المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي إبراهيم عقله القادري أيمن ناصر صندوقه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2022/3)، تاريخ 2022/5/12 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2022/17)، تاريخ 2022/5/29 م، بدءًا من العام الدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 426 - 2

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/789)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتاب الطالب: الصف الثاني عشر الفرع الأدبي: الفصل الدراسي الأول/ المركز الوطني لتطوير المناهج.– عمّان: المركز، 2023

(128) ص.

ر.إ.: 2023/2/789

الواصفات: الرياضيات/ الكتب الدراسية/ / أساليب التدريس/ / التعليم الثانوي/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1443 هـ / 2022 م

أعيدت طباعته 2023 م – 2024 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عناية كبيرةً، وأَعَدَّها وَفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القِيَم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغْيَةَ إعداد الطلبة للدراسة الجامعية إعدادًا جيِّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرِّجة تتيح للطلبة فرصة تعلُّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضًا تقديم الموضوعات بطريقة منظمة جاذبة ومُدعَّمة بتمثيلات بيانية، ومُزوَّدة بإرشادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلُّمهم بسلاسة من دون تعثُّر؛ فهي تُذكِّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتسبوها سابقًا، وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطًا وثيقًا، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتية تُحفِّز الطلبة على تعلُّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائية؛ فقد تضمَّن كتابا الطالب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسي، بوصفه مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيَّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقِّق العدالة في التعلُّم.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نُؤمِّل أنْ ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة
1

الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية
Logarithmic and Exponential Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمَل الأُسس واللوغاريتمات لنمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية التي تتضمَّن تزايدًا أو تناقصًا كبيرًا للقِيَم، مثل: الموجات الزلزالية، والنمو البكتيري. سأتعرَّف في هذه الوحدة الاقتران الأُسِّي والاقتران اللوغاريتمي، والخصائص الجبرية لكلٍّ منهما، وبعض تطبيقاتهما الحياتية والعلمية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ قوانين الأُسس النسبية.
- ✓ حَلّ المعادلة الأُسِّية.
- ✓ إيجاد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد.
- ✓ تمثيل الاقترانات بيانيًا.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◂ الاقتران الأُسِّي، وخصائصه، وتمثيله البياني.
- ◂ الاقتران اللوغاريتمي، وخصائصه، وتمثيله البياني.
- ◂ قوانين اللوغاريتمات.
- ◂ حَلّ المعادلات الأُسِّية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة)، في الصفحتين (6) و (7) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس

1

الاقترانات الأُسِّية

Exponential Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران الأُسِّي، وخصائصه، وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحات الاقتران الأُسِّي.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 325(0.25)^t$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث P مَقيسة بوحدة $\mu g/mL$. أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله.

الاقتران الأُسّي

الاقتران الأُسِّي (exponential function) اقتــران يُكتَب في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 0$، و $b \neq 1$، ومن أمثلته:

$$f(x) = 3^x \quad , \quad f(x) = (\tfrac{1}{4})^x \quad , \quad f(x) = (0.6)^x$$

يُمكِن استعمال تعريف الأُسس وخصائصها لإيجاد قيمة الاقتران الأُسِّي عند أيِّ قيمة معطاة.

أتعلَّم

إذا كان $b < 0$، فــإنَّ الاقتــران الأُسِّــي يكون غيــر مُعرَّف عنــد بعض القِيَــم، مثل $x = \frac{1}{2}$؛ لأنَّه ســيتضمَّن جذرًا تربيعيًّا لقيمة ســالبة. أمّا إذا كان $b = 1$، فإنَّ هذا الاقتران يصبــح ثابتًا فــي صورة: $f(x) = 1$.

مثال 1

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = 4^x , x = 3$

الاقتران المعطى	$f(x) = 4^x$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 4^3$
$4^3 = 64$	$= 64$

أتذكَّر

اقترانات القوَّة، مثل: $f(x) = x^3$، ليست اقترانات أُسِّية؛ لأنَّ المُتغيِّر موجود في الأساس، لا في الأُسِّ.

② $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}, x = -2$

$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ الاقتران المعطى

$f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ بتعويض $x = -2$

$= 25$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

أتذكَّر

$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = 3^{x}, x = 4$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}, x = -1$

التمثيل البياني للاقتران الأسِّي، وخصائصه

يُمكِن تمثيل الاقتران الأُسِّي الذي في صورة: $f(x) = b^{x}$، حيث: $b > 1$، بإنشاء جدول قِيَم، ثم تعيين الأزواج المُرتَّبة الناتجة من الجدول في المستوى الإحداثي، ثم توصيل النقاط بعضها ببعض عن طريق منحنى متصل.

يُمكِن أيضًا استعمال التمثيل البياني لاستكشاف خصائص الاقتران الأُسِّي.

مثال 2

إذا كان: $f(x) = 2^{x}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

① أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

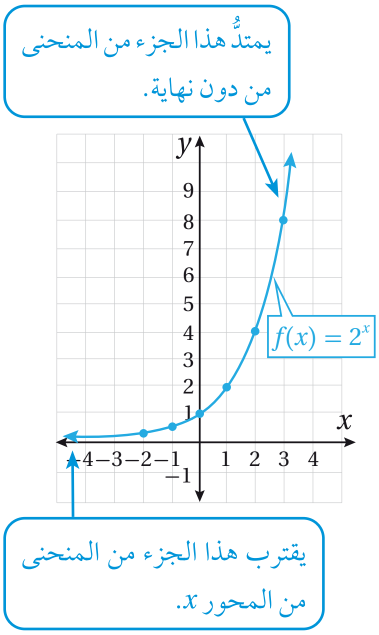
x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$(-2, \frac{1}{4})$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$

أتذكَّر

$a^{0} = 1$

الخطوة 2 : أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



إذن، مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو الفترة $(0, \infty)$، وله خط تقارب أفقي هو المحور x.

2 **أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.**

بما أنَّ 2^x موجبة دائمًا، فإنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x؛ لأنَّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$.

3 **هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟**

الاقتران $f(x)$ مُتزايِد؛ لأنَّه كلَّما زادت قِيَم x زادت قِيَم y.

4 **هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟**

نعم، الاقتران $f(x)$ واحد لواحد، ويُمكِن التحقُّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = 3^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

a) أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

c) هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

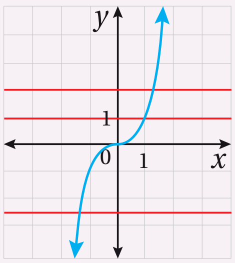
أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ الاقتران: $f(x) = 2^x$ مُتزايِد، وأنَّ مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أُسِّي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 1$ له الخصائص نفسها.

أتذكَّر

- المجال هو مجموعة القِيَم التي توجد على المحور x، ويكون الاقتران مُعرَّفًا عندها.
- المدى هو مجموعة القِيَم التي توجد على المحور y، وتكون صورًا لقِيَم x الواقعة ضمن مجال الاقتران.
- خط التقارب هو خط مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران.

أتذكَّر

يُطلَق على الاقتران الذي يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله اسم اقتران واحد لواحد، ويُمكِن التحقُّق من ذلك عن طريق اختبار الخط الأفقي؛ إذ لا يوجد خط أفقي يُمكِنه قطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة واحدة.



سأتعلّم في المثال الآتي التمثيل البياني للاقتران الأُسّي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $0 < b < 1$، وأستكشف خصائصه.

مثال 3

إذا كان: $f(x) = (\frac{1}{2})^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

1 أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

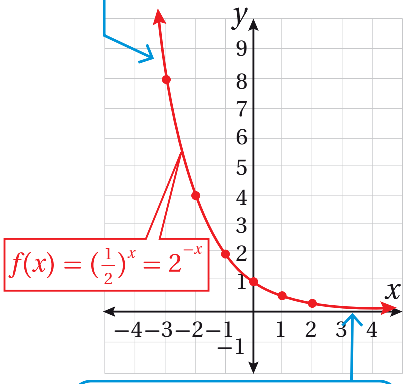
الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(1, \frac{1}{2})$	$(2, \frac{1}{4})$

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

يمتدُّ هذا الجزء من المنحنى من دون نهاية.



يقترب هذا الجزء من المنحنى من المحور x.

إذن، مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو الفترة $(0, \infty)$، وله خط تقارب أفقي هو المحور x.

أتعلَّم

أكتب الاقتران: $f(x) = (\frac{1}{b})^x$ في صورة: $f(x) = b^{-x}$؛ لأنَّ $(\frac{1}{b})^x = b^{-x}$.

2 أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

بما أنَّ $(\frac{1}{2})^x$ موجبة دائمًا، فإنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور x؛ لأنَّ $y > 0$ دائمًا.

المقطع y للاقتران هو 1 عندما $x = 0$.

3 هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

الاقتران $f(x)$ مُتناقِص؛ لأنَّه كلَّما زادت قِيَم x تناقصت قِيَم y.

4 هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

نعم، الاقتران $f(x)$ واحد لواحد، ويُمكِن التحقُّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

a) أُمثِّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

c) هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

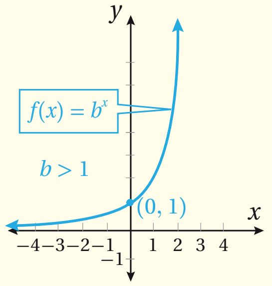
أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ الاقتران: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ مُتناقِص، وأنَّ مجاله هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وله خط تقارب أفقي هو المحور x، وهو اقتران واحد لواحد. وبوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أُسِّي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: $0 < b < 1$ له الخصائص نفسها.

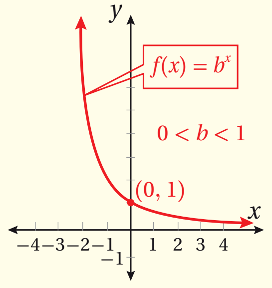
مُلخَّص المفهوم

خصائص الاقتران الأُسِّي

التمثيل البياني للاقتران الأُسِّي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث: b عدد حقيقي، و $b \neq 1, b > 0$ له الخصائص الآتية:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x.
- الاقتران الأُسِّي يقطع المحور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$، ولا يقطع المحور x.
- اقتران واحد لواحد.





خصائص الاقتران الأسِّي في صورة: $f(x) = ab^{x-h} + k$

يُمكِن تحديد خط التقارب الأفقي لأيِّ اقتران أُسِّي صورته: $f(x) = ab^{x-h} + k$، ويُمكِن أيضًا تحديد مجال هذا الاقتران ومداه؛ سواء أكان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا، على النحو الآتي:

مفهوم أساسي

خصائص الاقتران الأسِّي في صورة: $f(x) = ab^{x-h} + k$

إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^{x-h} + k$، حيث: a, b, k, h أعداد حقيقية، و$a > 0, b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞).
- الاقتران $f(x)$ مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران $f(x)$ مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًّا هو المستقيم $y = k$.

مثال 4

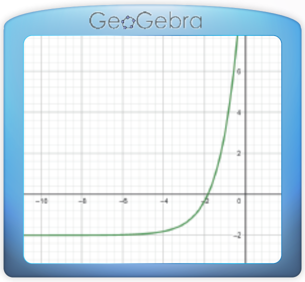
أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

1 $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

بالنظر إلى الاقتران $f(x)$، أُلاحِظ أنَّ: $a = 5, b = 3, h = -1, k = -2$. إذن:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = -2$.
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(-2, \infty)$.
- بما أنَّ $b = 3 > 1$، فإنَّ الاقتران $f(x)$ مُتزايِد.

الدعم البياني



يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا، وذلك بإدخال الاقتران في شريط المعادلة، ثم الضغط على زرِّ الإدخال (Enter).

يُبيِّن التمثيل البياني للاقتران $f(x)$ أنَّه مُتزايِد، وأنَّ خط تقاربه الأفقي هو $y = -2$.

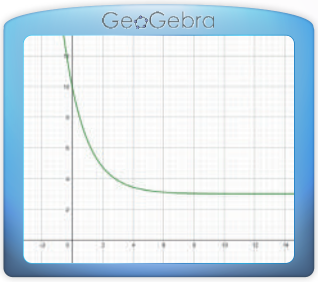
② $f(x) = 7\,(2)^{-x} + 3$

يُمكِن إعادة كتابة الاقتران $f(x)$ في صورة: $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ: $a = 7, b = \frac{1}{2}, h = 0, k = 3$. إذن:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = 3$.
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(3, \infty)$.
- بما أنَّ $b = \frac{1}{2}$، فإنَّ الاقتران $f(x)$ مُتناقِص.

الدعم البياني

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا. ويظهر في التمثيل البياني أنَّ الاقتران مُتناقِص، وأنَّ خط تقاربه الأفقي هو $y = 3$.



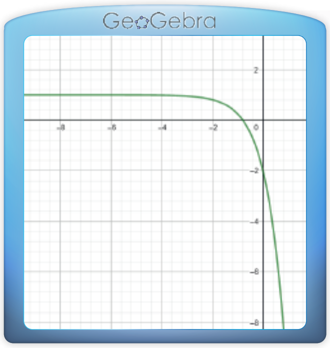
③ $f(x) = -3(4)^{x} + 1$

بالنظر إلى الاقتران $f(x)$، أُلاحِظ أنَّ: $a = -3, b = 4, h = 0, k = 1$. إذن:

- خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)$ هو $y = 1$.
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(-\infty, 1)$.
- بما أنَّ $b = 4$، فإنَّ الاقتران $f(x)$ مُتناقِص.

الدعم البياني

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $f(x)$ بيانيًّا. ويظهر في التمثيل البياني أنَّ الاقتران مُتناقِص، وأنَّ خط تقاربه الأفقي هو $y = 1$، وأنَّ مداه هو الفترة $(-\infty, 1)$.



أتعلَّم

إذا كانت قيمة a سالبة، فإنَّ مدى الاقتران الأُسِّي: $f(x) = ab^{x-h} + k$ هو الفترة $(-\infty, k)$.

أتحقَّق من فهمي

أجـد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

a) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ b) $f(x) = 4\,(5)^{-x}$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}\,(3)^{x-1} + 2$

يستفاد من الاقترانات الأُسِّية في كثير من التطبيقات الحياتية، مثل حساب عدد الكائنات الحيَّة التي تتكاثر سريعًا.

مثال 5 : من الحياة

حشـرات: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 30\,(2)^x$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيسِ دقيقٍ، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

1 أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع.

الاقتران المعطى	$f(x) = 30\,(2)^x$
بتعويض $x = 6$	$f(6) = 30(2)^6$
بالتبسيط	$= 1920$

إذن، عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع هو 1920 حشرة.

2 بعد كم أسبوعًا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة؟

الاقتران المعطى	$f(x) = 30\,(2)^x$
بتعويض $f(x) = 7680$	$7680 = 30\,(2)^x$
بالتبسيط	$256 = (2)^x$
$256 = (2)^8$	$(2)^8 = (2)^x$
بمساواة الأُسس	$x = 8$

إذن، يصبح عدد الحشرات 7680 حشرة بعد 8 أسابيع.

معلومة

تُعَدُّ خنفساء الدقيق إحدى الآفات الضارَّة بالحبوب، وهي تعيش في مخازن الدقيق والقمح، حيث تتغذّى بهما، مُخلِّفةً رائحة كريهة مُميَّزة.

أتحقَّق من فهمي

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 500\,(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 4000 خلية؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (11)^x \, , x = 3$

2) $f(x) = -5(2)^x \, , x = 1$

3) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x \, , x = 2$

4) $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$

5) $f(x) = 3^x + 1, x = 5$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 4^x$

8) $f(x) = 9^{-x}$

9) $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

10) $f(x) = 3(6)^x$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

11) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

12) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

13) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

14) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

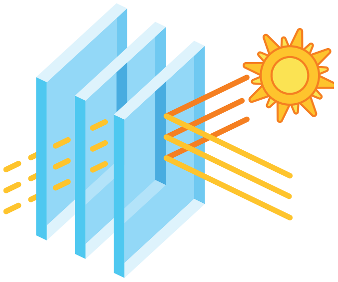
بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 7000\,(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

15) أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

16) أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

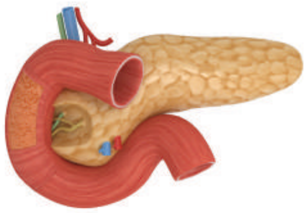
ضوء: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 100\,(0.97)^x$ النسبة المئوية للضوء المارِّ خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:



18 أجد النسبة المئوية للضوء المارِّ خلال لوح زجاجي واحد.

19 أجد النسبة المئوية للضوء المارِّ خلال 3 ألواح زجاجية.

سرطان البنكرياس: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$ النسبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، مِمَّنْ هم في المرحلة المُتقدِّمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض:



20 أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض.

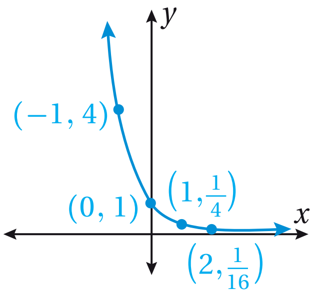
21 بعد كم سنةً تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟

معلومة

يُصنَّف سرطان البنكرياس إلى أنواع عديدة تبعًا لنوع خلايا البنكرياس التي يصيبها. وأشهر هذه الأنواع هو سرطان القناة البنكرياسية الذي يُكتشَف غالبًا في مراحل مُتقدِّمة؛ نتيجةً لعدم ظهور الأعراض، أو ظهورها بصورة بسيطة في مراحل المرض الأولى.

مهارات التفكير العليا

22 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$. أجد $f(3)$، مُبرِّرًا إجابتي.



23 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$y = 5(3)^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$f(x) = 2(4)^x$

$y = 3^x$

24 **تحدٍّ:** إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسِّيًّا، فأُثبِت أنَّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

الدرس 2

النمو والاضمحلال الأُسِّي
Exponential Growth and Decay

فكرة الدرس تعرُّف خصائص كلٍّ من اقتران النمو الأُسِّي، واقتران الاضمحلال الأُسِّي.

المصطلحات اقتران النمو الأُسِّي، عامل النمو، اقتران الاضمحلال الأُسِّي، عامل الاضمحلال، الربح المُركَّب، الأساس الطبيعي، الاقتران الأُسِّي الطبيعي، الربح المُركَّب المستمر.

مسألة اليوم بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني قرابة 2.6% سنويًّا، فأجد العدد التقريبي للسكّان عام 2030م.

اقتران النمو الأُسِّي

تزداد بعض الكمِّيات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

يُمكِن إيجاد مقادير هذه الكمِّيات التي ازدادت بعد t فترة من الزمن باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

يُطلَق على هذا الاقتران اسم **اقتران النمو الأُسِّي** (exponential growth function)، حيث t الفترة الزمنية، و a الكمِّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة. أمّا أساس العبارة الأُسِّية $(1 + r)$ فيُسمّى **عامل النمو** (growth factor).

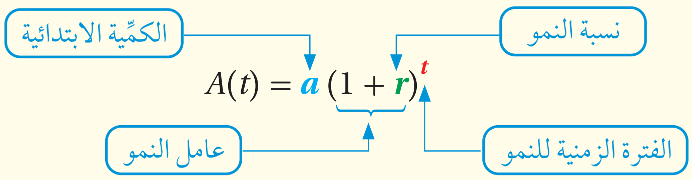
أتعلَّم

اقتران النمو الأُسِّي: $A(t) = a(1 + r)^t$ هو إحدى صور الاقتران الأُسِّي: $f(x) = b^x$، حيث استُعمِل المقدار $1 + r$ بدلًا من b، واستُعمِل t بدلًا من x.

