الوحدة الثالثة

الأعداد المركبة

إعداد

0799948198

المفاهيم و التعاريف الأساسية في الأعداد

① مفهوم العدد i

1) الوحدة التخيلية يرمز لها بالرمز i ، حيث $i = \sqrt{-1}$

2) كل من i و $-i$ هو جذرا تربيعيا للعدد -1

3) نسمي i الجذر الرئيس للعدد -1

4) نسمي العدد الذي على الصورة $\sqrt{-k}$ العدد التخيلي ، حيث k عدد حقيقي موجب

② خواص العدد i

$i = \sqrt{-1}$ ، $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$

وهذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار 4

③ قوى العدد i

$i^{\text{أس}}$: الأس عدد زوجي موجب أو سالب فإن الناتج يساوي 1 أو -1

1: الأس يقبل القسمة على 4

-1: الأس لا يقبل القسمة على 4

الأس عدد فردي موجب أو سالب فإن الناتج يساوي i أو $-i$

i: الأس يقبل القسمة على 4

$-i$: الأس لا يقبل القسمة على 4

تمارين (1)

❶ أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-75}$ 2) $\sqrt{-49}$ 3) $\sqrt{-53}$ 4) $\sqrt{-\frac{12}{25}}$

---

❷ أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

1) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$ 2) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$ 3) $\sqrt{-50} \times -4i$

4) i^{17} 5) i^{26} 6) i^{39}

7) i^{124} 8) i^{-33} 9) i^{-44}

10) i^{-42} 11) i^{-232} 12) i^{2021}

13) $i + i^{-11}$ 14) $\frac{1}{i^{333}}$ 15) $\frac{1}{i^{-555}}$

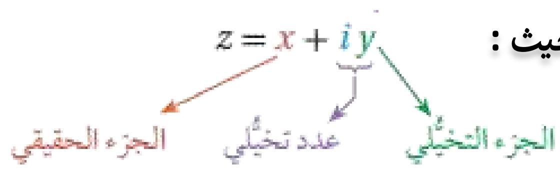
16) $(1 + i^{97} + i^{200} + i^{67})^{5}$ 17) $(i^{181} + i^{2343} + i^{1034} + i^{966})^{6}$

18) $(i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20})^{10}$

④ الصورة القياسية للعدد المركب

الصورة القياسية للعدد المركب Z هي : $z = x + iy$

، حيث :



1) يمكن كتابة أي عدد حقيقي a في صورة عدد مركب $z = a + 0i$

2) يمكن كتابة أي عدد تخيلي ib في صورة عدد مركب $z = 0 + ib$

3) تستخدم الصورة القياسية عند إجراء عمليات الجمع و الطرح و الضرب و القسمة

4) مرافق العدد المركب $z = a + ib$ هو $\bar{z} = a - ib$

5) لاحظ مما سبق أن :

الأعداد المُركَّبة (C): الأعداد الحقيقية والأعداد التخيُّلية معًا، إضافةً إلى حاصل جمع هذه الأعداد.

⑤ تساوي الأعداد المركبة :

يتســاوى العددان المُركَّبان: $a + ib, c + id$ إذا وفقط إذا كان: $a = c, b = d$، حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

تمارين (2)

1 أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية :

1) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$ 2) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$ 3) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

---

2 أحدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة اللأتية :

1) $z = 2 + 15i$ 2) $z = 10i$ 3) $z = -16 - 2i$

---

3 أجد كل من x و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الأتية صحيحة :

1) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

2) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

3) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

4) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

5) $(3 - i)x + (2i - 5)y - 2 = 0$

⑥ العمليات الحسابية على الأعداد المركبة بالصورة القياسية :

(الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة)

1) إذا كان: $z_1 = a + ib, z_2 = x + iy$ عددين مُركَّبين، فإنَّه يُمكِن إيجاد ناتج جمعهما أو طرحهما على النحو الآتي:

$$z_1 + z_2 = (a + x) + i\,(b + y)$$

$$z_1 - z_2 = (a - x) + i\,(b - y)$$

2) يُمكِن ضرب الأعداد المُركَّبة بطريقة مُشابِهة لعملية ضرب المقادير الجبرية، وذلك باستعمال خاصية التوزيع. وبعد إتمام عملية الضرب، يوضَع العدد -1 بدل i^2 أينما ظهرت.

