الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب التمارين

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي	يوسف سليمان جرادات	أ.د محمد صبح صبابحة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2024/4)، تاريـخ 2024/6/6 م، وقرار مجلـس التربيـة والتعليم رقـم (2024/65) تاريـخ 2024/6/26 م بـدءًا من العـام الـدراسي 2024 / 2025 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 652 - 5

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2024/6/3449)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	الرياضيات (كتاب التمارين): الصف الحادي عشر، الفصل الدراسي الأول.
إعداد/ هيئة	الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمّان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2024
رقم التصنيف	373.19
الواصفات	/ تدريس الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/
الطبعة	الطبعة الأولى

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

التحكيم التربوي:
أ.د. خالد أبو اللوم

التصميم الجرافيكي:
راكان محمد السعدي

التحرير اللغوي:
نضال أحمد موسى
ميسرة عبد الحليم صويص

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

منهاجي
متعة التعليم الهادف

1445 هـ / 2024 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

منهاجي
متعة التعليم الهادف

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 1: الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

إيجاد قيمة اقتران عند قيمة معطاة (الدرس 1)

إذا كان $g(x) = 10 - x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

1 أجد $g(-5)$

2 أجد $g(3) + 6$

3 أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

إذا كان $f(x) = 5x - 3$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(2) + f(-1)$

6 $25 - f(-2)$

5 $f(5)$

4 $f(0)$

مثال: إذا كان $f(x) = 2x + 6$، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

a) أجد $f(3)$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $x = 3$	$f(3) = 2(3) + 6$
بالتبسيط	$= 12$

b) أجد $f(-4) + 10$

بتعويض $x = -4$	$f(-4) + 10 = (2(-4) + 6) + 10$
بالتبسيط	$= -2 + 10$
بالتبسيط	$= 8$

c) أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

الاقتران المعطى	$f(x) = 2x + 6$
بتعويض $f(x) = -10$	$-10 = 2x + 6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$-16 = 2x$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$x = -8$

إذن، قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$ هي -8

تمثيل الاقتران الخطّيّ بيانيًّا (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

8) $f(x) = 4 - x$
9) $g(x) = x + 2$
10) $h(x) = 2x - 5$
11) $r(x) = -x$
12) $s(x) = 2(1 + x)$
13) $m(x) = 3$

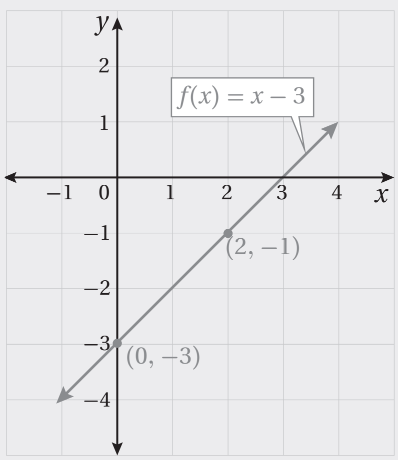
مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = x - 3$ بيانيًّا.

الخطوة 1 أختار بعض قِيَم المدخَلات x، ولتكنْ: 2 ,0

الخطوة 2 أُنشئ جدولًا لإيجاد قِيَم المخرَجات المقابلة لهذه المدخَلات.

x	$x-3$	$f(x)$	$(x, f(x))$
2	$(2) - 3$	-1	$(2, -1)$
0	$(0) - 3$	-3	$(0, -3)$

الخطوة 3 أمثّل الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخطّ مستقيم.



تمثيل كثير حدود معرّف على فترة بيانيًّا وتحديد مجاله ومداه (الدرس 1)

أمثّل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

14) $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ -1 \leq x \leq 5$

15) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3,\ 0 \leq x \leq 3$

16) $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \leq x \leq 3$

17) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \leq x \leq 4$

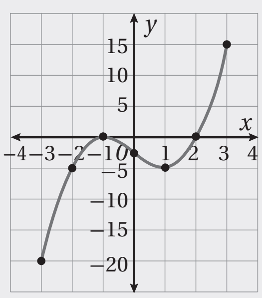
مثال: أمثّل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 2,\ -3 \leq x \leq 3$

الخطـوة 1 أنشئ جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1, 0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطـوة 2 أعيّن النقاط التي تمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية، حيث: $-3 \leq x \leq 3$، أو الفترة $[-3, 3]$، ومداه: $-20 \leq y \leq 16$، أو الفترة $[-20, 16]$.

b) $f(x) = x^2 - 4x, -1 \le x \le 4$

هــذا اقتــران تربيعي علــى الصــورة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيــث $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطع مكافئ يمكن تمثيله بيانيًّا كما يأتي:

- بما أنّ $a > 0$، فمنحنى القطع المكافئ مفتوح للأعلى، ويمثّل الرأس نقطته الصغرى.

- معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

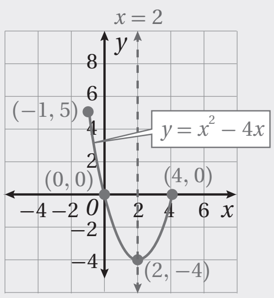
$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيا الرأس هما: $(2, -4)$

- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y هي: $(0, 0)$

- النقطة $(-1, 5)$ هي نقطة بداية منحنى الاقتران، وتقع في الجانب نفســه الذي يقــع فيه المقطع y من محور التماثل (يسار محور التماثل)، أما النقطة $(4, 0)$ فهي نقطة نهاية منحنى الاقتران وتقع يمين محور التماثل.

