التفاضل

حل تمارين الكتاب

لمادة الرياضيات

للصف الثاني الثانوي الادبي

(المنهاج الجديد)

الفصل الدراسي الاول

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

0798959071

حل تمارين كتاب الطالب:

مسألة اليوم صفحة 54

يمثل الاقتران: $N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$

عدد السلع التقريبي التي يمكن لمحاسب مبتدئ في أحد المحال التجارية أن يمررها فوق الماسح الضوئي في الدقيقة الواحدة بعد t ساعة من بدئه العمل. أجد سرعة المحاسب في أداء هذه المهمة بعد زمن مقداره t ساعة.

الحل:

$$N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$N'(t) = \frac{+30\left(\frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{9-t^2}}\right)}{\left(\sqrt{9-t^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-30t}{\sqrt{9-t^2}}}{(9-t^2)}$$

$$= \frac{-30t}{(9-t^2)\left(\sqrt{9-t^2}\right)}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 56:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $y = (x^2-2)^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2-2)^3(2x)$$

$$= (8x)(x^2-2)^3.$$

b) $y = \sqrt{x^3+4x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{الجذر نفسه} \times ٢}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 58:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = (x^4+1)^5$ ، $x = 1$

$$f'(x) = 5(x^4+1)^4(4x^3)$$

$$f'(1) = 5(1^4+1)^4(4(1)^3)$$

$$= 5(2)^4(4)$$

$$= (5)(16)(4) = (20)(16) = 320.$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$ ، $x = 2$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$$

$$f'(2) = \frac{(2)(2)+3}{2 \times \sqrt{2^2+(3)(2)+2}} = \frac{7}{2\sqrt{12}}.$$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5}$ ، $x = 4$

$$y = (2x^2-7)^{\frac{5}{4}}$$

$$y' = \frac{5}{4}(2x^2-7)^{\frac{5}{4}-1}(4x)$$

$$= \frac{5}{\cancel{4}}(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}(\cancel{4}x) = (5x)\sqrt[4]{2x^2-7}.$$

$$y'\big|_{x=4} = (5)(4)\sqrt[4]{2(4)^2-7} = 20\sqrt[4]{25}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 59:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2.$

$$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7.$$
$$= (12x^2)(1+x^3)^3 + 8x^7.$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3.$

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3.$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{1}{3}-1}(2) - 3(x-3)^2(1)$$
$$= \frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} - 3(x-3)^2.$$
$$= \frac{2}{3(2x-1)^{\frac{2}{3}}} - 3(x-3)^2$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - 3(x-3)^2$$

أتحقق من فهمي صفحة 61:

يمثل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015

a) أجد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$$P'(t) = \frac{20t + 1}{2\times\sqrt{10t^2 + t + 229}}.$$

b) أجد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020.

$$t = 2020 - 2015 = 5$$

$$P'(5) = \frac{(20)(5) + 1}{2\sqrt{10(5)^2 + 5 + 229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}}$$
$$= \frac{101}{2\times 22} = \frac{101}{44} \approx 2.3$$

في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة

أتحقق من فهمي صفحة 62:

إذا كان: $y = u^5 + u^3$ ، $u = 3 - 4x$ وأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = -4.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$
$$= (5u^4 + 3u^2)(-4)$$
$$= -20u^4 - 12u^2$$

نعوض مكان u

$$= -20(3-4x)^4 - 12(3-4x)^2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = -20(3-4(2))^4 - 12(3-4(2))^2$$
$$= -20(-5)^4 - 12(-5)^2$$
$$= (-20)(625) - 12(25)$$
$$= -12500 - 300$$
$$= -12800.$$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = (1+2x)^4$

$f'(x) = 4(1+2x)^3(2)$

$= 8(1+2x)^3.$

② $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$

$f'(x) = -5(3-2x^2)^{-6}(-4x)$

$= (20x)(3-2x^2)^{-6}.$

$= \dfrac{20x}{(3-2x^2)^6}.$

③ $f(x) = (x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}-1}(2x-7)$

$= \left((\tfrac{3}{2})(2x) - (\tfrac{3}{2})(7)\right)(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(3x - \frac{21}{2}\right)\sqrt{x^2-7x+1}$

④ $f(x) = \sqrt{7-x}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{7-x}}.$

⑤ $f(x) = 4(2+8x)^4$

$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$

$= 128(2+8x)^3$

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x-8}}$

$f(x) = \dfrac{1}{(4x-8)^{\frac{1}{3}}} = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}.$

$f'(x) = -\frac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{1}{3}-1}(4)$

$= -\frac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{-4}{3(4x-8)^{\frac{4}{3}}}$

$= \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}.$

⑦ $f(x) = \sqrt{5+3x^3}$

$f'(x) = \dfrac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}.$

⑧ $f(x) = \sqrt{x} + (x-3)^2.$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)(1)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 6.$

⑨ $f(x) = \sqrt[3]{2x-x^5} + (4-x)^2$

$f(x) = (2x-x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x-x^5)^{-\frac{2}{3}}(2-5x^4) + 2(4-x)^1(-1)$

$= \dfrac{2-5x^4}{3(2x-x^5)^{\frac{2}{3}}} + (-2)(4-x)$

$= \dfrac{2-5x^4}{3\sqrt[3]{(2x-x^5)^2}} - 8 + 2x$

أتدرب وأحل المسائل :

(10) $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

$f'(x) = 4(\sqrt{x} + 5)^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{4}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 5)^3$

$= \frac{2}{\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 5)^3$

$= \frac{2(\sqrt{x} + 5)^3}{\sqrt{x}}$

---

(11) $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

$f'(x) = \frac{3(2x-5)^2 \cancel{(2)}}{\cancel{2}\sqrt{(2x-5)^3}}$

$= \frac{3(2x-5)^2}{\sqrt{(2x-5)^3}}$

$= \frac{3(2x-5)^2}{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}$

عند القسمة تُطرح الأسس

$= 3(2x-5)^{2-\frac{3}{2}}$

$= 3(2x-5)^{\frac{1}{2}}$

$= 3\sqrt{2x-5}$

$\frac{2 \times 2}{2 \times 1} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}$

---

(12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4 (6x^2 - 6x + 4)$

$= (30x^2 - 30x + 20)(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(13) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}$ ، $x = \frac{1}{4}$

$f(x) = (4x+1)^{-2}$

$f'(x) = -2(4x+1)^{-2-1} (4)$

$= -8(4x+1)^{-3} = \frac{-8}{(4x+1)^3}$

$f'(\frac{1}{4}) = \frac{-8}{(4(\frac{1}{4}) + 1)^3} = \frac{-8}{(1+1)^3}$

$= \frac{-8}{2^3} = \frac{-8}{8} = -1$

---

(14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ، $x = 3$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$

$f'(3) = \frac{(-2)(3)}{\cancel{2}\sqrt{25 - 3^2}} = \frac{-3}{\sqrt{25 - 9}}$

$= \frac{-3}{\sqrt{16}} = \frac{-3}{4}$

أتدرب وأحل المسائل:

