الوحدة الاولى

التفاضل

حل تمارين الكتاب لمادة الرياضيات للصف الثاني الثانوي العلمي

(المنهاج الجديد)

الفصل الدراسي الاول

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

0798959071

أتحقق من فهمي صفحة (12)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 5e^{x} + 3$

$f'(x) = 5e^{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^{x}$

تذكير: مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة ما بداخل الجذر / 2 × الجذر نفسه

c) $y = 8e^{x} + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$y = 8e^{x} + \frac{4}{x^{\frac{1}{5}}}$

$y = 8e^{x} + 4x^{-\frac{1}{5}}$

$y' = 8e^{x} + (4)(-\frac{1}{5})\, x^{-\frac{1}{5}-1}$

$= 8e^{x} - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}}$

$= 8e^{x} - \frac{4}{5x^{\frac{6}{5}}}$

$= 8e^{x} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^{6}}}$

أتحقق من فهمي صفحة (14)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$f(x) = \sqrt{x} + \ln 4 + \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 + \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(2x^{3})$

$f(x) = \ln 2 + \ln x^{3}$

$= \ln 2 + 3\ln x$

$f'(x) = 0 + 3(\frac{1}{x}) = \frac{3}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة (16)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$y' = \frac{\cos x}{2} - 3\sin x$

b) $f(x) = x^{2} + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$f'(x) = 2x - \sin x + 0$

$= 2x - \sin x$

حيث $\sin\frac{\pi}{2}$ ثابت

أتحقق من فهمي صفحة (17)

اذا كان الاقتران $f(x) = \ln\sqrt{x}$ فاستعمل المشتقة لايجاد كل مما يلي:

a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الحل:

$$f(x) = \ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$m = f'(e) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \left(\frac{1}{2e}\right)(e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2}.$$

$$+\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2e}x. \leftarrow$$ معادلة المماس.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

ميل المماس $= m = \frac{1}{2e}$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = -2e.$

معادلة العمودي:

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2ex + 2e^2$$

$$y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}.$$

أتحقق من فهمي صفحة (20)

يمثل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8$ ، $t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني.

a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t=4$

b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

c) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=2$ ؟

d) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل:

a) $s(t) = t^2 - 7t + 8$

$$v(t) = s'(t) = 2t - 7.$$

$$v(4) = (2)(4) - 7 = 1$$

$$a(t) = v'(t) = 2.$$

$$a(4) = 2.$$

b) يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$$2t - 7 = 0 \rightarrow 2t = 7$$

$$\rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5.$$

c) $v(t) = 2t - 7$

$$v(2) = 2(2) - 7 = -3 < 0$$

الحركة بعكس الاتجاه الأصلي (لليسار)

d) يكون الجسم في موقعه الابتدائي لأول مرة عندما $t=0$

نجد $s(0)$ ←

$$s(0) = 8$$

$$s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8$$

$$\rightarrow t^2 - 7t = 0 \rightarrow t(t-7) = 0$$

$$t = 0 \text{ or } t = 7$$

اذن يعود الجسم الى موقعه الابتدائي عندما $t = 7s$

أتحقق من فهمي صفحة (12) :

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويمثل الاقتران $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالأمتار

a) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة .

b) أصف حركة الجسم .

الحل :

a)
$$s(t) = 7\sin t$$
$$v(t) = 7\cos t$$
$$a(t) = -7\sin t$$

---

b) بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\mp 7m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $S = 7m$ و $S = -7m$ ويمر بنقطة الاتزان $S = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\mp 7m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \mp 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفس لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان) بينما تكون سرعة الجسم صفراً (يسكن لحظياً) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $v(t) = 0$ $|s(t)| = 7$ (اللحظات $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب)

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان وهي اللحظة التي تكون فيها محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفر

أتحقق من فهمي صفحة 10 :

الاقتران متصل عند النقاط :

x_0 , x_1 , x_3 , x_6 .

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند النقاط x_2 , x_4 , x_5 لأنها رؤوس حادة .

x_7 , x_8 الاقتران غير متصل .

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلاً للاشتقاق، مبررًا إجابتي:

(1) الاقتران f غير قابل للاشتقاق عند x_3 ، x_4 ، x_6 لأن لمنحناه رأس حاد

وعند x_0 لأنه غير متصل

وعند x_{12} لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة

---

(2) الاقتران g غير قابل للاشتقاق عند x_1 و x_2 و x_4 لأنه غير متصل

وعند x_3 لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

(3) $f(x) = 2\sin x - e^x$

$f'(x) = 2\cos x - e^x.$

---

(4) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi \sin x.$

$= \frac{1}{4x} + \pi \sin x.$

(5) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$f(x) = \ln 1 - \ln x^3 + x^4.$

$f(x) = 0 - 3\ln x + x^4.$

$f'(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^3$

$= -\frac{3}{x} + 4x^3.$

---

(6) $f(x) = e^{x+1} + 1$

$f(x) = e^x \cdot e + 1$

$f(x) = e^1 e^x + 1$

$f'(x) = e^1 e^x + 0$

$f'(x) = e^{x+1}.$

تذكير: e^1 ثابت

---

(7) $f(x) = e^x + x^e.$

$f'(x) = e^x + e x^{e-1}.$

---

(8) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$f(x) = \ln 10 - \ln x^n.$

$f(x) = \ln 10 - n \ln x.$

$f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = -\frac{n}{x}.$

إذا كان $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^{x}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(9) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$

الحل:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^{\pi}.$$

$$f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$$ (ميل المماس)

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi}$$

$$y = (-1 + \frac{1}{2}e^{\pi})x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi}.$$

(10) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

الحل:

ميل المماس = $-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$

⇐ ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}}$

ميل العمودي = $\frac{-2}{-2 + e^{\pi}} = \frac{2}{2 - e^{\pi}}.$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2 - e^{\pi}}(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = (\frac{2}{2 - e^{\pi}})x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}}$$

$$y = (\frac{2}{2 - e^{\pi}})x - \frac{2\pi}{2 - e^{\pi}} + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

---

(11) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران $f(x) = e^{x} - 2x$

الحل: المماس أفقي يعني $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = e^{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x} = 2$$

$$\ln e^{x} = \ln 2$$

$$x = \ln 2.$$

---

(12) اختيار من متعدد:

أيّ الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$

c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

الحل:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$m = f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi$$

$= -1 - 0 = -1$ ← ميل المماس

$$f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi$$

$$= 0 + -1 = -1$$

$$(\pi, -1)$$

ميل المماس = -1 ⇐ ميل العمودي = $\frac{-1}{-1} = 1$

معادلة العمودي:

$$y + 1 = 1(x - \pi)$$

$$y = x - \pi - 1.$$

(13) اذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$ فأبين أن $f'(x) = \frac{1}{x}$.

الحل:

$$f(x) = \ln(kx)$$
$$f(x) = \ln k + \ln x$$
$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

اذا كان: $f(x) = \ln x$ فأجب عن السؤالين التاليين:

(14) اثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمر بنقطة الأصل.

الحل:

$$f(x) = \ln x$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$

عندما $x = 0$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(0 - e)$$
$$y - 1 = 0 - 1 \rightarrow y = 0$$

اذن المماس يمر بالنقطة $(0, 0)$.

---

(15) اثبت ان المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

الحل: ميل المماس $= \frac{1}{e}$. (من السؤال السابق)

ميل العمودي $= -e$. $\left(\frac{-1}{\text{ميل المماس}}\right)$.

معادلة العمودي:

$$y - 1 = -e(x - e)$$

المقطع x يعني ان $y = 0$.

$$\Leftarrow \quad 0 - 1 = -e(x - e)$$
$$-1 = -e(x - e)$$
$$1 = e(x - e) \rightarrow \frac{1}{e} = x - e$$
$$x = e + \frac{1}{e}$$

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, \ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني:

(16) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

الحل:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$$
$$v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5$$
$$= 75 - 40 + 5 = 40$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 8$$
$$a(5) = 6(5) - 8 = 30 - 8 = 22$$

---

(17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

الحل: سكون لحظي يعني $v(t) = 0$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$
$$(3t - 5)(t - 1) = 0$$
$$3t - 5 = 0 \rightarrow t = \frac{5}{3}$$
$$t = 1$$

(18) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=4$؟

الحل:

$$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$$
$$= 48 - 32 + 5$$
$$= 21 > 0$$

الاتجاه هو نفس الاتجاه الأصلي لليمين.

---

(19) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي؟

الحل: $s(t) = 0$

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$
$$t(t^2 - 4t + 5) = 0$$

$t = 0$

أو

$t^2 - 4t + 5 = 0$

نجد المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4^2 - (4)(1)(5)$$
$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

المميز سالب ← لا يوجد أصفار

$\therefore$ $t=0$ فقط أي لا يعود الجسم الى موقعه الابتدائي أبداً.

يمثل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t$, $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني:

(20) أحدد الموقع الابتدائي للجسم.

الحل: الموقع الابتدائي $s(0)$.

$$s(0) = e^0 - 4(0)$$
$$= 1 - 0 = 1\,m$$

---

(21) أجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة تساوي صفراً.

الحل:

$$v(t) = 0$$
$$v(t) = s'(t) = e^t - 4 = 0$$
$$\Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4.$$

نجد تسارع الجسم عندما $t = \ln 4$

$$a(t) = v'(t) = e^t.$$
$$a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4\,m/s^2$$

زنبرك: يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالأمتار

(22) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة

الحل:

$$s(t) = 4\cos t$$
$$v(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = -4\cos t$$

---

(23) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

الحل:

$$v(\tfrac{\pi}{4}) = -4\sin\tfrac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\ m/s$$

$$a(\tfrac{\pi}{4}) = -4\cos\tfrac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= -2\sqrt{2}\ m/s$$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = (1-a)(x - 0)$

$y - 1 = (1-a)(x)$

$y = (1-a)(x) + 1.$

(26) أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران

$y = 2e^x + 3x + 5x^3.$

الحل: ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو

$y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

لكل x فإن $2e^x > 0$

ولكل x فإن $15x^2 > 0$

بالجمع نجد أنه لكل x فإن

$2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين:

$2e^x + 15x^2 + 3 > 3$

أي أن

$y' > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

(24) أصف حركة الجسم

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $s = -4m$ و $s = 4m$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب.

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين $-4m/s$ و $4m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً.

(25) $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي،

جد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y.

الحل: يقطع المنحنى محور y عندما $x = 0$

$y = e^0 - a(0)$
$= 1 - 0 = 1$ ∴ النقطة $(0,1)$.

$y' = e^x - a$

$y'(0) = e^0 - a$

$m = 1 - a$ (ميل المماس)

اذا كان الاقتران: $y = ke^x$ حيث $k>0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(27) أجد نقاط تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

الحل: يقطع المحور y عندما $x=0$ وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن

$y = ke^0 = k$

اي ان احداثيي P هي $(0,k)$

$y = ke^x \rightarrow y' = ke^x$

ميل المماس: $y'(0) = ke^0 = k$

معادلة المماس:

$y-k = k(x-0) \rightarrow y-k = kx$

$\Rightarrow y = kx+k.$

ولايجاد نقطة التقاطع مع المحور x نفرض $y=0$

$0 = kx+k \rightarrow \frac{kx}{k} = \frac{-k}{k} \rightarrow x=-1$

∴ نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي $(-1,0)$.

(28) اذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100,0)$ فأجد قيمة k.

الحل: ميل المماس $= k$ ← ميل العمودي $= \frac{-1}{k}$.

معادلة العمودي:

$y-k = \frac{-1}{k}(x-0) \rightarrow y = \frac{-1}{k}x + k$

وبتعويض نقطة التقاطع:

$0 = \frac{-1}{k}(100) + k \rightarrow k^2 = 100$

$k = \mp 10.$

ولأن $k>0$ فإن $k=10$.

اذا كان الاقتران $y = \log x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(29) اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln 10}$.

الحل: (قاعدة) $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$y = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}\ln x.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln 10}.$

---

(30) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y = \log ax^2$ حيث a عدد حقيقي موجب.

الحل:

$y = \log ax^2 = \log a + \log x^2$

$= \log a + 2\log x$

$y' = 0 + \frac{2}{x\ln 10} = \frac{2}{x\ln 10}.$

يمثل الاقتران $s(t) = 4 - \sin t$، موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني

(31) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

الحل:

$s(t) = 4 - \sin t$

$v(t) = s'(t) = -\cos t$

$a(t) = v'(t) = \sin t.$

(32) أجد موقع الجسم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

الحل: حالة سكون يعني $v(t) = 0$

$-\cos t = 0 \Rightarrow$

$t = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2} , \frac{5\pi}{2} , \dots$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$.

المطلوب موقع الجسم عندما $t = \frac{\pi}{2}$

$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin \frac{\pi}{2}$

$= 4 - 1 = 3\ m$

---

(33) أجد موقع الجسم عندما يكون تسارعه صفراً.

$v(t) = -\cos t$.

$a(t) = v'(t) = \sin t$

$\sin t = 0 \Rightarrow$

وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع:

$s(t) = 4 - \sin t$

$= 4 - 0 = 4$

أي أن الجسم يكون عند $s = 4m$ عندما يكون تسارعه صفراً.