- أمثّل الرأس والنقاط الثلاث في المســتوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

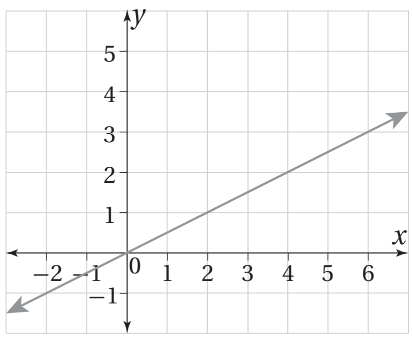


مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية حيث: $-1 \le x \le 4$؛ أي الفترة $[-1, 4]$، ومداه: $-4 \le x \le 5$، أي الفترة $[-4, 5]$.

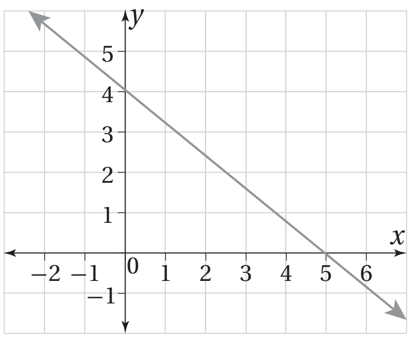
إيجاد معادلة مستقيم مُمثَّل بيانيًّا (الدرس 1)

أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع:

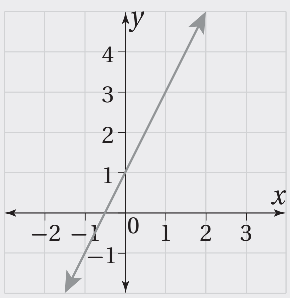
19



18



مثال: **أجد معادلة المستقيم المُمثَّل بيانيًّا في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع.**



الخطـوة 1 أجد المقطع y.

أُلاحِظ أنَّ المستقيم قطع المحور y عند 1

إذن، المقطع y هو 1 $b = 1$

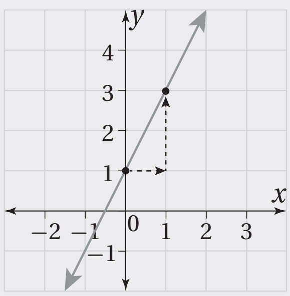
الخطـوة 2 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم، ثم أجد مقدار التغيُّر الرأسي والتغيُّر الأفقي بينهما.

أُلاحِظ أنَّ:

عدد الخطوات الأفقية هو 1

عدد الخطوات الرأسية هو 2



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيُّر الرأسي}}{\text{التغيُّر الأفقي}}$$

إذن، ميل المستقيم هو: $m = \frac{2}{1} = 2$

الخطــوة 3 أُعوِّض في صيغة الميل والمقطع.

أُعوِّض المقطع y والميل في صيغة الميل والمقطع:

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
بتعويض $m = 2$، و $b = 1$	$y = 2x + 1$

إذن، معادلة المستقيم هي: $y = 2x + 1$

إيجاد قيمة مقدار جبريّ يتضمن قيمة مطلّقة عند قيمة معطاة (الدرس 1)

أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

22) $|3x - 5| + |x - 1|, x = 0$

21) $-2\,|3x + 1|, x = -1$

20) $|x - 2| + 10, x = -4$

25) $x - 4|2x + 11|, x = -4$

24) $|x| + |-x|, x = -10$

23) $5|2 - x| + 4, x = 2$

مثال: أجد قيمة كلّ من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

a) $\mathbf{|x + 3| - 8, x = 2}$

بتعويض $x = 2$	$|x + 3| - 8 = |2 + 3| - 8$
$2 + 3 = 5$	$= |5| - 8$
$|5| = 5$	$= 5 - 8$
بالتبسيط	$= -3$

b) $10 - |5 - 2x|, x = 7$

بتعويض $x = 7$	$10 - \|5 - 2x\| = 10 - \|5 - 2(7)\|$
$2(7) = 14$	$= 10 - \|5 - 14\|$
$5-14= -9$	$= 10 - \|-9\|$
$\|-9\| = 9$	$= 10 - 9$
بالتبسيط	$= 1$

إيجاد حدود متتالية معطى حدها العام (الدرس 3)

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية معطى حدها العام في ما يأتي:

26) $3n + 1$

27) $n^2 - 1$

28) $4n + 2$

مثال: أجد أول أربعة حدود للمتتالية التي حدها العام: $2n - 1$

$n = 3$	$2(3) - 1 = 5$	$n = 1$	$2(1) - 1 = 1$
$n = 4$	$2(4) - 1 = 7$	$n = 2$	$2(2) - 1 = 3$

إكمال نمط عددي معطى (الدرس 3)

أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

29) $4, 6, 8, 10, \ldots$

30) $3, 6, 9, 12, \ldots$

31) $2, 4, 8, 16, \ldots$

مثال: أجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

a) **7, 14, 21, 28,...**

بطرح أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّ كل حد يزيد على الحد السابق بمقدار 7

إذن، تتزايد المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$7 \xrightarrow{+7} 14 \xrightarrow{+7} 21 \xrightarrow{+7} 28 \xrightarrow{+7} 35 \xrightarrow{+7} 42 \xrightarrow{+7} 49, \ldots$$

b) **8, 16, 32, 64, ...**

بقسمة أيِّ حدين متتاليين، أجد أنَّه يُمكِن إيجاد أيِّ حد بضرب الحد السابق له في 2، وأنَّ الحدود الثلاثة التالية هي:

$$8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{\times 2} 128 \xrightarrow{\times 2} 256 \xrightarrow{\times 2} 512, \ldots$$

إيجاد الحد العام للمتتاليات (الدرس 3)

أجد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

32) 3, 10, 17, 24, 31, ...