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

(15) $y = 5u^2 + 3u$ ، $u = x^3 + 1$

$$\frac{dy}{du} = 10u + 3 \quad ، \quad \frac{du}{dx} = 3x^2.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

$$= (10u+3)(3x^2)$$

$$= 30ux^2 + 9x^2.$$

$$= 30(x^3+1)x^2 + 9x^2$$

$$= 30x^5 + 30x^2 + 9x^2$$

$$= 30x^5 + 39x^2.$$

(16) $y = \sqrt[3]{2u+5}$ ، $u = x^2 - x$

$$y = (2u+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u+5)^{\frac{1}{3}-1}(2)$$

$$= \frac{2}{3}(2u+5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}} \times (2x-1) = \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}}$$

$$= \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{(2(x^2-x)+5)^2}} = \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{(2x^2-2x+5)^2}}$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

(17) $y = 3u^2 - 5u + 2$ ، $u = x^2 - 1$ ، $x = 2$

$$\frac{dy}{du} = 6u - 5 \quad ، \quad \frac{du}{dx} = 2x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

$$= (6u-5)(2x)$$

$$= (6(x^2-1)-5)(2x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = (6(4-1)-5)((2)(2))$$

$$= (18-5)(4) = (13)(4) = 52$$

(18) $y = (1+u^2)^3$ ، $u = 2x - 1$ ، $x = 1$

$$\frac{dy}{du} = 3(1+u^2)^2(2u) \quad ، \quad \frac{du}{dx} = 2.$$

$$\frac{dy}{du} = (6u)(1+u^2)^2$$

$$= 6(2x-1)(1+(2x-1)^2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

$$= 6(2x-1)(1+(2x-1)^2)^2 \times 2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6(2(1)-1)(1+(2(1)-1)^2)^2 \times 2$$

$$= 6(1)(1+1)^2 \times 2$$

$$= 6(2)^2 \times 2$$

$$= (6)(4)(2)$$

$$= 48$$

أتدرب وأحل المسائل

يمثل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة انتاج x قطعة من منتج معين (بالآف الدنانير):

(19) أجد معدل تغير تكلفة الانتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة.

الحل:

$$C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}}$$

$$= \frac{500(2x - 0.1)}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$$

$$= \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$$

(20) أجد معدل تغير تكلفة الانتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة عندما يكون عدد القطع المنتجة 20 قطعة.

$$C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - (0.1)(20)}}$$

$$= \frac{19950}{\sqrt{400 - 2}}$$

$$= \frac{19950}{\sqrt{398}}$$

$$\approx 1000.$$

يمثل الاقتران $N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً في مجمع بكتيري:

(21) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t=1$

$$N(t) = 400\left(1 - 3(t^2+2)^{-2}\right)$$

$$= 400 - 1200(t^2+2)^{-2}$$

$$N'(t) = 0 - (1200)(-2)(t^2+2)^{-3}(2t)$$

$$= 4800t(t^2+2)^{-3}$$

$$= \frac{4800t}{(t^2+2)^3}$$

$$N'(1) = \frac{(4800)(1)}{(1^2+2)^3} = \frac{4800}{3^3}$$

$$= \frac{4800}{27} = \frac{1600}{9} = 178.$$

(22) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t=4$.

$$N'(4) = \frac{(4800)(4)}{(4^2+2)^3}$$

$$= \frac{19200}{(16+2)^3} = \frac{19200}{(18)^3}$$

$$= \frac{19200}{5832}$$

$$= 3.29$$

أتدرب وأحل المسائل:

اذا كان: $h(3)=2$, $h'(3)=-2$ و $g(2)=-3$, $g'(2)=6$ فأجد مشتقة كل اقتران مما يلي عندما $x=3$:

(23) $f(x)=g(h(x))$

$$f'(x)=g'(h(x))\times h'(x)$$
$$f'(3)=g'(h(3))\times h'(3)$$
$$=g'(2)\times(-2)$$
$$=(6)(-2)=-12.$$

---

(24) $f(x)=(h(x))^3$

$$f'(x)=3(h(x))^2(h'(x))$$
$$f'(3)=3(h(3))^2(h'(3))$$
$$=3(2)^2(-2)$$
$$=(3)(4)(-2)=-24$$

---

(25) اذا كان: $h(x)=f(g(x))$ حيث $f(u)=u^2-1$ وكان: $g'(2)=-1$ و $g(2)=3$. فأجد $h'(2)$.

الحل:

$$h'(x)=f'(g(x))(g'(x))$$
$$h'(2)=f'(g(2))(g'(2))$$
$$=f'(3)(-1)$$

نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$.

$$f(u)=u^2-1 \Rightarrow f'(u)=2u.$$
$$f'(3)=(2)(3)=6$$

$$h'(2)=f'(3)(-1)$$
$$=(6)(-1)=-6.$$

---

(26) أجد مشتقة الاقتران: $y=(x^2-4)^5$ عندما $y=0$

الحل:

$$y=(x^2-4)^5$$
$$0=(x^2-4)^5 \Rightarrow \underset{+4}{x^2-4}=\underset{+4}{0} \Rightarrow x^2=4$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4} \Rightarrow x=\mp 2.$$

نشتق

$$\frac{dy}{dx}=5(x^2-4)^4(2x)$$
$$=(10x)(x^2-4)^4.$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=(10)(2)(2^2-4)^4=(20)(0)=0$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2}=(10)(-2)((-2)^2-4)^4=(-20)(0)=0$$

---

(27) أي الاقترانات التالية تختلف؟ مبرراً اجابتي

$$g(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2} \quad , \quad p(x)=x^2+1$$

$$h(x)=(x^2+1)^3 \quad , \quad f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

الاقتران المختلف هو $p(x)$ لأنه الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة .

---

(28) أجد مشتقة الاقتران

$$f(x)=\sqrt[3]{2x+(x^2+x)^4}$$
$$f(x)=(2x+(x^2+x)^4)^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}(2x+(x^2+x)^4)^{\frac{1}{3}-1}(2+4(x^2+x)^3(2x+1))$$
$$=\frac{1}{3}(2x+(x^2+x)^4)^{-\frac{2}{3}}(2+(8x+4)(x^2+x)^3)$$
$$=\frac{2+(8x+4)(x^2+x)^3}{3\times\sqrt[3]{(2x+(x^2+x)^4)^2}}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (x^3+4)(7x^2-4x)$

$$f'(x) = (x^3+4)(14x-4) + (7x^2-4x)(3x^2)$$
$$= 14x^4 - 4x^3 + 56x - 16 + 21x^4 - 12x^3$$
$$= 35x^4 - 16x^3 + 56x - 16$$

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(3x-2)$

$$f'(x) = (\sqrt{x}+1)(3) + (3x-2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}}.$$
$$= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

مسألة اليوم صفحة 64

وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة بندورة h (بالأمتار) باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{t^3}{8+t^3}$ حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(8+t^3)(3t^2) - t^3(3t^2)}{(8+t^3)^2}$$
$$= \frac{24t^2 + 3t^5 - 3t^5}{(8+t^3)^2}.$$
$$= \frac{24t^2}{(8+t^3)^2}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 67

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(3) - (3x+1)(1)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2} = \frac{-7}{(x-2)^2}$$

b) $f(x) = \frac{x^{-3}}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-3x^{-4}) - (x^{-3})(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-3x^{-2} - 3x^{-4} - 2x^{-2}}{(x^2+1)^2}.$$
$$= \frac{-5x^{-2} - 3x^{-4}}{(x^2+1)^2}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 68

يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران $p(t) = \frac{5}{2t^2+9}$ حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن و P عدد السكان بالآلاف:

a) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$$p'(t) = \frac{(-5)(4t)}{(2t^2+9)^2}$$

$$= \frac{-20t}{(2t^2+9)^2}.$$

---

b) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t=2$.