مسألة اليوم صفحة 8

يرتز جسم مثبت في زنبرك أفقياً على سطح أملس. ويمثل الاقتران: $x(t) = 8 \sin \pi t$ موقع الجسم حيث t الزمن بالثواني و x الموقع بالسنتيمترات.

1) أجد موقع الجسم وسرعته وتسارعه عند $t = \frac{2}{3}$

الحل:

$x\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \sin \pi\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\ cm$

موقع الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$

$v(t) = x'(t) = 8\pi \cos \pi t$

$v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\pi \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= -8\pi\left(\frac{1}{2}\right) = -4\pi$

السرعة عندما $t = \frac{2}{3}$

$a(t) = v'(t) = -8\pi^2 \sin \pi t$

$a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\pi^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -8\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$a\left(\frac{2}{3}\right) = -4\pi^2\sqrt{3}$. تسارع الجسم عند $t = \frac{2}{3}$.

---

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$؟

بما أن إشارة السرعة موجبة فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$.

① أجد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل الاشتقاق.

الحل: عند x_5 و x_7 غير متصل

وعند x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_6 و x_9 و x_{10} رؤوس حادة.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

② $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

الحل:

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f'(x) = 9e^x + \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}.$$

③ $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$.

الحل:

$$f(x) = 2e^x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3}$$

$$= 2e^x - \frac{2}{x^3}.$$

④ $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

الحل:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

⑤ أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$

الحل:

$$f(2) = 2e^2 + 2$$

النقطة $(2 , 2e^2+2)$

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

$m = f'(2) = 2e^2 + 1.$ (ميل المماس)

معادلة المماس:

$$(y - (2e^2+2)) = (2e^2+1)(x-2)$$

$$y - 2e^2 - 2 = (2e^2+1)x - 4e^2 - 2$$

$$y = (2e^2+1)x - 4e^2 \cancel{-2} + 2e^2 \cancel{+2}$$

$$y = (2e^2+1)x - 2e^2.$$

⑥ اثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = 3x + \sin x + 2$$

الحل: مماس أفقي يعني الميل = صفر

$$f'(x) = 3 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -3$$

لا يوجد حل لأن $-1 \le \cos x \le 1$

$\therefore$ لا يوجد مماس أفقي.

تمثل الاقتران : $s(t)=3t^2-t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s بالأمتار و t الزمن بالثواني.

(7) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

الحل:

$$v(t)=s'(t)=6t-3t^2$$

$$a(t)=v'(t)=6-6t.$$

---

(8) أجد الموقع (المواقع) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

الحل: حالة سكون ← $v(t)=0$

$$6t-3t^2=0 \rightarrow 3t(2-t)=0$$

$t=0$ أو $t=2$

$$s(0)=0-0=0m$$

$$s(2)=3(2)^2-2^3$$

$$=12-8=4m$$

اذا كان $f(x)=\ln x^2$ ، حيث $x>0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً.

(9) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x=e^2$

الحل:

$$f(x)=2\ln x$$

$$f(e^2)=2\ln e^2=(2)(2)\ln e=4$$

$$(e^2,4)$$

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow m=f'(e^2)=\frac{2}{e^2}.$$

معادلة المماس:

$$y-4=\frac{2}{e^2}(x-e^2)$$

$$y-4=\frac{2}{e^2}x-2 \rightarrow y=\frac{2}{e^2}x-2+4$$

$$y=\frac{2}{e^2}x+2.$$

(10) أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x-2y+5=0$.

الحل: المماس موازٍ للمستقيم يعني لهما نفس الميل

لاشتقاق المستقيم $6-2y'=0 \rightarrow$

ميل المستقيم $2y'=6 \rightarrow \boxed{y'=3}$

$$f(x)=\ln x^2 \rightarrow f(x)=2\ln x.$$

ميل المماس $f'(x)=2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$

ميل المماس = ميل المستقيم

$$3=\frac{2}{x} \rightarrow x=\frac{2}{3}$$

اذا كان الاقتران: $f(x)=2\sin x-4\cos x$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

(11) اجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$

الحل:

$$f'(x)=2\cos x+4\sin x$$

$$f'(0)=2\cos 0+4\sin 0=2+0=2$$

---

(12) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$.

الحل:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=2(1)-4(0)=2$$

$$\left(\frac{\pi}{2},2\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{2}.$$

ميل المماس $=2(0)+4(1)=4.$

معادلة المماس:

$$y-2=4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y-2=4x-2\pi$$

$$y=4x-2\pi+2.$$

مسألة اليوم صفحة 26

كلما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلصت مساحة البؤبؤ. يستعمل الاقتران $A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالمليمترات المربعة، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (Lm). وتعرف حساسية العين للضوء بأنها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع. أجد اقتراناً يمثل حساسية العين للضوء.

الحل:

$$A(b)=\frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$$

$$A'(b)=\frac{(1+4b^{0.4})(9.6b^{-0.6})-(40+24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$=\frac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$=\frac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}.$$

أتحقق من فهمي ص 28:

أجد مشتقة كل اقتران مما يلي:

a) $f(x)=(x^3-2x^2+3)(7x^2-4x)$

$$f'(x)=(x^3-2x^2+3)(14x-4)+(7x^2-4x)(3x^2-4x)$$

$$=14x^4-4x^3-28x^3+8x^2+42x-12+21x^4-28x^3-12x^3+16x^2.$$

$$=35x^4-72x^3+24x^2+42x-12.$$

b) $f(x)=\ln x\cos x.$

$$f'(x)=\ln x(-\sin x)+\cos x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\ln x\sin x+\frac{\cos x}{x}.$$

أتحقق من فهمي ص 30:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x)=\frac{x+1}{2x+1}.$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{2x+1-2x-2}{(2x+1)^2}=\frac{-1}{(2x+1)^2}.$$

b) $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}.$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x)-\sin x(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

أتحقق من فهمي ص 32

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $p(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكان بالآلاف:

a) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

الحل:

$$p'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - 500t^2(2)}{(2t+9)^2},$$

$$= \frac{2000t^2 + 9000t - 1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$= \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}.$$

---

b) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t = 12$، مفسراً معنى الناتج.

الحل: المطلوب $p'(12)$.

$$p'(12) = \frac{1000(12)^2 + 9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$= \frac{144000 + 108000}{(33)^2}$$

$$= \frac{252000}{1089}$$

$$\approx 231.4.$$

في السنة (12) يتزايد عدد سكان المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنوياً تقريباً.

أتحقق من فهمي ص 33:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي

a) $f(x) = \dfrac{1}{5x - x^2}.$

$$f'(x) = \frac{-(5-2x)}{(5x - x^2)^2}.$$

$$= \frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}.$$

---

b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x + \sqrt{x}}.$

$$f'(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(e^x + \sqrt{x})^2} = -\frac{2e^x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}(e^x + \sqrt{x})^2}$$

أتحقق من فهمي ص 35

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = x\cot x.$

$$f'(x) = x(-\csc^2 x) + \cot x(1)$$

$$= -x\csc^2 x + \cot x.$$

---

b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - \tan x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1+\sin x)^2}$$

بالتعويض مكان $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

الدرس الثاني : مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أتحقق من فهمي ص 36 :

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران :

$f(x) = x \sin x$

الحل:

$f'(x) = (x)(\cos x) + (\sin x)(1)$

$f'(x) = x\cos x + \sin x$

$f''(x) = (x)(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$

$f''(x) = -x\sin x + 2\cos x.$

$f'''(x) = (-x)(\cos x) + (\sin x)(-1) - 2\sin x.$

$= -x\cos x - \sin x - 2\sin x.$

$f'''(x) = -x\cos x - 3\sin x.$

أتدرب وأحل المسائل :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

① $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$.

الحل :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - x^3(2)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2}.$$

$$= \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}.$$

② $f(x) = x^3 \sec x$.

$$f'(x) = x^3 \sec x \tan x + \sec x (3x^2)$$

③ $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + x\sin x + \sin x}{(\cos x)^2}.$$

④ $f(x) = e^x(\tan x - x)$

$$f'(x) = e^x(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)\, e^x$$

$$= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x.$$

تذكير : $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

⑤ $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \sin x - e^x \cos x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{-2e^x \sin x}{e^{2x}} = \frac{-2\sin x}{e^x}.$$

⑥ $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$.

$$f'(x) = x^3 \cos x + \sin x(3x^2) + x^2(-\sin x) + \cos x(2x)$$

$$f'(x) = x^3\cos x + 3x^2 \sin x - x^2 \sin x + 2x\cos x$$

$$= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x.$$

⑦ $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{2}} + 3).$$

$$= x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}.$$

$$f'(x) = \frac{5}{6} x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}}.$$

$$= \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

8) $f(x) = \dfrac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

$$f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$$

$$= \frac{\sec x \tan x - \cancel{\sec^2 x \tan x} + \sec x \tan x + \cancel{\sec^2 x \tan x}}{(1-\sec x)^2}$$

$$= \frac{2 \sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$$

9) $f(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{x-3}$

$$f'(x) = \frac{(x-3)\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(2-\frac{1}{x}\right)(1)}{(x-3)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - 2 + \frac{1}{x}}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - 2}{(x-3)^2} = \frac{\frac{2x-3-2x^2}{x^2}}{(x-3)^2}$$ توحيد المقامات في البسط

$$= \frac{2x - 3 - 2x^2}{x^2(x-3)^2}$$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2+2)(x^2+x+1) = (x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x)(x^2+x+1)$

$f(x) = (x^5 + x^3 - 2x)(x^2+x+1)$

$f'(x) = (x^5+x^3-2x)(2x+1) + (x^2+x+1)(5x^4+3x^2-2)$

(11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$$f(x) = \frac{1}{\csc x + \cot x}.$$

$$f'(x) = \frac{-(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$= \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$= \frac{\csc x}{\csc x + \cot x}.$$

$f(0) = 5$, $f'(0) = -3$, $g(0) = -1$,
$g'(0) = 2$.

* إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$.

(12) $(fg)'(0) = fg' + gf'$

$= (5)(2) + (-1)(-3)$

$= 10 + 3 = 13.$

---

(13) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2}$$

$$= \frac{3 - 10}{1} = -7.$$

(14) $(7f - 2fg)'(0) =$

$7f' - 2(fg)' =$

$7(-3) - 2(13)$ من الفرع (12)

$-21 - 26 = -47.$

أجد المشتقة الثانية لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

(15) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $x = -2$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 8x - 2x^3 + 8x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{16x}{x^4 + 8x^2 + 16}.$$

$$f''(x) = \frac{(x^4+8x^2+16)(16) - (16x)(4x^3+16x)}{(x^4+8x^2+16)^2}.$$

$$f''(-2) = \frac{(16+32+16)(16) - (-32)(-32-32)}{(16+32+16)^2}$$

$$= \frac{1024 + (32)(-64)}{4096}$$

$$= \frac{1024 - 2048}{4096}$$

$$= -\frac{1024}{4096}.$$

$$= \frac{-1}{4}.$$

(16) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$, $x = 8$.

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{(1+x^{\frac{1}{3}})(1) - (1+x)(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})}{(1+x^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$= \frac{1 + x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(1+x^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^{\frac{1}{3}})^2(\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}) - (1+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})\,2(1+x^{\frac{1}{3}})(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})}{(1+x^{\frac{1}{3}})^4}$$

$$f''(8) = \frac{(1+8^{\frac{1}{3}})^2(\frac{2}{9\sqrt[3]{8}^2} + \frac{2}{9\sqrt[3]{8}^5}) - (1+\frac{2}{3}(8)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{8}^2})(2)(1+8^{\frac{1}{3}})(\frac{1}{3\sqrt[3]{8}^2})}{(1+8^{\frac{1}{3}})^4}$$

$$= \frac{(1+2)^2(\frac{2}{36} + \frac{2}{288}) - (1+\frac{4}{3} - \frac{1}{12})(2)(3)(\frac{1}{12})}{3^4}$$

$$= \frac{(3^2)(\frac{16+2}{288}) - (\frac{12}{12} + \frac{16}{12} - \frac{1}{12})(\frac{1}{2})}{81}$$

$$= \frac{(9)(\frac{18}{288}) - (\frac{27}{12})(\frac{1}{2})}{81}$$

$$= \frac{(9)(\frac{1}{16}) - \frac{27}{24}}{81} = \frac{\frac{9}{16} - \frac{27}{24}}{81}$$

$$= \frac{\frac{27-54}{48}}{81} = \frac{-27}{(48)(81)} = \frac{-1}{(48)(3)} = \frac{-1}{144}$$

يمكن حل فرع (16) بطريقة أخرى وهي

تحليل البسط مجموع مكعبين.

