20u^{-\frac{1}{2}}du$ $=40u^{\frac{1}{2}}\Big\|_5^{4+e^2}$ $=40\sqrt{u}\Big\|_5^{4+e^2}$ $=40\sqrt{4+e^2}-40\sqrt{5}\approx 46$ $u=4+e^{0.2t}$ $\Rightarrow \frac{du}{dt}=0.2e^{0.2t}$ $\Rightarrow dt=\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$ $t=10 \Rightarrow u=4+e^2$ $t=0 \Rightarrow u=5$ إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 إلى 2025.
29	المختلف هو $\int x(x^3+1)dx$ لأنه الوحيد الذي لا يحل بطريقة التكامل بالتعويض.

30

الخطأ الذي ارتكبته سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل.

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x \Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_1^2 8xu^3\,\frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^2 4u^3\,du$$

$$= u^4\Big|_1^2$$

$$= (2)^4 - (1)^4$$

$$= 15$$

31

$$u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 3x^2 \Rightarrow dt = \frac{du}{3x^2}$$

$$x = k \Rightarrow u = k^3$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^k kx^2e^{x^3}\,dx = \int_0^{k^3} kx^2e^u\,\frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_0^{k^3} \frac{k}{3}e^u\,du$$

$$= \frac{k}{3}e^u\Big|_0^{k^3}$$

$$= \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3}e^0$$

$$= \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3}$$

$$\int_0^k kx^2e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1) \Rightarrow \frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3}(e^{k^3} - 1) = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

$$\Rightarrow k = 2$$

الدرس السادس

التكامل بالتعويض (كتاب التمارين)

1	$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ $u = x^2+3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}\,du$ $= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} + C$
2	$\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$ $u = x^5+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$ $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx = \int x^4 e^u \frac{du}{5x^4} = \int \frac{1}{5} e^u\,du$ $= \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{x^5+2} + C$
3	$\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$ $u = x^2+2x+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$ $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx = \int (x+1)u^4 \frac{du}{2x+2} = \int \frac{1}{2} u^4\,du$ $= \frac{1}{10} u^5 + C = \frac{1}{10}(x^2+2x+5)^5 + C$

4	$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ $u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$ $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int \frac{u^3}{x}x\,du = \int u^3\,du$ $=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$
5	$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$ $u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos x}{u^4}\frac{du}{\cos x} = \int u^{-4}\,du$ $=-\frac{1}{3}u^{-3}+C=-\frac{1}{3}(\sin x)^{-3}+C$
6	$\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\;dx$ $u=1+3\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-3\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-3\sin x}$ $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\;dx = \int \sin x\, u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{-3\sin x} = \int -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}\,du$ $=-\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos x)^3}+C$
7	$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$ $u=x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$ $x=2 \Rightarrow u=9$ $x=1 \Rightarrow u=2$ $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx = \int_2^9 \frac{x^2}{u^2}\frac{du}{3x^2} = \int_2^9 \frac{1}{3}u^{-2}du = -\frac{1}{3u}\Big\|_2^9 = \frac{21}{162}$

8	$\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}dx$ $u=3x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x \Rightarrow dx=\frac{du}{6x}$ $x=1 \Rightarrow u=5$ $x=0 \Rightarrow u=2$ $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}dx=\int_2^5 xu^{\frac{1}{2}}\frac{du}{6x}=\int_2^5 \frac{1}{6}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_2^5=\frac{1}{9}\sqrt{125}-\frac{1}{9}\sqrt{8}$
9	$\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,du$ $x=e \Rightarrow u=1$ $x=e^2 \Rightarrow u=2$ $\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_1^2\frac{u^2}{x}x\,du=\int_1^2 u^2du$
10	$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5dx$ $u=x^2+2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x+2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2x+2}$ $x=1 \Rightarrow u=3$ $x=0 \Rightarrow u=0$ $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5dx=\int_0^3 (x+1)u^5\frac{du}{2x+2}=\int_0^3\frac{1}{2}u^5du=\frac{729}{12}$
11	$A=\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}dx$ $\quad x=2 \Rightarrow u=6$ $u=x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\quad x=0 \Rightarrow u=2$ $\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}dx=\int_2^6 xu^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2x}=\int_2^6\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big\|_2^6=\frac{1}{3}\sqrt{216}-\frac{1}{3}\sqrt{8}$