3) مقياس العدد المُركَّب: $z = a + ib$ هو: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، حيث a, b عددان حقيقيان.

4) ناتج ضرب العدد المُركَّب في مُرافِقه يساوي عددًا حقيقيًّا. وهذا صحيح دائمًا لأيِّ عدد مُركَّب: $z = a + ib$. وناتجَ الضرب يكون دائمًا في صورة: $a^2 + b^2$؛ أيْ إنَّ: $z\bar{z} = |z|^2$.

5) يمكن أستعمال ما ذكر في الفقرة (4) لإيجاد ناتج قسمة عددين مركبين ، وذلك بضرب كل من المقسوم و المقسوم عليه في مرافق المقسوم عليه ، فيصبح المقسوم عليه عدد حقيقي

تمارين (3)

❶ أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

1. $(7 + 8i) + (-9 + 14i)$
2. $(11 + 9i) - (4 - 6i)$
3. $(5 - 9i) - (-4 + 7i)$
4. $-3i(4 - 5i)$
5. $(5 + 4i)(7 - 4i)$
6. $(3 + 6i)^2$
7. $\dfrac{-4 + 3i}{1 + i}$
8. $\dfrac{2 - 6i}{-3i}$
9. $\dfrac{7i}{4 - 4i} \times \dfrac{8 - 5i}{3 - 2i}$
10. $(4 - 6i)(1 - 2i)(2 - 3i)$

---

❷ إذا كان $z_3 = -4 - 4i$ ، $z_2 = 6 - 4i$ ، $z_1 = -3 + 5i$ فأجد قيمة كل من ما يلي :

1. $z_1 + z_2 + z_3$
2. $z_1 \times z_2 \times z_3$
3. $z_1\,(z_2 + z_3)$
4. $(z_3)^3$
5. $\dfrac{z_1}{z_3}$
6. $\dfrac{z_1 \times z_2}{z_3}$

⑦ الجذر التربيعي للعدد المركب :

يوجد لكل عدد مُركَّب جذران تربيعيان، وهما عددان مُركَّبان أيضًا. فـإذا كان: $\sqrt{z} = x + iy$، فإنَّ: $z = (x + iy)^2$. ومن ثَمَّ، يُمكِـن إيجاد قيمة كلٍّ من x، و y الحقيقيتين

تمارين (4)

❶ أجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الأتية :

1) $-5 - 12i$ 2) $-9i$ 3) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $3 - 4i$

5) $-15 + 8i$ 6) $5 - 12i$ 7) $-7 - 24i$

---

❷ إذا كان: $(a-3i)$، و $(b+ic)$ همـا الجذريـن التربيعيين للعدد المُركَّـب: $55 - 48i$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت الحقيقية: a، و b، و c.

---

❸ إذا كان: $(p + iq)^2 = 45+im$، حيـث p و q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$، فأجد ثلاث قِيَم مُمكِنة للعدد الحقيقي m.

---

⑧ الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود :

(1

درجة معادلة كثير الحدود	عدد الجذور	أنواع الجذور المُمكِنة
1	1	جذر حقيقي واحد.
2	2	جذران حقيقيان، أو جذران مُركَّبان مُترافِقان.
3	3	ثلاثة جذور حقيقية، أو جذر حقيقي واحد وجذران مُركَّبان مُترافِقان.
4	4	أربعة جذور حقيقية، أو جذران حقيقيان وجذران مُركَّبان مُترافِقان، أو أربعة جذور مُركَّبة (زوجان من الجذور المُركَّبة المُترافِقة).