(16) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

$$f(x) = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2)}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2$$

$$f(x) = 1 - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{9\sqrt[3]{x}^5} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x}^4}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{8}^5} - \frac{2}{9\sqrt[3]{8}^4}$$

$$= \frac{2}{9(32)} - \frac{2}{9(16)}$$

$$= \frac{2}{288} - \frac{4}{288}$$

$$= \frac{-2}{288}$$

$$= \frac{-1}{144}$$

(17) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $x = 4$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$f''(x) = \frac{(2\sqrt{x})(2)(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (1+\sqrt{x})^2\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)}{4x(1+\sqrt{x})^4}$$

$$f''(4) = \frac{(2)(2)(2)(1+2)\left(\frac{1}{(2)(2)}\right) + (1+2)^2\left(\frac{1}{2}\right)}{(4)(4)(1+2)^4}$$

$$= \frac{(8)(3)\left(\frac{1}{4}\right) + (9)\left(\frac{1}{2}\right)}{(16)(81)}$$

$$= \frac{6 + \frac{9}{2}}{1296} = \frac{\frac{12+9}{2}}{1296}$$

$$= \frac{21}{(2)(1296)} = \frac{7}{(2)(432)} = \frac{7}{864}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(18) $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$, $(0, \frac{1}{2})$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$m = f'(0) = \frac{(1+e^0) - (1+0)(e^0)}{(1+e^0)^2} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

(19) $f(x) = e^x \cos x + \sin x$. $(0, 1)$

$$f'(x) = e^x(-\sin x) + e^x \cos x + \cos x$$

$$m = f'(0) = e^0(\sin 0) + e^0 \cos 0 + \cos 0.$$

$$m = 0 + 1 + 1 = 2$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1.$$

أثبت صحة كل مما يأتي:

(20) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc x.$$

(21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right).$$

$$= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{(\cos x)(\cos x)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \tan x \cdot \sec x.$$

(22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x.$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{(\sin x)(\sin x)}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= -\cot x \cdot \csc x.$$

أُلاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

(23) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}.$

$$f'''(x) = 0 - \frac{-2(1)}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

---

(24) $f'''(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}.$

$$f^{(4)}(x) = (2)(\tfrac{1}{2})\, x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

---

(25) $f^{(4)}(x) = 2x+1$

$$f^{(5)}(x) = 2$$

$$f^{(6)}(x) = \text{Zero}.$$

---

(26) وجد فريق بحث زراعي أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة فتية من نبات دوّار الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة للزمن.

الحل:

$$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - 3t^2(2t)}{(4+t^2)^2}$$

$$= \frac{24t + 6t^3 - 6t^3}{(4+t^2)^2}.$$

$$= \frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

اذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$ فأجيب عن السؤالين:

(27) أجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cancel{e^x(-\sin x)} + e^x \cos x + e^x \cos x + \cancel{e^x \sin x}.$$

$$= e^x \cos x + e^x \cos x = 2e^x \cos x$$

---

(28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

الحل:

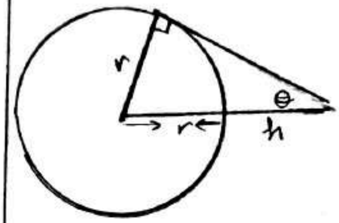
$$2\frac{dy}{dx} - 2y =$$

$$2(e^x \cos x + e^x \sin x) - 2e^x \sin x =$$

$$2e^x \cos x + \cancel{2e^x \sin x} - \cancel{2e^x \sin x} =$$

$$2e^x \cos x = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وتحمل الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس زاوية θ (بالراديان) المبينة في الشكل المرسوم. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر و r يمثل نصف قطر الأرض بالكيلومتر فأجب عن السؤالين التاليين:



(29) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$.

الحل:

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{r+h}{r}.$$

$$r + h = r\csc\theta.$$

$$h = r\csc\theta - r.$$

$$h = r(\csc\theta - 1)$$ وهو المطلوب

---

(30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (افترض أن $r = 6371$ Km)

الحل:

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

$$\frac{dh}{d\theta} = -r(\csc\theta \cot\theta)$$

$$= -6371\left(\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -6371(2)(\sqrt{3})$$

$$= -12742\sqrt{3}.$$

$$\approx -22070 \text{ Km/rad}.$$

---

(31) إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ فأثبت أن

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

الحل:

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}.$$

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-4x}{4x^4}.$$

$$= \frac{9}{x} + \frac{-1}{x^3}.$$

$$= \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}.$$

إذا كان: $P(x) = F(x)\,G(x)$ وكان $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ فأجد كلاً مما يأتي:

(32) $P'(2)$.

الحل: من الشكل $F(2) = 3$ ، $G(2) = 2$.

لإيجاد المشتقة عند أي نقطة على الخط المستقيم تكون المشتقة = ميل المستقيم.

ولإيجاد الميل نجد نقطتين على الخط المستقيم ويكون الميل $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وإذا كان المماس أفقي عند نقطة فإن المشتقة = صفر.

لذلك $F'(2) = 0$ ولإيجاد $G'(2)$ نختار النقطتين $(2,2)$ ، $(4,3)$ ← $m = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2}$

$$P(x) = F(x)\,G(x)$$

$$P'(x) = F(x)\,G'(x) + G(x)\,F'(x)$$

$$P'(2) = F(2)\,G'(2) + G(2)\,F'(2)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2(0) = \frac{3}{2}.$$

(33) $Q'(7)$.

الحل: من الشكل $F(7)=5$ و $G(7)=1$

لإيجاد $F'(7)$ نأخذ $(7,5)$, $(3,4)$

$$m=\frac{5-4}{7-3}=\frac{1}{4}\Rightarrow F'(7)=\frac{1}{4}.$$

لإيجاد $G'(7)$ نأخذ $(4,3)$ ، $(7,1)$

$$m=\frac{1-3}{7-4}=\frac{-2}{3}\Rightarrow G'(7)=-\frac{2}{3}.$$

$$Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}.$$

$$Q'(x)=\frac{G(x)\,F'(x)-F(x)\,G'(x)}{G^2(x)}$$

$$Q'(7)=\frac{1\left(\frac{1}{4}\right)-5\left(\frac{-2}{3}\right)}{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{10}{3}=\frac{3+40}{12}=\frac{43}{12}.$$

اذا كان $y=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين.

(34) أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

الحل:

$$y'=\frac{(1+e^{-x})\,e^{-x}-(1-e^{-x})(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{-x}+\cancel{e^{-2x}}+e^{-x}-\cancel{e^{-2x}}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$y'(0)=\frac{2}{(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

---

(35) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y.

الحل: يحدث مماس أفقي عندما $y'=0$ لكن $2e^{-x}\neq 0$ مهما كانت قيمة x لذلك لا يوجد مماس أفقي.

اذا كان $y=\frac{x+1}{x-1}$ حيث $x\neq 1$ فأجيب عن الأسئلة الآتية

(36) أجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{-2}{(x-1)^2}.$$

---

(37) أعيد كتابة المعادلة بالنسبة الى المتغير x (x اقتران بالنسبة الى y) ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

الحل:

$$y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow xy-y=x+1$$

$$xy-x=y+1\Rightarrow x(y-1)=y+1\Rightarrow$$

$$x=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(y-1)(1)-(y+1)(1)}{(y-1)^2}$$

$$=\frac{y-1-y-1}{(y-1)^2}=\frac{-2}{(y-1)^2}.$$

(38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

الحل:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{-2(x-1)^2}{4} = \frac{-(x-1)^2}{2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ فأجيب عن السؤالين التاليين

(39) أثبت أن $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

الحل:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(\frac{1}{x}) - \ln x(2x)}{x^4}.$$

$$= \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}.$$

$$f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

$$f''(x) = \frac{x^3(-\frac{2}{x}) - (1-2\ln x)(3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-5x^2 + 6x^2\ln x}{x^6} = \frac{x^2(-5+6\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{6\ln x - 5}{x^4}.$$ وهو المطلوب.

(40) أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1.$

الحل:

$$x^4\left(\frac{6\ln x - 5}{x^4}\right) + 4x^3\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right) + 2x^2\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) + 1 =$$

$$6\ln x - 5 + 4(1-2\ln x) + 2\ln x + 1 =$$

$$6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1 =$$

$$-5 + 4 + 1 = 0.$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x\,(1)}{x^2}$

$= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

② $f(x) = -\csc x - \sin x$

$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$

③ $f(x) = \dfrac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$.

$f'(x) = \dfrac{(x+\frac{c}{x})(1) - (x+c)(1 - \frac{c}{x^2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$.

$= \dfrac{x + \frac{c}{x} - x - c + \frac{c}{x} + \frac{c^2}{x^2}}{(x + \frac{c}{x})^2}$

$= \dfrac{\frac{2c}{x} - c + \frac{c^2}{x^2}}{(x + \frac{c}{x})^2} = \dfrac{\frac{2xc - cx^2 + c^2}{x^2}}{(x + \frac{c}{x})^2}$

$= \dfrac{2xc - cx^2 + c^2}{x^2(x + \frac{c}{x})^2}$.

④ $f(x) = x\cot x$

$f'(x) = x(-\csc^2 x) + \cot x(1)$

$= -x\csc^2 x + \cot x$.

⑤ $f(x) = 4x - x^2\tan x$

$f'(x) = 4 - (x^2\sec^2 x + \tan x\,(2x))$

$= 4 - x^2\sec^2 x - 2x\tan x$.

⑥ $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2(-\sin x) - \cos x\,(2x)}{x^4}$

$= \dfrac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4}$.

⑦ $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$.

$f'(x) = x\,\dfrac{4}{(x+3)^2} + \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)(1)$

$= \dfrac{4x}{(x+3)^2} + 1 - \dfrac{4}{x+3}$.

⑧ $f(x) = \dfrac{3(1 - \sin x)}{2\cos x}$.

$f'(x) = \dfrac{2\cos x(-3\cos x) - 3(1-\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$

$= \dfrac{-6\cos^2 x + 6\sin x - 6\sin^2 x}{4\cos^2 x}$

$= \dfrac{-6(\cos^2 x + \sin^2 x) + 6\sin x}{4\cos^2 x}$

$= \dfrac{-6(1) + 6\sin x}{4\cos^2 x}$.

$= \dfrac{6\sin x - 6}{4\cos^2 x}$.

(9) $f(x) = (x+1)e^{x}$

$f'(x) = (x+1)e^{x} + e^{x}(1)$

$= xe^{x} + e^{x} + e^{x} = xe^{x} + 2e^{x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(10) $f(x) = x^2 \cos x \quad , \quad (\frac{\pi}{2}, 0)$

$f'(x) = x^2(-\sin x) + \cos x\,(2x)$

$m = f'(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2(-\sin\frac{\pi}{2}) + \cos\frac{\pi}{2}\,(2(\frac{\pi}{2}))$

$= \frac{\pi^2}{4}(-1) + 0(\pi) = -\frac{\pi^2}{4}$

معادلة المماس:

$Y - Y_1 = m(x - x_1)$

$Y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}(x - \frac{\pi}{2})$

$Y = -\frac{\pi^2 x}{4} + \frac{\pi^3}{8}$

(11) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x} \quad , \quad (\pi, -1)$

$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$m = \frac{1+\sin\pi}{\cos^2\pi} = \frac{1+0}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$

معادلة المماس:

$y + 1 = 1(x - \pi)$

$y = x - \pi - 1$

أجد احداثي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

(12) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2(2) - (2x-1)(2x)}{x^4}$

$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$

$= \frac{2x - 2x^2}{x^4} = 0$

$2x - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x(1-x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ليس في المجال.

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = \frac{2(1)-1}{1^2} = 1$ النقطة $(1, 1)$

(13) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$h'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$h(0) = \frac{0}{1} = 0$ النقطة $(0, 0)$

(14) $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$

$g'(x) = \frac{e^{x}(8) - 8(x-2)e^{x}}{(e^{x})^2}$

$= \frac{8e^{x}(1 - x + 2)}{e^{2x}} = \frac{8(3-x)}{e^{x}} = 0$

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$g(3) = \frac{8(3-2)}{e^3} = \frac{8}{e^3}$

النقطة $(3, \frac{8}{e^3})$.

(17) اذا كان: $f(x) = x \sec x$ فأثبت أن $f'(x) = \sec x\,(1 + x\tan x)$.

الحل:

$f(x) = x \sec x$.

$f'(x) = x \sec x \tan x + \sec x\,(1)$

$= \sec x\,(x \tan x + 1)$.

---

(18) اذا كان $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ حيث: $x > 0$ فأجد $f'(x)$, $f''(x)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{x(\frac{1}{x}) - \ln x\,(1)}{x^2}.$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{x^4} - \frac{x^2(\frac{1}{x}) - \ln x\,(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^3} - \frac{x - (2x)\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^3} - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^3} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

يبين الشكل منحنى الاقترانين: $f(x)$, $g(x)$ اذا كان
وكان: $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $u(x) = f(x)\,g(x)$
فأجد كلاً مما يأتي:

(15) $u'(1)$

من الشكل $g(1) = 3$, $f(1) = 2$

$f: (1,2)$, $(4,3)$

$m = \dfrac{2-3}{1-4} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{3}$

$g: (1,3)$, $(2,4)$

$m = \dfrac{3-4}{1-2} = 1 \Rightarrow g'(1) = 1$

$u(x) = f(x)\,g(x)$

$u'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

$u'(1) = f(1)\,g'(1) + g(1)\,f'(1)$

$= (2)(1) + (3)(\frac{1}{3})$

$= 2 + 1 = 3$

---

(16) $v'(4)$.