33) 2, 5, 10, 17, 26, ...

34) 5, 8, 13, 20, 29, ...

مثال: أجد الحد العام للمتتالية: **2, 9, 28, 65,...**

أُلاحِـظ أنَّ المتتالية لم تنتج من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها، أو من ضرب حدودها في عدد ثابت، وأنَّها لم تنتج من تربيع كل حد.

أُفسِّر المتتالية عن طريق تكعيب رتبة كل حد n^3:

1	8	27	64	...	n^3
2	9	28	65	...	?

أُلاحِظ أنَّ المتتالية المطلوبة تنتج عند إضافة 1 إلى كل مكعب رتبة أيٍّ من الحدود.

إذن، الحد العام لهذه المتتالية هو: $T(n) = n^3 + 1$

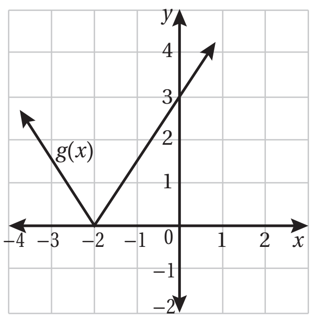
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

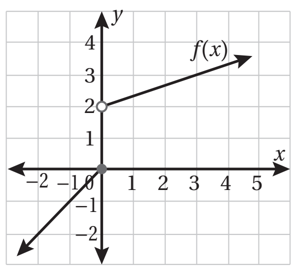
أُعيد تعريف كُلّ من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = |5x - 4|$

2 $f(x) = |3 - 2x| - 6$

أكتبُ قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني، في كُلّ ممّا يأتي:

3


4


أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

5 $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x < 3 \\ x + 3 & , x \geq 3 \end{cases}$

6 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x < 1 \\ 5 & , 1 \leq x < 4 \\ x + 2 & , x \geq 4 \end{cases}$

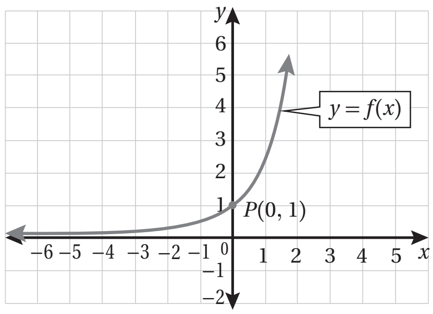
7 $f(x) = |2x - 6| + 3$

8 $f(x) = |4x - 14| + 5$

9 **كهربـاء:** تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و 0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

التحويلات الهندسية للاقترانات

Transformations of Functions

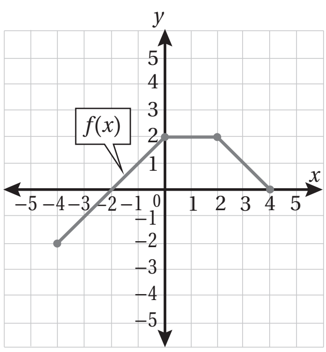


أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية، وأبيّن إحداثيَي النقطة P في كل حالة:

1. $g(x) = f(x) + 1$
2. $h(x) = 2f(x + 1)$
3. $m(x) = f(-x + 2)$
4. $p(x) = -f(x)$

أصف التحويلات التي تمّت على $f(x)$ للحصول على $g(x)$ في كُلّ ممّا يأتي:

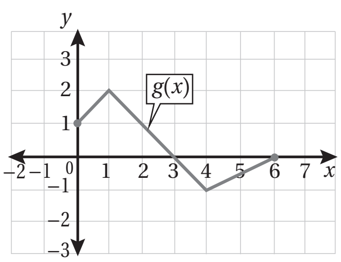
5. $g(x) = -3f(x-2) + 5$
6. $g(x) = 2f(4-x) - 3$



أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:

7. $g(x) = f(x) + 1$
8. $q(x) = f(x + 2)$
9. $p(x) = \frac{1}{2} f(x + 1)$
10. $s(x) = -f(x)$

11. **سكّان:** يُمثّل الاقتران $P(t) = 3000 + 0.1t^2$ عدد سكّان أحد التجمّعات السكنية؛ إذ يُمثّل t عدد السنوات منذ تأسيس هذا التجمّع في عام 1985م. أصف التحويلات التي تمّت على الاقتران $f(t) = t^2$ للحصول على الاقتران $P(t)$.



أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $g(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:

12. $h(x) = g(2x)$
13. $p(x) = g(\frac{1}{2}x)$

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

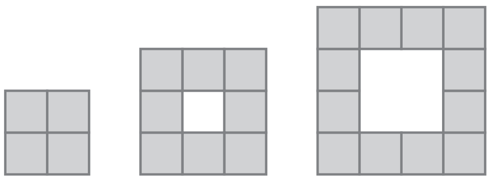
أكتب كُلًّا ممّا يأتي من دون استعمال رمز المجموع:

1 $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

2 $\sum_{k=1}^{9} k(k+3)$

3 $\sum_{k=1}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

أعتمد الشكل المجاور الذي يُمثِّل نمطًا هندسيًّا، وأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



4 أكتب الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد المربعات المظلَّلة في كل شكل.

5 أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد المربعات المظلَّلة في أول عشرين شكلًا من هذا النمط، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

6 إذا كان طول ضلع كل مربع مظلَّل هو وحدة واحدة، فأجد الحد العام للمتتالية التي تُمثِّل مساحة المربعات البيضاء وسط كل شكل.