مفهوم أساسي **اقتران النمو الأُسِّي**

بالكلمات: اقتران النمو الأُسِّي هو كل اقتران أُسِّي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:



$$A(t) = a\,\underbrace{(1 + r)}^{t}$$

مثال 1 : من الحياة

خِراف: في دراسة شملت إحدى مَزارع الأغنام، تبيَّن أنَّ عدد الخِراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويًّا:

1 أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخِراف بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 1524 خروفًا.

اقتران النمو الأُسِّي $A(t) = a(1 + r)^t$

بتعويض $a = 1524, r = 0.31$ $= 1524(1 + 0.31)^t$

بالتبسيط $= 1524(1.31)^t$

إذن، اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخِراف بعد t سنة هو: $A(t) = 1524(1.31)^t$.

2 أجد عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدْء الدراسة.

لإيجاد عدد الخِراف بعد 5 سنوات، أُعوِّض $t = 5$:

اقتران النمو الأُسِّي للخِراف $A(t) = 1524(1.31)^t$

بتعويض $t = 5$ $A(5) = 1524(1.31)^5$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 5880

إذن، عدد الخِراف بعد 5 سنوات من بَدْء الدراسة هو 5880 خروفًا تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيَّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًّا:

a) أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة.

اقتران الاضمحلال الأسِّي

كما هو الحال في النمو الأُسِّـي، يُمكِن تمثيل النقص في كمِّية ما، بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، باستعمال الاقتران الآتي:

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

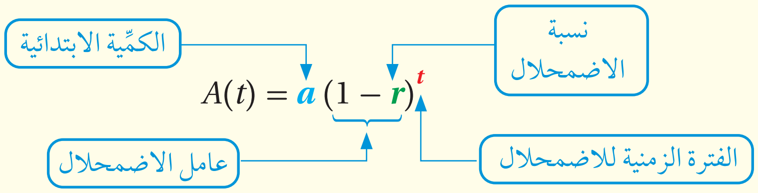
يُطلَق على هذا الاقتران اسم **اقتران الاضمحلال الأُسِّي** (exponential decay function)، حيـث t الفترة الزمنية، و a الكمِّية الابتدائية، و r النسـبة المئويـة للاضمحلال في فترة زمنية مُحدَّدة. أمّا أساس العبارة الأُسِّية $(1 - r)$ فيُسمّى **عامل الاضمحلال** (decay factor).

مفهوم أساسي

اقتران الاضمحلال الأسِّي

بالكلمات: اقتران الاضمحلال الأُسِّـي هو اقتران أُسِّي يتناقص بنسـبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

بالرموز:



مثال 2 : من الحياة

مواد مُشِـعَّة: تتناقص 20 g من أحد النظائر المُشِعَّة لعنصر الثوريوم (Th225) بنسبة 8% كل دقيقة نتيجة الإشعاع:

1 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي الذي يُمثِّل كمِّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقِّية بعد t دقيقة.

$A(t) = a(1 - r)^t$ اقتران الاضمحلال الأُسِّي

$= 20(1 - 0.08)^t$ بتعويض $a = 20, r = 0.08$

$= 20(0.92)^t$ بالتبسيط

إذن، اقتران الاضمحلال الأُسِّـي الذي يُمثِّل كمِّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقِّية بعد t دقيقة هو:

$A(t) = 20(0.92)^t$.

2 أجد كمِّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقِّية بعد 5 دقائق.

$A(t) = 20(0.92)^t$ اقتران الاضمحلال الأُسِّي للثوريوم

$= 20(0.92)^5$ بتعويض $t = 5$

≈ 13.18 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، كمِّية الثوريوم (بالغرام) المُتبقِّية بعد 5 دقائق هي 13.18 g تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

سيّارة: اشترت سوسن سيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500. إذا كان ثمن السيّارة يقلُّ بنسبة 5% سنويًّا، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

b) أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

معلومة

تحتوي السيّارة الهجينة القابلة للشحن على مُحرِّك كهربائي، ومُحرِّك احتراق داخلي.

الربح المُركَّب

يستفاد من اقتران النمو الأُسِّي في تطبيقات حياتية عديدة، منها **الربح المُركَّب** (compound interest)؛ وهو الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يُسمّى رأس المال، والفوائد المستحقة سابقًا.

مفهوم أساسي

الربح المُركَّب

بالكلمات: يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A: جُمْلة المبلغ.

P: المبلغ الأصلي.

r: مُعدَّل الفائدة السنوي.

n: عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة.

t: عدد السنوات.

معلومة

يُستعمَل الربح المُركَّب في البنوك التجارية، خلافًا للبنوك الإسلامية التي تقوم على الاستثمار وَفق مبادئ الشريعة الإسلامية وأحكامها.

مثال 3

استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.46%، وتضاف كل 3 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

صيغة الربح المُركَّب	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
بتعويض $P = 9000,\ r = 0.0146,\ n = 4,\ t = 3$	$= 9000\left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4(3)}$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 9402.21

إذن، جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 9402.21 تقريبًا.

أتعلَّم

يستحق مبلغ الفائدة كل 3 أشهر؛ ما يعني أنَّه يضاف إلى المبلغ الأصلي 4 مَرّات في السنة.

أتحقَّق من فهمي

استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

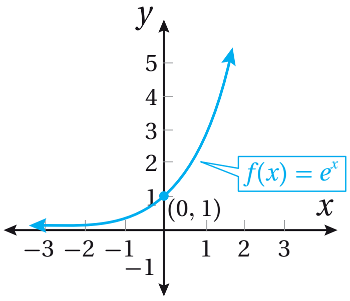
الاقتران الأُسّي الطبيعي

في كثير من التطبيقات الحياتية، يكون الاختيار الأمثل لأساس الاقتران الأُسِّي هو العدد غير النسبي ...2.718281828 الذي يُسمّى **الأساس الطبيعي** (natural base)، ويُرمَز إليه بالرمز e. وفي هذه الحالة، يُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ **الاقتران الأُسِّي الطبيعي** (natural exponential function).

لغة الرياضيات

يُطلَق على الأساس الطبيعي أيضًا اسم العدد النيبيري.

أُلاحِظ من الشكل المجاور أنَّ خصائص التمثيل البياني للاقتران الأُسِّي الطبيعي هي نفسها خصائص التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 1$.



توجد تطبيقات عديدة للاقتران الأُسِّي الطبيعي، منها حساب **الربح المُركَّب المستمر** (continuously compounded interest)؛ وهو عملية حساب جُمْلة المبلغ بعد إضافة الربح المُركَّب إلى رأس المال عددًا لانهائيًّا من المَرّات في السنة.

مفهوم أساسي

الربح المُركَّب المستمر

بالكلمات: يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

بالرموز:

r: مُعدَّل الفائدة المستمر.

t: عدد السنوات.

$$\overset{\text{جُمْلة المبلغ.}}{A} = \underset{\text{المبلغ الأصلي.}}{P}\, e^{\overbrace{rt}}$$

مثال 4

أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 10 سنوات.

صيغة الربح المُركَّب المستمر $A = Pe^{rt}$

بتعويض $P = 4500,\ r = 0.04,\ t = 10$ $= 4500e^{0.04(10)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 6713.21

إذن، جُمْلة المبلغ بعد 10 سنوات: JD 6713.21 تقريبًا.

أتعلَّم

لإيجاد قيمة $4500e^{0.4}$ باستعمال الآلة الحاسبة، أضغط على الأزرار الآتية:

4 5 0 0

SHIFT e^x

0 . 4 =

6713.2111393857

أتحقَّق من فهمي

أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.2%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

يبلغ عدد المشــــاركين في مؤتمر طبي 150 طبيبًا هذه السنة، ويُتوقَّع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:

1 أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد المشاركين بعد t سنة.

2 أجد عدد المشاركين المُتوقَّع بعد 5 سنوات.

استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

3 أكتب اقتران النمو الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

4 أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م.

سيّارة: **يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويًّا:**

5 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي لثمن السيّارة بعد t سنة.

6 أجد ثمن السيّارة بعد 3 سنوات.

بكتيريا: **يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العيِّنة:**

7 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي الذي يُمثِّل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علمًا بأنَّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

8 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 7 ساعات.

9 دجاج: يَنْفُق الدجاج في مزرعة للدواجن بنســـبة 25% يوميًّا نتيجة إصابته بمرض ما. أجد العدد المُتبقّي منه بعد 5 أيام من بَدْء المرض، علمًا بأنَّ عدده الأوَّلي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.

11 أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.

13 أجد جُمْلة المبلغ بعد 6 سنوات.

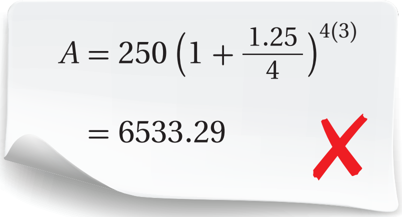
14 أودع حسام مبلغ JD 9000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 7 سنوات.

15 أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.9%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

16 **ذباب الفاكهة:** أَعَدَّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصَّل إلى أنَّه يُمكِن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

مهارات التفكير العليا

17 **أكتشف الخطأ:** أوجد رامي جُمْلة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.25%، وتضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:



$$A = 250\left(1+\frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رامي، ثم أُصحِّحه.

18 **تحدٍّ:** اكتُشِفت 12 إصابة بالإنفلونزا الموسمية في إحدى البلدات، ولوحِظ أنَّ عدد الإصابات بهذا المرض في كل أسبوع يساوي ثلاثة أمثال عددها في الأسبوع السابق. أكتب اقترانًا يُمثِّل عدد الإصابات بهذا المرض بعد t أسبوعًا من اكتشاف حالات الإصابة الأولى.

الدرس 3

الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

فكرة الدرس تعرُّف الاقتران اللوغاريتمي، وخصائصه، وتمثيله بيانيًّا.

المصطلحات الاقتران اللوغاريتمي للأساس b.

مسألة اليوم يُستعمَل الاقتران: $R = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ لحساب قوَّة زلزال وَفق مقياس ريختر، حيث I شِدَّة الزلزال المراد قياسه، و I_0 أقل شِدَّة للزلزال الذي يُمكِن للإنسان الإحساس به. ماذا يُمثِّل الرمز log في هذا الاقتران؟

الاقتران اللوغاريتمي، والعبارات اللوغاريتمية

أتعلَّم

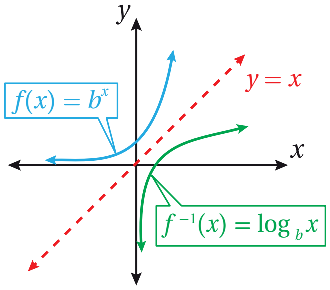
ألاحِظ أنَّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ أيَّ اقتران يجتاز اختبار الخط الأفقي هو اقتران واحد لواحد، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد اقتران عكسي له.

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد اقتران عكسي للاقتران الأُسِّي الذي صورته: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 0, b \neq 1$.

يُطلَق على الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي: $f(x) = b^x$ اسم **الاقتران اللوغاريتمي للأساس b** (logarithmic function with base b)، ويُرمَز إليه بالرمز $g(x) = \log_b x$، ويُقرَأ: لوغاريتم x للأساس b.

إذن، إذا كان الاقتران: $f(x) = b^x$، حيث: $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ $f^{-1}(x) = \log_b x$. ويُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني للاقترانين معًا.



مفهوم أساسي

العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان: $x > 0, b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسِّية
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$
الأساس: b، الأُسُّ: y		الأساس: b، الأُسُّ: y

يُمكِن استعمال تعريف اللوغاريتم لتحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأُسِّية.

مثال 1

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

① $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 2^3 = 8$

② $\log_{23} 23 = 1$

$\log_{23} 23 = 1 \rightarrow 23^1 = 23$

③ $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$

$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \rightarrow (10)^{-2} = \frac{1}{100}$

④ $\log_7 1 = 0$

$\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = 1$

أتحقَّق من فهمي أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$

يُمكِن أيضًا استعمال تعريف اللوغاريتم لتحويل المعادلة من الصورة الأُسِّية إلى الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

① $8^3 = 512$

$8^3 = 512 \rightarrow \log_8 512 = 3$

② $25^{\frac{1}{2}} = 5$

$25^{\frac{1}{2}} = 5 \rightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

③ $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

$(5)^{-3} = \frac{1}{125} \rightarrow \log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

④ $27^0 = 1$

$27^0 = 1 \rightarrow \log_{27} 1 = 0$

أتذكَّر

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$ والصورة الأُسِّية: $b^y = x$ مُتكافِئتان.

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية

أستنتج من العلاقة بين الصورة الأُسِّية والصورة اللوغاريتمية أنَّ اللوغاريتم أُسٌّ، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية البسيطة باستعمال قوانين الأُسس.

مثال 3

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\log_2 64$

بافتراض أنَّ المقدار يساوي y ‏ $\log_2 64 = y$

الصيغة الأُسِّية ‏ $2^y = 64$

$64 = 2^6$ ‏ $2^y = 2^6$

بمساواة الأُسس ‏ $y = 6$

إذن: $\log_2 64 = 6$

2 $\log_{13} \sqrt{13}$

بافتراض أنَّ المقدار يساوي y ‏ $\log_{13} \sqrt{13} = y$

الصيغة الأُسِّية ‏ $13^y = \sqrt{13}$

$\sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$ ‏ $13^y = 13^{\frac{1}{2}}$

بمساواة الأُسس ‏ $y = \frac{1}{2}$

إذن: $\log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$

3 $\log_{36} 6$

بافتراض أنَّ المقدار يساوي y ‏ $\log_{36} 6 = y$

الصيغة الأُسِّية ‏ $36^y = 6$

$36 = 6^2$ ‏ $(6^2)^y = 6$

قانون قوَّة القوَّة ‏ $6^{2y} = 6$

بمساواة الأُسس ‏ $2y = 1$

بحَلِّ المعادلة ‏ $y = \frac{1}{2}$

إذن: $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

4 $\log_{10} 0.1$

بافتراض أنَّ المقدار يساوي y ‏ $\log_{10} 0.1 = y$

الصيغة الأُسِّية ‏ $10^y = 0.1$

$0.1 = \frac{1}{10}$ ‏ $10^y = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} = 10^{-1}$ ‏ $10^y = 10^{-1}$

بمساواة الأُسس ‏ $y = -1$

إذن: $\log_{10} 0.1 = -1$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_5 25$

b) $\log_8 \sqrt{8}$

c) $\log_{81} 9$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

يُمكِن استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات من الأمثلة السابقة.

مفهوم أساسي

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان: $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\log_b x = \log_b x$

أتعلَّم

$\log_b 0$ غير مُعرَّف؛ لأنَّ $b^x \neq 0$ لأيِّ قيمة x.

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

① $\log_3 1$

$\log_3 1 = 0$ $\log_b 1 = 0$

② $\log_{17} \sqrt{17}$

$\log_{17} \sqrt{17} = \log_{17} 17^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{17} = 17^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$ $\log_b b^x = x$

③ $\log_5 5$

$\log_5 5 = 1$ $\log_b b = 1$

④ $7^{\log_7 5}$

$7^{\log_7 5} = 5$ $b^{\log_b x} = x$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$ b) $\log_{32} \sqrt{32}$ c) $\log_9 9$ d) $8^{\log_8 13}$

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًّا

يُمكِن استعمال العلاقة العكسية بين الاقتران الأُسِّي والاقتران اللوغاريتمي لتمثيل الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته: $y = \log_b x$.

مثال 5

أُمثِّـل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثـم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه مـن المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

① $f(x) = \log_2 x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

بما أنَّ المعادلة: $y = \log_2 x$ تُكافِئ المعادلة: $x = 2^y$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد الأزواج المُرتَّبة اللازمة لتمثيــل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجــاد قِيَم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة: $x = 2^y$.

4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$x = 2^y$
2	1	0	-1	-2	y
$(4, 2)$	$(2, 1)$	$(1, 0)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{4}, -2)$	(x, y)

① أختار بعض قِيَم y.

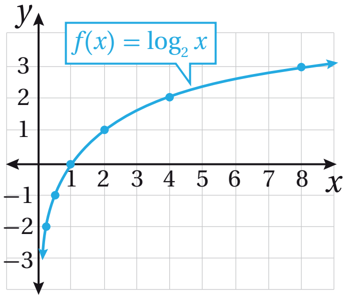
② أجد قِيَم x المُناظِرة.

أتعلَّم

يُمكِـن أيضًا إنشـاء جدول القِيَم باختيار قِيَم للمُتغيِّر x تتناسـب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته: $f(x) = \log_2 x$، ويَسْـهُل عـن طريقهـا اسـتعمال الخصائـص الأساسية للوغاريتمات.

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المســتوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_2 x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتزايِد.

2 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الخطوة 1: أُنشِئ جدول قِيَم.

بما أنَّ المعادلة: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافِئ المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$، فإنَّه يُمكِنني إيجاد الأزواج المُرتَّبة اللازمة لتمثيل الاقتران $f(x)$ باختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها، عن طريق التعويض في المعادلة: $x = (\frac{1}{2})^y$.

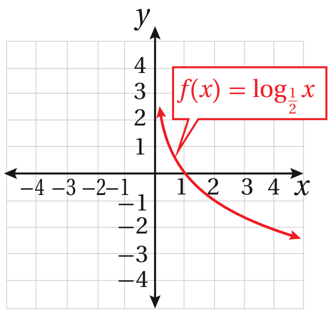
$x = (\frac{1}{2})^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2
(x, y)	$(\frac{1}{4}, 2)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(1, 0)$	$(2, -1)$	$(4, -2)$

1 أختار قِيَمًا لـ y.

2 أجد قِيَم x.

الخطوة 2: أُمثِّل الاقتران في المستوى الإحداثي.

أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، ثم أَصِل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ من التمثيل البياني للاقتران: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ أنَّ:

- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1، وأنَّه لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتناقِص.

معلومة

ابن حمزة المغربي عالِم مسلم أبدع في علوم الرياضيات، ووضع حجر الأساس لعلم اللوغاريتمات.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

a) $f(x) = \log_3 x$

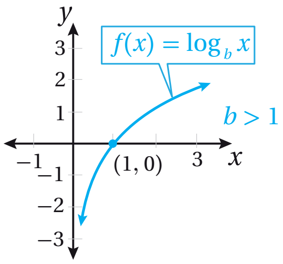
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

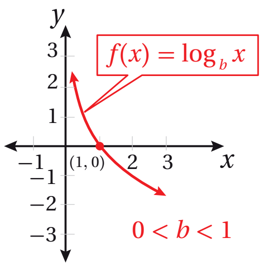
خصائص الاقتران اللوغاريتمي

مُلخَّص المفهوم

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور الاقتران اللوغاريتمي الذي يكون في صورة: $f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي، $b > 0, b \neq 1$، وتتمثَّل خصائصه في ما يأتي:

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+؛ أيِ الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- الاقتران مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- الاقتران مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y.
- الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$، ولا يقطع المحور y.





مجال الاقتران اللوغاريتمي في صورة: $f(x) = \log_b g(x)$

مجال الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته: $f(x) = \log_b g(x)$، حيث: $b > 0, b \neq 1$ هو جميع قِيَم x في مجال $g(x)$، التي يكون عندها $g(x) > 0$.

مثال 6

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

1 $f(x) = \log_4 (x + 3)$

$x + 3 > 0$ $\quad g(x) > 0$

$x > -3$ $\quad$ بحَلِّ المتباينة لـ x

إذن، مجال الاقتران هو: $(-3, \infty)$.