الحل:

$$p'(2) = \frac{(-20)(2)}{(2(2)^2+9)^2}$$

$$= \frac{-40}{(17)^2} = \frac{-40}{289}.$$

$$= -0.14$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن.

أتحقق من فهمي صفحة 70

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}.$

$$f'(x) = \frac{(-1)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}.$$

b) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$

$$f'(x) = \frac{(-3)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{-6}{(2x+1)^2}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 71:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 20x(4x^3-1)^6.$

$$f'(x) = (20x)(6(4x^3-1)^5(12x^2)) + (4x^3-1)^6(20)$$

$$= (20x)(72x^2(4x^3-1)^5) + 20(4x^3-1)^6.$$

اخراج $(4x^3-1)^5$ عامل مشترك.

$$= (4x^3-1)^5((20x)(72x^2) + 20(4x^3-1))$$

$$= (4x^3-1)^5(1440x^3 + 80x^3 - 20)$$

$$= (4x^3-1)^5(1520x^3 - 20)$$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^4}.$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^4(2x) - (x^2-1)(4(x+2)^3(1))}{((x+2)^4)^2}$$

$$= \frac{2x(x+2)^4 - 4(x^2-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}.$$

اخراج $(x+2)^3$ عامل مشترك

$$= \frac{(x+2)^3(2x(x+2) - 4(x^2-1))}{(x+2)^8}$$

$$= \frac{2x^2+4x-4x^2+4}{(x+2)^5}$$

$$= \frac{4x-2x^2+4}{(x+2)^5}.$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 71

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = x(1+3x)^5$.

$f'(x) = x(5(1+3x)^4(3)) + (1+3x)^5(1)$

$= 15x(1+3x)^4 + (1+3x)^5$.

إخراج $(1+3x)^4$ عامل مشترك.

$= (1+3x)^4(15x + (1+3x)^1)$

$= (1+3x)^4(18x+1)$.

② $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x+3)(1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{x+1-x-3}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$

③ $f(x) = (2x+1)^5(3x+2)^4$.

$f'(x) = (2x+1)^5(4(3x+2)^3(3)) +$
$(3x+2)^4(5(2x+1)^4(2))$.

$= 12(2x+1)^5(3x+2)^3 + 10(3x+2)^4(2x+1)^4$

إخراج $2(3x+2)^3(2x+1)^4$ عامل مشترك.

$=2(3x+2)^3(2x+1)^4(6(2x+1)+5(3x+2))$

$=2(3x+2)^3(2x+1)^4(12x+6+15x+10)$

$=2(3x+2)^3(2x+1)^4(27x+16)$

$=(3x+2)^3(2x+1)^4(54x+32)$

④ $f(x)=\frac{3x^2}{(2x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(6x) - (3x^2)(2(2x-1)(2))}{((2x-1)^2)^2}$

$= \frac{(2x-1)^2(6x) - (12x^2)(2x-1)}{(2x-1)^4}$

إخراج $(2x-1)(6x)$ عامل مشترك.

$=\frac{(6x)(2x-1)((2x-1)-2x)}{(2x-1)^4}$

$=\frac{(6x)(2x-1)(2x-1-2x)}{(2x-1)^4}$.

$=\frac{(6x)(2x-1)(-1)}{(2x-1)^4}$

$=\frac{-6x}{(2x-1)^3}$.

⑤ $f(x)=\frac{6x}{\sqrt{5x+3}}$

$f'(x)=\frac{\sqrt{5x+3}(6) - (6x)\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}}{\sqrt{5x+3}^2}$

توحيد المقامات في البسط

$=\frac{6\sqrt{5x+3} - \frac{15x}{\sqrt{5x+3}}}{5x+3} = \frac{\frac{6(5x+3)-15x}{\sqrt{5x+3}}}{5x+3}$

$=\frac{30x+18-15x}{(5x+3)(\sqrt{5x+3})} = \frac{15x+18}{(5x+3)(\sqrt{5x+3})}$.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 71

⑥ $f(x) = (4x-1)(x^2-5)$

$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4)$

$= 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20$

$= 12x^2 - 2x - 20$.

---

⑦ $f(x) = \dfrac{x^2+6}{2x-7}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$.

$= \dfrac{4x^2 - 14x - 2x^2 - 12}{(2x-7)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 14x - 12}{(2x-7)^2}$.

---

⑧ $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.

$f'(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})(1) - x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$

$= \dfrac{1 + \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$.

$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$= \dfrac{1 + \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \dfrac{1 + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$.

$\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ توحيد المقامات

$= \dfrac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$.

---

⑨ $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$

$f'(x) = (x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}\ (1)$

$= \dfrac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$. توحيد المقامات

$= \dfrac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

$= \dfrac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{2(x-1)}{2\sqrt{x-1}}$

$= \dfrac{x+1+2x-2}{2\sqrt{x-1}}$

$= \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x-1}}$.

---

⑩ $f(x) = \dfrac{x}{5+2x} - 2x^4$.

$f'(x) = \dfrac{(5+2x)(1) - (x)(2)}{(5+2x)^2} - 8x^3$

$= \dfrac{5 + 2x - 2x}{(5+2x)^2} - 8x^3$.

$= \dfrac{5}{(5+2x)^2} - 8x^3$.

---

⑪ $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{-5(2)(x+2)^1(1)}{(x+2)^4}$.

$= \dfrac{-10}{(x+2)^3}$.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 71

(12) $f(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(x^2 - 3)$

$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2 - 3)\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

$= 2x^2 + \frac{4x}{x} + x^2 - 3 - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{6}{x^2}$

$= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$

$= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$

---

(13) $f(x) = (8x + \sqrt{x})(5x^2 + 3)$

$f'(x) = (8x + \sqrt{x})(10x) + (5x^2 + 3)\left(8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= 80x^2 + 10x\sqrt{x} + 40x^2 + 24 + \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$= 80x^2 + 10x^{\frac{3}{2}} + 40x^2 + 24 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$= 120x^2 + \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$10x\sqrt{x} = 10x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 10x^{1+\frac{1}{2}} = 10x^{\frac{3}{2}}$

عند الضرب نجمع الأسس

$\frac{5x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2}x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

عند القسمة نطرح الأسس

$10x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{20}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}}$