من الشكل $g(4) = 2$, $f(4) = 3$

$f'(4) = \dfrac{1}{3}$ (نفس الخط المستقيم)

$g: (3,1)$, $(4,2) \Rightarrow m = \dfrac{1-2}{3-4} = 1$

$\Rightarrow g'(4) = 1$

$v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$v'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}.$$

$$v'(4) = \frac{g(4)\,f'(4) - f(4)\,g'(4)}{(g(4))^2}$$

$$= \frac{(2)(\frac{1}{3}) - (3)(1)}{2^2} = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4}$$

$$= \frac{\frac{-7}{3}}{4} = \frac{-7}{12}.$$

يمثل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}$ ، $t \geq 0$

السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية:

(19) أجد تسارع السيارة عندما $t=5$.

الحل:

$$a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$$

$$a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032\ ft/s^2$$

---

(20) أجد تسارع السيارة عندما $t=20$.

$$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} = 0.007\ ft/s^2$$

---

(21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني والأبعاد بالسنتمترات. أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A(t) = (6t+5)(\sqrt{t})$$

$$A(t) = (6t+5)(t^{\frac{1}{2}}).$$

$$A'(t) = (6t+5)(\tfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}) + (t^{\frac{1}{2}})(6)$$

$$= \frac{6t+5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}.$$

$$= \frac{6t}{2\sqrt{t}} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}$$

$$A'(t) = 3t^{1-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}.$$

$$= 3t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}.$$

$$= 3\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} + 6\sqrt{t}.$$

$$= 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 41:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \tan(3x^2)$

$f'(x) = \sec^2(3x^2)(6x)$

$= 6x(\sec^2(3x^2))$

---

b) $f(x) = e^{\ln x}$.

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

---

c) $f(x) = \ln(\cot x)$

$f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$.

أتحقق من فهمي صفحة 42:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$.

$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x)$

$= \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$.

---

b) $f(x) = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)$

$= \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $f(x) = (\ln x)^5$

$f'(x) = 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \left(\frac{5}{x}\right)(\ln x)^4$.

أتحقق من فهمي صفحة 44:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$.

$f'(x) = 2\cos(7x^3+6x-1) *$

$-\sin(7x^3+6x-1) * (21x^2+6)$.

---

b) $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2 * 4(x^2+1)^3(2x)$

$= (24x)(2+(x^2+1)^4)^2(x^2+1)^3$.

أتحقق من فهمي صفحة 45:

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

الحل:

$f'(x) = (2x+1)^5(4(x^3-x+1)^3(3x^2-1)) +$

$(x^3-x+1)^4(5(2x+1)^4(2))$.

$f'(1) = (2(1)+1)^5(4(1^3-1+1)^3(3(1)^2-1)) +$

$(1^3-1+1)^4(5(2(1)+1)^4(2))$.

$= 3^5(4(1)^3(2)) + (1)^4(5(3)^4)(2)$

$= 243(8) + (2)(5(81))$

$= 1944 + 810$

ميل المماس $= 2754$

أتحقق من فهمي صفحة 45:

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران :
$f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

الحل:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}\, 2\cos x(-\sin x) - \cos^2 x\,(2e^{2x})}{(e^{2x})^2}.$$

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{e^{\pi}(0)(-1) - (0)(2e^{\pi})}{(e^{\pi})^2}$$

$$= \frac{0}{e^{2\pi}} = 0.$$

المماس أفقي فيكون العمودي رأسي وميله غير معرف.

أتحقق من فهمي صفحة 46:

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$
حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج :

a) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة الى عدد القطع المبيعة من المنتج .

الحل:

$$U(x) = 80\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$U'(x) = 80(\tfrac{1}{2})\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(3x+4)(2) - (2x+1)(3)}{(3x+4)^2}$$

$$= 40\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}} * \frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}$$

$$= 40\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}} * \frac{5}{(3x+4)^2}.$$

$$= \frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}.$$

b) أجد $U'(20)$.

الحل:

$$U'(20) = \frac{200}{(3(20)+4)^2}\sqrt{\frac{3(20)+4}{2(20)+1}}$$

$$= \frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}}.$$

$$\approx 0.061$$

وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبا

أتحقق من فهمي صفحة 48:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \pi^{\pi x}.$

$$f'(x) = \ln\pi\,(\pi^{\pi x})(\pi)$$

$$= \pi^{\pi x+1}(\ln\pi).$$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}.$

$$f'(x) = \ln 6\,(6^{1-x^3})(-3x^2)$$

$$= (-3x^2\ln 6)(6^{1-x^3}).$$

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$$f'(x) = 4e^{4x} + \ln 4\,(4^{2x})(2)$$

$$= 4e^{4x} + (2\ln 4)(4^{2x}).$$

أتحقق من فهمي صفحة 49 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \log \sec x$.

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}.$$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$.

$$f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 52 :

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$x = \sec t$, $y = \tan t$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}.$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

$x = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$

$y = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$ $(\sqrt{2}, 1)$

معادلة المماس :

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

$$Y - 1 = \sqrt{2}(X - \sqrt{2})$$

$$Y - 1 = \sqrt{2}x - 2$$

$$Y = \sqrt{2}X - 2 + 1$$

$$Y = \sqrt{2}X - 1$$

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

أتدرب وأحل المسائل.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

① $f(x) = e^{4x+2}$.

$f'(x) = 4e^{4x+2}$.

② $f(x) = 50e^{2x-10}$.

$f'(x) = 50(2)e^{2x-10}$.

$= 100e^{2x-10}$.

③ $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

$f'(x) = -\sin(x^2-3x-4)(2x-3)$

④ $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$.

$f'(x) = (10x^2)(-2xe^{-x^2}) + e^{-x^2}(20x)$

$= -20x^3 e^{-x^2} + 20xe^{-x^2}$.

$= 20xe^{-x^2}(1-x^2)$.

⑤ $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$

$= \frac{-1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

⑥ $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$.

$f'(x) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$

$= -\sec^2\frac{1}{x} + 2x\tan\frac{1}{x}$.

⑦ $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$.

$f'(x) = 3 + 5\sin(\pi x)^2(2(\pi x)\pi)$

$= 3 + 10\sin(\pi x)^2(\pi^2 x)$

$= 3 + 10\pi^2 x \sin(\pi x)^2$

⑧ $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$

$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{-e^x}{1-e^x}$

$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$.

⑨ $f(x) = (\ln x)^4$.

$f'(x) = 4(\ln x)^3\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{4}{x}(\ln x)^3$

(10) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + (\sin x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = (\cos\sqrt[3]{x})(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}) + \frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{1}{3}-1}(\cos x)$

$= (\cos\sqrt[3]{x})(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}) + \frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{-2}{3}}(\cos x)$

$= \dfrac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}}.$

---

(11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}.$

$f(x) = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}.$

$f'(x) = \frac{1}{5}(x^2+8x)^{\frac{-4}{5}}(2x+8)$

$= \dfrac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}.$

---

(12) $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{x}.$

$f'(x) = \dfrac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}(1)}{x^2}$

إخراج 3^{2x} عامل مشترك

$f'(x) = \dfrac{3^{2x}(2x\ln 3 - 1)}{x^2}.$

---

(13) $f(x) = 2^{-x}\cos\pi x.$

$f'(x) = (2^{-x})(-\pi\sin\pi x) + (\cos\pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$

$= 2^{-x}(-\pi\sin\pi x - (\cos\pi x)(\ln 2))$

---

(14) $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}.$

$f'(x) = \dfrac{x(10)\left(\frac{1}{(\ln 4)(x)}\right) - 10\log_4 x}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$

---

(15) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$f'(x) = 2\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1 \dfrac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \left(\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$

$= \left(\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}\right)$

$= \left(\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)$

$= \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(16) $f(x) = \log_3 (1 + x \ln x)$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x \ln x)}$$

$$= \frac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x \ln x)}.$$

(17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

$$f'(x) = (2\cos 2x)\, e^{\sin 2x} + \cos(e^{2x})(2e^{2x})$$

(18) $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$.

$$f(x) = \left(\tan(\sec(\cos x))\right)^4$$

$$f'(x) = 4\left(\tan(\sec(\cos x))\right)^3 \times \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times (-\sin x)$$

$$= -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x)(\sin x).$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x:

(19) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}$ ، $x = -2$

$f(-2) = 4e^{-2}$. $(-2, 4e^{-2})$

$$f'(x) = 4(-2x)(0.5)x \cdot e^{-0.5x^2}.$$

$$= -4x\, e^{-0.5x^2}.$$

$$f'(-2) = (-4)(-2)\, e^{-2} = 8e^{-2} = m$$

معادلة المماس:

$$(y - 4e^{-2}) = 8e^{-2}(x+2)$$

$$y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x+2)$$

$$y = \frac{8}{e^2}x + \frac{16}{e^2} + \frac{4}{e^2} \rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$$

(20) $f(x) = x + \cos 2x$ ، $x = 0$

$f(0) = 0 + \cos 0$

$f(0) = 1$ $(0, 1)$

$$f'(x) = 1 - 2\sin 2x$$

$$f'(0) = 1 - 2\sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1 = m$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

(21) $f(x) = 2^x$ ، $x = 0$

$f(0) = 2^0 = 1$ $(0, 1)$

$$f'(x) = \ln 2 (2^x).$$

$$f'(0) = \ln 2(2^0) = \ln 2 = m$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = \ln 2(x - 0)$$

$$y - 1 = \ln 2(x) \Rightarrow y = x\ln 2 + 1$$

(22) $f(x) = \sqrt{x+1}\, \sin\frac{\pi x}{2}$ ، $x = 3$

$f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = 2(-1) = -2$

$(3, -2)$

$$f'(x) = \sqrt{x+1}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$f'(3) = (2)\left(\frac{\pi}{2} \times 0\right) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

معادلة المماس:

$$y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

أتدرب وأحل المسائل

23) اذا كان : $A(x) = f(g(x))$ وكان $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$, $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$ فأجد $A'(5)$.

الحل :

$$A'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$A'(5) = f'(g(5)) \cdot g'(5)$$

$$= f'(-2) \cdot 6$$

$$= (4)(6) = 24.$$

24) اذا كان : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ فأثبت أن $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

الحل :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\,(1) - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

يمثل الاقتران : $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري :

25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة N.

$$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t}$$

$$A'(3) = 0.1Ne^{0.3}.$$ معدل النمو بعد 3 ساعات.

26) اذا كان معدل نمو المجتمع بعد K ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة فما قيمة K بدلالة الثابت N ؟

$$A'(K) = 0.1Ne^{0.1K}$$

$$\frac{0.2}{0.1N} = \frac{0.1Ne^{0.1K}}{0.1N} \Rightarrow e^{0.1K} = \frac{2}{N} \Rightarrow$$

$$\ln e^{0.1K} = \ln \frac{2}{N} \Rightarrow 0.1K = \ln \frac{2}{N} \Rightarrow$$

$$K = 10 \ln \frac{2}{N}.$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يلي :

27) $f(x) = \sin \pi x$, $f'''(x)$.

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x.$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x.$$

أتدرب وأحل المسائل

(28) $f(x) = \cos(2x+1)$ ، $f^{(5)}(x)$.

$f'(x) = -2\sin(2x+1)$

$f''(x) = -4\cos(2x+1)$

$f'''(x) = 8\sin(2x+1)$

$f^{(4)}(x) = 16\cos(2x+1)$

$f^{(5)}(x) = -32\sin(2x+1)$.

(29) $f(x) = \cos x^2$ ، $f''(x)$.

$f'(x) = -2x\sin x^2$.

$f''(x) = (-2x)(2x\cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$

$= -4x^2\cos x^2 - 2\sin x^2$.

(30) اذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$ فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0,1)$.

$y' = \cos x\, e^{\sin x}$.

$y'|_{x=0} = \cos 0\, e^{\sin 0}$.

$= 1 \cdot e^0 = 1$

ميل المماس هو 1.

(31) يمثل غذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20g من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد معدل تحلل العنصر عند $t=2$

$A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$

$A'(2) = \frac{1}{7}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{1/70} \approx -0.098$.

اذاً يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098 كل يوم عندما $t=2$.

تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران: $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالسنتمترات.

(32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t=1$.

$s(t) = 0.1\sin(2.4t)$

$v(t) = (0.1)(2.4)\cos(2.4t)$

$= 0.24\cos(2.4t)$

$v(1) = 0.24\cos(2.4)$

≈ -0.177 cm/s.

(33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً.

$v(t) = 0$

$0.24\cos(2.4t) = 0$

$\cos(2.4t) = 0$

$2.4t = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$.

$s(\frac{\pi}{2}) = 0.1 \times 1 = 0.1$.

$s(\frac{3\pi}{2}) = 0.1 \times -1 = -0.1$.

∴ عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند 0.1cm أو -0.1cm .

(34) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً.