2) مع المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق نستخدم نظرية الأصفار النسبية لإيجاد احد الاصفار ثم القسمة القسمة التركيبية إلى أن نصل للقانون العام لحل المعادلة التربيعية

3) القانون العام لحل المعادلة التربيعية هو : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تمارين (5)

❶ أحل كل من المعادلات الأتية :

1. $z^2 + 104 = 20z$
2. $z^2 + 18z + 202 = 0$
3. $9z^2 + 68 = 0$
4. $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$
5. $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$
6. $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

---

❷ أجد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي :

1. $2 \pm 5i$
2. $7 \pm 4i$
3. $-8 \pm 20i$
4. $-3 \pm 2i$

---

❸ أحل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي :

1. $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$
2. $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -9$
3. $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$
4. $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0, -2 + i$

---

❹ حساب ثوابت إذا علم أحد جذور المعادلة التربيعية :

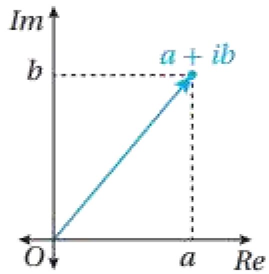
إذا كان: $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2 - 8z + k = 0$، حيث k عدد حقيقي، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1. أجد الجذر الآخر للمعادلة.
2. أجد قيمة الثابت k.

3. إذا كان: $2 - i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2 + ax + b = 0$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

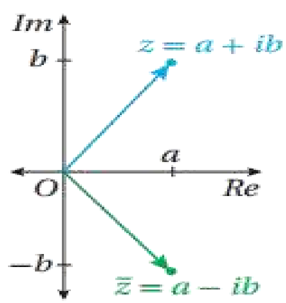
⑨ تمثيل العدد المركب و مرافقه بيانيا :



1) يُمكِن تمثيل العــدد المُركَّب $a + ib$ في المســتوى الإحداثي في صورة الزوج المُرتَّــب (a, b)، أو صورة المتجــه $\langle a, b\rangle$، عندئذٍ

2) يُســمّى المحور الأفقي **المحور الحقيقي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Re)،
ويُسمّى المحور الرأسي **المحور التخيُّلي**، ويُرمَز إليه بالرمز (Im)،

3) يُسمّى المســتوى الإحداثــي في هذه الحالة **المســتوى المُركَّب**.



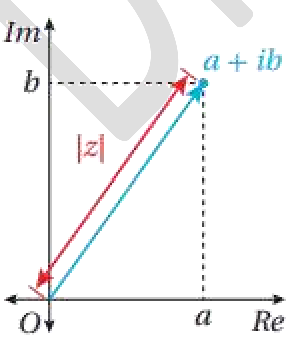
4) **مُرافِق العدد المُركَّب** (conjugate) المكتوب في الصورة القياســية: $z = a + ib$ فهو العــدد المُركَّب: $\bar{z} = a - ib$.
وعند تمثيل z ومُرافِقه بيانيًّا في المســتوى الإحداثي نفســه، ألاحِظ أنَّ كُلًّا منهما هو انعكاس للآخر في المحور الحقيقي (Re) كما في الشكل المجاور.

تمارين (6)

❶ **أمثل العدد المركب و مرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :**

1) $z = -15 + 3i$
2) $z = 8 - 7i$
3) $z = 12 + 17i$
4) $z = -3 - 25i$
5) $3i$
6) 15

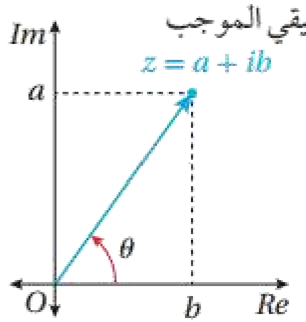
⑩ الصورة المثلثية للعدد المركب :



1) عند تمثيل العدد المركب $z = a + ib$ في المستوى المركب على شكل متجه ، فإن **مقياس العدد المركب** هو طول المتجه و هو المسافة بين نقطة الاصل $(0, 0)$ و النقطة (a, b).

و يرمز له بالرمز $|z|$ أو الرمز r حيث: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) سـعة العدد المُركَّب (argument) هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تُمثِّل العدد المُركَّب مقيسـةً بالراديان. ويُرمَز إلى سـعة العدد المُركَّب z بالرمز $\arg(z)$.