---

(14) $f(x) = 5x^{-3}(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$

$f(x) = 5x^1 - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$

$f'(x) = 5 + (50)(-2)x^{-3} - 10(-3)x^{-4}$

$= 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$

ويمكن حل السؤال بطريقة مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

(15) $f(x) = x^2(3x - 1)^3 \quad , \quad x = 1$

$f'(x) = x^2(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$

$f'(1) = (1)^2(3)(3(1)-1)^2(3) + (3(1)-1)^3(2)(1)$

$= 9(2)^2 + 2^3(2)$

$= (9)(4) + (8)(2) = 36 + 16$

$= 52$

---

(16) $f(x) = 3x\sqrt{5 - x} \quad , \quad x = 4$

$f'(x) = (3x)\frac{-1}{2\sqrt{5-x}} + \sqrt{5-x}\,(3)$

$f'(4) = (3)(4)\frac{-1}{2\sqrt{5-4}} + \sqrt{5-4}\,(3)$

$= \frac{-12}{2\sqrt{1}} + (\sqrt{1})(3)$

$= -6 + 3$

$= -3$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 71

17) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$, $x = 2$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x-1)(2)}{(2x+1)^2}.$$

$$f'(2) = \frac{((2)(2)+1)(1) - (2-1)(2)}{((2)(2)+1)^2}.$$

$$= \frac{(4+1)-2}{(5)^2} = \frac{5-2}{25} = \frac{3}{25}.$$

---

18) $f(x) = (2x+3)(x-2)^2$, $x = 0$

$$f'(x) = (2x+3)(2(x-2)^1(1)) + (x-2)^2(2).$$

$$f'(0) = (0+3)(2(0-2)) + (0-2)^2(2).$$

$$= (3)(2)(-2) + (4)(2) = -12+8 = -4.$$

يمثل الاقتران: $S(t) = \dfrac{2000t}{4+0.3t}$ إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير) لشركة جواهر وحُلي، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020 م:

19) أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

$$s'(t) = \frac{(4+0.3t)(2000) - (2000t)(0.3)}{(4+0.3t)^2}.$$

$$= \frac{8000 + 600t - 600t}{(4+0.3t)^2}$$

$$= \frac{8000}{(4+0.3t)^2}$$

$(0.3t)(2000) =$

$(\frac{3}{10}t)(2000) =$

$(200)(3)t = 600t$

20) أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة عام 2030 م. مفسراً معنى الناتج.

$t = 2030 - 2020$

$t = 10$

$$s'(t) = \frac{8000}{(4+0.3t)^2}$$

$$s'(10) = \frac{8000}{(4+(0.3)(10))^2}$$

$$= \frac{8000}{(4+3)^2} = \frac{8000}{7^2}$$

$$= \frac{8000}{49} \approx 163$$

يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030.

$(0.3)(10) =$

$(\frac{3}{10})(10) = 3$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 72

يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران

$$p(t) = 12(2t^2+100)(t+20)$$

حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن و

p عدد السكان بالآلاف :

(21) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

$$p'(t) = 12(2t^2+100)(1) + (t+20)(12(4t))$$

$$= 12(2t^2+100+4t^2+80t)$$

$$= 12(6t^2+80t+100) .$$

---

(22) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t=6$.

$$p'(6) = 12(6(6)^2 + (80)(6) + 100)$$

$$= 12(216+480+100)$$

$$= 12(796) = 9552 .$$

يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن .

---

(23) يمثل منحنى كتلة مركب في أثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران : $M(t) = \frac{5.8t}{t+1.9}$

حيث t الزمن بالثواني بعد بدء التفاعل و M الكتلة بالغرام . أجد معدل تغير كتلة المركب بعد 5 ثوانٍ من بدء التفاعل .

$$M'(t) = \frac{(t+1.9)(5.8)-(5.8t)(1)}{(t+1.9)^2}$$

$$M'(5) = \frac{(5+1.9)(5.8)-(5.8)(5)}{(5+1.9)^2}$$

$$= \frac{(6.9)(5.8) - 29}{(6.9)^2}$$

$$= \frac{40.02 - 29}{47.61} = \frac{11.02}{47.61}$$

$$\approx 0.23$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة .

(24) $y = u(u^2+3)^3$ و $u = (x+3)^2$ ، $x=-2$

عندما $x=-2 \leftarrow u=(-2+3)^2 \leftarrow u=1$

$$\frac{dy}{du} = u(3(u^2+3)^2(2u)) + (u^2+3)^3(1) .$$

$$= 6u^2(u^2+3)^2 + (u^2+3)^3 .$$

اخراج $(u^2+3)^2$ عامل مشترك

$$\frac{dy}{du} = (u^2+3)^2(6u^2+u^2+3) = (u^2+3)^2(7u^2+3)$$

$$\frac{du}{dx} = 2(x+3)^1(1) = 2x+6 .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=1} * \frac{du}{dx}\Big|_{x=-2}$$

$$= (1+3)^2(7+3) * (2(-2)+6)$$

$$= (4)^2(10) * (-4+6)$$

$$= 160 * 2 = 320 .$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 72

(25) $Y = \dfrac{u^3}{u+1}$, $u = (x^2+1)^3$, $x=1$

عندما $x=1 \leftarrow u=(1^2+1)^3 \leftarrow u = 2^3 \leftarrow u=8$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)(3u^2)-(u^3)(1)}{(u+1)^2}$$

$$= \frac{3u^3+3u^2-u^3}{(u+1)^2} = \frac{2u^3+3u^2}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2.$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=8} * \frac{du}{dx}\Big|_{x=1}$$

$$= \frac{2(8)^3+3(8)^2}{(8+1)^2} \times 6(1^2+1)^2.$$

$$= \frac{2(512)+3(64)}{9^2} \times 6(2)^2$$

$$= \frac{1024+192}{\cancel{81}\ 27} \times \cancel{6}^{\,2}(4)$$

$$= \frac{1216 \times 8}{27} = \frac{9728}{27} \approx 360.$$

اذا كان: $g(2)=3$, $g'(2)=2$, $f(2)=4$, $f'(2)=-1$ فأجد كلاً مما يلي

(26) $(fg)'(2) = f(2)\cdot g'(2) + f'(2)\cdot g(2)$

$= (4)(2)+(-1)(3)$

$= 8-3 = 5.$

(27) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{g(2)\cdot f'(2) - f(2)\cdot g'(2)}{(g(2))^2}$

$$= \frac{(3)(-1)-(4)(2)}{3^2}$$

$$= \frac{-3-8}{9} = \frac{-11}{9}$$

(28) $(3f+fg)'(2) =$

$$3f'(2) + \underbrace{(f(2)\,g'(2) + g(2)\,f'(2))}_{\text{من السؤال (26)}}$$

$3(-1) + 5 = -3+5 = 2.$

(29) أجد مشتقة الاقتران:

$f(x) = [x(4x-3)^6](1-4x)^9.$

$f'(x) = (x(4x-3)^6)\,9(1-4x)^8(-4) +$

$(1-4x)^9[x\cdot 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6(1)]$

$= -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 +$

$(1-4x)^9(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6)$

اخراج $(4x-3)^5(1-4x)^8$ عامل مشترك.