$a(t) = v'(t) = 0.24(-\sin 2.4t)(2.4)$

$= -0.576\sin 2.4t = 0$

$\sin 2.4t = 0$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$s = (0.1)(0) = 0$

∴ عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s=0$.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة:

(35) $x = t + 2 \quad , \quad y = t^2 - 1 \quad , \quad t = 1$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t.$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = (2)(1) = 2$$

عندما $t=1 \leftarrow x = 1+2 \leftarrow x = 3$

عندما $t=1 \leftarrow y = 1-1 \leftarrow y = 0$

∴ نقطة التماس $(3,0)$

$$y - 0 = 2(x-3) \rightarrow y = 2x - 6$$

---

(36) $x = \frac{t}{2} \quad , \quad y = t^2 - 4 \quad , \quad t = -1$

$t = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \;/\; y = 1 - 4 = -3$

∴ نقطة التماس $(-\frac{1}{2}, -3)$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = 4(-1) = -4.$$

معادلة المماس:

$$y + 3 = -4(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y + 3 = -4x - 2$$

$$\Rightarrow y = -4x - 5$$

---

(37) $x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t$

$t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نقطة التماس $(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$$

(39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = 2(t - \sin t)$ ، $y = 2(1 - \cos t)$

حيث: $0 \le t \le 2\pi$ أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ على الترتيب.

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2 - 2\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

ميل المماس $m = \sqrt{2}+1.$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\sqrt{2}+1}$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-1} = 1-\sqrt{2}.$$

(38) $x = \sec^2 t - 1$ ، $y = \tan t.$

$t = \frac{-\pi}{4} \Rightarrow x = \sec^2(\frac{-\pi}{4}) - 1 = 2 - 1 = 1$

$t = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \tan(\frac{-\pi}{4}) = -1$

نقطة التماس: $(1, -1)$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec t(\sec t \tan t)$$

$$= 2\sec^2 t \tan t.$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\tan t} = \frac{1}{2}\cot t.$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot(\frac{-\pi}{4})$$

$$= (\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} - 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax+b)$ حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة p هو 1. فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(42) اثبت أن الإحداثي x للنقطة p أقل من 1.

$$y = \ln(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

لتكن إحداثيا p هما (x_1, y_1) فيكون ميل المماس عند p هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b} = 1 \Rightarrow$$

$$a = ax_1 + b \Rightarrow x_1 = \frac{a-b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - \frac{b}{a}$$

المقدار $1-\frac{b}{a}$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب لأن a, b موجبين.

(43) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$ علماً بأن p هي النقطة (0, 2).

$p(x_1, y_1) = (0, 2) \rightarrow x_1 = 1 - \frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = a$

$y_1 = \ln(ax_1+b) \longrightarrow 2 = \ln(b) \Rightarrow$

$b = e^2 \Rightarrow a = e^2.$

بتعويض قيمتي a و b في قاعدة الاقتران ينتج أن:

$y = \ln(e^2x + e^2) = \ln e^2(x+1) =$

$\ln e^2 + \ln(x+1) = 2 + \ln(x+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = 2$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 + \ln 2.$

النقطة هي $(1, 2+\ln 2)$ ميل المماس عندها $= \frac{1}{2}$.

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين f(x) و g(x) إذا كان $h(x) = f(g(x))$ وكان $p(x) = g(f(x))$ فأجد كلاً مما يلي:

(40) $h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$

$= f'(4) \times g'(1)$

$g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي $-1 = \frac{3}{-3} = \frac{5-2}{0-3}$

$f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5, 3) و (2, 4) ويساوي $-\frac{1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{4-3}{2-5}$

$h'(1) = f'(4) \times g'(1)$

$= -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}.$

---

(41) $p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1)$

$= g'(2) \times f'(1)$

$g'(2)$ ميل المستقيم المار بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي (-1).

$f'(1)$ ميل المستقيم المار بالنقطتين (0, 0) و (2, 4) ويساوي (2)

$p'(1) = g'(2) \times f'(1)$

$= -1 \times 2$

$= -2.$

أتدرب وأحل المسائل

يمثل منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$$x = t^2 \quad , \quad y = 2t$$

(45) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}.$$

---

(46) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

ميل المماس $= m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$.

ميل العمودي $= \frac{-1}{m} = -t$.

معادلة العمودي:

$$y - 2t = -t(x - t^2).$$

$$y = -tx + t^3 + 2t$$

---

(47) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الإحداثيين هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$.

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y=0$.

$$0 = -tx + t^3 + 2t \Rightarrow x = \frac{t^3 + 2t}{t}$$

$$\Rightarrow x = t^2 + 2 \leftarrow \text{القاعدة}$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x=0$.

$$y = -t(0) + t^3 + 2t$$

$$y = t^3 + 2t \leftarrow \text{الارتفاع}.$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2}|t^2+2||t^3+2t|$$

$$= \frac{1}{2}|t^2+2||t(t^2+2)|$$

$$= \frac{1}{2}|t(t^2+2)^2|$$

$$= \frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2.$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

(48) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}.$$

---

(49) $y = (e^x \sin^2 x)\cos x.$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + \cos x\,(e^x 2\sin x\cos x + e^x \sin^2 x)$$

$$= -e^x\sin^3 x + 2e^x\cos^2 x\sin x + e^x\cos x\sin^2 x$$

يبين الشكل منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t \; , \; y = \sin 3t \; , \; 0 \le t \le 2\pi$$

(50) اذا كان مماس منحنى المعادلة أفقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول فأجد احداثيي A.

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t \; , \; \frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

عندما يكون المماس أفقي فان $\frac{dy}{dx} = 0$

⇐ البسط = صفر

$$\frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$$

$$\cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$$

$$x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2} , 1\right)$$

(51) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B، فأجد احداثيي B.

الميل موازي لمحور y يعني أن ميله غير معرف.

⇐ المقام = صفر

$$\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$B\left(1 , \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(52) اذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح بالشكل فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة.

عند نقطة الأصل $x = y = 0$

أي أن $\sin 2t = \sin 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معاً عندما $t=0$

وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}.$$

كما تتحققان أيضاً عندما $t=\pi$ وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}.$$

يمثل الاقتران : $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني :

(53) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t-2)(2t-2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - (4t^2 - 8t + 4)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$= \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - 4t^2 + 8t - 4}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} .$$

---

(54) أجد موقع الجسم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً .

$$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln(0.9)\ m$$

$$a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} = 2.2\ m/s^2$$

---

(55) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي ؟

الموقع الابتدائي هو s(0) .

$$s(0) = \ln(1.9)$$

$$s(t) = \ln(1.9) \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9) \Rightarrow$$

$$t^2 - 2t + 1.9 = 1.9 \Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow$$

$$t(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \quad , \quad t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$$

يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته .

الدرس الرابع
الاشتقاق الضمني

مسألة اليوم صفحة 58:

يقود سائق سيارته في اتجاه لافتة على طريق سريع. اذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافتة و x المسافة بينه وبين اللافتة بالأقدام، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي: $\tan\theta = \dfrac{4x}{x^2+252}$

فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟

الحل: نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x .

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4) - (4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{4x^2+1008-8x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}.$$

$$= \frac{1008-4x^2}{\left(1+\frac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}.$$

$$= \frac{1008-4x^2}{\left(\frac{(x^2+252)^2+16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$$

$$= \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 58:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $x^2+y^2=13$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

b) $2x+5y^2=\sin y.$

$$2+10y\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}-10y\frac{dy}{dx}=2$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y-10y)=2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\cos y-10y}.$$

الدرس الرابع
الاشتقاق الضمني

أتحقق من فهمي صفحة 60 :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$(3x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(3) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy + 3y^2) = -3y^2.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy + 3y^2}.$$

---

b) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\sec^2(x-y)(1-y') = (2x)(3y^2y') + y^3(2).$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\,y' = 6xy^2y' + 2y^3$$

$$6xy^2y' + \sec^2(x-y)y' = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$y'(6xy^2 + \sec^2(x-y)) = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$y' = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x-y)}$$

---

c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$2x = \frac{(x+y)(1-y') - (x-y)(1+y')}{(x+y)^2}$$

$$(2x)(x+y)^2 = x - xy' + y - yy' - (x + xy' - y - yy')$$

$$2x(x+y)^2 = x - xy' + y - yy' - x - xy' + y + yy'$$

$$2x(x+y)^2 = 2y - 2xy'$$

$$2xy' = 2y - 2x(x+y)^2$$

$$y' = \frac{2(y - x(x+y)^2)}{2x}$$

$$y' = \frac{y - x(x+y)^2}{x}.$$

يمكن حل السؤال بطريقة ثانية بتبسيط العلاقة قبل الاشتقاق بالضرب التبادلي :

$$x^3 + x^2y = x - y$$

$$3x^2 + x^2y' + y(2x) = 1 - y'$$

$$3x^2 + x^2y' + 2xy = 1 - y'$$

$$x^2y' + y' = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$y'(x^2+1) = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$y' = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{x^2+1}$$

أتحقق من فهمي صفحة 61 :

ⓐ أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e,1)$

$$2yy' = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2xy}.$$

$$y'|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}.$$

ⓑ أجد ميل مماس منحنى العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(6-5) \rightarrow (y-3)^2 = 4 \rightarrow y-3 = \mp 2$$

$$\underset{+3}{y} \underset{+3}{-3} = \underset{+3}{2} \quad / \quad \underset{+3}{y} \underset{+3}{-3} = \underset{+3}{-2}$$

$y = 5$ $\qquad$ $y = 1$

يوجد نقطتان $(6,5)$, $(6,1)$

الدرس الرابع
الاشتقاق الضمني

تابع أتحقق من فهمي صفحة 63:

(b) $(y-3)^2 = 4(x-5)$

نشتق الطرفين

$$2(y-3)\,y' = 4 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{4}{2(y-3)} \Rightarrow y' = \frac{2}{(y-3)}$$

$$y'\Big|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y'\Big|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

أتحقق من فهمي صفحة 63:

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2,3)$.

$$3x^2 + 3y^2y' - (3xy' + y(3)) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3xy' - 3y = 0$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$

$$y'\Big|_{(2,3)} = \frac{(3)(3) - (3)(4)}{(3)(9) - (3)(2)} = \frac{9-12}{27-6} = \frac{-3}{21}$$

$$y'\Big|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

معادلة المماس:

$$(y-3) = -\frac{1}{7}(x-2)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7} \Rightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}.$$

أتحقق من فهمي صفحة 64:

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

$$xy + y^2 = 2x.$$

$$xy' + y + 2yy' = 2$$

$$xy' + 2yy' = 2 - y$$

$$y'(x+2y) = 2 - y$$

$$y' = \frac{2-y}{x+2y}.$$

$$y'' = \frac{(x+2y)(-y') - (2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

نعوض مكان y'.

$$y'' = \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1 + \frac{2(2-y)}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+2y)(y-2)}{x+2y} - (2-y)\left(\frac{x+2y}{x+2y} + \frac{4-2y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+2y)(y-2)}{x+2y} - (2-y)\left(\frac{x+2y+4-2y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)}}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y - 2x - 8 + xy + 4y}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}.$$

الدرس الرابع
الاشتقاق الضمني

أتحقق من فهمي صفحة 65:

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عند $t=2$:

$x = 3t^2+1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$

$\frac{dx}{dt} = 6t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-4t}{6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(3t-4)}{6t} = \frac{3t-4}{6} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

أتحقق من فهمي صفحة 67:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

a) $y = x^{\sqrt{x}} \qquad x > 0$

$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$

$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln x$

$$\frac{y'}{y} = (\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \ln x$$

لكن $y = x^{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x$$

---

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

$\ln y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

$\ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x^4+1}$

$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x^4+1)\right)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+1}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2x^3}{x^4+1}$$

$$y' = \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2x^3}{x^4+1}\right)y$$

$$y' = \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

① $x^2 - 2y^2 = 4$

$2x - 4yy' = 0$

$4yy' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{4y}$

$y' = \frac{x}{2y}$.

② $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$\frac{-1(2x)}{x^4} + \frac{-1(2y)y'}{y^4} = 0$

$\frac{-2}{x^3} - \frac{2y'}{y^3} = 0$

$\frac{2y'}{y^3} = \frac{-2}{x^3}$

$y' = \frac{-y^3}{x^3}$

③ $(x^2+y^2)^2 = 50(x^2-y^2)$

$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 100x - 100yy'$

$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2yy' + 4y^3y' = 100x - 100yy'$

$4x^2yy' + 4y^3y' + 100yy' = 100x - 4x^3 - 4xy^2$

$y'(4x^2y + 4y^3 + 100y) = 100x - 4x^3 - 4xy^2$

$y' = \frac{100x - 4x^3 - 4xy^2}{4x^2y + 4y^3 + 100y}$

$= \frac{\cancel{4}(25x - x^3 - xy^2)}{\cancel{4}(x^2y + y^3 + 25y)}$

④ $e^x y = x e^y$

$e^x y' + y e^x = x e^y y' + e^y$.

$e^x y' - x e^y y' = e^y - y e^x$

$y'(e^x - x e^y) = e^y - y e^x$

$y' = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$.

⑤ $3^x = y - 2xy$

$\ln 3 (3^x) = y' - (2xy' + 2y)$

$\ln 3 (3^x) = y' - 2xy' - 2y$.

$y' - 2xy' = \ln 3 (3^x) + 2y$.