12	$R(x)=\int(50+3.5xe^{-0.1x^2})dx=\int 50dx+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx$ $=50x+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx$ $u=-0.1x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=-0.2x\Rightarrow dx=\frac{du}{-0.2x}$ $\int(50+3.5xe^{-0.1x^2})\,dx=50x+\int 3.5xe^u\,\frac{du}{-0.2x}$ $=50x+\int -17.5e^u\,du$ $=50x-17.5e^{-0.1x^2}+C$ $\Rightarrow R(x)=50x-17.5e^{-0.1x^2}+C$ $R(0)=0\Rightarrow 0-17.5+C=0\Rightarrow C=17.5$ $\Rightarrow R(x)=50x-17.5e^{-0.1x^2}+17.5$
13	$f(x)=\int 2x(4x^2-10)^2dx$ $u=4x^2-10\Rightarrow\frac{du}{dx}=8x\Rightarrow dx=\frac{du}{8x}$ $\int 2x(4x^2-10)^2dx=\int 2xu^2\frac{du}{8x}=\int\frac{1}{4}u^2du=\frac{1}{12}u^3+C$ $=\frac{1}{12}(4x^2-10)^3+C$ $f(2)=10\Rightarrow 18+C=10$ $\Rightarrow C=-8\quad\Rightarrow f(x)=\frac{1}{12}(4x^2-10)^3-8$
14	$f(x)=\int x^2e^{-0.2x^3}dx$ $u=-0.2x^3\Rightarrow\frac{du}{dx}=-0.6x^2\Rightarrow dx=\frac{du}{-0.6x^2}$ $\int x^2e^{-0.2x^3}\,dx=\int x^2e^u\,\frac{du}{-0.6x^2}=\int e^u\,\frac{du}{-0.6}$ $=\int -\frac{5}{3}e^u\,du=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+C$ $f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow\ C=\frac{19}{6}\quad\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+\frac{19}{6}$

15	$s(t)=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ $u=t^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$ $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int tu^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{2t}=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t^2+1}+C$ $s(t)=\sqrt{t^2+1}+C$ $s(0)=0 \Rightarrow 1+C=0 \Rightarrow C=-1$ $s(t)=\sqrt{t^2+1}-1$

إجابات إختبار نهاية وحدة التكامل

	اختبار نهاية الوحدة صفحة 65
1	$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $= \int (x - x^{-2})dx$ $= \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C$ $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \ldots\ldots\ldots (b)$
2	$\int_0^2 kx\,dx = 6 \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big\vert_0^2 = 6$ $\Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6$ $\Rightarrow 2k = 6$ $\Rightarrow k = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$
3	$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\vert_0^3$ $= \left(-\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$ $= \frac{9}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$

4	$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\vert_0^2$ $= \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)}$ $= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$
5	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ $= 2x^{\frac{1}{2}}\Big\vert_1^4$ $= 2\sqrt{x}\Big\vert_1^4$ $= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$ $= 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$
6	$f(x) = 4x - x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0$ $\Rightarrow x(4-x) = 0$ $\Rightarrow x = 0 , x = 4$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل. نختار عددًا ضمن الفترة $[0,4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$ بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,4]$ والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$
7	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$
8	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$

9	$\int \frac{5}{x^3}dx = \int 5x^{-3}dx$ $= -\frac{5}{2}x^{-2} + C$ $= -\frac{5}{2x^2} + C$
10	$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$ $= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx$ $= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$ $= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$
11	$\int (5x^2 - 2e^{7x})dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$
12	$\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$
13	$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{6}{2x}\right)dx$ $= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$ $= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln\|x\| + C$
14	$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx$ $= -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C \quad = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

15	$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln\lvert e^x+4\rvert + C$
16	$\int 2xe^{x^2-1}dx$ $u = x^2-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int e^u du \quad = e^u + C \quad = e^{x^2-1} + C$
17	$\int 4e^x(3+e^{2x})dx = \int (12e^x + 4e^{3x})dx$ $= 12e^x + \frac{4}{3}e^{3x} + C$
18	$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx$ $u = 4+2x+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2+2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x}$ $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}dx = \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2+2x}$ $= \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2(1+x)}$ $= \int \frac{1}{2}u^{-8}du$ $= -\frac{1}{14}u^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7} + C$ $= -\frac{1}{14(4+2x+x^2)^7} + C$