2 $f(x) = \log_5 (8 - 2x)$

$8 - 2x > 0$ $\quad g(x) > 0$

$-2x > -8$ $\quad$ بطرح 8 من طرفي المتباينة

$x < 4$ $\quad$ بقسمة طرفي المتباينة على -2، وتغيير اتجاه رمز المتباينة

إذن، مجال الاقتران هو: $(-\infty, 4)$.

أتعلَّم

خط التقارب الرأسي للاقتران: $f(x) = \log_4 (x+3)$ هو $x = -3$، وخط التقارب الرأسي للاقتران: $f(x) = \log_5 (8-2x)$ هو $x = 4$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log_7 (5 - x)$

b) $f(x) = \log_5 (9 + 3x)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

1 $\log_7 343 = 3$

2 $\log_4 256 = 4$

3 $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

4 $\log_{36} 6 = 0.5$

5 $\log_9 1 = 0$

6 $\log_{57} 57 = 1$

أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7 $2^6 = 64$

8 $4^{-3} = \frac{1}{64}$

9 $6^3 = 216$

10 $5^{-3} = 0.008$

11 $(51)^1 = 51$

12 $9^0 = 1$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13 $\log_3 81$

14 $\log_{25} 5$

15 $\log_2 32$

16 $\log_{49} 343$

17 $\log_{10} 0.001$

18 $\log_{\frac{3}{2}} 1$

19 $\log_{\frac{1}{4}} 4$

20 $(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}}$

21 $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

22 $\log_a \sqrt[5]{a}$

23 $\log_{10} (1 \times 10^{-9})$

24 $8^{\log_8 5}$

أُمثِّل كل اقتران ممّـــا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحوريـــن الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

25 $f(x) = \log_5 x$

26 $g(x) = \log_4 x$

27 $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

28 $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

29 $f(x) = \log_{10} x$

30 $g(x) = \log_6 x$

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

31 $f(x) = \log_3 (x - 2)$

32 $f(x) = 5 - 2 \log_7 (x + 1)$

33 $f(x) = -3 \log_4 (-x)$

34 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32, 5)$.

35 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(\frac{1}{81}, -4)$.

إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $P(a) = 10 + 20 \log_5 (a + 1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج. وتعني القيمة: $P(1) \approx 19$ أنَّ إنفاق JD 100 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المُنتَج:

36 أجد $P(4)$، و$P(24)$، و $P(124)$.

37 أُفسِّر معنى القِيَم التي أوجدتُها في الفرع السابق.

مهارات التفكير العليا

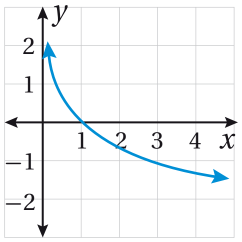
تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّرًا إجابتي:

38 $f(x) = \log_3 (x)$

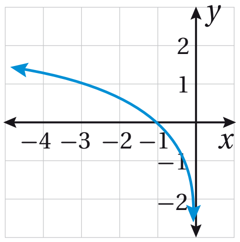
39 $f(x) = \log_3 (-x)$

40 $g(x) = -\log_3 x$

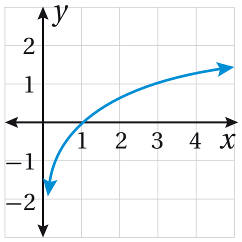
a)



b)



c)

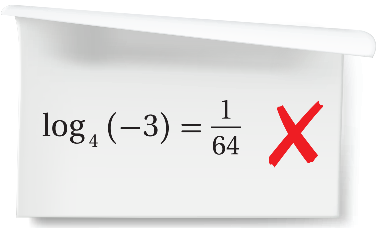


تحدٍّ: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي، مُحدِّدًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

41 $f(x) = \log_3 (x^2)$

42 $f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

43 **أكتشف الخطأ:** كتبت منى المعادلة الأُسِّية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:



$\log_4 (-3) = \frac{1}{64}$ ✗

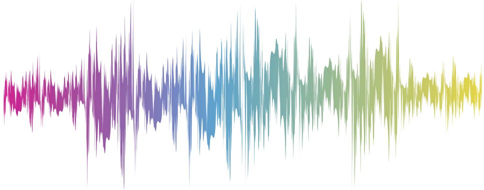
أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أُصحِّحه.

الدرس 4

قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

فكرة الدرس تعرُّف قوانين اللوغاريتمات.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $L = 10 \log_{10} R$ شِدَّة الصوت بالديسيبل، حيث R شِدَّة الصوت النسبية بالواط لكل متر مربع. أجد شِدَّة صوت بالديسيبل إذا كانت شِدَّته النسبية $100 \times 10^6 \text{ W/m}^2$



قوانين اللوغاريتمات

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الأُسس، ووظَّفْتُها في تبسيط مقادير أُسِّية، وإيجاد قيمة مقادير عددية. ومن ذلك: قوانين الضرب، والقسمة، وقوَّة القوَّة.

قانون ضرب القوى	قانون قسمة القوى	قانون قوَّة القوَّة
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, b \neq 0$	$(b^x)^y = b^{xy}$

بما أنَّه توجد علاقة عكسية بين اللوغاريتمات والأُسس، فإنَّه يُمكِن اشتقاق قوانين لوغاريتمات مُقابِلة لهذه القوانين.

مفهوم أساسي **قوانين اللوغاريتمات**

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوَّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

يُمكِن استعمال قوانين اللوغاريتمات لإيجاد قِيَم مقادير لوغاريتمية.

مثال 1

إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$، وكان: $\log_a 3 \approx 1.59$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

① $\log_a 15$

$5 \times 3 = 15$	$\log_a 15 = \log_a (3 \times 5)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= \log_a 3 + \log_a 5$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 1.59 + 2.32$
بالجمع	≈ 3.91

② $\log_a \frac{3}{5}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_a \frac{3}{5} = \log_a 3 - \log_a 5$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59, \log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 1.59 - 2.32$
بالطرح	≈ -0.73

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد $\log_a 8$ عن طريق معطيات المثال باستعمال قوانين اللوغاريتمات؟ أُبرِّر إجابتي.

③ $\log_a 125$

$125 = 5^3$	$\log_a 125 = \log_a (5^3)$
قانون القوّة في اللوغاريتمات	$= 3 \log_a 5$
بتعويض $\log_a 5 \approx 2.32$	$\approx 3(2.32)$
بالضرب	≈ 6.96

④ $\log_a \frac{1}{9}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_a \frac{1}{9} = \log_a 1 - \log_a 9$
$\log_a 1 = 0, 9 = 3^2$	$= 0 - \log_a 3^2$
بالطرح	$= -2 \log_a 3$
بتعويض $\log_a 3 \approx 1.59$	$\approx -2(1.59)$
	≈ -3.18

أُفكِّر

هل يُمكِن استعمال قانون القسمة لإيجاد ناتج $\frac{\log_a 5}{\log_a 3}$؟

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 14$

b) $\log_b \frac{2}{7}$

c) $\log_b 32$

d) $\log_b \frac{1}{49}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

يُمكِن أحيانًا كتابة مقدار لوغاريتمي بصورة مُطوَّلة تحوي مقادير لوغاريتمية عديدة، وذلك باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

مثال 2

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

1 $\log_5 x^7 y^2$

قانون الضرب في اللوغاريتمات	$\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$= 7 \log_5 x + 2 \log_5 y$

2 $\log_7 \dfrac{(5x+3)^2}{4}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_7 \dfrac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$= 2 \log_7 (5x+3) - \log_7 4$

3 $\log_4 \dfrac{xy^3}{z^2}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات	$\log_4 \dfrac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$= \log_4 x + \log_4 y^3 - \log_4 z^2$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$= \log_4 x + 3 \log_4 y - 2 \log_4 z$

4 $\log_a \sqrt{\dfrac{x^2 y^3}{a^5}}$

صورة الأُسِّ النسبي	$\log_a \sqrt{\dfrac{x^2 y^3}{a^5}} = \log_a \left(\dfrac{x^2 y^3}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{2} \log_a \left(\dfrac{x^2 y^3}{a^5}\right)$
قانون القسمة في اللوغاريتمات	$= \dfrac{1}{2} (\log_a x^2 y^3 - \log_a a^5)$

$= \frac{1}{2} (\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a a^5)$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2} (2 \log_a x + 3 \log_a y - 5 \log_a a)$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$= \frac{1}{2} (2 \log_a x + 3 \log_a y - 5)$ $\log_a a = 1$

$= \log_a x + \frac{3}{2} \log_a y - \frac{5}{2}$ خاصية التوزيع

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_2 a^2 b^9$

b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

تعلَّمْتُ في المثال السابق كتابة مقدار لوغاريتمي بالصورة المُطوَّلة، لكنَّني أحتاج أحيانًا إلى تحويل المقدار اللوغاريتمي من الصورة المُطوَّلة إلى الصورة المُختصَرة؛ أيْ كتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

مثال 3

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

① $\mathbf{3 \log_2 x + 4 \log_2 y}$

$3 \log_2 x + 4 \log_2 y = \log_2 x^3 + \log_2 y^4$ قانون القوّة في اللوغاريتمات

$= \log_2 x^3 y^4$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

2 $5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

$$5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z = \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$$= \log_a x^5\, y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_a\left(\frac{x^5\, y^{\frac{1}{3}}}{z^7}\right)$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_a\left(\frac{x^5 \sqrt[3]{y}}{z^7}\right)$$ الصورة الجذرية

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيَّة موجبةً:

a) $\log_5 a + 3\log_5 b$

b) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

أتعلَّم

أتجنَّب الأخطاء الآتية عند كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المُطوَّلة أو الصورة المُختصَرة:

$$\xcancel{\begin{array}{r} \log_b(M+N) = \log_b M + \log_b N \\ \log_b(M-N) = \log_b M - \log_b N \\ \log_b(M \cdot N) = \log_b M \cdot \log_b N \\ \log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\log_b M}{\log_b N} \\ \frac{\log_b M}{\log_b N} = \log_b M - \log_b N \\ \log_b(MN^p) = p\log_b(MN) \end{array}}$$

يستفاد من الاقترانات اللوغاريتمية وقوانينها في كثير من التطبيقات الحياتية، مثل تحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية المستغرقة في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات.

مثال 4 : من الحياة

نسيان: في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادَّة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافِئة لهذا الاختبار على مدار مُدَد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران: $M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$.

أجد النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

معلومة

فهم المعلومات وتنظيمها أوَّلًا يُسهِّلان عملية تذكُّرها واستعادتها في ما بعدُ.

المعادلة المعطاة	$M(t)=85-25\log_{10}(t+1)$
بتعويض $t=19$	$M(19)=85-25\log_{10}(19+1)$
بالتبسيط	$=85-25\log_{10}(20)$
$10\times 2=20$	$=85-25\log_{10}(10\times 2)$
قانون الضرب في اللوغاريتمات	$=85-25(\log_{10}10+\log_{10}2)$
بتعويض $\log_{10}2\approx 0.3010, \log_b b=1$	$\approx 85-25((1)+0.3010)$
بالتبسيط	$\approx 85-25\,(1.3010)$
بالتبسيط	≈ 52

إذن، النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها هي 52%.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $M(t)=92-28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10}3\approx 0.4771$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $\log_a 6\approx 0.778$، وكان: $\log_a 5\approx 0.699$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $\log_a \frac{5}{6}$
2. $\log_a 30$
3. $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$
4. $\log_a \frac{1}{6}$
5. $\log_a 900$
6. $\log_a \frac{18}{15}$
7. $\log_a (6a^2)$
8. $\log_a \sqrt[4]{25}$
9. $(\log_a 5)(\log_a 6)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

10 $\log_a x^2$

11 $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$

12 $\log_a (\sqrt{x}\,\sqrt{y})$

13 $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$

14 $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$

15 $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

16 $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$

17 $\log_a (x + y - z)^7, x + y > z$

18 $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

19 $\log_a x + \log_a y$

20 $\log_b (x+y) - \log_b (x-y), x > y$

21 $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

22 $\log_a (x^2 - 4) - \log_a (x+2), x > 2$

23 $2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z$

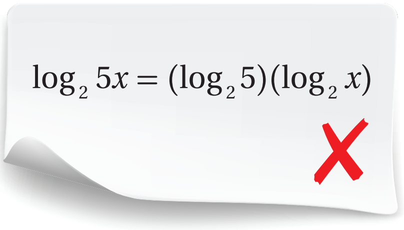
24 $\log_b 1 + 2 \log_b b$

25 **نمـو:** يُمثِّل الاقتــران: $f(x) = 29 + 48.8 \log_6 (x + 2)$ النســبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

مهارات التفكير العليا

26 **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $\frac{3}{2} = \frac{\log_a 216}{\log_a 36}$.

27 **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:



$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$

28 **تبرير:** أُثبِت أنَّ $\log_b (b-3) + \log_b (b^2 + 3b) - \log_b (b^2 - 9) = 1$، حيث: $b > 3$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس

5

المعادلات الأُسِّية

Exponential Equations

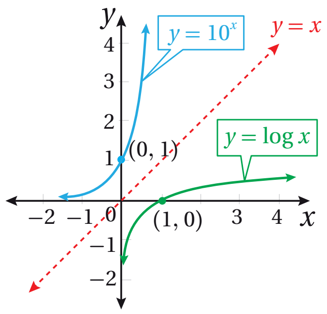
فكرة الدرس حَلّ معادلات أُسّية باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

المصطلحات اللوغاريتم الاعتيادي، اللوغاريتم الطبيعي، خاصية المساواة اللوغاريتمية.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $A(t) = 10e^{-0.0862t}$ كتلة اليود (بالغرام) المُتبقِّية من عيِّنة كتلتها 10 g بعد t يومًا من بَدْء التفاعل. بعد كم يومًا سيظلُّ من العيِّنة 0.5 g؟

اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي

يُطلَق على اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ اسم **اللوغاريتم الاعتيادي** (common logarithm)، ويُكتَب عادةً من دون أساس.



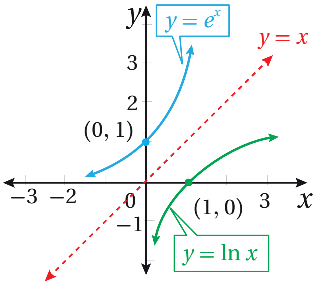
يُعَدُّ اقترانُ اللوغاريتم الاعتيادي: $y = \log x$ الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسّي: $y = 10^x$؛ أيْ إنَّ:

$$y = \log_{10} x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad 10^y = x \,,\; x > 0$$

لغة الرياضيات

يـدلُّ الرمـز ln علـى اللوغاريتـم الطبيعـي، وهـو اختصـار لكلمتي (natural logarithm).

أمّا اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ فيُسمّى **اللوغاريتم الطبيعي** (natural logarithm)، ويُرمَز إليه بالرمز ln.



ويُعَدُّ اقترانُ اللوغاريتم الطبيعي: $y = \ln x$ الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسّي الطبيعي: $y = e^x$؛ أيْ إنَّ:

$$y = \ln x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad e^y = x \,,\; x > 0$$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات على اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي، ويُمكِن استعمالها لإيجاد قيمة كلٍّ منهما، علمًا بأنَّ الآلة الحاسبة تحتوي زِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الاعتيادي هو log ، وزِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الطبيعي هو ln ، ويُمكِن بهما إيجاد القيمة التقريبية لكلٍّ من اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي، لأيِّ عدد حقيقي موجب.

مثال 1

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 **$\log 2.7$**

أستعمل الآلة الحاسبة: log 2.7 = 0.4313637642

إذن: $\log 2.7 \approx 0.4$.

2 **$\log (1.3 \times 10^5)$**

أستعمل الآلة الحاسبة: log (1.3 × 10 $x^{\blacksquare}$ 5) = 5.113943352

إذن: $\log (1.3 \times 10^5) \approx 5.1$.

3 **$\ln 17$**

أستعمل الآلة الحاسبة: ln 17 = 2.833213344

إذن: $\ln 17 \approx 2.8$.

أتعلَّم

يوجد في بعض الآلات الحاسبة زِرُّ $\log_{\blacksquare}\square$ الذي يُستعمَل لإيجاد قيمة اللوغاريتم لأيِّ أساس b، حيث: $b > 0, b \neq 1$.

أتحقَّق من فهمي

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 13$

b) $\log (3.1 \times 10^4)$

c) $\ln 0.25$

تغيير الأساس

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زِرَّين للوغاريتمات، هما: log ، و ln . ولكنْ، كيف يُمكِنني إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات الحاسبة؟

يُمكِنني إيجاد ذلك بتغيير الأساس غير المرغوب فيه (الأساس 4 في هذه الحالة) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه.

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

إذا كانت a, b, x أعدادًا حقيقيةً موجبةً، حيث: $b \neq 1, a \neq 1$، فإنَّ:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

مثال 2

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

① $\log_3 16$

صيغة تغيير الأساس
$$\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$$

باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx 2.52$$

② $\log_{\frac{1}{2}} 10$

صيغة تغيير الأساس
$$\log_{\frac{1}{2}} 10 = \frac{\log 10}{\log \frac{1}{2}}$$

قانون القسمة في اللوغاريتمات
$$= \frac{\log 10}{\log 1 - \log 2}$$

$\log 1 = 0, \log 10 =1$
$$= \frac{1}{-\log 2}$$

باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx -3.32$$

أفكّر

إذا استعملْتُ اللوغاريتم الطبيعي بدلًا من اللوغاريتم الاعتيادي في الفرع 1 من المثال، فهل سيختلف الناتج؟ أُبرِّر إجابتي.

أفكّر

هل يُمكِنني حَلَّ الفرع 2 من المثال بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

a) $\log_3 51$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

المعادلات الأُسِّية

تعلَّمْتُ سابقًا مفهوم المعادلة الأُسِّية؛ وهي معادلة تتضمَّن قوى أُسسها مُتغيِّرات، ويتطلَّب حَلُّها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسَّي الطرفين وَفق القاعدة الآتية:

إذا كان: $a^x = a^y$، فإنَّ $x = y$،

حيث: $a > 0, a \neq 1$.

فمثلًا، يُمكِنني حَلُّ المعادلة: $3^{2x} = 81$ كما يأتي:

المعادلة الأصلية	$3^{2x} = 81$
بمساواة الأساسين	$3^{2x} = 3^4$
بمساواة الأُسس	$2x = 4$
بحَلِّ المعادلة	$x = 2$

ولكنْ، في بعض المعادلات الأُسِّية لا يُمكِنني كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، مثل المعادلة: $3^x = 5$؛ لذا أستعمل **خاصية المساواة اللوغاريتمية** (property of logarithmic equality).

أتعلَّم

تُعْزى خاصية المساواة اللوغاريتمية إلى أنَّ الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران واحد لواحد؛ إذ يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله.

مفهوم أساسي

خاصية المساواة اللوغاريتمية

إذا كان $b > 0$، حيث: $b \neq 1, x > 0, y > 0$، فإنَّ:

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$

وتأسيسًا على ذلك، يُمكِن حَلُّ المعادلات الأُسِّية التي يتعذَّر كتابتها في صورة قوَّتين للأساس نفسه، وذلك بأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفي المعادلة، ثم استعمال قانون القوَّة في اللوغاريتمات.

مثال 3

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

① $2^x = 13$

المعادلة الأصلية	$2^x = 13$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 2^x = \log 13$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$x \log 2 = \log 13$
بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2$	$x = \dfrac{\log 13}{\log 2}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 3.7$

إذن، حَلُّ المعادلة هو: $x \approx 3.7$.