$y'(1-2x) = \ln 3 (3^x) + 2y$.

$y' = \frac{\ln 3 (3^x) + 2y}{1 - 2x}$.

⑥ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$

$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$

$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

⑦ $x = \sec \frac{1}{y}$.

$$1 = \sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y^2} y'\right)$$

$$y' = \frac{-1}{\sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y^2}\right)}.$$

---

⑧ $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

$$2(\sin \pi x + \cos \pi y)(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y\, y')$$

$= \text{zero}.$

---

⑨ $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$\frac{y^2 - x(2y)y'}{y^4} + \frac{x(2y)y' - y^2}{x^2} = 0$$

بضرب الطرفين بالمقدار $(y^4 x^2)$

$$x^2(y^2 - 2xyy') + y^4(2xyy' - y^2) = 0$$

$$x^2y^2 - 2x^3yy' + 2xy^5y' - y^6 = 0$$

$$y'(2xy^5 - 2x^3y) = y^6 - x^2y^2$$

$$y' = \frac{y^6 - x^2y^2}{2xy^5 - 2x^3y}.$$

* يمكن حل الفرع ⑨ بطريقة أخرى.

⑨ $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

ضرب الطرفين بالمقدار (xy^2)

$$x^2 + y^4 = 5xy^2$$

$$2x + 4y^3y' = (5x)(2yy') + 5y^2$$

$$2x + 4y^3y' = 10xyy' + 5y^2$$

$$4y^3y' - 10xyy' = 5y^2 - 2x$$

$$y'(4y^3 - 10xy) = 5y^2 - 2x$$

$$y' = \frac{5y^2 - 2x}{4y^3 - 10xy}$$

---

⑩ $x + y = \cos(xy)$

$$1 + y' = -\sin(xy)(xy' + y)$$

$$1 + y' = -x\sin(xy)\,y' - y\sin(xy)$$

$$y' + x\sin(xy)\,y' = -y\sin(xy) - 1$$

$$y'(1 + x\sin(xy)) = -y\sin(xy) - 1$$

$$y' = \frac{-y\sin(xy) - 1}{1 + x\sin(xy)}$$

---

(11) $x^2 + y^2 = \ln (x+y)^2$

$x^2 + y^2 = 2\ln(x+y)$

$2x + 2yy' = 2\left(\frac{1+y'}{x+y}\right)$

$x + yy' = \frac{1+y'}{x+y}$

بالضرب التبادلي

$x(x+y) + y(x+y)y' = 1 + y'$

$y(x+y)y' - y' = 1 - x(x+y)$

$y'\left(y(x+y) - 1\right) = 1 - x(x+y)$

$y' = \frac{1 - x(x+y)}{y(x+y) - 1}$

---

(12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$\sin x(-\sin y\, y') + \cos y \cos x =$

$2x - 5y'$.

$-\sin x \sin y\, y' + 5y' = 2x - \cos y \cos x$

$y'(5 - \sin x \sin y) = 2x - \cos y \cos x$

$y' = \frac{2x - \cos y \cos x}{5 - \sin x \sin y}$

---

(13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$

$4yy' + 2xy' + 2y = 0$

نجد قيمة y عند $x = \frac{1}{2}$.

$2y^2 + y - 1 = 0$

$(y+1)(2y-1) = 0$

$y = -1$, $2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

النقط $(\frac{1}{2}, -1)$ و $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$4yy' + 2xy' + 2y = 0$

$4yy' + 2xy' = -2y$

$y'(4y + 2x) = -2y$

$y' = \frac{-2y}{4y + 2x}$

$y'|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{-1}{2+1} = \frac{-1}{3}$.

$y'|_{(\frac{1}{2}, -1)} = \frac{-2}{-4+1}$

$= \frac{-2}{-3}$

$= \frac{2}{3}$.

---

(14) $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , \quad y = 1$

$1 + 2x^2 = 11 \Rightarrow 2x^2 = 10$

$x^2 = 5 \rightarrow x = \mp\sqrt{5}$

النقط $(\sqrt{5}, 1) \quad , \quad (-\sqrt{5}, 1)$

$3y^2y' + 4x = 11y'$

$3y^2y' - 11y' = -4x$

$y'(3y^2 - 11) = -4x$

$y' = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$.

$y'|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{-4\sqrt{5}}{3 - 11} = \frac{-4\sqrt{5}}{-8}$

$y'|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{4\sqrt{5}}{3 - 11} = \frac{4\sqrt{5}}{-8}$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يلي:

(15) $x^2 + y^2 = 25 \quad , \quad (3, -4)$

$2x + 2yy' = 0 \rightarrow 2yy' = -2x$

$y' = \frac{-x}{y}$

$m = y'|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.

(16) $x^2y = 4(2 - y) \quad , \quad (2, 1)$

$x^2y' + 2xy = -4y'$

$x^2y' + 4y' = -2xy$

$y'(x^2 + 4) = -2xy$

$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 4}$

$m = y'|_{(2,1)} = \frac{-4}{4 + 4} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$

---

(17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \quad , \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\cos x \, e^{\sin x} - \sin y \, e^{\cos y} y' = 0$

$\sin y \, e^{\cos y} y' = \cos x \, e^{\sin x}$.

$y' = \frac{\cos x \, e^{\sin x}}{\sin y \, e^{\cos y}}$.

$m = y'|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \frac{0 \, e^{1}}{1 \, e^{0}}$

$= \frac{0}{1}$

$= 0$.

(18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \; , (8,1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$m = y'|_{(8,1)} = \frac{-1}{2}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي:

(19) $x^2 + xy + y^2 = 13 \; , (-4,3)$

$$2x + xy' + y + 2yy' = 0$$

$$xy' + 2yy' = -2x - y$$

$$y'(x+2y) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

$$m = y'|_{(-4,3)} = \frac{8-3}{-4+6} = \frac{5}{2}$$

معادلة المماس:

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x+4) \rightarrow y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$$

$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

(20) $x + y - 1 = \ln(x^2+y^2), (1,0)$

$$1 + y' = \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2}$$

بالتعويض بالنقطة $(1,0)$

$$1 + y' = \frac{2+0}{1+0} \Rightarrow 1 + y' = 2$$

$$\Rightarrow y' = 1$$

معادلة المماس:

$$y - 0 = 1(x-1)$$

$$y = x - 1$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي:

(21) $x + y = \sin y$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y - 1) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y - 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sin y \frac{dy}{dx}}{(\cos y - 1)^2} = \frac{-\sin y\left(\frac{1}{\cos y - 1}\right)}{(\cos y - 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sin y}{(\cos y - 1)^3}.$$

(22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$12y^2 y' = 12x \Rightarrow y' = \frac{12x}{12y^2}$$

$$y' = \frac{x}{y^2}.$$

$$y'' = \frac{y^2(1) - (x)(2y\,y')}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2xy\frac{x}{y^2}}{y^4}$$

$$= \frac{y^2 - 2\frac{x^2}{y}}{y^4}$$

نوحد المقامات في البسط

$$y'' = \frac{\frac{y^3}{y} - \frac{2x^2}{y}}{y^4} = \frac{\frac{y^3 - 2x^2}{y}}{y^4}$$

$$y'' = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}.$$

---

(23) $xy + e^y = e$

$$xy' + y + e^y \cdot y' = 0$$

$$xy' + e^y \cdot y' = -y$$

$$y'(x + e^y) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$y'' = \frac{(x+e^y)(-y') - (-y)(1 + e^y \cdot y')}{(x + e^y)^2}$$

$$y'' = \frac{(x+e^y)\left(\frac{y}{x+e^y}\right) + y\left(1 + e^y\left(\frac{-y}{x+e^y}\right)\right)}{(x+e^y)^2}$$

$$y'' = \frac{y + y + \frac{-e^y \cdot y^2}{x + e^y}}{(x+e^y)^2}$$

$$= \frac{2y + \frac{-e^y \cdot y^2}{x+e^y}}{(x+e^y)^2}$$

$$= \frac{\frac{2y(x+e^y)}{x+e^y} - \frac{e^y \cdot y^2}{x+e^y}}{(x+e^y)^2}$$

$$= \frac{2xy + 2ye^y - y^2e^y}{(x+e^y)^3}$$

---

(24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7,-2)$.

الحل: نشتق

$$(x-6)(y') + (y+4)(1) = 0$$

$$(x-6)y' = -y - 4 \Rightarrow y' = \frac{-y-4}{x-6}.$$

$$y'\Big|_{(7,-2)} = \frac{2-4}{7-6} = -2 \quad \text{(ميل المماس)}$$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{1}{2}$.

معادلة العمودي:

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - 2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}.$$

(25) أثبت أن لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

الحل: مماس أفقي يعني أن $y' = 0$

نشتقه

$6x + 2xy' + 2y + 2yy' = 0$

$2xy' + 2yy' = -6x - 2y$

$y'(2x + 2y) = -6x - 2y$

$y' = \dfrac{-6x - 2y}{2x + 2y} = 0$

$\Rightarrow -6x - 2y = 0 \Rightarrow$

$2y = -6x \Rightarrow y = -3x$

بالتعويض:

$3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6$

$3x^2 - 6x^2 + 9x^2 = 6$

$6x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$

$x = \mp 1$

∴ قيمتين لـ x ⇐ يوجد مماسين.

$x = 1 \Rightarrow y = -3 \quad (1, -3)$

$x = -1 \Rightarrow y = 3 \quad (-1, 3)$

نقطتي التماس.

(26) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم: $x + 2y = 0$.

الحل: نجد ميل المماس

$x + y^2 = 1$

$1 + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{2y}$ (ميل المماس)

$x + 2y = 0$ نجد ميل المستقيم

$1 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{2}$.

المماس يوازي المستقيم ⇐

ميل المماس = ميل المستقيم

$-\dfrac{1}{2y} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1}$

$\Rightarrow y = 1$

$x + y^2 = 1$

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

النقطة $(0, 1)$

(27) أجد إحداثي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم $y + 3x - 5 = 0$.

الحل:

$$y^3 = x^2 \Rightarrow 3y^2y' = 2x \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2x}{3y^2}.$$

المستقيم

$$y + 3x - 5 = 0$$

$$y' + 3 = 0 \Rightarrow y' = -3 \quad \text{(ميل المماس)}$$

∴ ميل العمودي = $\frac{1}{3}$.

$$\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = 2x$$

$$x = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^4}{4}.$$

$$y^3 = x^2$$

بالتعويض

$$y^3 = \frac{y^4}{4}$$

$$y^3 - \frac{y^4}{4} = 0 \Rightarrow y^3\left(1 - \frac{y}{4}\right) = 0$$

$$y^3 = 0 \rightarrow y = 0 \;/\; 1 - \frac{y}{4} = 0 \rightarrow \frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = x^2 \rightarrow x = 0 \qquad (0,0)$$

$$y = 4 \rightarrow 64 = x^2 \rightarrow x = \mp 8$$

$$(8,4) \;,\; (-8,4)$$

$(8,4)$ تحقق المعادلة لأن الميل = $\frac{1}{3}$

(28) إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ حيث $x + y \neq 0$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

الحل:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 10$$

$$\frac{\sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\,\frac{y'}{2\sqrt{y}}}{y} + \frac{\sqrt{x}\times\frac{y'}{2\sqrt{y}} - \sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = 0$$

$$\frac{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \frac{y'\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}{y} + \frac{\frac{y'\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x} = 0$$

$$\frac{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \frac{y'\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}{y} = -\frac{\frac{y'\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

بتوحيد المقامات:

$$\frac{y - y'x}{\cancel{2\sqrt{x}\sqrt{y}}\;y} = -\left(\frac{y'x - y}{\cancel{2\sqrt{y}\sqrt{x}}\;x}\right)$$

$$\frac{y - y'x}{y} = \frac{-y'x + y}{x}$$

$$xy - x^2y' = -xyy' + y^2$$

$$xy - y^2 = x^2y' - xyy'$$

$$xy - y^2 = y'(x^2 - xy)$$

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - xy} = \frac{y(x-y)}{x(x-y)}$$

$$y' = \frac{y}{x}.$$

(29) أجد احداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{\frac{1}{x}}$ ، $x>0$ التي يكون عندها ميل المماس صفراً.

الحل:

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{y(1-\ln x)}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = e \Rightarrow y = e^{\frac{1}{e}}$$

∴ النقطة المطلوبة هي $(e, e^{\frac{1}{e}})$.

---

(30) أجد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2+y^2=100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

الحل:

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow 2yy' = -2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

ميل المماس $= \frac{3}{4} \Leftarrow \frac{3}{4} = \frac{-x}{y} \Leftarrow x = \frac{-3}{4}y$

بالتعويض:

$$\left(\frac{-3y}{4}\right)^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{9}{16}y^2+y^2=100$$

$$\frac{9}{16}y^2 + \frac{16}{16}y^2 = 100$$

$$\frac{25}{16}y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = \frac{100\times 16}{25}$$

$$y^2 = 64 \Rightarrow y = \mp 8$$

$$y=8 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}(8) = -6 \to (-6,8)$$

$$y=-8 \Rightarrow x = \frac{-3}{4}(-8) = 6 \to (6,-8)$$

يمثل الاقتران: $s(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $t>0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

(31) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه.