3) السـعة الرئيسـة (principal argument) للعـدد المُركَّب بأنّها السعة التي تقع في الفترة: $-\pi < \theta \le \pi$

ويُرمَزَ إليهاَ بالرمز $\text{Arg}(z)$، أيْ إنَّ: $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi n = \theta + 2\pi n, \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

4) سعة العدد المركب في الارباع المختلفة :

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإنَّ:

العدد المُركَّب z	الربع الذي يقع فيه z	$\text{Arg}(z)$
$z = a + ib$	الأوّل	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a + ib$	الثاني	$\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
$z = -a - ib$	الثالث	$-\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$
$z = a - ib$	الرابع	$-\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

5) إذا كان: $z = a + ib$، فـإنَّ سـعة العـدد المُركَّب: $\text{Arg}(z) = \theta$، ومقياسـه: $|z| = r$

يُستعمَلان لكتابته بالصورة المثلثية كما يأتي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

6) ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية :

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

7) قسمة الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية :

إذا كان: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$، وكان: $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، فإنَّ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

تمارين (7)

❶ أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي :

1) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$ 2) $z = -2i$ 3) $z = 4 + \sqrt{-20}$

4) $z = -5 + 5i$ 5) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$ 6) $z = 6 - 8i$

---

❷ أجد سعة كلا من الأعداد المركبة الأتية :

1) 1 2) $3i$ 3) $-5 - 5i$

4) $1 - i\sqrt{3}$ 5) $6\sqrt{3} + 6i$ 6) $8 - 8i\sqrt{3}$

---

❸ أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 7, \operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{6}$ 2) $|z| = 4\sqrt{2}, \operatorname{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$

3) $z = 6$ 4) $z = 1 + i$

5) $z = -4 - 4i$ 6) $z = 2i$

---

❹ أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 2) $\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

3) $12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

---

❺ أسئلة عامة على الصورة المثلثية :

1) إذا كان: $\operatorname{Arg}(5 + 2i) = \alpha$، فأجد سعة كلّ ممّا يأتي بدلالة α،

◄ $-2 + 5i$ ◄ $2 + 5i$ ◄ $-5 + 2i$ ◄ $5 - 2i$ ◄ $-5 - 2i$

2) إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

► $\operatorname{Arg}(\bar{z})$ ► $|\bar{z}|$ ► $\operatorname{Arg}(z)$ ► $|z|$

3 إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

◄ أكتب العدد المُركَّب z بالصورة القياسية. ◄ أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\overline{z}$.

4 إذا كان: $z = 5 + im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

5 إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قِيَم k الحقيقية المُمكِنة.

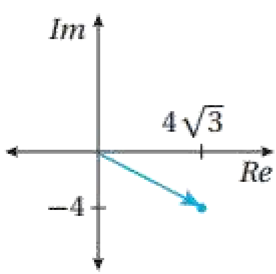
6 بافتراض أنَّ z_1 عدد مُركَّب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = \tan^{-1}(2)$:

◄ أكتب z_1 بالصورة القياسية.

◄ إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المُركَّب.

7 يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المُركَّب z_1 في المستوى المُركَّب. أجد العدد المُركَّب z_2 الذي يُحقِّق ما يأتي:

$$|z_2| = 40 \quad \text{and} \quad \text{Arg}\, z_2 = \text{Arg}\, \overline{z_1}$$



8 إذا كان: $z_1 = \sqrt{12} - 2i, z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}, z_3 = 2 - 2i$، فأجد المقياس والسعة الرئيسة لكلٍّ ممّا يأتي:

► $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$ ► $\frac{1}{z_3}$ ► $\frac{z_2}{z_1}$

9 إذا كان: $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

◄ أُمثِّل العدد z بيانيًّا في المستوى المُركَّب. ◄ أجد الجذرين التربيعيين للعدد z.

10 إذا كان: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي بالصورة المثلثية:

► $\frac{w}{z}$ ► $\frac{z}{w}$ ► zw

► $5iz$ ► w^2 ► $\frac{1}{z}$

11 إذا كان z عددًا مُركَّبًا، حيث: $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $|z| = 5\sqrt{5}$، وكان: $\frac{z}{3+4i} = p + iq$، فأُثبِت أنَّ: $p + q = 1$.