19

$$\int x\sin(3+x^2)\,dx$$

$$u = 3 + x^2 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x\sin(3+x^2)\,dx = \int x\sin u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2}\sin u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(3+x^2) + C$$

20

$$\int (3\sin 3x - 4\cos x)dx = -\cos 3x - 4\sin x + C$$

21

$$\int (x - \sin(7x+2))dx = \int x dx - \int \sin(7x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}\cos(7x+2) + C$$

22

$$\int (e^{3x} - e^{-3x})dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

23

$$\int \frac{2}{1-5x}dx = \int \frac{\frac{2}{-5}(-5)}{1-5x}dx$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{-5}{1-5x}dx$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|1-5x| + C$$

24

$$y = \int (4x-2)dx$$

$$= 2x^2 - 2x + C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 3)$ إذن:

$$3 = 2(0)^2 - 2(0) + C$$

$$C = 3$$

$$y = 2x^2 - 2x + 3$$

25	$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx$ $= 2x^2 - 0.4x^3 + C$ بما أن $R(20) = 30000$ إذن: $30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C$ $C = 54000$ $R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$
26	$v(t) = \int \cos(3t - \pi)\, dx$ $= \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$
27	$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx$ $= -4 + 10$ $= 6$
28	$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx$ $= 7 \times 4$ $= 28$
29	$\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx$ $= 3(-4) - (-11) = -1$
30	$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big\|_{-2}^{3}$ $= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2)$ $= 30$
31	$\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x} dx = \int_{1}^{3} \left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x}\right) dx$ $= \int_{1}^{3} (x^2 + 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big\|_{1}^{3} = \frac{50}{3}$

32	$\int_1^5 \lvert 3-x\rvert dx$ أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة: $\lvert 3-x\rvert = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$ بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_1^5 \lvert 3-x\rvert dx = \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx$ $= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big\rvert_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Big\rvert_3^5$ $= \left(3(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right)$ $= 4$
33	$\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 20x^{-\frac{1}{2}} dx$ $= 40x^{\frac{1}{2}}\Big\rvert_1^4 = 40\sqrt{x}\Big\rvert_1^4 = 40\sqrt{4} - 40\sqrt{1} = 40$
34	$\int_2^5 3x(x+2)dx = \int_2^5 (3x^2+6x)dx$ $= (x^3+3x^2)\Big\rvert_2^5$ $= ((5)^3 + 3(5)^2) - ((2)^3 + 3(2)^2) = 180$
35	$\int_2^3 2xe^{-x^2} dx = \int_{-4}^{-9} 2xe^u \times \frac{du}{-2x}$ $= \int_{-4}^{-9} -e^u du$ $= -e^u\rvert_{-4}^{-9}$ $= -e^{-9} + e^{-4} = -\frac{1}{e^9} + \frac{1}{e^4}$ $u = -x^2$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$ $x = 3 \Rightarrow u = -9$ $x = 2 \Rightarrow u = -4$

36	$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx = \int_1^9 \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2}$ $= \int_1^9 u^{-5}du$ $= -\frac{1}{4}u^{-4}\Big\|_1^9$ $= -\frac{1}{4u^4}\Big\|_1^9$ $= \frac{1640}{6561}$
37	$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{3(2x)}{x^2+1}dx$ $= 3\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ $= 3\ln\|x^2+1\|\Big\|_0^1$ $= 3\ln\|2\| - 3\ln\|1\|$ $= 3\ln 2$
38	بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده: $\int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^0 (x^2+4)dx + \int_0^1 (4-x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big\|_{-2}^0 + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big\|_0^1$ $= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right) + \left(4(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right) - (0)$ $= \frac{85}{6}$