الحل:

$$s(t) = t^{1/t} \Rightarrow \ln s(t) = \ln t^{\frac{1}{t}}.$$

$$\ln s(t) = \frac{1}{t}\ln t.$$

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{v(t)}{s(t)} = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$v(t) = s(t) \times \frac{1-\ln t}{t^2}.$$

$$v(t) = t^{1/t} \times \frac{1-\ln t}{t^2}.$$

$$\ln v(t) = \ln\left(t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2}\right)$$

$$\ln v(t) = \ln t^{\frac{1}{t}} + \ln(1-\ln t) - \ln t^2$$

$$\ln v(t) = \frac{1}{t}\ln t + \ln(1-\ln t) - 2\ln t.$$

$$\frac{a(t)}{v(t)} = \frac{1-\ln t}{t^2} + \frac{-\frac{1}{t}}{1-\ln t} - \frac{2}{t}.$$

$$a(t) = v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2} - \frac{1}{t(1-\ln t)} - \frac{2}{t}\right)$$

$$a(t) = \left(t^{\frac{1}{t}}\times\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2} - \frac{1}{t(1-\ln t)} - \frac{2}{t}\right)$$

$$= t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} - \frac{1}{t^3} - \frac{2(1-\ln t)}{t^3}\right)$$

(32) أجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً.

الحل:

$v(t) = 0$

$t^{\frac{1}{t}} \times \frac{1-\ln t}{t^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln t = 0 \Rightarrow$

$\ln t = 1 \Rightarrow t = e.$

$a(e) = e^{\frac{1}{e}}\left(\frac{(1-\ln e)^2}{e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{2(1-\ln e)}{e^3}\right)$

---

(33) اذا كان $y = \ln x$ حيث $x > 0$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

الحل:

$y = \ln x$

$e^y = x$ بالتحويل إلى الصيغة الأسية

نشتق الطرفين

$e^y \cdot y' = 1 \Rightarrow$

$y' = \frac{1}{e^y}.$ لكن $e^y = x$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{x}.$

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

(34) $y = (x^2+3)^x.$

$\ln y = \ln(x^2+3)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(x^2+3)$

$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)$

$y' = y\left(\left(\frac{2x^2}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)\right)$

$= (x^2+3)^x\left(\frac{2x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)\right)$

(35) $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

$\ln y = \ln\left(\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}\right)$

$\ln y = \ln(x^4+1) + \ln\sqrt{x+2} - \ln(2x^2+2x+1)$

$\ln y = \ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x^2+2x+1)$

$\frac{y'}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right) - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}.$

$y' = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\left(\frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}\right)$

---

(36) $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$\ln y = \ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x^2(x+1)(x+2))$

$= \frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}$

$y' = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2x+4}\right)\left(\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}\right)$

---

(37) $y = x^{\sin x}$, $x > 0$

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = (\sin x)\ln x.$$

$$\frac{y'}{y} = \sin x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\,(\cos x)$$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x(\cos x)\right) x^{\sin x}.$$

---

(38) $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 t \times \frac{dt}{dx}$$

$$= -\sec^2 t \times \frac{1}{\cos t}.$$

$$= -\sec^2 t \times \sec t.$$

$$= -\sec^3 t.$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3 \frac{\pi}{4}.$$

$$= -(\sqrt{2})^3$$

$$= -2\sqrt{2}.$$

---

(39) $x = e^{-t}$, $y = t^3 + t + 1$, $t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-e^{-t}(6t) - (3t^2+1)(e^{t})}{(-e^{-t})^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-e^{-t}(6t) - (3t^2+1)\,e^{t}}{(-e^{-t})^2} \times \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{(0) - (0+1)\,e^{0}}{(-e^{0})^2} \times \frac{1}{-e^{0}}$$

$$= \frac{-1}{1 \times -1} = 1$$

إذا كانت العلاقة : $x^3 + y^3 = 6xy$ فأجب عن السؤالين الآتيين :

(40) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى العلاقة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول.

$$y = x \Rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2 \Rightarrow 2x^3 = 6x^2 \Rightarrow$$

$$2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0$$

$x = 0$, $x = 3$ ، في الربع الأول النقطة $(3,3)$

نشتق $3x^2 + 3y^2 y' = (6x)y' + 6y$

$$6xy' - 3y^2y' = 3x^2 - 6y$$

$$y'(6x - 3y^2) = 3x^2 - 6y \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 6y}{6x - 3y^2}$$

ميل المماس $y'|_{(3,3)} = \frac{27-18}{18-27} = \frac{9}{-9} = -1$

معادلة المماس $y - 3 = -1(x-3)$

$$y = -x + 6$$

41) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

الحل: المماس أفقي ⇐ $y' = 0$

$$\frac{3x^2 - 6y}{6x - 3y^2} = 0$$

البسط = صفر

$$3(x^2 - 2y) = 0 \Rightarrow x^2 = 2y \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}.$$

نعوض: $x^3 + y^3 = 6xy$

$$x^3 + \frac{x^6}{8} = 6\left(\frac{x^3}{2}\right) \qquad \div x^3$$

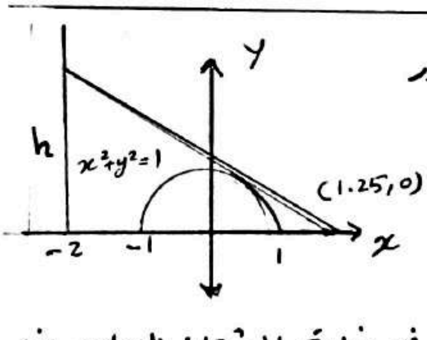
$$1 + \frac{x^3}{8} = 3 \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 2$$

$$x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(\sqrt[3]{16})^2}{2}.$$

النقطة: $\left(\sqrt[3]{16} \,,\, \frac{(\sqrt[3]{16})^2}{2}\right)$

42) يبين الشكل المجاور مصباحاً على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح الذي يمس منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$ فأجد ارتفاع المصباح h.



الحل: نفرض نقطة التماس هي (x, y)

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{y - 0}{x - 1.25}$$

نجد ميل المستقيم:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

ميل المستقيم = ميل المماس

$$\frac{y}{x - 1.25} = \frac{-x}{y} \Rightarrow$$

$$y^2 = -x^2 + 1.25x$$

$$x^2 + y^2 = 1.25x$$ لكن $1 = y^2 + x^2$

$$1 = 1.25x \Rightarrow x = \frac{1}{1.25}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

نجد y: $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + y^2 = 1$

$$y^2 = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{25}$$

$$y = \mp \frac{3}{5}$$ نُهمل $-\frac{3}{5}$

ميل المماس $y' = \frac{-x}{y} \Rightarrow y' = -\frac{4}{3}$

معادلة المماس:

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right)$$

وعند $x = -2$

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}\left(-2 - \frac{4}{5}\right)$$

$$y - \frac{3}{5} = \frac{8}{3} + \frac{16}{15}$$

$$y = \frac{8}{3} + \frac{16}{15} + \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{40 + 16 + 9}{15} = \frac{65}{15} = \frac{13}{5}$$

$$h = \frac{13}{5}$$

اذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ فأجيب عن الاسئلة الأربعة الاتية تباعاً :

43 اجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

$2x - 2y\,y' = 0$

$2yy' = 2x \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$.

---

44 يمكن التعبير عن هذه العلاقة : $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية حيث $x = \sec t$, $y = \tan t$ أستعمل هذه $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}.$$

---

45 اثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان .

الحل :

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$.

المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان لأنه من نفس السؤال

$y = \tan t$, $x = \sec t$

ومنه فان $\frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$

46 أجد احداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس يساوي 2 .

الحل :

$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$.

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (2y)^2 - y^2 = 1$

$4y^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}$

$y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

---

(47) اذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{K}$ حيث K عدد حقيقي موجب فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي K.

الحل:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{K}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0 \Rightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1, y_1) فيكون ميل المماس:

$$y'\Big|_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}.$$

معادلة المماس:

$$y-y_1=\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

نجد المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x=0 \Rightarrow y-y_1=\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \Rightarrow$$

$$y=y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}. \quad (\text{مقطع } y)$$

$$y=0 \Rightarrow y_1=\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

$$x-x_1=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{y_1}}(y_1) \Rightarrow x=x_1+\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}$$

(مقطع x)

مجموع المقطعين:

$$y_1+\sqrt{y_1}\sqrt{x_1}+x_1+\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}=$$

$$y_1+2\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}+x_1=(\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1})^2$$

$$=(\sqrt{K})^2$$

$$=K$$

(48) اذا كان مماس منحنى الاقتران: $y=x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B والمحور y في النقطة C فأجد مساحة ΔOBC حيث O نقطة الأصل.

الحل:

$$y=x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'=y\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}$$

ميل المماس:

$$y'\Big|_{(4,16)}=\frac{2+\ln 4}{2\sqrt{4}}\cdot\left(4^{\sqrt{4}}\right)$$

$$=\left(\frac{2+\ln 4}{4}\right)(16)=8+4\ln 4.$$

معادلة المماس:

$$y-16=(8+4\ln 4)(x-4)$$

المقطع y:

$$x=0 \rightarrow y-16=(8+4\ln 4)(-4)$$

$$\Rightarrow y=-16-16\ln 4.$$

المقطع x:

$$y=0 \Rightarrow$$

$$-16=(8+4\ln 4)(x-4)$$

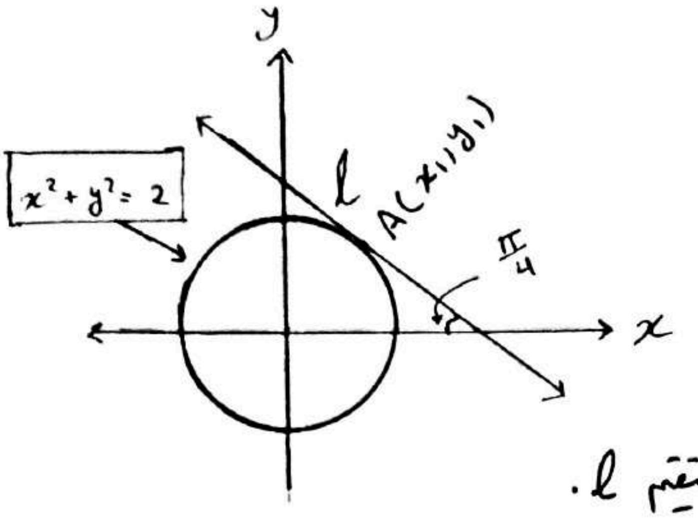
$$x=\frac{4+4\ln 4}{2+\ln 4}.$$

مساحة المثلث OBC

$$A=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4+4\ln 4}{2+\ln 4}\right)(-16-16\ln 4)$$

$$=\frac{32(1+\ln 4)^2}{2+\ln 4}$$

41) $\boxed{2023}$



يبين الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2+y^2=2$ والمستقيم l الذي يمثل مماساً لمنحنى العلاقة في الربع الأول. أجد معادلة المستقيم l.

__الحل:__ لتكن نقطة التماس هي $A(x_1, y_1)$

نجد ميل المماس لمشتقه $x^2+y^2=2$

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow \frac{2y\,y'}{2y}=\frac{-2x}{2y}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x_1}{y_1}.$$ (ميل المماس l)

ميل المماس l هو $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$

$$\Rightarrow -\frac{x_1}{y_1}=-1 \Rightarrow x_1=y_1$$

بتعويض (x_1, y_1) في المعادلة المعطاة نجد أن $x_1^2+y_1^2=2$

لكن $x_1=y_1 \Leftarrow x_1^2+x_1^2=2 \Leftarrow 2x_1^2=2 \Leftarrow x_1^2=1$

$x=-1$ تهمل لأن النقطة في الربع الأول $1-$ و $x_1=1$

$x_1=y_1 \Rightarrow y_1=1 \qquad A=(1,1)$

معادلة المستقيم l:

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y-1=-x+1 \Rightarrow y=-x+2$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي

① يمثل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم. إحدى الآتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسم صفراً:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

الحل:

$v(t) = s'(t) = \cos t$

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ©

---

② إذا كان: $y = uv$ وكان $u(1) = 2$, $u'(1) = 3$, $v(1) = -1$, $v'(1) = 1$ فإن $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

الحل:

$y = uv$

$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y'(1) = u(1)\,v'(1) + v(1)\,u'(1)$

$= (2)(1) + (-1)(3)$

$= 2 - 3 = -1$ (b)

---

③ إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$ فإن $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

الحل:

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$f''(x) = -\frac{2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$ (d)

---

④ إذا كان: $y = \tan 4t$ فإن $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2(4t)$ d) $4\sec^2(4t)$

الجواب: (d)

---

⑤ إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$ فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

الحل:

$2yy' - 2x = 0 \Rightarrow 2yy' = 2x$

$y' = \frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$

$m = y'\big|_{(1,\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ©

اختبار نهاية الوحدة

⑥ إذا كان: $f(x) = \log(2x-3)$

فإن $f'(x)$ هي:

a) $\dfrac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\dfrac{2}{2x-3}$

c) $\dfrac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\dfrac{1}{2x-3}$

الجواب (a)