$(4x-3)^5(1-4x)^8[-36x(4x-3)+(1-4x)(24x+(4x-3)]$

$(4x-3)^5(1-4x)^8[-144x^2+108x+(1-4x)(28x-3)]$

$(4x-3)^5(1-4x)^8(-144x^2+108x+28x-112x^2+12x-3)$

$(4x-3)^5(1-4x)^8(-256x^2+148x-3)$

اذا كان: $f(x) = \dfrac{2x}{x+5} + \dfrac{6x}{x^2+7x+10}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(30) أثبت أن $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

$$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x)}{(x+2)(x+5)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)} = \frac{(x+2)(2x)+6x}{(x+5)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+4x+6x}{(x+5)(x+2)} = \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+2)}$$ إخراج $2x$ عامل مشترك

$$f(x) = \frac{2x\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$$

---

(31) أجد $f'(3)$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(2)-(2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}.$$

---

(32) اذا كان: $f(x) = \dfrac{2x+8}{\sqrt{x}}$ فأجد قيمة x عندما $f'(x)=0$.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

البسط = صفر

$$2\sqrt{x} - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}^2 = 4$$

$$x = 4.$$

مسألة اليوم صفحة 73 :

يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة:

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

لتقدير عدد الأشخاص الذين سمعوا شائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يوماً من انطلاقها. أجد معدل تغير عدد الأشخاص الذين يسمعون شائعة بالنسبة إلى الزمن d في مجتمع عدد أفراده 10000 نسمة.

$$N = 10000(1 - e^{-0.15d})$$

$$N' = 10000(0.15\, e^{-0.15d})$$

$$= 1500\, e^{-0.15d}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 74 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 2e^{x} + 3$

$f'(x) = 2e^{x}.$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^{x}.$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + e^{x}.$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^{x}.$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^{x}.$

c) $y = x\, e^{x}$

$\frac{dy}{dx} = x\, e^{x} + e^{x}(1)$

$= e^{x}(x+1)$

أتحقق من فهمي صفحة 75 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = e^{7x+1}.$

$f'(x) = 7\, e^{7x+1}.$

b) $f(x) = e^{x^3}.$

$f'(x) = 3x^2\, e^{x^3}.$

c) $f(x) = 5\, e^{\sqrt{x}}.$

$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}.$

$= \frac{5}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}.$

أتحقق من فهمي صفحة 76 :

تستعمل مادة مشعة لتزويد قمر صناعي بالطاقة ويمكن نمذجة مقدار الطاقة المتبقية في المادة المشعة (بالواط) باستعمال الاقتران:

$P(t) = 50\, e^{-0.004t}$ ، حيث t الزمن بالأيام

أجد معدل تغير الطاقة المتبقية في القمر الصناعي بعد 500 يوم.

الحل:

$P'(t) = (50)(-0.004)\, e^{-0.004t}.$

$= -0.2\, e^{-0.004t}.$

$P'(500) = -0.2\, e^{(-0.004)(500)}$

$= -0.2\, e^{-2} \approx -0.03$

تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم.

أتحقق من فهمي صفحة 78:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 4 \ln x$

$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$.

b) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$.

c) $y = \frac{\ln x}{x}$

$y' = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

أتحقق من فهمي صفحة 80:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \ln(8x)$

$f'(x) = \frac{8}{8x}$

$= \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 2\ln(x^7)$.

$f'(x) = 2\left(\frac{7x^6}{x^7}\right)$

$= \frac{14}{x}$.

يمكن حله بطريقة أخرى

$f(x) = 2\ln(x^7)$

$f(x) = 14 \ln x$.

$f'(x) = 14\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) $f(x) = \ln(9x+2)$

$f'(x) = \frac{9}{9x+2}$.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = 2e^x + 1$

$f'(x) = 2e^x$.

---

② $f(x) = e^{3x+9}$

$f'(x) = 3e^{3x+9}$.

---

③ $f(x) = (x^2 + 3x - 9)e^x$

$f'(x) = (x^2 + 3x - 9)e^x + e^x(2x + 3)$

اخراج e^x عامل مشترك

$f'(x) = e^x(x^2 + 3x - 9 + 2x + 3)$

$= e^x(x^2 + 5x - 6)$

---

④ $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$.

$f'(x) = \frac{x^4 \cdot e^x - e^x(4x^3)}{(x^4)^2}$

اخراج x^3 عامل مشترك

$f'(x) = \frac{x^3(xe^x - 4e^x)}{x^8}$

$= \frac{xe^x - 4e^x}{x^5}$

اخراج e^x عامل مشترك.

$= \frac{e^x(x-4)}{x^5}$.

---

⑤ $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$.

$f'(x) = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$.

$= \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

---

⑥ $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

$f'(x) = \frac{(1+e^x)e^x - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}$

$= \frac{e^x + e^x \cdot e^x - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2}$

$= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

---

⑦ $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$

$f'(x) = (e^x + 2)(e^x) + (e^x - 1)(e^x)$

اخراج e^x عامل مشترك.

$f'(x) = e^x(e^x + 2 + e^x - 1)$

$= e^x(2e^x + 1)$

$= 2e^{2x} + e^x$

---

(8) $f(x) = e^{-2x}(2x-1)^5$

$f'(x) = e^{-2x}\left(5(2x-1)^4(2)\right) + (2x-1)^5(-2e^{-2x})$

اخراج $2e^{-2x}(2x-1)^4$ عامل مشترك

$= 2e^{-2x}(2x-1)^4(5-(2x-1))$

$= 2e^{-2x}(2x-1)^4(5-2x+1)$

$= 2e^{-2x}(2x-1)^4(6-2x)$

---

(9) $f(x) = x^3 - 5e^{2x}$

$f'(x) = 3x^2 - (5)(2)e^{2x}$

$= 3x^2 - 10e^{2x}$

---

(10) $f(x) = 3\ln x$

$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$

---

(11) $f(x) = x^3 \ln x$.

$f'(x) = x^3\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(3x^2)$

$= x^2 + 3x^2\ln x$.

---

(12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$.

$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$

$= \frac{1-2\ln x}{x^3}$.

(13) $f(x) = x^2 \ln(4x)$

$f'(x) = x^2\left(\frac{4}{4x}\right) + (\ln(4x))(2x)$

$= x + 2x\ln(4x)$

---

(14) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \div \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x^2+x}$$

يمكن حل فرع (14) بطريقة أخرى.

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$.

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

بتوحيد المقامات:

$f'(x) = \frac{x}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)}$

$= \frac{x-(x+1)}{x(x+1)}$

$= \frac{x-x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x^2+x}$.

(15) $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{(x^2-1)}$$

طريقة ثانية لحل فرع (15)

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2-1} = \ln(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{x}{x^2-1}.$$

---

(16) $f(x) = (\ln x)^4.$

$$f'(x) = 4(\ln x)^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{x}\right)(\ln x)^3 = \frac{4(\ln x)^3}{x}$$

---

(17) $f(x) = \ln(x^2-5)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}.$$

---

(18) $f(x) = x^4\ln x - \frac{1}{2}e^x.$

$$f'(x) = x^4\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\,(4x^3) - \frac{1}{2}e^x.$$

$$= x^3 + 4x^3\ln x - \frac{1}{2}e^x.$$

---

(19) $f(x) = e^{2x}\ln x$

$$f'(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2e^{2x})$$

$$= \frac{e^{2x}}{x} + 2e^{2x}\ln x$$

إخراج e^{2x} عامل مشترك

$$= e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2\ln x\right)$$

توحيد المقامات

$$= e^{2x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x\ln x}{x}\right)$$

$$= e^{2x}\left(\frac{1+2x\ln x}{x}\right).$$

---

(20) $f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$

$$f'(x) = (\ln 3x)\left(\frac{7}{7x}\right) + (\ln 7x)\left(\frac{3}{3x}\right)$$

$$= \frac{\ln 3x}{x} + \frac{\ln 7x}{x}$$

$$= \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}.$$

---

(21) $f(x) = \ln(e^x - 2)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}.$$

---

(25) يستعمل الاقتران:

$m(t) = t \ln t + 1$ ، $0 < t \leq 4$

لقياس قدرة الأطفال على التذكر حيث m مقياس من 1 إلى 7 ، t عمر الطفل بالسنوات. أجد معدل تغير قدرة الأطفال على التذكر بالنسبة إلى عمر الطفل t.