أجد الحد العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحد العشرين منها:

7 $a_6 = -8 \, , a_{15} = -62$

8 $a_{11} = 43, d = 5$

9 $25, 26.5, 28, 29.5, \ldots$

أجد المجاميع الجزئية لكلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

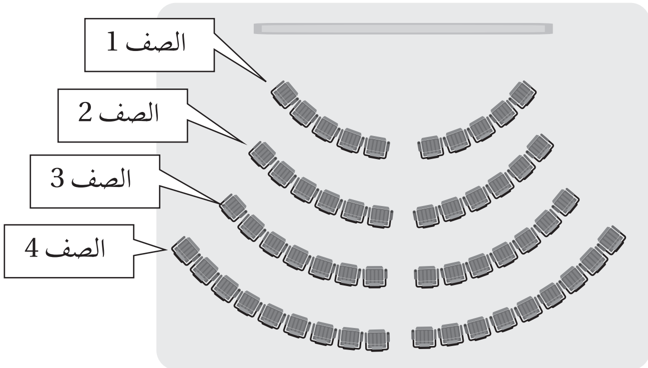
10 الحدود العشرة الأولى من مضاعفات العدد 6

11 أول 100 عدد فردي من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series



مسارح: مسرح في صفه الأول 10 مقاعد، وفي صفه الثاني 12 مقعدًا، وفي صفه الثالث 14 مقعدًا، وهكذا حتى الصف الأخير منه:

12 أُبيِّن أنَّ عدد المقاعد في صفوف المسرح يُشكِّل متتالية حسابية.

13 أجد الحد العام للمتتالية الحسابية.

14 إذا كان في المسرح 14 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا في المسرح؟

متسلسلة حسابية مجموع حدودها العشرين الأولى 730، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى 1545:

15 أجد الحد الأول من المتسلسلة.

16 ما أساس المتسلسلة؟

17 أجد عدد حدود المتسلسلة التي تقل عن 101

18 متتالية حسابية، حدُّها العاشر ضعف حدِّها الرابع، وحدُّها الثامن عشر 50، أجد الحدَّ الأول من المتتالية، وأبرِّر إجابتي.

متتالية حسابية، فيها الحدّان المتتاليان x و y :

19 أجد الحدَّ التالي للحدِّ y بدلالة x و y.

20 إذا كان x يُمثِّل الحدَّ الثامن من المتتالية، فأجد الحدَّ الأول بدلالة x و y.

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

تحليل المقادير الجبرية (الدرس 1)

أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

1) $3x^2 - 6x$
2) $x^2 - 36$
3) $x^2 + 3x + 2$
4) $x^2 - 5x + 6$
5) $x^2 - x - 2$
6) $2x^2 - 6x + 4$
7) $x^3 - 27$
8) $2x^3 + 128$
9) $16 - x^2$

مثال: أُحلِّل كل مقدار جبري ممّا يأتي إلى عوامله الأولية:

a) $3x^3 - 12x$

$3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 3x(x - 2)(x + 2)$ بتحليل الفرق بين مربعين

b) $5x^3 - 5$

$5x^3 - 5 = 5(x^3 - 1)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 5(x - 1)(x^2 + x + 1)$ بتحليل الفرق بين مكعبين

c) $3x^2 - 12x - 15$

$3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 3(x - 5)(x + 1)$ بتحليل العبارة التربيعية

d) $x^3 - 6x^2 + 8x$

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$ بإخراج العامل المشترك

$= x(x - 2)(x - 4)$ بتحليل العبارة التربيعية

تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الدرس 1)

أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

10) $\frac{2x+2}{2}$

11) $\frac{16x^2+8x}{2x+1}$

12) $\frac{x-2x^2}{8-16x}$

13) $\frac{x^2-36}{x-6}$

14) $\frac{x^2+7x+12}{x+3}$

15) $\frac{9-3x}{x^2-9}$

مثال: أكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

a) $\frac{6x+12}{6}$

$\frac{6x+12}{6} = \frac{6(x+2)}{6}$ بإخراج العدد (6) عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= (x+2)$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على (6)

b) $\frac{2x^2+2x}{2x}$

$\frac{2x^2+2x}{2x} = \frac{2x(x+1)}{2x}$ بإخراج $(2x)$ عاملًا مشتركًا لحدود البسط

$= \frac{\cancel{2x}(x+1)}{\cancel{2x}} = x+1$ بقسمة البسط والمقام على $(2x)$

c) $\frac{x-1}{x^3-x^2}$

$\frac{x-1}{x^3-x^2} = \frac{x-1}{x^2(x-1)}$ بتحليل المقام

$= \frac{\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x^2}$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على $(x-1)$

تمثيل اقتران نسبي بيانيًّا يحتوي منحناه فجوة (الدرس 1)

أمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

16) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

17) $f(x) = \dfrac{-x^2 + x^3}{x^3}$

18) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

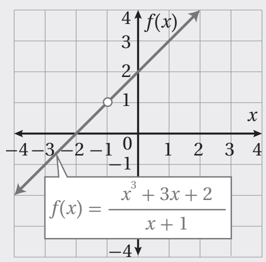
مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ بيانيًّا.

أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$ بتحليل البسط

$$= \frac{(x + 2)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} = x + 2$$ باختصار العامل المشترك $(x + 1)$

إذن، التمثيل البياني للاقتران $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ هو نفسه التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x + 2$ مع وجود فجوة (دائرة صغيرة غير مظلّلة) في المنحنى عند $x = -1$ كما يظهر في الشكل المجاور.