39	$v(t) = 5 + e^{t-2}$ $s(t) = \int (5 + e^{t-2})dt$ $= 5t + e^{t-2} + C$ $s(t) = 5t + e^{t-2} + C$ بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن $s(0) = 0$: $s(0) = 5(0) + e^{0-2} + C$ $0 = e^{-2} + C \Rightarrow C = -e^{-2} \Rightarrow C = -\frac{1}{e^2}$ $\Rightarrow s(t) = 5t + e^{t-2} - \frac{1}{e^2}$ موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من الحركة هو: $s(3) = 5(3) + e^{3-2} - \frac{1}{e^2} = 15 + e - \frac{1}{e^2}\ m$
40	$f(x) = \int (3x^2 + 6x - 2)dx$ $= x^3 + 3x^2 - 2x + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 6)$ إذن: $6 = (0)^3 + 3(0)^2 - 2(0) + C \Rightarrow C = 6$ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$
41	$f(x) = \int \frac{\sqrt{20}}{x^2}dx$ $= \int \sqrt{20}x^{-2}dx$ $= -\sqrt{20}x^{-1} + C$ $= -\frac{\sqrt{20}}{x} + C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1, 400)$ إذن: $400 = -\frac{\sqrt{20}}{1} + C$ $C = 400 + \sqrt{20} \Rightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{20}}{x} + 400 + \sqrt{20}$

42	$f(x)=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $=\int\left(\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx$ $=2\ln\|x\|-x^{-1}+C$ $=2\ln\|x\|-\frac{1}{x}+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(1,1)$ إذن: $1=2\ln\|1\|-\frac{1}{1}+C \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=2\ln\|x\|-\frac{1}{x}+2$
43	$f(x)=\int(5e^x-4)dx$ $=5e^x-4x+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,-1)$ إذن: $-1=5e^0-4(0)+C \Rightarrow C=-6 \Rightarrow f(x)=5e^x-4x-6$
44	$f(x)=\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ $u=x^2+5$ $\Rightarrow \frac{du}{dx}=2x$ $\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx=\int xu^{\frac{1}{2}}\times\frac{du}{2x}$ $=\int\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$ $=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$ $=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$ بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(2,10)$ إذن: $10=\frac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3}+C$ $C=1$ $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+1$

45

$f(x) = x^2 - x - 2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1\,, x = 2$$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-2,-1]$، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (-1.5+1)(-1.5-2) = 1.75 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-2,-1]$

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,1]$

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - x - 2)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{31}{6}$$

46

$$u = t^2 + 36 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$C(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt = \int \frac{3t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$$

$$= \int \frac{3}{2}u^{-\frac{3}{2}}du = -3u^{-\frac{1}{2}} + K$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{u}} + K = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} + K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0) = 0$ ومنه:

$$C(0) = -\frac{3}{\sqrt{0+36}} + K \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + K \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$$

$$C(t) = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} - \frac{1}{2} \Rightarrow C(8) = -\frac{3}{\sqrt{64+36}} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{10}$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو $-0.8\, mg/cm^2$

47

$$f(x) = 3x^2 - 3x$$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x = 1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 1]$، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 1]$

$$A = -\int_0^1 (3x^2 - 3x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x)dx$$

$$= \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

48

$$A = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3)dx + \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x + 3)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) - (9 - 18 + 9) + (0) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) = \frac{8}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

49

$$A = \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4}(1)^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{1}{4}$ وحدة مربعة.

50	$A = -\int_0^2 -x^2 dx$ $= \int_0^2 x^2 dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big\|_0^2$ $= \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{8}{3}$ إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.
51	$A = -\int_{-1}^0 xe^{x^2} dx + \int_0^2 xe^{x^2} dx$ $= \int_{-1}^0 -xe^{x^2} dx + \int_0^2 xe^{x^2} dx$ $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$ $\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$ $x = -1 \Rightarrow u = 1$ $x = 2 \Rightarrow u = 4$ $A = \int_1^0 -xe^u \times \frac{du}{2x} + \int_0^4 xe^u \times \frac{du}{2x}$ $= \int_1^0 -\frac{1}{2}e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$ $= \left(-\frac{1}{2}e^u\right)\Big\|_1^0 + \left(\frac{1}{2}e^u\right)\Big\|_0^4$ $= \left(-\frac{1}{2}e^0\right) - \left(-\frac{1}{2}e^1\right) + \left(\frac{1}{2}e^4\right) - \left(\frac{1}{2}e^0\right)$ $= -1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4$ إذن، المساحة هي: $\left(-1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4\right)$ وحدة مربعة.