② $5e^{3x} = 125$

المعادلة الأصلية	$5e^{3x} = 125$
بالقسمة على 5	$e^{3x} = 25$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln e^{3x} = \ln 25$
$\log_b b^x = x$	$3x = \ln 25$
بقسمة طرفي المعادلة على 3	$x = \dfrac{\ln 25}{3}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$x \approx 1.07$

إذن، حَلُّ المعادلة هو: $x \approx 1.07$.

③ $2^{x+4} = 5^{3x}$

المعادلة الأصلية	$2^{x+4} = 5^{3x}$
بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين	$\log 2^{x+4} = \log 5^{3x}$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$(x+4) \log 2 = 3x \log 5$
خاصية التوزيع	$x \log 2 + 4 \log 2 = 3x \log 5$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x \log 2 - 3x \log 5 = -4 \log 2$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x (\log 2 - 3 \log 5) = -4 \log 2$

أتعلَّم

يُمكِنُني حَلُّ الفرع 1 من المثال بأخذ $\log_2$ لطرفي المعادلة، فيكون الناتج: $x = \log_2 13$.

بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2 - 3\log 5$ $x = \dfrac{-4 \log 2}{\log 2 - 3 \log 5}$

باستعمال الآلة الحاسبة $x \approx 0.67$

إذن، حَلُّ المعادلة هو: $x \approx 0.67$.

4 $9^x + 3^x - 30 = 0$

المعادلة الأصلية $9^x + 3^x - 30 = 0$

$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ $(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$

بافتراض أنَّ $3^x = u$ $u^2 + u - 30 = 0$

بالتحليل $(u+6)(u-5) = 0$

خاصية الضرب الصفري $u = -6 \quad \text{or} \quad u = 5$

باستبدال 3^x بـ u $3^x = -6 \qquad 3^x = 5$

بما أنَّ 3^x موجبة لأيِّ قيمة x، فإنَّه لا يوجد حَلٌّ للمعادلة: $3^x = -6$، ويُكتفى بحَلِّ المعادلة: $3^x = 5$.

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين $\log 3^x = \log 5$

قانون القوَّة في اللوغاريتمات $x \log 3 = \log 5$

بقسمة طرفي المعادلة على $\log 3$ $x = \dfrac{\log 5}{\log 3}$

باستعمال الآلة الحاسبة $x \approx 1.46$

إذن، حَلُّ المعادلة هو: $x \approx 1.46$.

الدعم البياني

يُمكِن حَلُّ المعادلة: $9^x + 3^x - 30 = 0$ باستعمال برمجية جيوجبرا، وذلك بتمثيل الاقتران: $f(x) = 9^x + 3^x - 30$، وتحديد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقطع المحور x فــي نقطة واحدة فقط؛ ما يعني وجود حَلٍّ واحد فقط للمعادلة: $9^x + 3^x - 30 = 0$.

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$

b) $2e^{5x} = 64$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

تُستعمَل المعادلات الأُسِّية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 4 : من الحياة

أتعلَّم

يُمثِّل $t = 0$ عام 2006م.

نمو سكّاني: **قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثِّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م. بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة؟**

الاقتران الأصلي	$P(t) = 6.5\,(1.014)^t$
بتعويض $P(t) = 13$	$13 = 6.5\,(1.014)^t$
بقسمة طرفي المعادلة على 6.5	$2 = (1.014)^t$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين	$\ln 2 = \ln(1.014)^t$
قانون القوَّة في اللوغاريتمات	$\ln 2 = t \ln 1.014$
بحَلِّ المعادلة لـ t	$t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.014}$
باستعمال الآلة الحاسبة	$t \approx 50$

إذن، سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة بعد 50 سنة تقريبًا من عام 2006م.

أتحقَّق من فهمي

اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق، بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 9 مليارات نسمة؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 19$

2 $\log (2.5 \times 10^{-3})$

3 $\ln 3.1$

4 $\log_2 10$

5 $\log_3 e^2$

6 $\ln 5$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7 $\log_3 33$

8 $\log_{\frac{1}{3}} 17$

9 $\log_6 5$

10 $\log_7 \frac{1}{7}$

11 $\log 1000$

12 $\log_3 15$

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13 $6^x = 121$

14 $-3e^{4x} = -27$

15 $5^{7x-2} = 3^{2x}$

16 $25^x + 5^x - 42 = 0$

17 $2(9)^x = 32$

18 $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها **5 %**:

19 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

20 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

إرشاد: صيغة جُمْلة المبلغ للربح المُركَّب المستمر هي: $A = Pe^{rt}$.

21 **كوالا:** تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وَفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$، حيث N العدد المُتبقّي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنةً يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا؟

مهارات التفكير العليا

22 **تبرير:** أجد قيمة كلٍّ من k، و h إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلة: $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$

b) $y = 3$

c) $y = 1$

d) $y = 0$

2 حَلُّ المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0

b) $\frac{1}{e}$

c) 1

d) e

3 قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

a) -2

b) -1

c) 1

d) 2

4 أحد الآتية يُكافِئ المقدار:

$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$

b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$

d) $\log_a 27$

5 أحد الآتية يُكافِئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5 \log_a x - 3 \log_a y + 1$

b) $a \log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a \log_a x - 3 \log_a y$

d) $1 - 5 \log_a x - 3 \log_a y$

6 حَلُّ المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 8

7 قيمة $\log 10$ هي:

a) $2 \log 5$

b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$

d) 0

8 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإنَّ قيمة x هي:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

9 الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة:

$f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي،

و $b \neq 1, b > 0$، تمرُّ جميع منحنياتها بالنقطة:

a) $(1, 1)$

b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$

d) $(0, 0)$

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كلٍّ ممّا يأتي بدلالة k:

10 $\log_5 16$

11 $\log_5 256$

اختبار نهاية الوحدة

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

12 $f(x) = 6^x$

13 $g(x) = (0.4)^x$

14 $h(x) = \log_7 x$

15 $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16 $8^x = 2$

17 $-3e^{4x+1} = -96$

18 $11^{2x+3} = 5^x$

19 $49^x + 7^x - 72 = 0$

20 استثمر سليمان مبلغ JD 2500 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريًّا. أجد جُمْلة المبلغ بعد 15 سنة.

21 أودع سعيد مبلغ JD 800 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.5%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

22 **فيروس:** انتشر فيروس في شبكة حواسيب وَفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، وt الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بعد t يومًا:

23 أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيِّنة.

24 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 أيام.

25 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 1400 خلية؟

26 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة ضعف العدد الأصلي؟

يقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى هيكتوباسكال (hPa)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر $1000\ hPa$، ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

27 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسِّي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

28 عند أيِّ ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

29 **إعلانات:** يُمثِّل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و$x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 400000 من بيع المُنتَج. أجد $S(10)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

الوحدة
2

التفاضل
Differentiation

ما أهمية هذه الوحدة؟

تعلَّمْتُ في الصف السابق إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة، وسأتعلَّم في هذه الوحدة إيجاد مشتقة اقترانات أُخرى، ثم أستعملها لحَلِّ بعض المسائل الحياتية التي تتضمَّن إيجاد مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن، مثل: مُعدَّل تكاثر الحيوانات البَرِّيَّة في المجتمعات الحيوية، ومُعدَّل التغيُّر في عدد سكّان مدينة ما.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.
- ✓ إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- ✓ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة باستعمال كلٍّ من التعريف والقواعد.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- ◄ إيجاد مشتقات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.
- ◄ حَلَّ مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن باستعمال المشتقة.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة)، في الصفحتين (12) و (13) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

قاعدة السلسلة

The Chain Rule

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.
- إيجاد مشتقات المعادلات الوسيطية.

المصطلحات قاعدة السلسلة، قاعدة سلسلة القوَّة، المُتغيِّر الوسيط.

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$ عدد السلع التقريبي التي يُمكِن لمُحاسِب مُبتدِئ في أحد المَحالّ التجارية أنْ يُمرِّرها فوق الماسح الضوئي في الدقيقة الواحدة بعد t ساعة من بَدْئه العمل.

أجد سرعة المُحاسِب في أداء هذه المهمة بعد زمن مقداره t ساعة.

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران القوَّة هو اقتران في صورة: $f(x) = x^n$، حيث n عدد حقيقي، ومن أمثلته:

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^8} \quad , \quad f(x) = x^4$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقة اقتران القوَّة هي: $f'(x) = nx^{n-1}$، وكيف أجد مشتقة اقترانات تتضمَّن حدودها اقترانات قوَّة، مثل: $f(x) = x^3 + 2x$.

ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقة اقترانات أكثر تعقيدًا، مثل: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$؟

أُلاحِظ أنَّ الاقتران: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ هو اقتران مُركَّب، حيث: $h(x) = x^3 + 2x$، و $g(x) = x^7$ مُركَّبتا $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{(\overbrace{x^3 + 2x}^{\text{الداخلي}})^7}_{\text{الخارجي}}$$

يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $f(x) = (x^3 + 2x)^7$ بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي، وإيجاد قيمتها عند الاقتران الداخلي، ثم ضربها في مشتقة الاقتران الداخلي، في ما يُسمّى قاعدة السلسلة (the chain rule).

لغة الرياضيات

يُسمّى $h(x)$ اقترانًا داخليًّا للاقتران المُركَّب، ويُسمّى $g(x)$ اقترانًا خارجيًّا له، حيث: $f(x) = (g \circ h)(x)$.

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب أيِّ اقترانين قابلين للاشتقاق كما يأتي:

نظرية **قاعدة السلسلة**

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f\circ g)\ (x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $y = (x^2 + 1)^3$

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران الداخلي ومشتقة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u = x^2 + 1$، والاقتران الخارجي له: $y = u^3$.

$$\frac{du}{dx} = 2x$$ مشتقة الاقتران الداخلي

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$ مشتقة الاقتران الخارجي

الخطوة 2: أجد مشتقة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$ قاعدة السلسلة

$$= 3u^2 \times 2x$$ بتعويض $\frac{dy}{du} = 3u^2, \frac{du}{dx} = 2x$

$$= 6x(x^2 + 1)^2$$ بتعويض $u = x^2 + 1$

② $y=\sqrt{4-3x}$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بالصورة الأُسِّية.

الاقتران المعطى $y=\sqrt{4-3x}$

الصورة الأُسِّية $=(4-3x)^{\frac{1}{2}}$

الخطوة 2: أجد مشتقة الاقتران الداخلي ومشتقة الاقتران الخارجي للاقتران المُركَّب.

الاقتران الداخلي للاقتران المُركَّب: $u=4-3x$، والاقتران الخارجي له: $y=u^{\frac{1}{2}}$.

مشتقة الاقتران الداخلي $\frac{du}{dx}=-3$

مشتقة الاقتران الخارجي $\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

الخطوة 3: أجد مشتقة الاقتران المُركَّب باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \frac{du}{dx}=-3$ $=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\times -3$

بتعويض $u=4-3x$ $=-\frac{3}{2}(4-3x)^{-\frac{1}{2}}$

الصورة الجذرية $=-\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$

أتذكَّر

- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y=(x^2-2)^4$

b) $y=\sqrt{x^3+4x}$

قاعدة سلسلة القوّة

تعرَّفْتُ في المثال السابق كيف أجد مشــتقة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x)=(g(x))^n$، وهو أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شــيوعًا. والآن ســأتعرَّف قاعدة عامة لإيجاد مشــتقة هذا الاقتران، تُســمّى **قاعدة سلســلة القوَّة** (power chain rule)، وهي حالة خاصة من قاعدة السلسلة، حيث الاقتران الخارجي f هو اقتران قوّة.

مفهوم أساسي

قاعدة سلسلة القوَّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^{n} = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب في صورة: $f(x) = (g(x))^{n}$ عند نقطة ما كما في المثال الآتي:

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = (2x^4 - x)^3 , x = 1$

الاقتران المعطى	$f(x) = (2x^4 - x)^3$
قاعدة سلسلة القوَّة	$f'(x) = 3(2x^4 - x)^2 \times \frac{d}{dx}(2x^4 - x)$
باشتقاق $2x^4 - x$	$= 3(2x^4 - x)^2 \times (8x^3 - 1)$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = 21$

② $f(x) = \sqrt{1 + x^3} , x = 2$

الصورة الأُسِّية	$f(x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$
قاعدة سلسلة القوَّة	$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(1 + x^3)$
باشتقاق $1 + x^3$	$= \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2)$
الصورة الجذرية	$= \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$
بتعويض $x = 2$	$f'(2) = 2$

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

③ $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,, x=-2$

الصورة الأُسِّية

$$y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدة سلسلة القوَّة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

باشتقاق x^2-1

$$=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\times 2x$$

الصورة الجذرية

$$=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

بتعويض $x=-2$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2}=\frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}$$

رموز رياضية

يُستعمَل الرمز $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقة عندما $x=a$.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x)=(x^4+1)^5\,, x=1$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}\,, x=2$

c) $y=\sqrt[4]{(2x^2-7)^5}\,, x=4$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

لإيجاد مشتقة اقتران في بعض الحالات، يتعيَّن تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق، ومشتقة مضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق قاعدة السلسلة.

مراجعة المفهوم **مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق، ومشتقة مضاعفات القوَّة**

إذا كان الاقتران f والاقتران g قابلين للاشتقاق، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإنَّ مشتقة كلٍّ من $f+g$، و $f-g$، و af هي:

- $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ مشتقة المجموع، أو مشتقة الفرق
- $(af)'(x)=af'(x)$ مشتقة مضاعفات الاقتران

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $\boldsymbol{f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7}$

الاقتران المعطى	$f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$
قواعد سلسلة القوّة، ومضاعفات الاقتران، والمجموع، والثابت	$f'(x) = 15(1-x^2)^2 \times \frac{d}{dx}(1-x^2) + 4$
باشتقاق $1-x^2$	$= 15(1-x^2)^2 \times -2x + 4$
بالتبسيط	$= -30x(1-x^2)^2 + 4$

② $\boldsymbol{f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}}$

الاقتران المعطى	$f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$
قاعدتا سلسلة القوّة، ومشتقة الفرق	$f'(x) = 3(2x+1)^2 \times \frac{d}{dx}(2x+1) - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$
باشتقاق $2x + 1$	$= 3(2x+1)^2 \times 2 - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$
بالتبسيط	$= 6(2x+1)^2 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

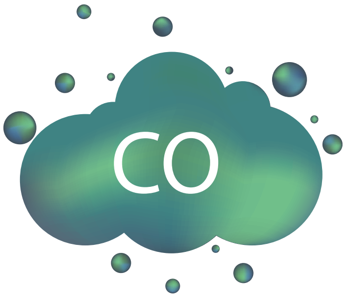
b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

مُعدَّل التغيُّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي نهاية ميل قاطع المنحنى بين النقطتين: $(x, f(x)), (x+h, f(x+h))$ عندما $h \to 0$. وبما أنَّ ميل القاطع هو مُعدَّل تغيُّر قيمة y بالنسبة إلى قيمة x، فإنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر أيضًا، ولكنْ عند لحظة (نقطة) مُعيَّنة. فمثلًا، إذا كان المطلوب هو إيجاد $\frac{dy}{dx}$، فهذا يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x.

تتطلَّب كثير من المواقف الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة، مثل إيجاد مُعدَّل تغيُّر كمِّية أوَّل أكسيد الكربون في الجو بالنسبة إلى عدد السكّان.

مثال 4 : من الحياة



تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكّان بالألف نسمة، علمًا بأنَّ C يقاس بأجزاء من المليون ($C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون مثلًا):

1 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان.

أجد $C'(p)$:

الاقتران المعطى
$$C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$$

قاعدة السلسلة
$$C'(p) = \frac{0.6\,P}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$

إذن، مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان هو: $C'(p) = \dfrac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان عندما يكون عدد السكّان 4 آلاف نسمة، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $C'(4)$:

مشتقة $C(t)$
$$C'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$

بتعويض $p = 4$
$$C'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$

بالتبسيط
$$= 0.24$$

إذن، إذا كان عدد السكّان 4 آلاف نسمة، فإنَّ مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

معلومة

أوَّل أكسيد الكربون هو غاز عديم اللون والرائحة، وضارٌّ بالإنسان؛ إذ يؤدي استنشاقه إلى منع الدم من حمل الأكسجين، وعدم استعمال الأنسجة للأكسجين بصورة فاعلة.

أتعلَّم

تشير الإشارة الموجبة إلى ازدياد مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون.

أتحقَّق من فهمي

صناعـة: يُمثِّـل الاقتـران: $P(t)=\sqrt{10t^2+t+229}$ إجمالي الأرباح السـنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، مُفسِّرًا معنى الناتج.

قاعدة السلسلة، والمُتغيِّر الوسيط

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى. وتأسيسًا على ذلك، فإنَّ قاعدة السلسـلة $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ تعني أنَّ y هو اقتران بالنسبة إلى x عن طريق المُتغيِّر u الذي يُسمّى **المُتغيِّر الوسيط** (parameter).

ومن ثَمَّ، فإنَّ مُعدَّل تغيُّر y بالنسـبة إلى x يساوي مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى u مضروبًا في مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x.

مثال 5

إذا كان: $y=u^3-2u+1$، حيث: $u=2\sqrt{x}$، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=4$.

بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر u

$$\frac{dy}{du}=3u^2-2$$

بإيجاد مشتقة u بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

باستعمال قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

بتعويض $\frac{dy}{du}=3u^2-2,\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$=(3u^2-2)\times\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بتعويض $u=2\sqrt{x}$

$$=(3\,(2\sqrt{x}\,)^2-2)\times\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بتعويض $x=4$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}=(3\,(2\sqrt{4}\,)^2-2)\times\frac{1}{\sqrt{4}}$$

بالتبسيط

$$=23$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $y = u^5 + u^3$، حيث: $u = 3 - 4x$، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = (1 + 2x)^4$
2. $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$
3. $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$
4. $f(x) = \sqrt{7 - x}$
5. $f(x) = 4(2 + 8x)^4$
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x - 8}}$
7. $f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$
8. $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$
9. $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$
10. $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$
11. $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$
12. $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13. $f(x) = \frac{1}{(4x + 1)^2}, x = \frac{1}{4}$
14. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

15. $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$
16. $y = \sqrt[3]{2u + 5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

17. $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$
18. $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 1$

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن (بآلاف الدنانير):

19 أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة.

20 أجد مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة عندما يكون عدد القطع المُنتَجة 20 قطعة.

علوم: يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

21 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

22 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$ ، فأجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 3$:

23 $f(x) = g(h(x))$

24 $f(x) = (h(x))^3$

مهارات التفكير العليا

25 **تبرير**: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

26 **تبرير**: أجد مشتقة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

27 **أكتشف المُختلِف**: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$p(x) = x^2 + 1$

$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$h(x) = (x^2 + 1)^3$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

28 **تحدٍّ**: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

الدرس 2

مشتقتا الضرب والقسمة

Product and Quotient Rules

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين.
- إيجاد مشتقة قسمة اقترانين.

مسألة اليوم

وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة بندورة h (بالأمتار) باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{t^3}{8 + t^3}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t.

مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشـتقات اقترانات كثيرات الحدود واقترانات القوَّة. تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشـتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها. ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشـتقات الاقترانات الناتجة من ضرب الاقترانات؟ فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)\ g(x)$؟

يُمكِن إيجاد مشتقة ضرب اقترانين باستعمال النظرية الآتية:

نظرية **مشتقة الضرب**

بالكلمات: مشـتقة ضرب اقترانين قابلين للاشـتقاق هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشـتقة الاقتران الثاني، ثم يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشـتقة الاقتران الأوَّل.