تمثيل اقتران نسبي لا يوجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه (الدرس 1)

أمثّل كلّ اقتران ممّا يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

19) $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

20) $h(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$

21) $g(x) = \dfrac{4}{x + 2} - 1$

مثال: أمثّل الاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه.

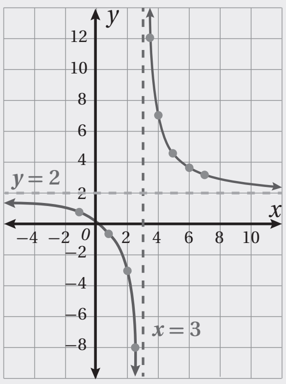
الخطـوة 1 أجدُ خطوط التقارب لمنحنى الاقتران.

خطّ التقارب الرأسيّ هو المستقيم $x = 3$، وخطّ التقارب الأفقيّ هو المستقيم $y = 2$

الخطـوة 2 أنشئ جدول قِيَم باختيار بعض القِيَم حول $(x = 3)$؛ لأنّ الاقتران غير مُعرَّف عند 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$f(x)$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطـوة 3 أرسم خطَّي التقارب، ثمّ أعيّن النقاط (x, y) في المستوى الإحداثيّ، وأصل بين النقاط إلى يمين المستقيم $(x = 3)$ بمنحنى أمدّه بمحاذاة خطَّي التقارب، ثمّ أصل بين النقاط إلى يسار المستقيم $(x = 3)$ بمنحنى أمدّه بمحاذاة خطَّي التقارب، فينتج الشكل المجاور.



المجال هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3، أو $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 2، أو $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتذكر

خط التقارب الرأسي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب رأسي عند صفر المقام هو المستقيم $x = b$

خط التقارب الأفقي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$ خط تقارب أفقي هو المستقيم $y = c$

تحويل المقادير من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسّيّة، وبالعكس (الدرس 2)

أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّيةٍ في كلّ ممّا يأتي:

22) $p^{\frac{1}{6}}$

23) $\sqrt[8]{u}$

24) $9^{\frac{1}{4}}$

25) $\sqrt[5]{-8}$

26) $w^{\frac{8}{3}}$

27) $\sqrt[6]{v^5}$

28) $16^{\frac{3}{4}}$

29) $\sqrt[5]{(-35)^9}$

مثال: أكتب الصورة الأُسّية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أُسّية في كلّ ممّا يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $8^{\frac{2}{5}}$

$8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[7]{-20}$

$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

استخدام قوانين الأسس لتبسيط عبارات أُسّية (الدرس 2)

أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

31) $3^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6$

30) $\frac{4^3 \times 8^4}{4^5 \times 8^2}$

33) $\frac{4^2}{4^5}$

32) $(7-4)^3 \times 3^{-8}$

مثال: أستخدم قوانين الأسس لإيجاد قيمة كلّ ممّا يأتي:

a) $\mathbf{5^{-2}}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ تعريف الأسّ السالب

$= \frac{1}{25}$ تعريف القوى

b) $\mathbf{\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6}}$

$\frac{6^5 \times 10^3}{6^2 \times 10^6} = \frac{6^5 \times 6^{-2}}{10^6 \times 10^{-3}}$ تعريف الأسّ السالب

$= \frac{6^3}{10^3}$ قاعدة قسمة القوى

$= \frac{216}{1000} = 0.216$ تعريف القوى

مشتقّة كثيرات الحدود (الدرس 2)

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

36 $f(x) = x^4 + 8x^2$

35 $f(x) = x^5 - 5x^2 + 6x - 10$

34 $f(x) = 2x^3 + 6$

مثال: أجد مشتقّة الاقتران $f(x) = x^4 - 7x^2$

الاقتران الأصلي	$f(x) = x^4 - 7x^2$
قانون مشتقّة مضاعف القوة	$f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$
بالتبسيط	$= 4x^3 - 14x$

إيجاد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقّة (الدرس 2)

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد كلّ مما يأتي:

37 ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

38 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

أتذكر

ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإن ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه.

تقع النقطة $P(-2, b)$ على منحنى الاقتران $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

39 أَجِدُ قيمةَ b.

40 أجد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

مثال: إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعمل المشتقّة لإيجاد ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = 1$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقتران الأصلي

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاق الاقتران

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويض $x = 1$

$= -12$ بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$ هوَ -12

حلّ المعادلات بمتغيّر واحد (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

43 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

42 $15x^2 - 30x - 120 = 0$

41 $x^2 + 5x - 24 = 0$

مثال: أحلّ المعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

المعادلة الأصلية	$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x(x^2 - 2x - 3) = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$x(x-3)(x+1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0$ or $x - 3 = 0$ or $x + 1 = 0$
بحلّ المعادلات	$x = 0$ $\quad x = 3$ $\quad x = -1$

- **إيجاد القِيَم العظمى المحلّية والقِيَم الصغرى المحلّية لاقترانات كثيرات الحدود باستعمال المشتقّة** (الدرس 3)

أستعمل المشتقّة لإيجاد القِيَم العظمى والقِيَم المحلّية الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وُجِدت):

44 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

45 $f(x) = x^2 + 6x - 3$

46 $f(x) = 1 + 5x - x^2$

47 $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

48 $f(x) = 18x^2 - x^4$

49 $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

مثال: أســتعمل المشــتقّة لإيجاد القِيَم العظمى المحلّية والقِيَم الصغرى المحلّية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وُجِدت).

الخطـوة 1 أجد القِيَم الحرجة؛ أي القِيَم التي ميل المنحنى عندها صفر.