الحل:

$m'(t) = t\left(\frac{1}{t}\right) + \ln t(1) + 0.$

$m'(t) = 1 + \ln t.$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي:

(26) $y = e^{2u} + 3$ ، $u = x^2+1$

$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$ ، $\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= 2e^{2u} \times 2x$

$= 4x\,e^{2u} = 4x\,e^{2(x^2+1)}$

---

(27) $y = \ln(u+1)$ ، $u = e^{x}.$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+1}$ ، $\frac{du}{dx} = e^{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$

$= \frac{1}{u+1} \times e^{x}$

$= \frac{1}{e^{x}+1} \times e^{x} = \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

(22) $f(x) = e^{2x-1} \ln(2x-1)$, $x = 1$

$f'(x) = e^{2x-1}\left(\frac{2}{2x-1}\right) + \ln(2x-1)(2e^{2x-1})$

$f'(1) = e^{1}\left(\frac{2}{2-1}\right) + \ln(2-1)(2e^{2-1})$

$= (e)(2) + (\ln 1)(2e)$

$= 2e + 0 = 2e.$

---

(23) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ ، $x = 4$

$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (\ln x^2)(1)}{x^2}$

$= \frac{2 - \ln x^2}{x^2}.$

$f'(4) = \frac{2 - \ln 16}{16}.$

---

(24) يمكن نمذجة انتشار الأنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران:

$P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}.$

حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الأنفلونزا. أجد سرعة انتشار الأنفلونزا بعد 3 أيام

الحل:

$P'(t) = \frac{100\,e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2}$

$P'(3) = \frac{100\,e^{0}}{(1 + e^{0})^2} = \frac{100}{2^2} = \frac{100}{4} = 25$

(28) اكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم أصححه:

$$y = \ln kx$$

$$\frac{dy}{dx} = k \ln kx$$

الحل الصحيح

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx}$$

$$= \frac{1}{x}$$

---

(29) إذا كان: $y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

$$y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{3x}(7(\frac{1}{x}) - 3x^2) - (7\ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{e^3(7-3) - (7\ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}.$$

$$= \frac{4e^3 - (0-1)3e^3}{e^6} = \frac{4e^3 + 3e^3}{e^6}$$

$$= \frac{7e^3}{e^6} = \frac{7}{e^3}$$

وهو المطلوب.

الدرس الرابع: مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

مسألة اليوم صفحة 82:

يمكن نمذجة ضغط الدم لمريض في حالة الراحة باستعمال الاقتران:

$$P(t) = 100 + 20 \sin 2\pi t.$$

حيث P ضغط الدم بالمليمتر من الزئبق و t الزمن بالثواني. أجد معدل تغير ضغط دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$$P(t) = 100 + 20 \sin 2\pi t$$

$$P'(t) = 0 + (20)(2\pi) \cos 2\pi t$$

$$P'(t) = 40\pi \cos 2\pi t.$$

أتحقق من فهمي صفحة 83:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 7 + \sin x.$

$$f'(x) = \cos x.$$

---

b) $f(x) = 3x - \cos x$

$$f'(x) = 3 + \sin x$$

---

c) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$

$$f'(x) = 3\cos x - 2\sin x$$

أتحقق من فهمي صفحة 84:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = e^{x} \cos x$

$$f'(x) = e^{x}(-\sin x) + \cos x \cdot e^{x}$$

إخراج e^{x} عامل مشترك

$$f'(x) = e^{x}(\cos x - \sin x)$$

---

b) $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{\sin x(1 - \sin x) - (x + \cos x)\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - \sin^2 x - x\cos x - \cos^2 x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - x\cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - x\cos x - 1}{\sin^2 x}.$$

تذكير: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

أتحقق من فهمي صفحة 86:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \cos 5x$

$f'(x) = -5 \sin 5x$.

b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

c) $f(x) = \ln(\cos 3x)$

$$f'(x) = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$= -3 \tan 3x$$

تذكر: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

أتحقق من فهمي صفحة 86:

يمثل الاقتران:

$h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$.

ارتفاع الماء (بالأقدام) عند رصيف أحد الموانئ بعد t ساعة تلي الساعة 6 a.m.

أجد معدل تغير ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$

$h'(t) = 0 + (4 \times \frac{\pi}{6}) \cos \pi t$.

$= \frac{2\pi}{3} \cos \pi t$.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = 2\cos x + \sin x$

$f'(x) = -2\sin x + \cos x$.

② $f(x) = 5 + \cos x$.

$f'(x) = 0 - \sin x$

$= -\sin x$.

③ $f(x) = \sin x - \cos x$

$f'(x) = \cos x + \sin x$.

④ $f(x) = x\sin x$.

$f'(x) = x\cos x + \sin x$.

⑤ $f(x) = \sin x \cos x$.

$f'(x) = \sin x(-\sin x) + \cos x \cdot \cos x$

$= -\sin^2 x + \cos^2 x$.

⑥ $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = e^x \cos x + \sin x \, e^x$

$= e^x(\cos x + \sin x)$.

⑦ $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$.

$f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot e^x - e^x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$= \dfrac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$.

⑧ $f(x) = \sin(x^2+1)$

$f'(x) = \cos(x^2+1)(2x)$

$= 2x\cos(x^2+1)$

⑨ $f(x) = \ln(\sin x)$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

⑩ $f(x) = \cos(5x-2)$

$f'(x) = -\sin(5x-2)(5)$

$= -5\sin(5x-2)$.

⑪ $f(x) = \sin 3x + \cos 6x$

$f'(x) = 3\cos 3x - 6\sin 6x$

⑫ $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$f'(x) = -\sin(x^2-3x-4)(2x-3)$

$= -(2x-3)\sin(x^2-3x-4)$

$= (3-2x)\sin(x^2-3x-4)$

(13) $f(x) = e^{2x} \sin 10x$

$f'(x) = e^{2x} \cos(10x)(10) + \sin(10x)(2e^{2x})$

$= 2e^{2x}\left(5\cos(10x) + \sin(10x)\right)$

---

(14) $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$

$f'(x) = \cos x^2 (\frac{1}{x}) + \ln x(-2x \sin x^2)$

$= \dfrac{\cos x^2}{x} - 2x(\ln x)\sin x^2$

---

(15) $f(x) = \sqrt{x+1}\ \sin \frac{\pi x}{2}$

$f'(x) = \sqrt{x+1}\left(\frac{\pi}{2}\cos \frac{\pi}{2}x\right) + \sin\frac{\pi}{2}x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$= \frac{\pi}{2}\sqrt{x+1}\cos\frac{\pi}{2}x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{2\sqrt{x+1}}$.

---

(16) $f(x) = 4\sin^2 x = 4(\sin x)^2$

$f'(x) = 4 \cdot 2(\sin x)^1(\cos x)$

$= 8 \sin x \cos x$.