بالرموز: إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّ مشتقة حاصل ضربهما هي:

$$(fg)'(x) = f(x)\ g'(x) + g(x)\ f'(x)$$

مثال: إذا كان: $f(x) = x^2$، وكان: $g(x) = x^5$، فإنَّ:

① ② ③ ④

$$(fg)'(x) = x^2 \times 5x^4 + x^5 \times 2x$$

$$= 5x^6 + 2x^6 \quad ⑤$$

$$= 7x^6$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $\mathbf{f(x) = (2x+3)(x^2-5)}$

الاقتران المعطى	$f(x) = (2x+3)(x^2-5)$
قاعدة مشتقة الضرب	$f'(x) = (2x+3)\frac{d}{dx}(x^2-5) + (x^2-5)\frac{d}{dx}(2x+3)$
قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الجمع، ومشتقة الطرح	$= (2x+3)(2x) + (x^2-5)(2)$
باستعمال خاصية التوزيع	$= (4x^2+6x) + (2x^2-10)$
بالتبسيط	$= 6x^2 + 6x - 10$

② $\mathbf{f(x) = (\sqrt{x}-1)(x^2+4)}$

الاقتران المعطى	$f(x) = (\sqrt{x}-1)(x^2+4)$
قاعدة مشتقة الضرب	$f'(x) = (\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(x^2+4) + (x^2+4)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)$
قواعد مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة الجمع، ومشتقة الطرح	$= (\sqrt{x}-1)(2x) + (x^2+4)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
باستعمال خاصية التوزيع	$= (2x\sqrt{x}-2x) + \left(\frac{x^2+4}{2\sqrt{x}}\right)$
بالتبسيط	$= 2x\sqrt{x} - 2x + \frac{x^2+4}{2\sqrt{x}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3+4)(7x^2-4x)$

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(3x-2)$

أتعلّم

يُمكِنني حَلُّ الفرع 1 من المثال باستعمال خاصية التوزيع أوّلًا، ثم اشتقاق الاقتران الناتج باستعمال قاعدة مشتقة المجموع، أو قاعدة مشتقة الفرق.

أخطاء شائعة

من الأخطاء الشائعة عند إيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين، ضرب مشتقة الاقتران الأوَّل في مشتقة الاقتران الثاني.

مشتقة قسمة اقترانين

يُمكِن إيجاد مشتقة حاصل قسمة اقترانين باستعمال النظرية الآتية:

نظرية

مشتقة القسمة

بالكلمات: مشتقة قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثم قسمة الجميع على مربع المقام.

بالرموز: إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانيـن قابلين للاشـتقاق، وكان: $g(x) \neq 0$، فإنَّ مشتقة حاصل قسمتهما هي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال: إذا كان: $f(x) = x^5$، وكان: $g(x) = x^2$، فإنَّ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\overset{①}{x^2} \times \overset{②}{5x^4} - \overset{③}{x^5} \times \overset{⑤}{2x}}{\underset{⑥}{(x^2)^2}}$$

④

$$= \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4}$$

$$= 3x^2$$

أتعلَّم

مشـتقة قسـمة اقترانين ليسـت حاصل قسـمة مشـتقة كلٍّ منهما، مثلما أنَّ مشتقة ضرب اقترانين ليسـت حاصـل ضرب مشتقة كلٍّ منهما.

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{2x+5}}$

$$f(x) = \frac{x}{2x+5}$$

الاقتران المعطى

$$f'(x) = \frac{(2x+5)\frac{d}{dx}(x) - (x)\frac{d}{dx}(2x+5)}{(2x+5)^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{(2x+5)(1) - (x)(2)}{(2x+5)^2}$$

قاعدتا مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الجمع

$$= \frac{2x+5-2x}{(2x+5)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{5}{(2x+5)^2}$$

بالتبسيط

② $f(x) = \dfrac{1+x^{-5}}{x^3}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \frac{1+x^{-5}}{x^3}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{(x^3)\frac{d}{dx}(1+x^{-5}) - (1+x^{-5})\frac{d}{dx}(x^3)}{(x^3)^2}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة الجمع

$$= \frac{(x^3)(-5x^{-6}) - (1+x^{-5})(3x^2)}{(x^3)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{-5x^{-3} - 3x^2 - 3x^{-3}}{x^6}$$

بالتبسيط

$$= \frac{-8x^{-3} - 3x^2}{x^6}$$

أتذكَّر

إذا كانت a و m و n أعدادًا حقيقيةً، فإنَّ:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

أُفكِّر

هل توجد طريقة أُخرى لإيجاد مشتقة الاقتران في الفرع 2 من المثال؟

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^{-3}}{x^2+1}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية ما بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة، وأنَّ كثيرًا من التطبيقات الحياتية تتطلَّب إيجاد مُعدَّل التغيُّر. والآن سأتعلَّم كيف أجد مُعدَّل التغيُّر في تطبيقات حياتية باستعمال مشتقة الضرب أو مشتقة القسمة.

مثال 3 : من الحياة

دواء: يُمثِّل الاقتران: $C(t) = \dfrac{2t}{3t^2+16}$ تركيز مُسكِّن للألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C مَقيسة بوحدة $\mu g/mL$:

1 **أجد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.**

أجد $C'(t)$:

الاقتران المعطى
$$C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$$

قاعدة مشتقة القسمة
$$C'(t) = \frac{(3t^2 + 16)\frac{d}{dt}(2t) - (2t)\frac{d}{dt}(3t^2 + 16)}{(3t^2 + 16)^2}$$

قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الطرح، ومشتقة الجمع
$$= \frac{(3t^2 + 16)(2) - (2t)(6t)}{(3t^2 + 16)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع
$$= \frac{6t^2 + 32 - 12t^2}{(3t^2 + 16)^2}$$

بالتبسيط
$$= \frac{32 - 6t^2}{(3t^2 + 16)^2}$$

إذن، مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t هو: $C'(t) = \frac{32 - 6t^2}{(3t^2 + 16)^2}$.

2 **أجد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض عندما $t = 1$، مُفسِّرًا معنى الناتج.**

أجد $C'(1)$:

مشتقة $C(t)$
$$C'(t) = \frac{32 - 6t^2}{(3t^2 + 16)^2}$$

بتعويض $t = 1$
$$C'(1) = \frac{32 - 6(1)^2}{(3(1)^2 + 16)^2}$$

بالتبسيط
$$\approx 0.072$$

إذن، عندما يكون الزمن 1 h، فإنَّ تركيز المُسكِّن في دم المريض يزداد بمقدار 0.072 µg/mL لكل ساعة.

أتحقَّق من فهمي

سكّان: يُمثِّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{5}{2t^2 + 9}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة المقلوب

يُمكِن إيجاد قاعدة عامة لمشتقة مقلوب أيِّ اقتران باستعمال قاعدة القسمة. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان: $A(x) = \frac{1}{f(x)}$، فإنَّ:

$$A'(x) = \frac{f(x) \times 0 - 1 \times f'(x)}{(f(x))^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$ بالتبسيط

إذن: $A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

نظرية

مشتقة المقلوب

بالكلمات: مشتقة مقلوب اقتران قابل للاشتقاق هي سالب مشتقة الاقتران مقسومًا على مربع الاقتران.

بالرموز: إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

أتعلَّم

إذا كان c عددًا ثابتًا، وكان $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، وكان $h(x) = \frac{c}{f(x)}$، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ:

$$h'(x) = \frac{-cf'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1 + x^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$ الاقتران المعطى

$$= \frac{-\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$ قاعدة مشتقة المقلوب

$$= \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع

② $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{3 - 4x}}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{2}{3 - 4x}$

قاعدة مشتقة المقلوب $f'(x) = \frac{-2 \frac{d}{dx}(3 - 4x)}{(3 - 4x)^2}$

قاعدتا مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة مضاعفات القوَّة $= \frac{-2(-4)}{(3 - 4x)^2}$

بالتبسيط $= \frac{8}{(3 - 4x)^2}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$

b) $f(x)= \frac{3}{2x + 1}$

مشتقتا الضرب والقسمة، وقاعدة السلسلة

يتطلَّب إيجاد مشتقة اقتران أحيانًا تطبيق قاعدة السلسلة، إضافةً إلى تطبيق مشتقتي الضرب والقسمة.

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $\boldsymbol{f(x) = (3x - 5)^4 (7 - x)^{10}}$

الاقتران المعطى $f(x) = (3x - 5)^4 (7 - x)^{10}$

قاعدة مشتقة الضرب $f'(x) = (3x-5)^4 \frac{d}{dx}(7-x)^{10} + (7-x)^{10} \frac{d}{dx}(3x-5)^4$

قاعدتا السلسلة، ومشتقة كثيرات الحدود $= (3x-5)^4 \times 10(7-x)^9 \times (-1) + (7-x)^{10} \times 4(3x-5)^3 \times 3$

بالتبسيط $= -10(3x-5)^4 (7-x)^9 + 12 (7-x)^{10} (3x-5)^3$

2 $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{4x+3}{(2x-1)^3}}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \frac{4x+3}{(2x-1)^3}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^3 \frac{d}{dx}(4x+3) - (4x+3)\frac{d}{dx}(2x-1)^3}{((2x-1)^3)^2}$$

قاعدتا السلسلة، ومشتقة كثيرات الحدود

$$= \frac{4(2x-1)^3 - (4x+3)(3(2x-1)^2\,(2))}{(2x-1)^6}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4(2x-1)^3 - 6(4x+3)(2x-1)^2}{(2x-1)^6}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 20x(4x^3-1)^6$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = (4x-1)(x^2-5)$

2 $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

3 $f(x) = \dfrac{x^2+6}{2x-7}$

4 $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x-1)^2}$

5 $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{5x+3}}$

6 $f(x) = x(1+3x)^5$

7 $f(x) = (2x+1)^5\,(3x+2)^4$

8 $f(x) = \dfrac{1}{5+2x} - 2x^4$

9 $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$

10 $f(x) = \dfrac{8}{1+\sqrt{x}}$

11 $f(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

12 $f(x) = \left(x+\dfrac{2}{x}\right)(x^2-3)$

13 $f(x) = (8x+\sqrt{x})(5x^2+3)$

14 $f(x) = 5x^{-3}\,(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = x^2\,(3x-1)^3,\ x = 1$

16 $f(x) = 3x\sqrt{5-x}\,,\ x = 4$

17 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}\,,\ x = 2$

18 $f(x) = \dfrac{9}{1-2x^3}\,,\ x = -1$

أعمــال: يُمثِّل الاقتــران: $S(t) = \frac{2000t}{4 + 0.3t}$ إجمالي المبيعات (بــآلاف الدنانير) لشركة جواهر وحُلِيٍّ، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020م:

19 أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

20 أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي المبيعات للشركة عام 2030م، مُفسِّرًا معنى الناتج.

سكّان: يُمثِّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 12(2t^2 + 100)(t + 20)$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، وP عدد السكّان:

21 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

22 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 6$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

23 **تفاعلات:** يُمكِن نمذجة كتلة مُركَّب في أثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران: $M(t) = \frac{5.8t}{t + 1.9}$، حيث t الزمن بالثواني بعد بَدْء التفاعل، وM الكتلة بالغرام. أجد مُعدَّل تغيُّر كتلة المُركَّب بعد 5 ثوانٍ من بَدْء التفاعل.

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

24 $y = u(u^2 + 3)^3, u = (x + 3)^2, x = -2$

25 $y = \frac{u^3}{u + 1}, u = (x^2 + 1)^3, x = 1$

إذا كان: $f(2) = 4, f'(2) = -1, g(2) = 3, g'(2) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 $(fg)'(2)$

27 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

28 $(3f + fg)'(2)$

مهارات التفكير العليا

29 **تحدٍّ:** أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = x(4x - 3)^6 (1 - 4x)^9$.

إرشاد: يُمكِن اعتبار أيِّ عاملين هو الاقتران الأوَّل، واعتبار العامل الآخر هو الاقتران الثاني، وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين مرَّتين.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{x + 5} + \frac{6x}{x^2 + 7x + 10}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أُثبِت أنَّ $f(x) = \frac{2x}{x + 2}$، مُبرِّرًا إجابتي.

31 أجد $f'(3)$.

32 **تبرير:** إذا كان: $f(x) = \frac{2x + 8}{\sqrt{x}}$، فأجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس

3

مشتقتا الاقتران الأُسِّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

Derivatives of Natural Exponential and Logarithmic Functions

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي.
- إيجاد مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.

مسألة اليوم

يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة: $N = P(1 - e^{-0.15d})$ لتقدير عدد الأشخاص الذين سمعوا شائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يومًا من انطلاقها. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الأشخاص الذين يسمعون شائعة بالنسبة إلى الزمن d في مجتمع عدد أفراده 10000 نسمة.

مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الثابت ومشتقة اقتران القوَّة باستعمال قواعد خاصة من دون حاجة إلى استعمال التعريف العام للمشتقة. والآن سأتعلَّم كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي باستعمال النظرية الآتية:

نظرية

مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ:

$f'(x) = e^x$.

أتذكَّر

يُسمّى العدد e الأساس الطبيعي، أو العدد النيبيري؛ وهو عدد غير نسبي، حيث: $e \approx 2.7$، ويُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ الاقتران الأُسِّي الطبيعي.

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 5e^x$

$f(x) = 5e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5e^x$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

أتعلَّم

لإيجاد مشتقة اقتران في بعض الحالات، يتعيَّن تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية، مثل: مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق، ومشتقة الضرب، ومشتقة القسمة، ومشتقة مضاعفات الاقتران، إضافةً إلى تطبيق مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي.

② $\boldsymbol{f(x) = 4x^2 - e^x}$

$f(x) = 4x^2 - e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 8x - e^x$ قواعد مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الفرق، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي

③ $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x}{x+1}}$

$y = \dfrac{e^x}{x+1}$ الاقتران المعطى

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)\frac{d}{dx}(e^x) - (e^x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي، ومشتقة الجمع

$= \dfrac{(x+1)(e^x) - e^x}{(x+1)^2}$ بالتبسيط

$= \dfrac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 2e^x + 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$

c) $y = xe^x$

مشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي، وقاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ باستعمال قاعدة السلسلة؛ إذ يتمثَّل ذلك بإيجاد حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f بالنسبة إلى الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$. وبما أنَّ الاقتران: $f(x) = e^{g(x)}$ ناتج من تركيب الاقتران $g(x)$ والاقتران الأُسِّي الطبيعي، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقته باستعمال قاعدة السلسلة كما في النظرية الآتية:

نظرية

مشتقة الاقتران: $f(x) = e^{g(x)}$

إذا كان: $f(x) = e^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق، فإنَّ:

$f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$.

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = e^{4x}$

$f(x) = e^{4x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = e^{4x} \times (4)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 4x$

$= 4\,e^{4x}$ إعادة الترتيب

② $f(x) = e^{(x^2+1)}$

$f(x) = e^{(x^2+1)}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = e^{(x^2+1)} \times (2x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x^2 + 1$

$= 2\,x\,e^{(x^2+1)}$ إعادة الترتيب

③ $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$

$y = 3e^{\frac{1}{x}}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \frac{1}{x}$

$= -\frac{3}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$ إعادة الترتيب

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = e^{7x+1}$

b) $f(x) = e^{x^3}$

c) $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

تتطلَّب كثير من التطبيقات الحياتية إيجاد مُعدَّل التغيُّر لاقترانات أُسِّية، مثل إيجاد مُعدَّل تغيُّر درجة الحسّاس في جهاز إلكتروني.

مثال 3 : من الحياة

حرارة: تُمثِّل المعادلة: $T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة الحسّاس في جهاز إلكتروني (بالسليسيوس °C) بعد t ساعة من بَدْء تشغيل الجهاز:

معلومة

الحسّاس هو جهاز يُحوِّل كمِّية فيزيائية (مثل: الضغط، ودرجة الحرارة، والإشعاع، والموضع) إلى كمِّية كهربائية تتمثَّل في الجهد، أو التيار، أو الشحنة.

1 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة الحسّاس بالنسبة إلى الزمن t.

أجد $T'(t)$:

الاقتران المعطى	$T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$
مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 0.002t$	$T'(t) = 12e^{0.002t} \times (0.002)$
بالتبسيط	$= 0.024e^{0.002t}$

2 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة الحسّاس بعد 5 ساعات من بَدْء تشغيل الجهاز، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $T'(5)$:

مشتقة $T(t)$	$T'(t) = 0.024e^{0.002t}$
بتعويض $t = 5$	$T'(5) = 0.024e^{0.002(5)}$
باستعمال الآلة الحاسبة	≈ 0.024

إذن، تزداد درجة حرارة الحسّاس بمقدار 0.024°C لكل ساعة بعد 5 ساعات من تشغيل الجهاز.

أتحقَّق من فهمي

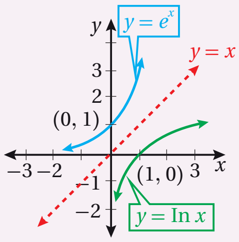
قمر صناعي: تُستعمَل مادَّة مُشِعَّة لتزويد قمر صناعي بالطاقة. ويُمكِن نمذجة مقدار الطاقة المُتبقِّية في المادَّة المُشِعَّة (بالواط) باستعمال الاقتران: $P(t) = 50e^{-0.004t}$، حيث t الزمن بالأيام. أجد مُعدَّل تغيُّر الطاقة المُتبقِّية في القمر الصناعي بعد 500 يوم، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

تعلّمْتُ سابقًا أنَّ الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي هو اقتران لوغاريتمي أساسه العدد النيبيري e، وأنَّه يُكتَب في صورة: $f(x) = \ln x$. والآن سأتعلَّم كيف أجد مشتقة هذا الاقتران باستعمال النظرية الآتية:

أتذكَّر

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي: $y = e^x$.



نظرية

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $\boldsymbol{f(x) = 7 \ln x}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = 7 \ln x$$

قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$f'(x) = \frac{7}{x}$$

2 $\boldsymbol{f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \ln x}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \ln x$$

قواعد مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}$$

3 $\boldsymbol{y = x \ln x}$

الاقتران المعطى

$$y = x \ln x$$

قاعدة مشتقة الضرب

$$\frac{dy}{dx} = (x) \frac{d}{dx} (\ln x) + (\ln x) \frac{d}{dx} (x)$$

قاعدتا مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$= (x) \left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$

بالتبسيط

$$= 1 + \ln x$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 4 \ln x$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

c) $y = \frac{\ln x}{x}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، وقاعدة السلسلة

يُمكِن إيجاد مشــتقة الاقتران: $f(x) = \ln g(x)$، الناتج مــن تركيب الاقتران $g(x)$ والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، باستعمال قاعدة السلسلة كما في النظرية الآتية:

نظرية

مشتقة الاقتران: $f(x) = \ln g(x)$

إذا كان: $f(x) = \ln g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق و $g(x) > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الضرب والقسمة والقوَّة للوغاريتمات. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل هذه القوانين لإيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = \ln g(x)$.

مراجعة المفهوم

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- **قانون الضرب:** $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- **قانون القسمة:** $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- **قانون القوَّة:** $\log_b x^p = p \log_b x$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = \ln(5x)$

الطريقة 1: أستعمل قاعدة السلسلة.

$f(x) = \ln(5x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{5}{5x}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = 5x$

$= \frac{1}{x}$ بالتبسيط

الطريقة 2: أستعمل قوانين اللوغاريتمات.

$f(x) = \ln(5x)$ الاقتران المعطى

$= \ln 5 + \ln x$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{1}{x}$ قاعدتا مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ومشتقة الثابت

أتذكَّر

$\ln 5$ ثابت؛ لأنَّه لا يحتوي على مُتغيِّر.

② $f(x) = \ln(x^3)$

الطريقة 1: أستعمل قاعدة السلسلة.