مشتقّة الاقتران $f'(x) = 3x^2 - 12$

بمساواة المشتقّة بالصفر $3x^2 - 12 = 0$

بجمع 12 إلى طرفي المعادلة $3x^2 = 12$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $x^2 = 4$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة $x = \pm 2$

إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأن مشــتقّة الاقتران تســاوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطـوة 2 لتحديد أيّ النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القِيَم القريبة منها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارة الميل	سالبة		موجبة

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارة الميل	موجبة		سالبة

تتغير إشــارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى ســالبة؛ لذا توجد قيمة محلّية عظمى عندما $x = -2$، هي $f(-2) = 20$، وتتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلّية صغرى عندما $x = 2$، هي $f(2) = -12$.

- **إيجاد سرعة جسم وتسارعه باستعمال المشتقّة إذا عُلِم اقتران موقعه** (الدرس 4)

يُمثِّلُ الاقترانُ $s(t) = t^3 - 6t + 3$ موقعَ جسمٍ يتحركُ في مسارٍ مستقيمٍ، حيثُ s موقعُ الجسمِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً:

50) أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً).

51) أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$.

52) أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ $6\ m/s$

53) أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ.

54) أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$.

مثال: **يمثّل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:**

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

السرعة هي مشتقّة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = s'(3)$، التي تمثّل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	مشتقّة اقتران الموقع
$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$	تعريف اقتران السرعة
$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$	بتعويض $t = 3$
$= 14.7\ m/s$	بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته هي $14.7\ m/s$

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

التسارع هو مشتقّة اقتران السرعة. أفترض أنّ اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

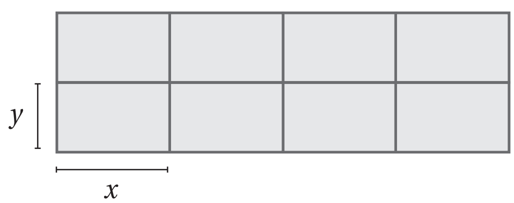
المطلوب هو $a(5) = v'(5)$، التي تمثّل التسارع عندما $t = 5$.

مشتقّة اقتران السرعة	$a(t) = v'(t) = 3.6t$
بتعويض $t = 5$	$a(5) = 3.6(5)$
بالتبسيط	$= 18$

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته هو $18\ m/s^2$

تطبيقات القِيَم القصوى (الدرس 5)

لدى مزارع 180 m من الشّباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها x مترًا، وعرضها y مترًا كما في الشكل المجاور:



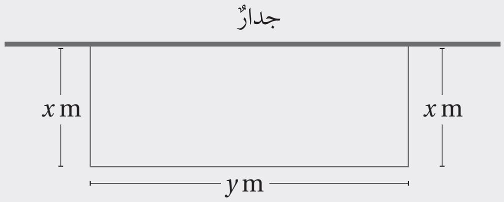
55 أبيّن أنّ العلاقة بين x و y هي $y = 18 - 1.2x$

56 أبيّن أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يمثّل المساحة الكلية للحظائر.

57 أستعمل المشتقّة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن.

58 أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر.

مثال: جدار: لدى مزارع 32 m من السياج، أراد أن يسيّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:



a) أبيّن أنّ الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يمثّل مساحة الحظيرة.

طول السياج 32 m؛ لذا، فإنّ $x + y + x = 32$

إذن، طول الحظيرة $y = 32-2x$، ومساحتها $x(32-2x)$ مترًا مربعًا.

b) أجد $A'(x)$.

اقتران المساحة	$A(x) = x(32-2x)$
بتوزيع الضرب على الطرح	$A(x) = 32x-2x^2$
مشتقّة اقتران المساحة	$A'(x) = 32-4x$

c) أستعمل المشتقّة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن، ثمّ أجد تلك المساحة.

لإيجاد قيمة x، أحلّ المعادلة $A'(x) = 0$:

بمساواة المشتقّة بالصفر	$32 - 4x = 0$
بجمع $4x$ لطرفي المعادلة	$32 = 4x$
بقسمة طرفي المعادلة على 4	$x = 8$

تتغيّر إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة من يسار إلى يمين $x = 8$؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $x = 8$

x	8
إشارةُ الميلِ	$+ + 0 - -$

لإيجاد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة أعوّض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يمثّل مساحة الحظيرة.

بتعويض $x = 8$	$A(8) = 8(32-2(8))$
بالتبسيط	$= 128$

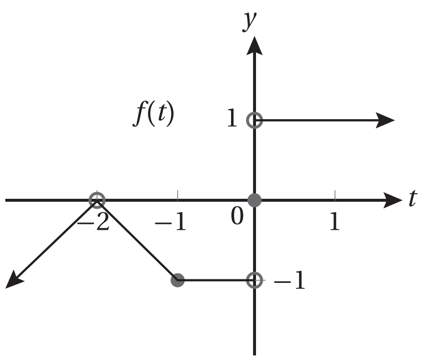
إذن أكبر مساحة للحظيرة 128 m^2، وهي تنتج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m

الدرس 1

النهايات والاتّصال

limits and continuity

يُبيّن التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران $f(t)$. أجد كُلًّا من النهايات الآتية (إن وُجِدت):



1. $\lim_{t\to -2} f(t)$
2. $\lim_{t\to -1} f(t)$
3. $\lim_{t\to 0} f(t)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

4. $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)$
5. $\lim_{x\to -2} (x^2-x+2)$
6. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}\right)$

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 2 \\ 6-x & , x > 2 \end{cases}$ ؛ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

7. أُمثّل $f(x)$ بيانيًّا.