---

⑦ إذا كان: $y = 2^{1-x}$ فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x=2$ هو

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

الحل:

$$y' = (-\ln 2)(2^{1-x})$$

$$y'\Big|_{x=2} = (-\ln 2)(2^{1-2})$$

$$= (-\ln 2)(2^{-1})$$

$$= \frac{-\ln 2}{2} \quad \text{(d)}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

⑧ $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

$$f(x) = e^x(x + x(x)^{\frac{1}{2}})$$

$$f(x) = e^x(x + x^{\frac{3}{2}})$$

$$f'(x) = e^x(1 + \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) + e^x(x + x^{\frac{3}{2}})$$

---

⑨ $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)(1) - (x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

---

⑩ $f(x) = \dfrac{1}{x} - 12\sec x.$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 12\sec x\tan x$$

---

⑪ $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}.$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)e^x - e^x(\frac{1}{x})}{(\ln x)^2}$$

---

⑫ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^4}$

$$f'(x) = \frac{x^4(\frac{1}{x}) - (\ln x)(4x^3)}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{x^3 - (\ln x)(4x^3)}{x^8}$$

اختبار نهاية الوحدة

إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x=2$ وكان:

$f(2)=3$, $f'(2)=-4$, $g(2)=1$

$g'(2)=2$

فأجد ما يلي:

(17) $(fg)'(2) = f(2)\,g'(2) + g(2)\,f'(2)$

$= (3)(2) + (1)(-4)$

$= 6 - 4 = 2$

---

(18) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)\,f'(2) - f(2)\,g'(2)}{g(2)^2}$

$= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{1^2}$

$= -4 - 6 = -10$

---

(19) $(3f - 4fg)'(2) =$

$3f'(2) - 4(fg)'(2) =$

$3(-4) - 4(2) =$

$-12 - 8 = -20$

من سؤال (17) $(fg)'(2) = 2$

---

(13) $f(x) = 5^{2-x}$

$f'(x) = (-1)\,5^{2-x}(\ln 5)$

$= (-\ln 5)\,5^{2-x}$.

---

(14) $f(x) = 10 \sin 0.5x$

$f'(x) = 10 \cos 0.5x\,(0.5)$

$= 5 \cos 0.5x$

---

(15) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) +$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2x}{x^4}\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3\left(2x + \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) +$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{-3}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)\right)$

---

(16) $f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$

$f'(x) = \left(e^{-1.5x}\right)\left(-\sin x^2\,(2x)\right) +$

$(\cos x^2)\left((-1.5)\,e^{-1.5x}\right)$.

$= -2x\,e^{-1.5x} \sin x^2 +$

$-1.5\,e^{-1.5x}(\cos x^2)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي:

(20) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f'(x) = x^7\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$$

$$f'(x) = x^6 + (7x^6)(\ln x)$$

$$f''(x) = 6x^5 + 7x^6\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5)$$

$$= 6x^5 + 7x^5 + (\ln x)(42x^5)$$

$$= 13x^5 + (42x^5)(\ln x)$$

(21) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x(-\sin x) - (\cos x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2(-x\cos x - \cancel{\sin x} + \cancel{\sin x}) - (2x)(\text{البسط})}{x^4}$$

$$= \frac{-x^3\cos x - (2x)(-x\sin x - \cos x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$$

يمكن حل (21) بطريقة أخرى:

$$f'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

توزيع البسط على المقام

$$f'(x) = \frac{-x\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x(-\cos x) + \sin x}{x^2} - \frac{x^2(-\sin x) - \cos x(2x)}{x^4}$$

توحيد المقامات:

$$f''(x) = \frac{-x^3\cos x + x^2\sin x + x^2\sin x + \cos x(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^2\sin x - x^3\cos x + 2x\cos x}{x^4}$$

(22) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(1) - (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)(\cancel{2})(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)}{(1+\sqrt{x})^4}.$$

$$= \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{(1+\sqrt{x})^4} = \frac{\frac{(1+\sqrt{x})^2}{4\sqrt{x}} - \frac{4+6\sqrt{x}+2x}{4\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$= \frac{\frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4 - 6\sqrt{x} - 2x}{4\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^4} = \frac{1+2\sqrt{x}+x-4-6\sqrt{x}-2x}{(4\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^4}$$

$$= \frac{-3-4\sqrt{x}-x}{(4\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^4}.$$

(23) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x - \cancel{2x^3} - 2x + \cancel{2x^3}}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-4(1+x^2)^2 + 16x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-4(1+x^2)^2 + 16x^2 + 16x^4}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-4(1+2x^2+x^4) + 16x^2 + 16x^4}{(1+x^2)^4} = \frac{-4 + {}^-8x^2 - 4x^4 + 16x^2 + 16x^4}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{12x^4 + 8x^2 - 4}{(1+x^2)^4}$$

اختبار نهاية الوحدة

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة :

24) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $x = 1$

$f(1) = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad (1 , \frac{1}{2})$

$f'(x) = \frac{(1+x)(2x) - x^2(1)}{(1+x)^2}$

$m = f'(1) = \frac{(1+1)(2) - 1^2}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$

معادلة المماس :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 1)$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

---

25) $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$, $x = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{(\frac{\pi}{4})^2}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{16}$. $\quad (\frac{\pi}{4} , \sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{16})$

$f'(x) = \frac{(\cos x)(2x) - x^2(-\sin x)}{\cos^2 x} \Rightarrow m = f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{(\cos\frac{\pi}{4})(2\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$

$m = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\pi}{2}) + (\frac{\pi^2}{16})(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi + \pi^2}{(16\sqrt{2})(\frac{1}{2})} = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}}$.

معادلة المماس :

$(y - \sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{16}) = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})$

اختبار نهاية الوحدة

(26) $f(x) = \ln(x+5)$ ، $x = 0$

$f(0) = \ln(0+5) = \ln 5$. $(0, \ln 5)$

$f'(x) = \frac{1}{x+5} \Rightarrow m = f'(0) = \frac{1}{5}$

$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \ln 5$.

---

(27) $f(x) = \sin x + \sin 3x$.

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$

$f'(x) = \cos x + 3\cos 3x$

$m = f'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + 3\cos\frac{3\pi}{4}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

معادلة المماس:

$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$

$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$.

---

(28) $x = t^2$, $y = t+2$, $t = 4$.

$x = 4^2 = 16$ / $y = 4+2 = 6$

نقطة التماس: $(16, 6)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow m = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$.

معادلة المماس:

$y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \Rightarrow y - 6 = \frac{1}{8}x - 2$

$y = \frac{1}{8}x + 4$.

اختبار نهاية الوحدة

29) $x = 4\cos t \quad , \quad y = 3\sin t \quad , \quad t = \frac{\pi}{4}$

$x = 4\cos\frac{\pi}{4} \quad , \quad y = 3\sin\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{4}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{4}{\sqrt{2}} , \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ نقطة التماس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t}{-4\sin t}$$

$$m = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{-\frac{4}{\sqrt{2}}} = -\frac{3}{4} .$$

معادلة المماس :

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{6}{\sqrt{2}} .$$

اذا كان : $y = x\ln x$ حيث : $x > 0$ فأجب عن السؤالين الآتيين :

30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1 , 0)$

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$m = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$

$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$ معادلة المماس :

31) أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2 .

$1 + \ln x = 2 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$y = x\ln x$

$y = e\ln e = e$

$\therefore$ النقطة المطلوبة هي (e , e)

اختبار نهاية الوحدة

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

(32) $x(x+y) = 2y^2$

$x^2 + xy = 2y^2$

$2x + xy' + y = 4yy'$

$2x + y = 4yy' - xy'$

$2x + y = y'(4y - x)$

$y' = \frac{2x+y}{4y-x}$.

(33) $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

$x^3 - xy = 2y$

$3x^2 - (xy' + y) = 2y'$

$3x^2 - xy' - y = 2y'$

$3x^2 - y = 2y' + xy'$

$3x^2 - y = y'(2+x)$

$y' = \frac{3x^2 - y}{2+x}$

(34) $y\cos x = x^2 + y^2$

$y(-\sin x) + \cos x\, y' = 2x + 2yy'$

$\cos x\, y' - 2yy' = 2x + y\sin x$

$y'(\cos x - 2y) = 2x + y\sin x$

$y' = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$.

(35) $2x e^y + y e^x = 3$

$2x(y'e^y) + 2e^y + ye^x + y'e^x = 0$

$2xy'e^y + y'e^x = -2e^y - ye^x$.

$y'(2xe^y + e^x) = -2e^y - ye^x$

$y' = \frac{-2e^y - ye^x}{2xe^y + e^x}$

36 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة :

$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1 , -1)$

$$2yy' = \frac{(2-x)(3x^2) - x^3(-1)}{(2-x)^2}$$

$$2(-1)y' = \frac{(2-1)(3(1)^2) - (1)^3(-1)}{(2-1)^2} \Rightarrow -2y' = \frac{3+1}{1}$$

$y' = \frac{4}{-2} = -2$ ميل المماس

$\frac{1}{2}$ = ميل العمودي .

معادلة العمودي :

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

---

37 $Y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} , x > 2$

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$y' = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right)$$

$$y' = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right) = \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

اختبار نهاية الوحدة

(38) $y = x^{\ln x} , \quad x > 0$

$\ln y = \ln x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = (\ln x)(\ln x)$

$\ln y = (\ln x)^2$

$\frac{y'}{y} = 2 \ln x \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow y' = 2y \frac{\ln x}{x} .$

$y' = \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) x^{\ln x} .$ بالتعويض مكان y .

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(39) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad , \quad (2, -1)$

$2x + 3xy' + 3y + 2yy' = 1 + 3y'$

$3xy' + 2yy' - 3y' = 1 - 2x - 3y$

$y'(3x + 2y - 3) = 1 - 2x - 3y \Longrightarrow y' = \frac{1 - 2x - 3y}{3x + 2y - 3}$

$m = y' \Big|_{(2,-1)} = \frac{1 - 2(2) - 3(-1)}{3(2) + 2(-1) - 3} = \frac{0}{1} = 0 \longleftarrow$ ميل المماس

معادلة المماس :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 0(x - 2)$

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \longleftarrow$ معادلة المماس

40 $x^2 e^y = 1$ ، $(1,0)$

$x^2 e^y y' + 2x e^y = 0$

$1(e^0)\, y' + (2)(1)\, e^0 = 0$

$(1)(1)\, y' + (2)(1)(1) = 0 \Rightarrow y' + 2 = 0 \Rightarrow y' = -2$

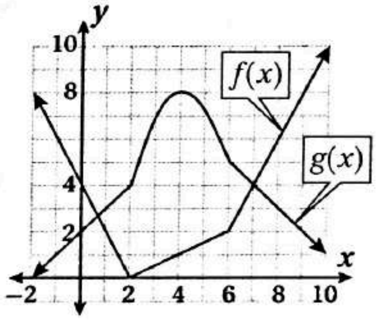
$\therefore m = -2$

معادلة المماس :

$y - 0 = -2(x - 1)$

$y = -2x + 2$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و$g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$، وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا مِمّا يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

---

41 $p'(1)$.

الحل:

$f(1) = 2$

$(0,4)$ ، $(2,0)$

$m = \frac{4-0}{0-2} = -2 \Rightarrow f'(1) = -2$

$g(1) = 3$

$(0,2)$ ، $(2,4)$

$m = \frac{4-2}{2-0} = 1 \Rightarrow g'(1) = 1$

$p(x) = f(x)\, g(x)$

$p'(1) = f(1)\, g'(1) + g(1)\, f'(1)$

$= (2)(1) + (3)(-2) = -4$

---

42 $p'(4)$

$f(4) = 1$ ، $(2,0)$ ، $(6,2) \Rightarrow m = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}$.

$g(4) = 8$ ، $g'(4) = 0$ (مماس أفقي)

$p(x) = f(x)\, g(x)$

$p'(4) = f(4)\, g'(4) + g(4)\, f'(4)$

$= (1)(0) + (8)(\frac{1}{2}) = 0 + 4 = 4$

43) $q'(7)$

$f(7) = 4$, $(6,2)$, $(8,6)$

$m = \frac{2-6}{6-8} = 2 \Rightarrow f'(7) = 2.$

$g(7) = 4$, $(6,5)$, $(8,3)$

$m = \frac{5-3}{6-8} = -1 \Rightarrow g'(7) = -1$

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$q'(7) = \frac{g(7)\,f'(7) - f(7)\,g'(7)}{(g(7))^2} = \frac{(4)(2) - (4)(-1)}{(4)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

---

44) يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها 200g من عنصر مشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$

أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

الحل:

$R(t) = 200(0.9)^t$

$\frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln(0.9)$

$\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln(0.9)$

$\approx -17.1\ g/day.$

---

45) يمثل الاقتران موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$

حيث s الموقع بالسنتيمترات و t الزمن بالثواني

أجد سرعة الجسم وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$

$v(t) = \frac{1}{4}\cos(10\pi t)(10\pi)$

$= \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$

$a(t) = -\frac{5\pi}{2}\sin(10\pi t)(10\pi)$

$= -25\pi^2 \sin(10\pi t)$