$f(x) = \ln(x^3)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = x^3$

$= \frac{3}{x}$ بالتبسيط

الطريقة 2: أستعمل قوانين اللوغاريتمات.

$f(x) = \ln(x^3)$ الاقتران المعطى

$= 3\ln(x)$ قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{3}{x}$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

③ $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

$f(x) = \ln(3x^2 - 2)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2 - 2}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = 3x^2 - 2$

أفكّر

هل يُمكِن حَلُّ الفرع 3 من المثال باستعمال قوانين اللوغاريتمات؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \ln(8x)$

b) $f(x) = 2\ln(x^7)$

c) $f(x) = \ln(9x + 2)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 2e^x + 1$

② $f(x) = e^{3x+9}$

③ $f(x) = (x^2 + 3x - 9)\, e^x$

④ $f(x) = \dfrac{e^x}{x^4}$

⑤ $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$

⑥ $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

⑦ $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$

⑧ $f(x) = e^{-2x}(2x-1)^5$

⑨ $f(x) = x^3 - 5e^{2x}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

⑩ $f(x) = 3\ln x$

⑪ $f(x) = x^3 \ln x$

⑫ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

⑬ $f(x) = x^2 \ln(4x)$

⑭ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

⑮ $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

⑯ $f(x) = (\ln x)^4$

⑰ $f(x) = \ln(x^2 - 5)$

⑱ $f(x) = x^4 \ln x - \dfrac{1}{2} e^x$

⑲ $f(x) = e^{2x} \ln x$

⑳ $f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$

㉑ $f(x) = \ln(e^x - 2)$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22 $f(x) = e^{2x-1} \ln(2x-1), x = 1$

23 $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, x = 4$

24 **فيروسات:** يُمكِن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t يومًا من ملاحظة الإنفلونزا أوَّل مَرَّة في المدرسة. أجد مُعدَّل انتشار الإنفلوانزا بالنسبة إلى الزمن t في المدرسة بعد 3 أيام.

25 **ذاكرة:** يُستعمَل الاقتران: $m(t) = t\ln t + 1, 0 < t \leq 4$ لقياس قدرة الأطفال على التذكُّر، حيث m مقياس من 1 إلى 7، و t عمر الطفل بالسنوات. أجد مُعدَّل تغيُّر قدرة الأطفال على التذكُّر بالنسبة إلى عمر الطفل t.

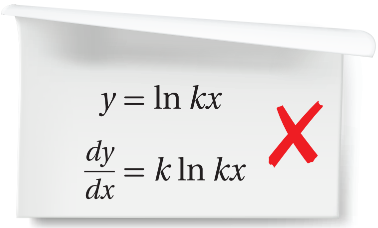
أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

26 $y = e^{2u} + 3, u = x^2 + 1$

27 $y = \ln(u + 1), u = e^x$

مهارات التفكير العليا

28 **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:



$y = \ln kx$

$\frac{dy}{dx} = k\ln kx$ ✗

29 **تبرير:** إذا كان: $y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

الدرس 4

مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

Sine and Cosine Functions Derivatives

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة اقتران الجيب.
- إيجاد مشتقة اقتران جيب التمام.

المصطلحات الاقتران المثلثي.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة ضغط الدم لمريض في حالة الراحة باستعمال الاقتران: $P(t) = 100 + 20 \sin 2\pi t$، حيث P ضغط الدم بالملّيمتر من الزئبق، و t الزمن بالثواني. أجد مُعدَّل تغيُّر ضغط دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.

مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

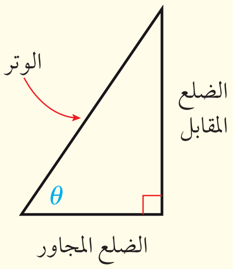
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ النسبة المثلثية هي نسبة يُقارَن بها بين طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية، وأنَّ النسبتين المثلثيتين اللتين تُعَدّان أكثر شيوعًا هما الجيب وجيب التمام.

أمّا **الاقتران المثلثي** (trigonometric function) فهو قاعدة معطاة باستعمال النسب المثلثية.

مفهوم أساسي

اقتران الجيب، واقتران جيب التمام

إذا مثَّلت θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ اقتراني الجيب وجيب التمام يُعرَّفان بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



- **الجيب (sin):** $\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
- **جيب التمام (cosine):** $\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

وكما هو الحال في بقية الاقترانات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام باستعمال النظرية الآتية:

نظرية **مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام**

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 2 \sin x$

$f(x) = 2 \sin x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 2 \cos x$ قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة مضاعفات الاقتران

② $f(x) = x^2 + \cos x$

$f(x) = x^2 + \cos x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 2x - \sin x$ قواعد مشتقة اقتران جيب التمام، ومشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة المجموع

③ $f(x) = \dfrac{\sin x}{2} + 3 \cos x$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{2} + 3 \cos x$ الاقتران المعطى

$= \dfrac{1}{2} \sin x + 3 \cos x$ بإعادة كتابة الاقتران

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \cos x - 3 \sin x$ قواعد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام، ومشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة المجموع

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 7 + \sin x$

b) $f(x) = 3x - \cos x$

c) $f(x) = 3 \sin x + 2 \cos x$

مشتقتا الضرب والقسمة المُتضمِّنتان اقتراني الجيب وجيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة لاقترانين قابلين للاشتقاق باستعمال مشتقتي الضرب والقسمة. والآن سأتعلَّم كيف أستعملهما لإيجاد مشتقة حاصل الضرب أو القسمة لاقترانين يشملان اقتران الجيب، أو اقتران جيب التمام، أو كليهما.

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $\boldsymbol{f(x) = x^2 \sin x}$

الاقتران المعطى	$f(x) = x^2 \sin x$
قاعدة مشتقة الضرب	$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2)$
قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران القوّة	$= x^2 \cos x + 2x \sin x$

② $\boldsymbol{f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}}$

الاقتران المعطى	$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$
قاعدة مشتقة القسمة	$f'(x) = \frac{(\cos x)\frac{d}{dx}(1 + \sin x) - (1 + \sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$
قواعد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام، ومشتقة المجموع	$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (1 + \sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$
باستعمال خاصية التوزيع	$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

أتذكَّر

تظلُّ العلاقة: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ صحيحة بِغَضِّ النظر عن قياس الزاوية x.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = e^x \cos x$

b) $f(x) = \frac{x + \cos x}{\sin x}$

مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام، وقاعدة السلسلة

يُمكِن إيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين؛ أحدهما اقتران الجيب، أو اقتران جيب التمام، باستعمال قاعدة السلسلة كما في النظرية الآتية:

نظرية **مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام، وقاعدة السلسلة**

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(g(x)\right)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right) = -\sin g(x) \times g'(x)$$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \sin 4x$

الاقتران المعطى	$f(x) = \sin 4x$
مشتقة $\sin u$، حيث: $u = 4x$	$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin 4x) = \cos 4x \times 4$
بالتبسيط	$= 4\cos 4x$

2 $f(x) = \cos^3 x$

إعادة كتابة الاقتران المعطى	$f(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3$
قاعدة سلسلة القوّة	$f'(x) = 3(\cos x)^2 \times \frac{d}{dx}(\cos x)$
باشتقاق $\cos x$	$= 3\cos^2 x \times (-\sin x)$
إعادة الترتيب	$= -3\cos^2 x \sin x$

3 $f(x) = e^{\sin 2x}$

الاقتران المعطى	$f(x) = e^{\sin 2x}$
مشتقة e^u، حيث: $u = \sin 2x$	$f'(x) = e^{\sin 2x} \times \frac{d}{dx}(\sin 2x)$
مشتقة $\sin u$، حيث: $u = 2x$	$= e^{\sin 2x} \times \cos 2x \times 2$
إعادة الترتيب	$= 2e^{\sin 2x}\cos 2x$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ قاعدة السلسلة اســتُعمِلت أكثر من مَرَّة لإيجاد المشتقة في الفرع 3 من المثال.

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos 5x$

b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

c) $f(x) = \ln(\cos 3x)$

مثال 4 : من الحياة

عجلة دوّارة: يُمثِّل الاقتــران: $h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20}(t-10) + 90$ الارتفاع (بالأقدام) لشــخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t.

مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t هو $h'(t)$:

الاقتران المعطى

$$h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20}(t-10) + 90$$

مشتقة $\sin u$، حيث: $u = \frac{\pi}{20}(t-10)$

$$h'(t) = 85 \cos \frac{\pi}{20}(t-10) \times \frac{\pi}{20}$$

بإعادة كتابة المشتقة

$$= \frac{85\pi}{20} \cos \frac{\pi}{20}(t-10)$$

أتذكَّر

يشــير الرمز 6 a.m. إلى الساعة السادسة صباحًا، فــي حيــن يشــير الرمز 6 p.m. إلــى الســاعة السادسة مساءً.

أتحقَّق من فهمي

ميناء: يُمثِّل الاقتــران: $h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$ ارتفاع المــاء (بالأقدام) عند رصيف أحد الموانئ بعد t ســاعة تلي الســاعة 6 a.m.. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة إلى الزمن t.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 2\cos x + \sin x$

② $f(x) = 5 + \cos x$

③ $f(x) = \sin x - \cos x$

④ $f(x) = x \sin x$

⑤ $f(x) = \sin x \cos x$

⑥ $f(x) = e^x \sin x$

7 $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

8 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

9 $f(x) = \ln(\sin x)$

10 $f(x) = \cos(5x-2)$

11 $f(x) = \sin 3x + \cos 6x$

12 $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

13 $f(x) = e^{2x} \sin 10x$

14 $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$

15 $f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2}$

16 $f(x) = 4 \sin^2 x$

17 $f(x) = \cos^3 2x \cos x$

18 $f(x) = 5 \sin \sqrt{x}$

19 $f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$

20 $f(x) = \sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$

21 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$

22 **غزلان:** يُمثِّل الاقتران: $D(t) = 1500 + 400 \sin 0.4t$ عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بَدْء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

23 **نهار:** يُمكِن إيجاد عدد ساعات النهار H في أيِّ يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران: $H(t) = 12 + 2.4 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$. أجد مُعدَّل تغيُّر عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

مهارات التفكير العليا

24 **تبرير:** إذا كان: $y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$، مُبرِّرًا إجابتي.

إرشاد: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

25 **تحدٍّ:** أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$.

26 **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ✗

$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$، فإنَّ $f'(-1)$ هي:

a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) -4 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $1 + \frac{1}{x}$ d) $1 - \frac{1}{x}$

4 إذا كان: $y = \sin 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هي:

a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$

c) $4\cos 4t$ d) $-4\cos 4t$

5 إذا كان: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$

c) $-\frac{2}{(x-1)^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

6 إذا كان: $f(x) = x\cos x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\cos x - x\sin x$ b) $\cos x + x\sin x$

c) $\sin x - x\cos x$ d) $\sin x$

7 إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $4\sin^3 3x \cos 3x$ b) $12\sin^3 3x \cos 3x$

c) $12\sin 3x \cos 3x$ d) $2\cos^3 3x$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

8 $(fg)'(2)$

9 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

10 $(3f - 4fg)'(2)$

أنهار: يُمثِّل الاقتران: $h(t) = 0.12e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالسنتيمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هَطْل المطر:

11 أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t.

12 أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بَدْء هَطْل المطر.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $f(x) = \frac{x}{3x+1}, x = 1$

14 $f(x) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x}), x = 4$

15 $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}, x = 1$

16 $f(x) = e^{0.5} - x^2, x = 20$

17 $f(x) = x^2(3x - 1)^3, x = 1$

18 $f(x) = (x + 3)^2 e^{3x}, x = 2$

19 $f(x) = 3\ln x + \frac{1}{x}, x = e$

اختبار نهاية الوحدة

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x) = \sqrt{2x^4 + 7}$

21 $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 16)^5}$

22 $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 2}$

23 $f(x) = (8x^2 - 6)^{-40}$

24 $f(x) = \dfrac{1}{3 + 2x}$

25 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

26 $f(x) = (2x - 8)^2 (3x^2 - 4)$

27 $f(x) = x^5 (3x^2 + 4x - 7)$

28 $f(x) = x^3 (2x + 6)^4$

29 $f(x) = (e^{-x} + e^x)^3$

30 $f(x) = 2x^3 e^{-x}$

31 $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

32 $f(x) = 5 \ln (5x - 4)$

33 $f(x) = \ln e^x$

34 $f(x) = \ln (3x^2 + 2x - 1)$

35 $f(x) = x^5 \sin 3x$

36 $f(x) = \cos^2 x + \sin x$

37 $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x}}{x}$

38 $f(x) = \sin (5x) \ln (\cos x)$

39 $f(x) = \ln \left(\dfrac{1}{x^2 + 9}\right)$

40 $f(x) = e^{2x} \sin 2x$

بكتيريا: **يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 1000\left(1 - \dfrac{3}{t^2 + 50}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:**

41 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t.

42 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t = 1$.

غزلان: **يُمثِّل عدد الغزلان في غابة بالاقتران:**

$P(t) = \dfrac{2000}{4t + 80}$، حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

44 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة عندما $t = 10$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

سكّان: **يُمثِّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران:**

$P(t) = \dfrac{700}{t^2 + 1}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكّان بالآلاف:

45 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

46 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 3$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

الوحدة

3

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

ما أهمية هذه الوحدة؟

يستفاد من اشتقاق بعض الاقترانات في إيجاد مُعدَّلات التغيُّر بالنسبة إلى الزمن، مثل: السرعة، والتكاثر، والتغيُّر في درجات الحرارة. سأتعلَّم في هذه الوحدة كيف أستعمل طرائق اشتقاق بعض الاقترانات لتحديد القيمة العظمى والقيمة الصغرى في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر ربح، وأقل تكلفة.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد مشتقات اقترانات مُختلِفة.
- ✓ إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- ✓ إيجاد مشتقات اقترانات مُختلِفة باستعمال قاعدة السلسلة.
- ✓ استعمال القيم القصوى لحَلِّ مسائل وتطبيقات حياتية يُمكِن نمذجتها باقترانات كثيرات الحدود.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ إيجاد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما.
- ◄ إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما.
- ◄ إيجاد السرعة والتسارع لجسم يتحرَّك على خط مستقيم.
- ◄ إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.
- ◄ حَلَّ مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد القِيَم القصوى.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة)، في الصفحتين (19) و (20) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البَدْء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

المماس والعمودي على المماس

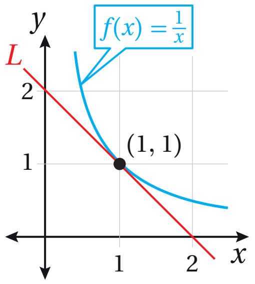
The Tangent and Normal

فكرة الدرس

- إيجاد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما.

المصطلحات المماس، العمودي على المماس.

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$:



1) أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل المستقيم L.

3) ما العلاقة بين ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L؟

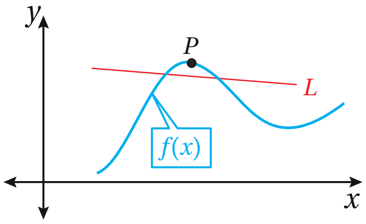
معادلة مماس منحنى الاقتران

مماس (tangent) منحنى الاقتران عند نقطة ما هو مستقيم يمسُّ منحنى الاقتران عند هذه النقطة كما في الشكل الآتي، حيث يُمثِّل المستقيم L مماسًّا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة P.

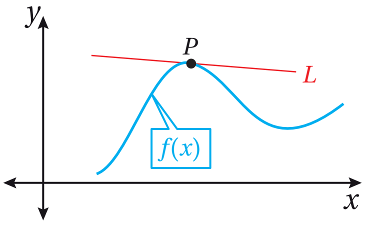
أتعلَّم

قد يمسُّ المماس منحنى الاقتران أو يقطعه عند نقطة أُخرى.

ليس مماسًّا عند النقطة P:



مماس عند النقطة P:



تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ مشتقة الاقتران عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة. ومن ثَمَّ يُمكِن استعمال المشتقة لإيجاد معادلة مماس منحنى الاقتران عند النقطة نفسها.

أتذكَّر

معادلة المستقيم الذي ميله m، والمارُّ بالنقطة (x_1, y_1) هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

مفهوم أساسي **معادلة مماس منحنى الاقتران**

إذا كان $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّ معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

مثال 1

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ عند النقطة $(2, 12)$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة المعطاة.

أجد $f'(2)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
بإيجاد المشتقة	$f'(x) = 2x + 3$
بتعويض $x = 2$	$f'(2) = 2(2) + 3$
بالتبسيط	$= 7$

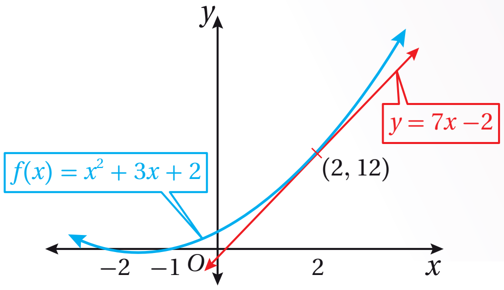
إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 12)$ هو: $f'(2) = 7$.

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة مماس منحنى الاقتران	$y - f(a) = f'(a)(x - a)$
بتعويض $a = 2, f(2) = 12, f'(2) = 7$	$y - 12 = 7(x - 2)$
بالتبسيط	$y = 7x - 2$

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$، ومماس المنحنى عند النقطة $(2, 12)$.



أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ عند النقطة $(3, 5)$.

أُلاحِظ من المثال السابق أنَّ إيجاد معادلة المماس لمنحنى أيِّ اقتران يتطلَّب وجود إحداثيي نقطة التماس. أمّا إذا كان الإحداثي x فقط معلومًا لنقطة التماس، فإنَّه يتعيَّن إيجاد الإحداثي y لإيجاد معادلة المماس.

مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$ عندما $x = -2$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند قيمة x المعطاة.

أجد $f'(-2)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$
بإيجاد المشتقة	$f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2+4)^2}$
بتعويض $x = -2$	$f'(-2) = \dfrac{-16(-2)}{((-2)^2+4)^2}$
بالتبسيط	$= \dfrac{32}{64} = \dfrac{1}{2}$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ هو: $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$
بتعويض $x = -2$	$f(-2) = \dfrac{8}{(-2)^2+4}$
بالتبسيط	$= \dfrac{8}{8} = 1$

إذن، الإحداثي y لنقطة التماس هو: $f(-2) = 1$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس.

معادلة مماس منحنى الاقتران	$y - f(a) = f'(a)(x-a)$
بتعويض $a = -2, f(2) = 1, f'(-2) = \frac{1}{2}$	$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x+2)$
بالتبسيط	$y = \dfrac{1}{2}x + 2$

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ عندما $x = 1$.

إيجاد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس

تعلَّمْتُ في المثالين السابقين إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران إذا عُلِمت نقطة التماس، أو عُلِم الإحداثي x منها. والآن سأتعلَّم كيف أجد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس.

مثال 3

1 **أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.**

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة التماس.

$f(x)=\sqrt{x}$ الاقتران المعطى

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ بإيجاد المشتقة

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ بتعويض $f'(x)=\frac{1}{2}$

$2\sqrt{x}=2$ بالضرب التبادلي

$\sqrt{x}=1$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

$x=1$ بتربيع طرفي المعادلة

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

أجد $f(1)$:

$f(x)=\sqrt{x}$ الاقتران المعطى

$f(1)=\sqrt{1}$ بتعويض $x=1$

$=1$ بالتبسيط

إذن، نقطة التماس هي: $(1, 1)$.