⑪ المحل الهندسي في المستوى المركب :

1) **المحل الهندسي** : هو المسار أو المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة تحت تأثير شرط أو شروط محددة

2) المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تُمثِّله المعادلة: $|z-(a+ib)|=r$ هو دائرة مركزها (a, b)، وطول نصف قُطْرِها r وحدة.

3) القيمة العظمى لسعة العدد المركب (أكبر سعة للعدد المركب) : هو قياس الزاوية المحصورة بين المحور الحقيقى الموجب و مماس الدائرة

4) المحل الهندسي في المستوى المُركَّب للنقطة z التي تُحقِّق المعادلة: $|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$ هو المُنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: (a, b)، و (c, d).

5) المحل الهندسي في المستوى المُركَّب الذي تُمثِّله المعادلة: $\text{Arg}(z-(a+ib))=\theta$ هو شعاع يبدأ بالنقطة (a, b)، ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

تمارين (8)

الدائرة

❶ أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أجد معادلته الديكارتية :

① $|z|=10$ ② $|z-9|=4$ ③ $|z+2i|=8$

④ $|z-5+6i|=2$ ⑤ $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$ ⑥ $|z+6-i|=7$

---

❷ إذا كانت : $|z+4-4\sqrt{3}\,i|=4$ فأجب عن السؤالين الاتيين :

◄ أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

◄ أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

❸ إذا كانت $|z-\sqrt{5}-2i|=2$ فأجب عن السؤالين الاتيين :

◄ أرسم المحل الهندسي الذي تُمثِّله المعادلة في المستوى المُركَّب.

◄ أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المُركَّبة z التي تُحقِّق المعادلة.

المنصف العمودي

❶ أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أجد معادلته الديكارتية :

1) $|z-5|=|z-3i|$
2) $|z+3i|=|z-7i|$
3) $|z+5+2i|=|z-7|$
4) $|z-3|=|z-2-i|$
5) $\dfrac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1$
6) $|z+7+2i|=|z-4-3i|$

الشعاع

❶ أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المركب :

1) $\operatorname{Arg}(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$
2) $\operatorname{Arg}(z-1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$
3) $\operatorname{Arg}(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}$
4) $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$
5) $\operatorname{Arg}(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$
6) $\operatorname{Arg}(z-4i)=0$
7) $\operatorname{Arg}(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

⑫ تمثيل المتباينات في المستوى المركب :

يُعَدُّ حلُّ المتباينة في المستوى المُركَّب محلًّا هندسيًّا يُمكِن تمثيله بيانيًّا بصورة مُشابِهة لتمثيل حلِّ المتباينة في المستوى الإحداثي.

تمارين (9)

❶ أمثل في المستوى المركب المنطقة التى تحددها كل متباينة مما يأتي :

1) $|z-2|<|z+2|$
2) $|z-4-2i|\le 2$
3) $|z-4|>|z-6|$

④ $0 < \text{Arg}(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

⑤ $-\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z-3+4i) \leq \frac{\pi}{4}$

⑥ $2 \leq |z-3-4i| \leq 4$

⑦ $|z+3+i| \leq 6$

⑧ $|z+3+i| < |z-4|$

⑨ $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$

⑩ $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$

⑪ $\frac{\pi}{6} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$

⑫ $|z-3| > 5$

⑬ تمثيل منطقة الحل لأكثر من محل هندسي :

تمارين (10)

❶ أمثل في المستوى المركب المنطقة المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينات الاتية :

① $|z-1-2i| \leq 5$، $\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$.

② $|z+3-2i| \geq 4$، $\frac{-\pi}{2} < \text{Arg}(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$.

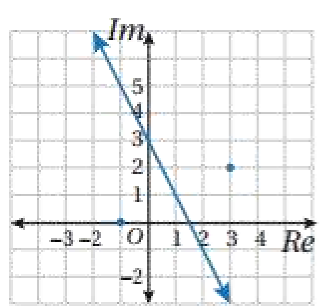
③ $|z-8| > |z+2i|$، $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

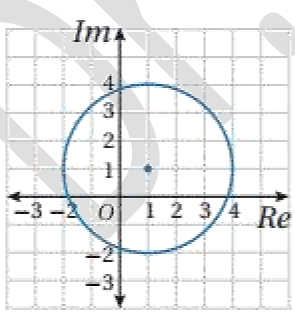
---

❷ أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i| = \sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-6i| = |z-7+i|$، ثم أجد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلتين معًا.