---

(17) $f(x) = \cos^3 2x \ \cos x = (\cos 2x)^3 \cos x$.

$f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + \cos x(3(\cos 2x)^2(-2\sin 2x))$

$= -\sin x \cos^3 2x - 6\cos x \cos^2 2x \sin 2x$

---

(18) $f(x) = 5\sin\sqrt{x}$.

$f'(x) = 5(\cos\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$= \dfrac{5}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

---

(19) $f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$

$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2\sin 2x - \cos x)$

$= (2\cos 2x - 2\sin x)(-2\sin 2x - \cos x)$

---

(20) $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$

$f'(x) = (\cos\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + \dfrac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}}$

$= \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

---

(21) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\sin x}$

$f'(x) = \dfrac{\sin x(2\ln x(\frac{1}{x})) - (\ln x)^2(\cos x)}{(\sin x)^2}$

$= \dfrac{\frac{2}{x}\sin x \ln x - (\ln x)^2\cos x}{(\sin x)^2}$

---

(22) يمثل الاقتران: $D(t) = 1500 + 400 \sin 0.4t$ عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

الحل:

$$D(t) = 1500 + 400 \sin 0.4t.$$

$$D'(t) = 0 + (400)(0.4) \cos 0.4t = 160 \cos 0.4t$$

---

(23) يمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أي يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران: $H(t) = 12 + 2.4 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$.

أجد معدل تغير عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

الحل:

$$H'(t) = 2.4\left(\frac{2\pi}{365}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$$

$$= \frac{4.8\pi}{365} \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$$

---

(24) اذا كان: $Y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \left((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cancel{2}\sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

---

(25) أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$

$$f(x) = (e^x \cos x)(\sin x)^2$$

$$f'(x) = (e^x \cos x)(2 \sin x \cos x) + (\sin x)^2\left(e^x(-\sin x) + (\cos x)(e^x)\right)$$

$$= e^x \sin x\,(2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x)$$

---

(26) الخطأ عدم وجود الإشارة السالبة.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

اختار رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

① اذا كان: $f(x) = (x^2-1)(x^2+1)$

فإن $f'(-1)$ هي:

a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

الحل:
$f'(x) = (x^2-1)(2x) + (x^2+1)(2x)$

$f'(-1) = (1-1)(-2) + (1+1)(-2)$

$= 0 + (2)(-2) = -4$ $\boxed{d}$

② اذا كان: $y = uv$ وكان

$u(1) = 2$, $u'(1) = 3$, $v(1) = -1$, $v'(1) = 1$

فإن $y'(1)$ تساوي

a) -4 b) -1 c) 1 d) 4

الحل:

$y = u.v$

$y' = u.v' + v.u'$

$y'(1) = u(1)\, v'(1) + v(1)\,.\, u'(1)$

$= (2)(1) + (-1)(3)$

$= 2 - 3 = -1$ $\boxed{b}$

③ اذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$ فإن $f'(x) =$

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $1 + \frac{1}{x}$ d) $1 - \frac{1}{x}$

الحل: $\boxed{a}$ $1 + \frac{1}{x^2}$

④ اذا كان: $y = \sin 4t$ فإن $\frac{dy}{dt}$ هي

a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$

c) $4\cos 4t$ d) $-4\cos 4t$

الحل: $\boxed{c}$

⑤ اذا كان $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ فإن $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$

c) $-\frac{2}{(x-1)^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

الحل:
$f'(x) = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ $\boxed{c}$

⑥ اذا كان $f(x) = x\cos x$ فإن $f'(x)$ هي

a) $\cos x - x\sin x$ b) $\cos x + x\sin x$

c) $\sin x - x\cos x$ d) $\sin x$

الحل:
$f'(x) = x(-\sin x) + (\cos x)(1)$

$= -x\sin x + \cos x$ $\boxed{a}$

⑦ اذا كان $f(x) = \sin^4 3x$ فإن $f'(x)$ هي

a) $4\sin^3 3x \cos 3x$ b) $12\sin^3 3x \cos 3x$

c) $12\sin 3x \cos 3x$ d) $2\cos^3 3x$.

الحل:
$f(x) = (\sin 3x)^4$

$f'(x) = 4(\sin 3x)^3(\cos 3x)(3)$

$= 12\sin^3 3x \cos 3x$. $\boxed{b}$

اذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=2$ وكان : $g(2)=1$, $g'(2)=2$

$f'(2)=-4$, $f(2)=3$

فأجد كلا مما يلي:

(8) $(fg)'(2) = f(2)\,g'(2) + g(2)\,f'(2)$

$= (3)(2) + (1)(-4)$

$= 6 - 4 = 2$

---

(9) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \dfrac{g(2)\,f'(2) - f(2)\,g'(2)}{(g(2))^2}$

$= \dfrac{(1)(-4) - (3)(2)}{1^2} = -4-6$

$= -10$

---

(10) $(3f - 4fg)'(2) =$

$3f'(2) - 4(f(2)\,g'(2) + g(2)\,f'(2)) =$

$(3)(-4) - 4((3)(2) + (1)(-4)) =$

$-12 - 4(6-4) =$

$-12 - 4(2) = -12 - 8 = -20.$

يمثل الاقتران: $h(t) = 0.12e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالسنتمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هطل المطر :

(11) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t.

$h(t) = 0.12\,e^{0.1t}.$

$h'(t) = 0.12 \times 0.1\,e^{0.1t}$

$= 0.012\,e^{0.1t}.$

(12) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بدء هطل المطر.

$h'(t) = 0.012\,e^{0.1t}.$

$h'(3) = 0.012\,e^{(0.1)(3)}$

$\approx 0.016.$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

(13) $f(x) = \dfrac{x}{3x+1}$, $x = 1$

$f'(x) = \dfrac{(3x+1)(1) - (x)(3)}{(3x+1)^2}$

$f'(1) = \dfrac{((3)(1)+1)(1) - (1)(3)}{((3)(1)+1)^2}$

$= \dfrac{4-3}{4^2} = \dfrac{1}{16}.$

---

(14) $f(x) = (x^2+2)(x+\sqrt{x})$, $x = 4$

$f'(x) = (x^2+2)(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}) + (x+\sqrt{x})(2x)$

$f'(4) = (16+2)(1 + \frac{1}{2\sqrt{4}}) + (4+\sqrt{4})((2)(4))$

$= 18(1 + \frac{1}{4}) + (4+2)(8)$

$= 18(\frac{5}{4}) + (6)(8)$

$= 9(\frac{5}{2}) + 48 = \frac{45}{2} + 48$

نوحد المقامات

$= \frac{25}{2} + \frac{(48)(2)}{2}$

$= \frac{25}{2} + \frac{96}{2}$

$= \frac{121}{2} = 60.5$

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(15) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$, $x = 1$

$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$

$f'(1) = 3e^{3} - 3e^{-3}$

$= 3e^{3} - \frac{3}{e^{3}}$.

(16) $f(x) = e^{0.5} - x^2$. $x = 20$.

$f'(x) = 0 - 2x$

$f'(x) = -2x$

$f'(20) = (-2)(20)$

$= -40$.