أتذكَّر

$(\sqrt{x})^2=\sqrt{x}\times\sqrt{x}=x$،

حيث: $x>0$.

2 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة (نقاط) التماس.

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بإيجاد المشتقة	$f'(x) = -3x^2 + 12x$
بتعويض $f'(x) = 0$	$-3x^2 + 12x = 0$
بإخراج $-3x$ عاملًا مشتركًا	$-3x(x-4) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$-3x = 0 \quad \text{or} \quad x-4 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 4$

أتذكَّر

ميـل المـمـاس الأفقي هو $m = f'(x) = 0$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطتي التماس.

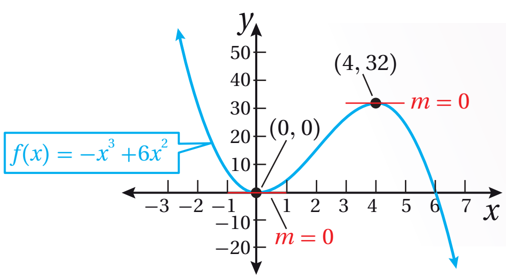
أجد $f(0)$، و $f(4)$:

الاقتران المعطى	$f(x) = -x^3 + 6x^2$
بتعويض $x = 0$	$f(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 = 0$
بتعويض $x = 4$	$f(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 = 32$

إذن، إحداثيا نقطتي التماس هما: $(0, 0)$، و $(4, 32)$.

الدعم البياني

يُبيِّن التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران $f(x)$ وجود مماسين أفقيين عندما $x = 0$، و $x = 4$.



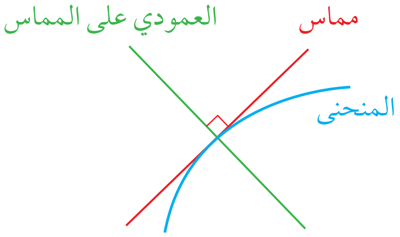
أتحقَّق من فهمي

a) أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنـى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

معادلة العمودي على المماس

العمودي على المماس (the normal) عند نقطة التماس هو مستقيم يصنع زاوية قائمة مع مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة.



مفهوم أساسي

معادلة العمودي على المماس

إذا كان $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، وكان: $f'(a) \neq 0$، فإنَّ معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

أتذكَّر

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهما ليس رأسيًّا، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو -1؛ أيْ إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

مثال 4

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0, 1)$.

الخطوة 1: أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة المعطاة.

$f(x) = e^{3x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^{3x}$ بإيجاد المشتقة

$f'(0) = 3e^{3(0)}$ بتعويض $x = 0$

$= 3$ بالتبسيط

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$ هو: $f'(0) = 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ ميل العمودي على المماس عند هذه النقطة هو: $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$.

أتذكَّر

لإيجاد معادلة مستقيم ما، يَلزم إيجاد ميل هذا المستقيم، ونقطة تقع عليه.

الخطوة 2: أجد معادلة العمودي على المماس.

$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ معادلة العمودي على مماس منحنى الاقتران

$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 0)$ بتعويض $a = 0, f(0) = 1, -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + 1$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \ln x^3$ عند النقطة $(1, 0)$.

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1 $f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1)$

2 $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x}, (1, -2)$

3 $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 1), (1, 0)$

4 $f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4, -5)$

5 $f(x) = x + e^x, (0, 1)$

6 $f(x) = \ln(x + e), (0, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7 $f(x) = \sqrt{x - 7}, x = 16$

8 $f(x) = (x - 1)\, e^x, x = 1$

9 $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}, x = 4$

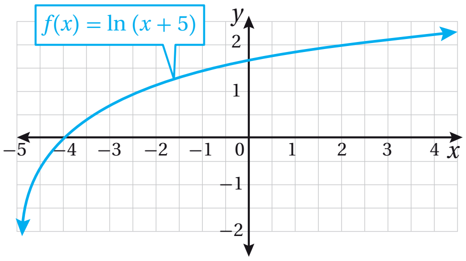
10 $f(x) = (\ln x)^2, x = e$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

11 $f(x) = (3x + 10)^2, (-3, 1)$

12 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \ln(x + 5)$:



13 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.

إرشاد: عند تقاطع المنحنى مع المحور x، فإنَّ $y = 0$.

14 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

إرشاد: عند تقاطع المنحنى مع المحور y، فإنَّ $x = 0$.

إذا كان: $f(x) = 4e^{2x+1}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x = -1$.

16 معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

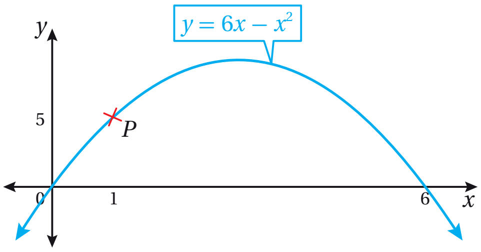
17 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

18 أجـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

19 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



21 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

22 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، مُبرِّرًا إجابتي.

24 نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

26 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

27 تبرير: أجـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنـى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكـون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم: $y = 2x - 1$.

الدرس

2

المشتقة الثانية، والسرعة، والتسارع

The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

فكرة الدرس

- إيجاد المشتقة الثانية لاقتران.
- إيجاد السرعة المتجهة والتسارع لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم.

المصطلحات المشتقة الثانية، الموقع، السرعة المتجهة، التسارع.

مسألة اليوم يُمكِن نمذجة موقع درّاجة نارية تتحرَّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار. أجد الزمن t الذي تكون فيه السرعة للدرّاجة 15 m/s.

المشتقة الثانية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ اقتران المشتقة هو اقتران جديد، وهذا يعني أنَّه يُمكِنني اشتقاقه.

يُطلَق على الاقتران الناتج من اشتقاق الاقتران مَرَّتين اسم **المشتقة الثانية** (the second derivative)، أو اقتران المشتقة الثانية، ويُرمَز إليه بالرمز $f''(x)$. فمثلًا، إذا كان: $f(x) = x^4$، فإنَّ مشتقة الاقتران $f(x)$ هي: $f'(x) = 4x^3$، والمشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ هي: $f''(x) = 12x^2$.

رموز رياضية

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة الثانية.

مثال 1

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

$f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5x^4 - 2x^3 + \cos x$ المشتقة الأولى

$f''(x) = 20x^3 - 6x^2 - \sin x$ المشتقة الثانية

② $f(x) = \ln x + e^x$

الاقتران المعطى $f(x) = \ln x + e^x$

المشتقة الأولى $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$

المشتقة الثانية $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + e^x$

أتحقَّق من فهمي

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

السرعة والتسارع، الحركة على خط مستقيم

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن t، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن اسم **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليه بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّي بهذا الاسم لأنَّه يُستعمَل لتحديد اتجاه حركة الجسم.

فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب. وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب. وإذا كانت $v(t) = 0$، فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر السرعة بالنسبة إلى الزمن اسم **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$.

إرشاد

نشير إلى أنَّ كلمة (سرعة) تعني السرعة المتجهة أينما وردت في هذا الكتاب.

مثال 2

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$
بتعويض $t = 2$	$v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5$
بالتبسيط	$= 1$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: 1 m/s

2 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

بما أنَّ إشارة السرعة موجبة، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب عندما $t = 2$.

3 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثم أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

اقتران التسارع	$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 8$
بتعويض $t = 2$	$a(2) = 6(2) - 8$
بالتبسيط	$= 4$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: 4 m/s^2

4 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر	$3t^2 - 8t + 5 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(3t - 5)(t - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$3t - 5 = 0 \quad \text{or} \quad t - 1 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ t	$t = \frac{5}{3} \quad \text{or} \quad t = 1$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 1$، و $t = \frac{5}{3}$.

أتعلَّم

من أمثلة الحركة في مسار مستقيم: حركة سيّارة على طول جزء مستقيم من الطريق، وسقوط كرة من سطح مبنى، وتذبذب جسم مُعلَّق بزنبرك في مسار مستقيم.

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

توجد تطبيقات حياتية عديدة للسرعة والتسارع، ويُمكِن استعمال هذه التطبيقات لتحليل حركة الأجسام.

مثال 3 : من الحياة

أسد جبال: يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1 ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقة:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 30t + 63$$ اقتران السرعة

$$v(4) = 3(4)^2 - 30(4) + 63$$ بتعويض $t = 4$

$$= -9$$ بالتبسيط

إذن، سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هي: -9 m/s

2 ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثم أُعوِّض $t = 4$ في المشتقة:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 30$$ اقتران التسارع

$$a(4) = 6(4) - 30$$ بتعويض $t = 4$

$$= -6$$ بالتبسيط

إذن، تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته هو: -6 m/s^2

معلومة

أسد الجبال حيوان من فصيلة السنوريات، وهو قريب جينيًّا من القطط الأهلية مقارنةً بالأسود.

3 **أجد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.**

يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $3t^2 - 30t + 63 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $t^2 - 10t + 21 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(t-3)(t-7) = 0$

خاصية الضرب الصفري $t - 3 = 0 \quad \text{or} \quad t - 7 = 0$

بحَلِّ كل معادلة لـ t $t = 3 \quad \text{or} \quad t = 7$

إذن، يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي عندما $t = 3$، و $t = 7$.

أتحقَّق من فهمي

فهد: **يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:**

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

② $f(x) = 2e^x + x^2$

③ $f(x) = 2\cos x - x^3$

④ $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

⑤ $f(x) = x^3 (x+6)^6$

⑥ $f(x) = x^7 \ln x$

⑦ $f(x) = \frac{x}{x+2}$

⑧ $f(x) = \sin x^2$

⑨ $f(x) = 2x^{-3}$

⑩ $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

⑪ $f(x) = \sqrt{x}$

⑫ $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

⑬ $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}, x = -2$

⑭ $f(x) = \frac{1}{2x-4}, x = 3$

15 إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$، وكانت: $f''(2) = -1$، فأجد قيمة الثابت p.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16 ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

17 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

18 ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \frac{3t}{1+t} , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

20 ما سرعة الجسم عندما $t = 4$؟

21 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

22 ما تسارع الجسم عندما $t = 4$؟

لوح تزلُّج: يتحرَّك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلُّج، بحيث يُمكِن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

23 ما سرعة رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

24 ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

25 أجد قِيَم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

مهارات التفكير العليا

26 تبرير: إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$، فأُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$.

27 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

28 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

الدرس

3

تطبيقات القِيَم القصوى

Optimization Problems

فكرة الدرس

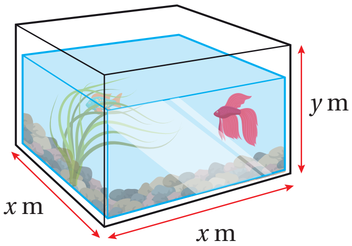
- تصنيف القِيَم الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية.
- حَلُّ مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد القِيَم القصوى.

المصطلحات

اختبار المشتقة الثانية، اقتران التكلفة، التكلفة الحدِّية، اقتران الإيراد، الإيراد الحدِّي، اقتران الربح، الربح الحدِّي.

مسألة اليوم

أرادت إسـراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سـعته $0.2\ \text{m}^3$، وأبعـاده كما في الشـكل المجاور. أجد أبعاد الحـوض التي تجعل كمِّية الزجاج المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

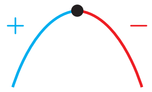


تصنيف القِيَم الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية

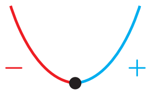
تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ النقطة التي يكون عندها ميـل منحنى الاقتران صفرًا هي نقطة حرجة، وهذا يعني أنَّ مشتقة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا؛ لذا يُمكِن رسم مماس أفقي عندها.

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن تصنيف النقاط الحرجة بدراسة إشارة المشتقة الأولى إلى ما يأتي:

- **النقطة العظمى المحلية:** نقطة حرجة يتزايد منحنى الاقتران عن يسارها، ويتناقص عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من الموجب إلى السالب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.



- **النقطة الصغرى المحلية:** نقطة حرجة يتناقص منحنى الاقتران عن يسارها، ويتزايد عن يمينها؛ ما يعني أنَّ إشارة المشتقة تتغيَّر من السالب إلى الموجب عند الحركة من يسار النقطة إلى يمينها.



لقد تعلَّمْتُ في الدرس السـابق إيجاد المشتقة الثانية لأيِّ اقتران. والآن سأتعلَّم كيف أستعمل **اختبار المشـتقة الثانية** (second derivative test) لتحديد ماهية النقطة الحرجة؛ هل هي عظمى محلية أم صغرى محلية؟

اختبار المشتقة الثانية

نظرية

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ: $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ اختبار المشتقة الثانية يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال المشتقة الأولى لتصنيف القِيَم القصوى المحلية.

أتذكَّر

يشير مصطلح (النقطة العظمى المحلية) إلى النقطة (x, y)، ويشير مصطلح (القيمة العظمى المحلية) إلى الإحداثي y للنقطة العظمى المحلية. وكذلك الحال بالنسبة إلى مصطلح (النقطة الصغرى المحلية)، ومصطلح (القيمة الصغرى المحلية).

مثال 1

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة 1: أجد المشتقة الأولى والقِيَم الحرجة للاقتران.

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
مشتقة كثيرات الحدود	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
بمساواة المشتقة بالصفر	$6x^2 + 6x - 12 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 6	$x^2 + x - 2 = 0$
بتحليل العبارة التربيعية	$(x+2)(x-1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$
بحَلِّ كل معادلة لـ x	$x = -2 \qquad x = 1$

إذن، القِيَم الحرجة للاقتران f هي:

$x = -2, x = 1$.

الخطوة 2: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

اقتران المشتقة	$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
مشتقة كثيرات الحدود	$f''(x) = 12x + 6$

أتعلَّم

يُطلَق على القِيَم الصغرى المحلية والقِيَم العظمى المحلية اسم القِيَم القصوى المحلية.

الخطوة 3: أُعوِّض القِيَم الحرجة في المشتقة الثانية؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$ $\quad f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$

بتعويض $x = 1$ $\quad f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$

أُلاحِظ أنَّ:

- $f'(-2) = 0$، و $f''(-2) < 0$. إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 20$.
- $f'(1) = 0$، و $f''(1) > 0$. إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -7$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

تطبيقات القِيَم القصوى

يُعَدُّ تحديد القيمة الصغرى المحلية والقيمة العظمى المحلية أحد أكثر موضوعات التفاضل الفرعية استعمالًا في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر مساحة مُمكِنة، وأكبر ربح مُمكِن، وأقل تكلفة مُمكِنة.

يُمكِن اتِّباع الخطوات الآتية لحَلِّ العديد من مسائل تطبيقات القِيَم القصوى:

مفهوم أساسي

استراتيجية حَلِّ مسائل القِيَم القصوى

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.
2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمِّية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.
3) **أجد القِيَم الحرجة للاقتران:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفرًا.
4) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

إيجاد أكبر مساحة مُمكِنة

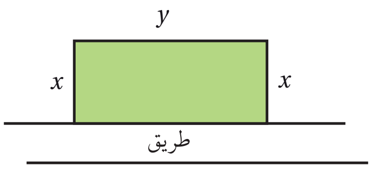
من التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى، إيجاد أكبر مساحة يُمكِن إحاطة سياج معلوم طوله بها.

مثال 2 : من الحياة

اشترى مُزارِعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي محاط به سياج من قبلُ. أجد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيط السياج بها.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفترض أنَّ y هو طول الحقل، وأنَّ x هو عرضه كما في المُخطَّط المجاور.



الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران مساحة الحقل:

مساحة المستطيل $A = xy$

- أكتب y بدلالة x باستعمال المحيط:

محيط الحقل $P = 2x + y$

بتعويض $P = 800$ $800 = 2x + y$

بكتابة المعادلة بدلالة y $y = 800 - 2x$

- أُعوِّض y في اقتران مساحة الحقل:

اقتران مساحة الحقل $A = xy$

بتعويض $y = 800 - 2x$ $A(x) = x(800 - 2x)$

بالتبسيط $= 800x - 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل مساحة الحقل هو: $A(x) = 800x - 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران مساحة الحقل $A'(x) = 800 - 4x$

بمساواة المشتقة بالصفر $800 - 4x = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x $x = 200$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 200$.

أتعلَّم

بما أنَّ أحد أضلاع الحقل يُقابِل الطريق الزراعي الذي أُحيط به سياج سابقًا، فإنَّه يتعيَّن على المُزارِع أنْ يُسيِّج فقط ثلاثة أضلاع من الحقل.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 200$:

$$A''(x) = -4$$ بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران مساحة الحقل

بما أنَّ المشتقة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 200$، وهذا يعني أنَّ مساحة الحقل تكون أكبر ما يُمكِن إذا كان عرضه 200 m.

إذن، أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيط السياج بها هي:

$$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000 \text{ m}^2.$$

أتحقَّق من فهمي

بنى نجّار سقفًا خشبيًّا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه 54 m. أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة

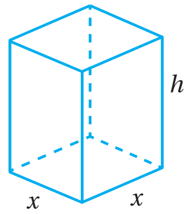
من التطبيقات الاقتصادية المهمة على القِيَم القصوى، إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة من المواد اللازمة لصنع الأشياء.

مثال 3

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 1000 cm^3، وقاعدتها مربعة الشكل. أجد أبعاد العُلْبة الواحدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.

أفترض أنَّ x هو طول قاعدة العلبة، وأنَّ h هو ارتفاعها كما في المُخطَّط المجاور.



الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

$$S = 4xh + 2x^2$$ المساحة الكلية لسطح العُلْبة

- أكتب h بدلالة x باستعمال حجم متوازي المستطيلات:

حجم العُلْبة $V = x^2 h$

بتعويض $V = 1000$ $1000 = x^2 h$

بكتابة المعادلة بدلالة h $h = \frac{1000}{x^2}$

- أُعوِّض h في اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة:

اقتران المساحة الكلية لسطح العُلْبة $S = 4xh + 2x^2$

بتعويض $h = \frac{1000}{x^2}$ $S(x) = 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) + 2x^2$

بالتبسيط $= \frac{4000}{x} + 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل المساحة الكلية لسطح العُلْبة هو: $S(x) = \frac{4000}{x} + 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران مساحة السطح $S'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 4x$

بمساواة المشتقة بالصفر $-\frac{4000}{x^2} + 4x = 0$

بضرب طرفي المعادلة في x^2 $4x^3 = 4000$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x^3 = 1000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = 10$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 10$.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 10$:

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران مساحة السطح $S''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$

بتعويض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$

أُلاحِظ وجود قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$، وهذا يعني أنَّ كمِّيَّة الكرتون المُستعمَلة تكون أقل ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة 10 cm

إذن، أبعاد العُلْبة الواحدة هي: $l = x = 10 \text{ cm}, w = x = 10 \text{ cm}, h = \frac{1000}{x^2} = 10 \text{ cm}$.

أتحقَّق من فهمي

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها 2 m^3، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّيَّة المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

أتذكَّر

حجم متوازي المستطيلات هو مساحة القاعدة مضروبةً في الارتفاع.

أتذكَّر

المساحة الكلية لسطح متوازي المستطيلات هي المساحة الجانبية التي أُضيف إليها مساحتا القاعدتين، علمًا بأنَّ المساحة الجانبية هي محيط القاعدة في الارتفاع.

أتعلَّم

في هذه المسألة، تكون كمِّيَّة الكرتون المُستعمَلة أقل ما يُمكِن إذا كانت العُلْبة على شكل مُكعَّب.