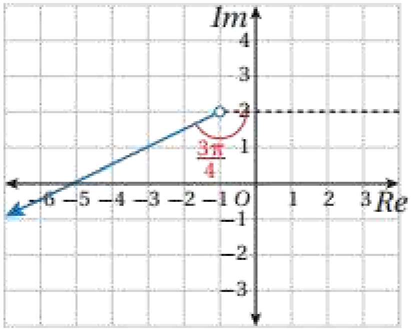
---

❸ أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

◄


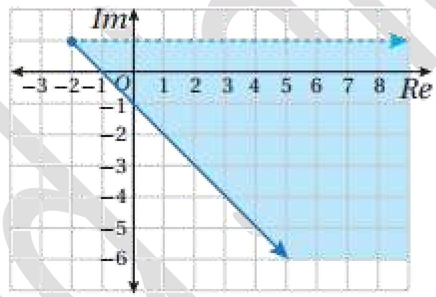
◄


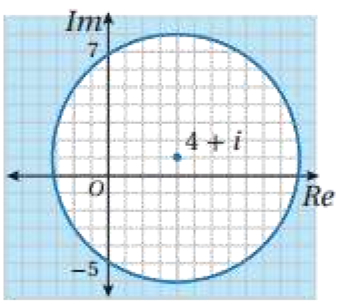
❹ أكتب معادلة في صورة: $\text{Arg}(z-a)=\theta$، حيث a عدد مُركَّب، و $-\pi < \theta \le \pi$ تُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



---

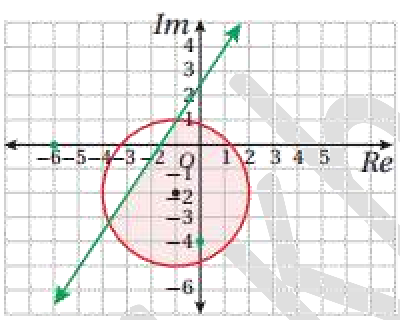
❺ أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثِّله المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ ممّا يأتي:





---

❻ أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يُمثِّل المحل الهندسي المُبيَّن في الشكل المجاور.



أسئلة عامة

❶ أُمثِّل في المستوى المُركَّب نفسه المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلٌّ من المعادلة: $|z-3+2i|=\sqrt{10}$، والمعادلة: $|z-6i|=|z-7+i|$، ثم أجد الأعداد المُركَّبة التي تُحقِّق المعادلتين معًا.

❷ إذا كان العدد المُركّـب z يُحقّق المعادلة: $|z-3+4i|=2$، فأجد أكبر قيمة لِـ $|z|$

---

❸ إذا كانت: $z=5+2i$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

◄ أُبيِّن أنَّ: $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{29}(21+20i)$.

◄ بناءً على البحث في سعة كلٍّ من الأعداد المُركَّبة: z، و $\bar{z}$، و $\frac{z}{\bar{z}}$، أُبيِّن أنَّ: $2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

---

❹ أُثبِت أنَّ المعادلة: $|z-6|=2|z+6-9i|$ تُمثِّل دائرة، ثم أجد مركزها وطول نصف قُطْرِها.

---

❺ إذا كان: $w=\frac{22+4i}{(2-i)^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

◄ أُبيِّن أنَّ الصورة القياسية لهذا العدد هي: $w=2+4i$.

◄ إذا كان: $\frac{\pi}{4}\leq \operatorname{Arg}(w+p)\leq\frac{3\pi}{4}$، فأجد مجموعة القِيَم المُمكِنة للعدد الثابت p.

تمت بحمد الله

مع أطيب تمنياتنا لكم بالتوفيق والتفوق

منهاجي
متعة التعليم الهادف