(17) $f(x) = x^2(3x-1)^3$, $x = 1$

$f'(x) = x^3(3(3x-1)^2(3)) + (3x-1)^3(2x)$

$f'(1) = 1^3\ (3((3)(1)-1)^2(3) + ((3)(1)-1)^3(2(1))$

$= (3)(4)(3) + (8)(2)$

$= 36 + 16 = 52$

(18) $f(x) = (x+3)^2\, e^{3x}$, $x = 2$

$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + e^{3x}(2(x+3)(1))$

$f'(2) = (5)^2(3e^{6}) + e^{6}(2(5))$

$= 75e^{6} + 10e^{6}$.

$= 85e^{6}$.

(19) $f(x) = 3\ln x + \frac{1}{x}$. , $x = e$

$f'(x) = 3(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}$.

$f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$.

(20) $f(x) = \sqrt{2x^4+7}$

$f'(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+7}}$.

(21) $f(x) = \frac{1}{(x^2+16)^5}$.

$f'(x) = \frac{-5(x^2+16)^4(2x)}{((x^2+16)^5)^2}$.

$= \frac{(-10x)(x^2+16)^4}{(x^2+16)^{10}}$

$= \frac{-10x}{(x^2+16)^6}$.

(22) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-5x+2}$

$f(x) = (x^2-5x+2)^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{1}{4}-1}(2x-5)$

$= \frac{1}{4}(x^2-5x+2)^{-\frac{3}{4}}(2x-5)$

$= \frac{(2x-5)}{4(x^2-5x+2)^{\frac{3}{4}}}$

$= \frac{2x-5}{4\sqrt[4]{(x^2-5x+2)^3}}$.

(23) $f(x) = (8x^2-6)^{-40}$

$f'(x) = -40(8x^2-6)^{-41}(16x)$

$= -640x(8x^2-6)^{-41}$

$= \frac{-640x}{(8x^2-6)^{41}}$.

(24) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$.

$f'(x) = \frac{(-1)(2)}{(3+2x)^2}$

$= \frac{-2}{(3+2x)^2}$.

(25) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$.

(26) $f(x) = (2x-8)^2(3x^2-4)$

$f'(x) = (2x-8)^2(6x) + (3x^2-4)(2(2x-8)(2))$

$= 6x(2x-8)^2 + (3x^2-4)(2x-8)(4)$

إخراج $(2x-8)$ عامل مشترك.

$= (2x-8)(6x(2x-8) + 4(3x^2-4))$

$= (2x-8)(12x^2-48x+12x^2-16)$

$= (2x-8)(24x^2-48x-16)$

(27) $f(x) = x^5(3x^2+4x-7)$

$f(x) = 3x^7+4x^6-7x^5$.

$f'(x) = 21x^6+24x^5-35x^4$.

(28) $f(x) = x^3(2x+6)^4$.

$f'(x) = x^3(4(2x+6)^3(2)) + (2x+6)^4(3x^2)$.

$= 8x^3(2x+6)^3 + (3x^2)(2x+6)^4$.

إخراج $x^2(2x+6)^3$ عامل مشترك.

$= x^2(2x+6)^3(8x+3(2x+6))$

$= x^2(2x+6)^3(8x+6x+18)$

$= x^2(2x+6)^3(14x+18)$

إخراج 2 عامل مشترك.

$= x^2(2x+6)^3(2(7x+9))$

$= 2x^2(2x+6)^3(7x+9)$.

(29) $f(x) = (e^{-x}+e^{x})^3$

$f'(x) = 3(e^{-x}+e^{x})^2(-e^{-x}+e^{x})$.

(30) $f(x) = 2x^3e^{-x}$.

$f'(x) = 2x^3(-e^{-x}) + e^{-x}(6x^2)$

$= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$.

إخراج e^{-x} عامل مشترك.

$= e^{-x}(-2x^3+6x^2)$.

(31) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

$f'(x) = \frac{(x+1)e^x - e^x(1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2}$

$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

(32) $f(x) = 5\ln(5x-4)$

$f'(x) = 5\left(\frac{5}{5x-4}\right)$

$= \frac{25}{5x-4}$

(33) $f(x) = \ln e^x$

$f'(x) = \frac{e^x}{e^x}$

$f'(x) = 1$

(34) $f(x) = \ln(3x^2+2x-1)$

$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$

(35) $f(x) = x^5 \sin 3x$

$f'(x) = (x^5)(3\cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$

$= 3x^5\cos 3x + 5x^4 \sin 3x$

(36) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$

$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$

$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + \cos x$

$= -2\cos x \sin x + \cos x$

إخراج $\cos x$ عامل مشترك

$= \cos x(-2\sin x + 1)$

$= \cos x(1 - 2\sin x)$

(37) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

$f'(x) = \frac{x\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) - \sqrt{\cos x}(1)}{x^2}$

$= \frac{\frac{-x\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

توزيع البسط على المقام.

$= \frac{-x\sin x}{2x^2\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$= \frac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(38) $f(x) = \sin(5x)\ln(\cos x)$

$$f'(x) = \sin(5x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + \ln(\cos x)(\cos(5x))5$$

$$= \frac{-\sin(5x)\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x)(5\cos(5x))$$

---

(39) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+9}\right)$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{(-1)(2x)}{(x^2+9)^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2+9}\right)}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+9)^2} \div \frac{1}{x^2+9}$$

$$= \frac{-2x}{(x^2+9)^2} \times \frac{x^2+9}{1}$$

$$= \frac{-2x}{x^2+9}.$$

---

(40) $f(x) = e^{2x}\sin 2x$.

$$f'(x) = (e^{2x})(2\cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x})$$

إخراج $2e^{2x}$ عامل مشترك.

$$= 2e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

يمثل الاقتران: $N(t) = 1000\left(1 - \frac{3}{t^2+50}\right)$

عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً في مجمع بكتيري:

(41) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى الزمن t.

$$N(t) = 1000\left(1 - \frac{3}{t^2+50}\right)$$

$$N(t) = 1000 - \frac{3000}{t^2+50}.$$

$$N'(t) = 0 + \frac{3000(2t)}{(t^2+50)^2}.$$

$$N'(t) = \frac{6000t}{(t^2+50)^2}$$

---

(42) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t=1$.

$$N'(1) = \frac{(6000)(1)}{(1^2+50)^2}$$

$$= \frac{6000}{(51)^2} \approx 2.3$$

يمثل عدد الغزلان في غابة بالاقتران:

$$p(t) = \frac{2000}{4t+80}.$$

حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43) أجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

$$p'(t) = \frac{-2000(4)}{(4t+80)^2}$$

$$= \frac{-8000}{(4t+80)^2}.$$

---

44) أجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة عندما $t=10$.

$$p'(10) = \frac{-8000}{(40+80)^2}$$

$$= \frac{-8000}{(120)^2}$$

$$= -0.56$$

يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0.56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن.

يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران:

$$p(t) = \frac{700}{t^2+1}.$$

حيث t الزمن بالسنوات و P عدد السكان بالآلاف.

45) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

$$p'(t) = \frac{-700(2t)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{-1400t}{(t^2+1)^2}$$

---

46) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t=3$.

$$p'(3) = \frac{(-1400)(3)}{(9+1)^2}$$

$$= \frac{(-1400)(3)}{(10)^2}$$

$$= \frac{-4200}{100}$$

$$= -42.$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخص لكل سنة بعد 3 سنوات.