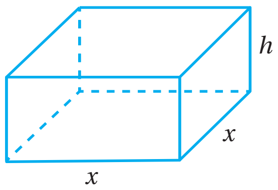
إيجاد أكبر حجم مُمكِن

يُعَدُّ إيجاد أكبر حجم مُمكِن للخزّانات أحد التطبيقات الحياتية المُهِمَّة على القِيَم القصوى؛ فهو يساعد على توفير الصفائح المعدنية المُستعمَلة لصنع الخزّانات بالطريقة المثلى؛ ما يُقلِّل من تكلفة الإنتاج.

مثال 4

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $36\ \mathrm{m}^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

الخطوة 1: أرسم مُخطَّطًا.



أفترض أنَّ x هو طول قاعدة الخزّان، وأنَّ h هو ارتفاعه كما في المُخطَّط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أُريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة مُتغيِّر واحد.

- أجد اقتران حجم الخزّان:

صيغة حجم متوازي المستطيلات	$V = l \times w \times h$
بتعويض $l = x, w = x$	$= x \times x \times h$
بالتبسيط	$= x^2 h$

- أكتب h بدلالة x باستعمال المساحة الكلية لسطح الخزّان:

المساحة الكلية لسطح الخزّان	$S = 4xh + 2x^2$
بتعويض $S = 36$	$36 = 4xh + 2x^2$
بكتابة المعادلة بدلالة h	$h = \dfrac{36 - 2x^2}{4x}$
بالتبسيط	$h = \dfrac{18 - x^2}{2x}$

- أُعوِّض h في اقتران حجم الخزّان:

اقتران حجم الخزّان	$V = x^2 h$
بتعويض $h = \frac{18 - x^2}{2x}$	$V(x) = x^2\left(\frac{18 - x^2}{2x}\right)$
بالتبسيط	$= 9x - \frac{1}{2}x^3$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل حجم الخزّان هو: $V(x) = 9x - \frac{1}{2}x^3$.

الخطوة 3: أجد القِيَم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران الحجم	$V'(x) = 9 - \frac{3}{2}x^2$
بمساواة المشتقة بالصفر	$9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$
بحَلِّ المعادلة لـ x^2	$x^2 = 6$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين	$x = \pm\sqrt{6}$

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّه توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = \sqrt{6}$.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \sqrt{6}$:

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران الحجم	$V''(x) = -3x$
بتعويض $x = \sqrt{6}$	$V''(\sqrt{6}) = -3(\sqrt{6}) < 0$

أُلاحِظ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{6}$، وهذا يعني أنَّ حجم الخزّان يكون أكبر ما يُمكِن إذا كان طول القاعدة $\sqrt{6}$ m.

إذن، أبعاد الخزّان هي:

$$l = x = \sqrt{6}\,\text{m},\ w = x = \sqrt{6}\ \text{m},\ h = \frac{18 - x^2}{2x} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ \text{m}.$$

أتحقَّق من فهمي

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ \text{m}^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، وأنْ يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

تطبيقات اقتصادية

من التطبيقات الاقتصادية المُهِمَّة على القِيَم القصوى: إيجاد أكبر ربح لمُنتَج مُعيَّن، أو إيجاد أعلى إيراد من بيعه، أو إيجاد أقل تكلفة لصنعه.

يُطلَق على الاقتران الذي يُمثِّل تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن اسم **اقتران التكلفة** (cost function)، ويُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنسبة إلى x اسم **التكلفة الحدِّية** (marginal cost)؛ ما يعني أنَّ اقتران التكلفة الحدِّية هو مشتقة اقتران التكلفة $C'(x)$.

أمّا الاقتران الذي يُمثِّل إيراد بيع x وحدة من مُنتَج مُعيَّن فيُسمّى **اقتران الإيراد** (revenue function)، ويُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. وأمّا مشتقة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى **الإيراد الحدِّي** (marginal revenue)، وهو يُمثِّل مُعدَّل تغيُّر الإيراد بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

بناءً على ما سبق، فإنَّ ربح بيع x قطعة من مُنتَج مُعيَّن يعطى بالاقتران الآتي:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

حيث $P(x)$ هو **اقتران الربح** (profit function)، و**الربح الحدِّي** (marginal profit) هو مشتقة اقتران الربح $P'(x)$.

مثال 5 : من الحياة

وجد خبير تسويق أنَّه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإنَّ سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

اقتران الإيراد $R(x) =$ (سعر الحاسوب الواحد)(عدد القطع المَبيعة)

بالتعويض $= x(1000 - x)$

باستعمال خاصية التوزيع $= 1000x - x^2$

إذن، اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1000x - x^2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الربح.

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

بالتعويض $= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$

بالتبسيط $= -x^2 + 980x - 3000$

إذن، اقتران الربح هو: $P(x) = -x^2 + 980x - 3000$.

الخطوة 3: أجد الربح الحدِّي، ثم أجد القيمة الحرجة، مُحدِّدًا نوعها.

الربح الحدِّي $P'(x) = -2x + 980$

بمساواة المشتقة بالصفر $-2x + 980 = 0$

بحَلِّ المعادلة لـ x $x = 490$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 490$.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 490$:

بإيجاد المشتقة الثانية للربح الحدِّي $P''(x) = -2$

بما أنَّ المشتقة الثانية للاقتران سالبة لقِيَم x الموجبة جميعها، فإنَّه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 490$.

إذن، تُحقِّق الشركة أكبر ربح مُمكِن عند إنتاجها وبيعها 490 جهاز حاسوب.

أتحقَّق من فهمي

وجدت خبيرة تسويق أنَّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنَّ سعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

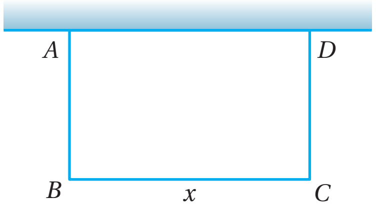
أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

3 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

2 $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$

1 $f(x) = x^2 - 2x + 5$

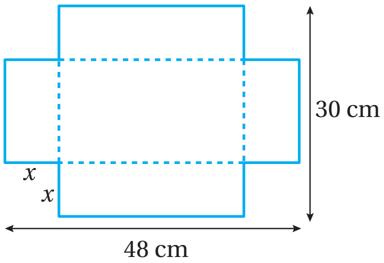


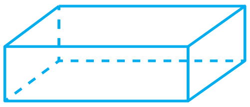
يُمثِّل الشكل المجاور مُخطَّطًا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أُنشِئت مُقابِل جدار. إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار 300 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4 المقدار الجبري الذي يُمثِّل طول الضلع AB بدلالة x.

5 اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.

6 بُعْدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يُمكِن.





قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها 48 cm، وعرضها 30 cm. قُصَّ من زوايا القطعة مربعات مُتطابِقة، طول ضلع كلٍّ منها x cm كما في الشكل المجاور، ثم ثُنِيت لتشكيل عُلْبة:

7 أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم العُلْبة بدلالة x.

8 أجد قيمة x التي تجعل حجم العُلْبة أكبر ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار:

9 أجد اقتران الإيراد.

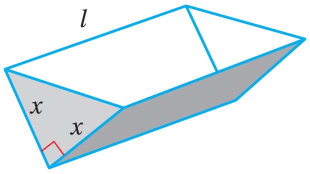
10 أجد عدد القطع x الذي يتساوى عندها الإيراد الحدِّي مع التكلفة الحدِّية.

11 أجد اقتران الربح.

12 أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

13 أجد سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

مهارات التفكير العليا



14 **تحدٍّ:** قالَب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي مفتوح من الأعلى، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. إذا كان حجم القالَب $1000\ cm^3$، فأجد أبعاده التي تجعل المواد المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 4

الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة
Implicit Differentiation and Related Rates

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.
- حَلُّ مسائل حياتية تتضمَّن إيجاد المُعدَّلات المرتبطة بالزمن.

المصطلحات العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني.

مسألة اليوم خزّان وقود أسطواني الشكل، وقُطْر قاعدته 2 m. إذا مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل $0.5\ \mathrm{m^3/min}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الوقود فيه، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزّان (V) وارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.

العلاقة الضمنية ومشتقتها

جميع الاقترانات التي تعلَّمْتُ كيفية اشتقاقها – حتى الآن – هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة: $y = f(x)$؛ أيْ إنَّه يُمكِن كتابتها في صورة مُتغيِّرٍ بدلالةِ مُتغيِّرٍ آخر، مثل الاقترانات الآتية:

$$y = \sqrt[3]{x-1} \quad , \quad y = \frac{7x}{x^2+9} \quad , \quad y = x^3 - 8x$$

ولكنْ، توجد معادلات أُخرى، مثل: $x^3 + y^3 - 9xy = 0$، لا يُمكِن كتابتها في صورة: $y = f(x)$؛ لذا تُسمّى **علاقات ضمنية** (implicit relations). يُطلَق على عملية إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية اسم **الاشتقاق الضمني** (implicit differentiation)، ويُمكِن تلخيص خطوات إجرائها كما يأتي:

مفهوم أساسي

الاشتقاق الضمني

بافتراض أنَّ معادلةً تُعرِّف المُتغيِّر y ضمنيًّا بوصفه اقترانًا قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.

الخطوة 2: أُعيد ترتيب حدود المعادلة، بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.

الخطوة 3: أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.

الخطوة 4: أَحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال 1

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $2x + 3y^2 = 1$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x	$\frac{d}{dx}(2x + 3y^2) = \frac{d}{dx}(1)$
قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت	$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y^2) = 0$
قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة السلسلة	$2 + 6y\frac{dy}{dx} = 0$
بحَلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{6y}$
بالتبسيط	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3y}$

2 $y^3 - \sin x = 4y^2$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x	$\frac{d}{dx}(y^3 - \sin x) = \frac{d}{dx}(4y^2)$
قاعدة مشتقة الفرق	$\frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}(4y^2)$
قواعد مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة السلسلة، ومشتقة الجيب	$3y^2\frac{dy}{dx} - \cos x = 8y\frac{dy}{dx}$
بإعادة ترتيب المعادلة	$3y^2\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = \cos x$
بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا	$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 8y) = \cos x$
بحَلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 - 8y}$

3 $xy - 2y = 3e^x$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x	$\frac{d}{dx}(xy - 2y) = \frac{d}{dx}(3e^x)$
قاعدتا مشتقة الفرق، ومشتقة الاقتران الأُسِّي الطبيعي	$\frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}(2y) = 3e^x$

قاعدة مشتقة الضرب

$$x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(2y)=3e^{x}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$x\frac{dy}{dx}+y-2\frac{dy}{dx}=3e^{x}$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=3e^{x}-y$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا

$$\frac{dy}{dx}(x-2)=3e^{x}-y$$

بحَلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^{x}-y}{x-2}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^{2}+y^{2}=2$

b) $5y^{2}-2e^{x}=4y$

c) $xy+y^{2}=4\cos x$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجـاد معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية عند نقطة ما بإيجاد ميله، ثم التعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

مثال 2

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $y^{3}+xy=2$ عند النقطة $(1, 1)$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 1)$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x

$$\frac{d}{dx}(y^{3}+xy)=\frac{d}{dx}(2)$$

قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$$\frac{d}{dx}(y^{3})+\frac{d}{dx}(xy)=0$$

قواعد مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الضرب، ومشتقة السلسلة

$$3y^{2}\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

بتعويض $x=1, y=1$

$$3(1)^{2}\frac{dy}{dx}+(1)\frac{dy}{dx}+(1)=0$$

بالتبسيط $$4\frac{dy}{dx}+1=0$$

بحَلِّ المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$ $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, 1)$ هو: $-\frac{1}{4}$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $$y-y_1=m(x-x_1)$$

بتعويض $x_1=1, y_1=1, m=-\frac{1}{4}$ $$y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$$

باستعمال خاصية التوزيع $$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3+2y^3=6$ عند النقطة $(2, -1)$.

المُعدَّلات المرتبطة

يتطلَّب حَلُّ بعض المسائل الحياتية إيجاد مُعدَّل تغيُّر المساحة أو الحجم بالنسبة إلى الزمن، ويُمكِن استعمال قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد المُعدَّل بالنسبة إلى الزمن.

مثال 3 : من الحياة

عند رمي حجر في مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر دائرة يزداد بمُعدَّل 8 cm/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 10 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A=\pi r^2$.

الخطوة 1: أُحدِّد المعطيات والمطلوب.

المعادلة: $A=\pi r^2$.

مُعدَّل التغيُّر المعطى: $\frac{dr}{dt}=8$.

المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=10}$.

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ طول r مُتزايِد؛ لذا، فإنَّ مُعدَّل تغيُّره موجب. أمّا إذا كان r مُتناقِصًا، فإنَّ مُعدَّل تغيُّره يكون سالبًا.

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوِّض.

المعادلة $A = \pi r^2$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t $\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$

قاعدة السلسلة $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$

بتعويض $r = 10, \frac{dr}{dt} = 8$ $= 2\pi(10)(8)$

بالتبسيط $= 160\pi$

إذن، تزداد مساحة الدائرة بمُعدَّل 160π cm^2/s عندما يكون نصف قُطْرها 10 cm

أتحقَّق من فهمي

بالونات: نفخت هديل بالونًا على شكل كرة، فازداد نصف قُطْره بمُعدَّل **3 cm/s**. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم البالون عندما يكون نصف قُطْره **4 cm**، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

① $x^2 - 2y^2 = 4$

② $x^2 + y^3 = 2$

③ $x^2 + 2y - y^2 = 5$

④ $2xy - 3y = y^2 - 7x$

⑤ $y^5 = x^3$

⑥ $x^2 y^3 + y = 11$

⑦ $\sqrt{x} + \sin y = 16$

⑧ $e^x y = xe^y$

⑨ $\cos x + \ln y = 3$

⑩ $16y^2 - x^2 = 16$

⑪ $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

⑫ $3x^3 - y^2 = 8, (2, 4)$

⑬ $2x^2 - 3y^3 = 5, (-2, 1)$

⑭ $y^2 = \ln x, (e, 1)$

⑮ $(y - 3)^2 = 4x - 20, (6, 1)$

إذا كان: $2x^2 + y^2 = 34$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16 ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$.

17 معادلة المماس عند النقطة $(3, 4)$.

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 7$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18 ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.

19 معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.

20 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3, -2)$.

21 **هندسة:** تتناقص أطوال أضلاع مُكعَّب بمُعدَّل 6 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب عندما يكون طول ضلعه 30 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المُكعَّب (V) وطول ضلعه (x) هي: $V = x^3$.

22 **فقاقيع:** يزداد نصف قُطْر فُقّاعة صابون كروية الشكل بمُعدَّل 0.5 cm/s. أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفُقّاعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 3 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفُقّاعة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = 4\pi r^2$.

23 **أورام:** اتَّخذ ورم شكلًا كرويًا تقريبًا، وقد ازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 0.13 cm لكل شهر. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم الورم عندما يكون طول نصف قُطْره 0.45 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مهارات التفكير العليا

24 **تبرير:** أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$، مُبرِّرًا إجابتي.

25 **تحدٍّ:** إذا كان: $\ln(xy) = x^2 + y^2$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$.

26 **تبرير:** إذا كان المُتغيِّران u و w مرتبطين بالعلاقة: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المُتغيِّر w تزداد بمرور الزمن t، وَفقًا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مُبرِّرًا إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميل المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو:

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$

c) 11 d) 8

2 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

3 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

4 ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

a) 6 b) 3

c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

5 قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

a) 2 b) -2

c) 1 d) -1

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

6 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

7 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

8 $f(x) = x^2 - 7x + 10, (2, 0)$

9 $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

10 $f(x) = \frac{2x - 1}{x}, (1, 1)$

11 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

12 $f(x) = (x - 7)(x + 4), x = 1$

13 $f(x) = \frac{x}{x + 4}, x = -5$

14 $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2$

اختبار نهاية الوحدة

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$

16 $f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4}, x = -2$

17 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

18 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12.

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

19 $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

20 $f(x) = \ln x - 9e^x$

21 $f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22 $f(x) = \sqrt{x}(x + 2), x = 2$

23 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$

24 **نفط:** تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بُقْعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمُعدَّل $50\ \text{m}^2/\text{min}$. أجد سرعة تزايد نصف قُطْر البُقْعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 20 m، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

26 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

27 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

28 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

دراجات: يُمكِن نمذجة موقع شخص يقود درّاجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29 ما سرعة الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

30 ما تسارع الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

31 أجد قِيَم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي (إنْ وُجِدت).

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

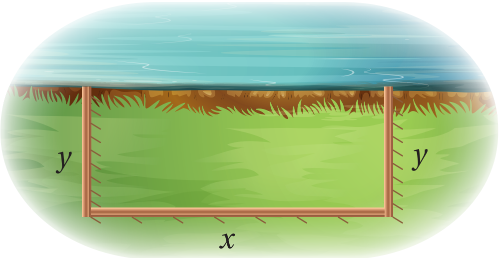
32 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

33 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

34 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

35 **بالونات:** نفخت ماجدة بالونًا على شكل كرة، فازداد حجمه بمُعدَّل $800\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون طول نصف قُطْره 60 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

36 خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ \text{m}^2$؛ لتوفير كمِّية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

37 $x^2 + y^2 = y$

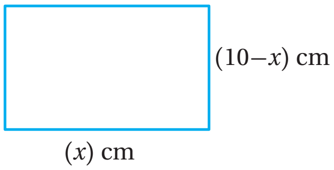
38 $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 13$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

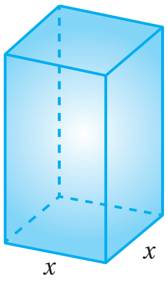
39 ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

40 معادلة المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

41 سلك طوله 20 cm. إذا أُريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يُمكِن إحاطة السلك بها.



يُبيِّن الشكل الآتي صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، وطول ضلع القاعدة x cm، ومجموع أطوال أحرفه 144 cm، فأجد كُلًّا ممّا يلي:



42 الاقتران الذي يُمثِّل حجم الصندوق بدلالة x.

43 قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

44 $2x^3 + 4y^2 = -12, (-2, -1)$

45 $x^3 - x^2y^2 = -9, (3, -2)$

ملحقات

رموز رياضية

دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
مشتقة الاقتران $f(x)$	$f'(x)$

الجبر

العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

الأسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m$$

$$x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

التفاضل

قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x))=f(x)\,g'(x)+g(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقات الاقترانات الأُسِّية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x},\ x>0$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأُسّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسّية
$\log_b x = y$	إذا وفقط إذا	$b^y = x$
الأُسّ الأساس		الأُسّ الأساس

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$، و $b > 0$، و $b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

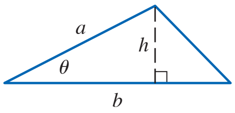
- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

الهندسة

صيغ هندسية (المساحة A، والمحيط C، والحجم V)

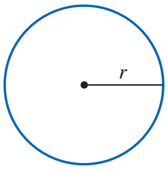
- المثلث:

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$$



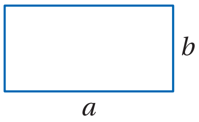
- الدائرة:

$$A = \pi r^2$$
$$C = 2\pi r$$



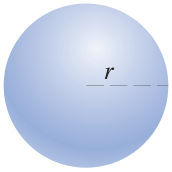
- المستطيل:

$$A = ab$$



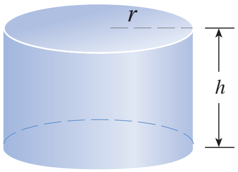
- الكرة:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A = 4\pi r^2$$



- الأسطوانة:

$$V = \pi r^2 h$$
$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



- متوازي المستطيلات:

$$V = abc$$
$$A = 2ab + 2ac + 2bc$$