8. أجد كُلًّا من النهايات الآتية من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim_{x\to 6} f(x)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية:

9. $\lim_{x\to -7} (2x+5)$
10. $\lim_{x\to 2} (-x^2+5x-2)$
11. $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6}$
12. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x-2}{1-x}\right)$
13. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2x-6}{x+5}\right)$
14. $\lim_{z\to -4} \sqrt[3]{2z-8}$
15. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2x^2-18}{x^3-27}\right)$
16. $\lim_{x\to 5} \left(\frac{x^2-7x+10}{25-5x}\right)$
17. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\right)$

18. أبحثُ في اتّصال الاقتران $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & , x < 2 \\ x-6 & , x \ge 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

مشتقّة اقتران القوّة

Derivative of Power Function

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة إزاء كلٍّ منها باستعمال التعريف العام للمشتقّة:

1. $f(x) = 5x, \quad x = 0$
2. $f(x) = x, \quad x = -3$
3. $f(x) = 6x + 3, \quad x = 2$
4. $f(x) = 5x^2, \quad x = 1$
5. $f(x) = 3x^2 + 4x, \quad x = 1$
6. $f(x) = x^2 - 5x + 7, \quad x = 2$

أجد $\frac{ds}{dt}$ لكُلّ ممّا يأتي:

7. $s = 10\sqrt{t}$
8. $s = \frac{50}{t} + 10$
9. $s = 10t^2 - \frac{10}{t^2}$

إذا كان $y = \sqrt{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10. إحداثيّي النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي $\frac{1}{2}$

11. إحداثيّي النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي 1

12. إذا كان الاقتران $y = \frac{(x+a)^2}{x}$ ، حيث a عدد موجب؛ فأجد إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي صفرًا بدلالة a.

مشتقّة اقتران القوّة
Derivative of Power Function

إذا كان $f(x) = \frac{2x+5}{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 مشتقّة الاقتران عند النقطة $(10, 2.5)$

14 إحداثيات النقاط التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي -5

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

17 $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}, x = 5$

16 $f(x) = \frac{4+x}{x-2}, x = 8$

15 $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = -1$

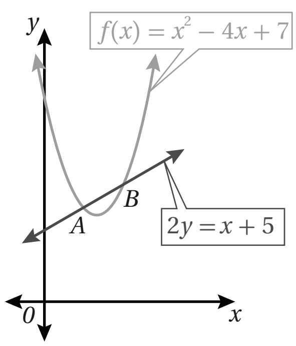
أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 2x^2(6-x), x = 5$

18 $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, x = -1$

20 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$، والمستقيم: $2y = x + 5$:



21 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

22 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

23 رُسِم مماس عند النقطة $P(1, 6)$ الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 5x + 10$. أجد مساحة المثلّث المكوَّن من مماس منحنى الاقتران عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

القِيَم العظمى والصغرى
Maximum and Minimum Values

أجد النقاط الحرجة (إنْ وُجِدت) لكلّ كثير حدود ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 8x$

2) $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

4) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

6) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

أُحدِّد فترات التزايد والتناقص لكلّ اقتران ممّا يأتي:

7) $f(x) = 2x^2 - 4x$

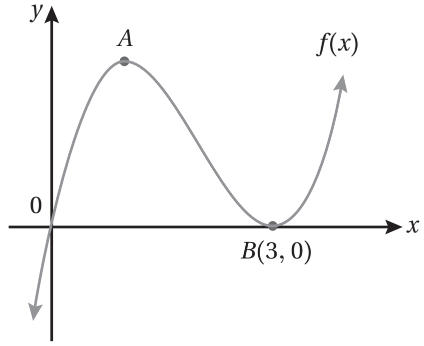
8) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

9) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$

10) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

11) إذا كان للاقتران $y = x^3 + kx^2 - 8x + 3$. قيمة عظمة محلية عندما $x = -2$؛ فأجد قيمة الثابت k.

12) يمُثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$، وتُمثّل A نقطة عظمى محلّية للاقتران f، وB نقطة صغرى محلّية له. أجد إحداثيَّي النقطة A.



الدرس 4

المشتقّة الثانية وتطبيقاتها

The Second Derivative and its Applications

أجد المشتقّة الثانية لكلّ اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 5x^3 + 4x$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
3. $f(x) = (x-1)(2x+3)$

أجد المشتقّة الثانية لكلّ اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

4. $f(x) = \frac{4}{3x}$, $x = 2$
5. $f(x) = 1 - 7x^2$, $x = -3$

6. إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$، فأجد قيمة a.

إذا كان الاقتران $f(x) = (x-1)^2 (x+2)$؛ فأجيب عمّا يأتي:

7. أجد إحداثيَي كلّ من النقطتين اللتين يقطع عندهما منحنى الاقتران المحور x.
8. أجد النقاط الحرجة للاقتران، ثم أُحدّد نوعها باستعمال اختبار المشتقّة الثانية.
9. أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

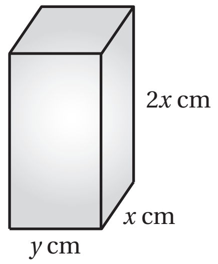
10. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
11. $f(x) = x^3 (x-2)$
12. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

سيّارات سباق: **يُمكِن نمذجة موقع سيّارة سباق تتحرّك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = 6t^2 - 2t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:**

13. ما سرعة السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟
14. ما تسارع السيّارة بعد 5 ثوانٍ من بَدْء حركتها؟
15. أجد قِيَم t التي تكون عندها السيّارة في حالة سكون لحظي.

تطبيقات القيم القصوى
Optimization Problems

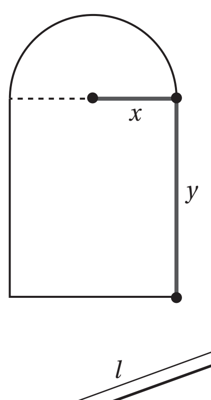
يُبيِّن الشكل المجاور قالبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية $600\ \text{cm}^2$:



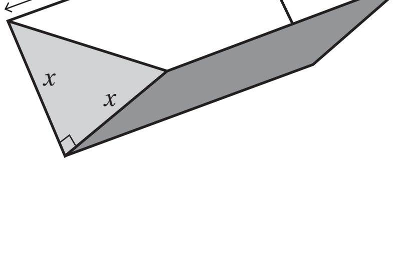
1. أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x.
2. أجد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدَّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة، أجد كلًّا مما يأتي:

3. اقتران الإيراد.
4. عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدِّي مثلَي التكلفة الحدِّية.
5. اقتران الربح.
6. عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.
7. سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.



8. نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، محيطها 8 m كما في الشكل المجاور. أجد قيمتَي x و y اللازمتين لمرور أكبر كمية من الضوء خلال النافذة.



9. خزّان ماء على شكل منشور ثلاثي سَعته 108 L وطوله l m، والمقطع الجانبي للخزان على شكل مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشكل المجاور. يُراد دهن الخزان بمادّة عازلة من الداخل تحميه من التآكل. أجد قيمة x التي تجعل مساحة السطح الداخلية أصغر ما يمكن.

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

2) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3 - x^2}}$

3) $f(x) = (3 + 4x)^{\frac{5}{2}}$

4) $f(x) = (8 - x)^{100}$

5) $f(x) = x^2 + (200 - x)^2$

6) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3)^3}$

أجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

7) $f(x) = 4x^3 + (x - 2)^4 , x = 2$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} , x = 8$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

9) $y = u^3 - 7u^2 , u = x^2 + 3$

10) $y = \sqrt{7 - 3u} , u = x^2 - 9$

تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوُّث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t) = (t^{\frac{1}{4}} + 3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأنَّ P يقاس بأجزاء من المليون:

11) أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن t.

12) أجد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بعد 16 عامًا.

إذا كان: $g(-2) = 8, g'(-2) = 4, h(5) = -2, h'(5) = 6$، فأجد مشتقّة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 5$:

13) $f(x) = g(h(x))$

14) $f(x) = 4(h(x))^2$

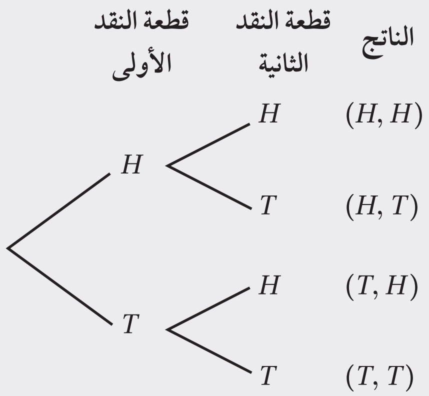
الوحدة 3: الاحتمالات

أختبر معلوماتي بحلّ التدريبات أوّلًا، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• استعمال مُخطَّط الشجرة لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

1 أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد عشوائيًّا.

مثال: **أستعمل مُخطَّط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعتي نقد عشوائيًّا.**



أُلاحِظ من مُخطَّط الشجرة أنَّ لهذه التجربة 4 نواتج مُمكِنة.

إذن، الفضاء العيني هو:

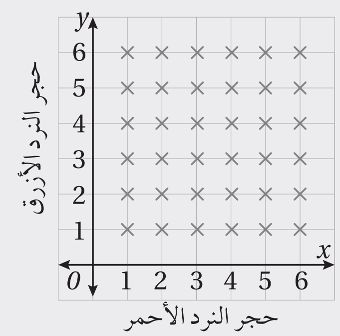
$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$

• استعمال مُخطَّط الاحتمال لعَدِّ النواتج المُمكِنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

2 دُوِّر قرص مُؤشِّـــرٍ مقسّم إلى 3 قطاعات متطابقة؛ أولها أحمر (R)، وثانيها أزرق (B)، وثالثها أبيض (W)، ثم دُوِّر قرص مُؤشِّـــرٍ مقسّم إلى 4 قطاعات متطابقة، كُتِب عليها الأعداد: 1, 2, 3, 4. أستعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

مثال: **أســـتعمل مُخطَّط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي حجر نرد لونه أحمر، ثم رمي حجر نرد لونه أزرق.**

أرسم محورين، ثم أكتب نواتج رمي حجر النرد الأحمر على المحور x، ثم أكتب نواتج رمي حجر النرد الأزرق على المحور y، كما في الشـــكل المجاور الـــذي يُمثِّل فيه تقاطعُ خطوط مُخطَّط الاحتمال الفضاءَ العيني للتجربة.



إيجاد احتمال الحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة (الدرس 1)

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى خضراء (G)، و8 قطع حلوى حمراء (R)، جميعها مُتماثِلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة أُخرى عشوائيًّا ليأكلها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

3 اختيار الطفل قطعتي حلوى مُتماثِلتي اللون.

4 اختيار الطفل قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

مثال: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، جميعها مُتماثِلة. سُحِبت كرة من الكيس عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحِبت كرة أُخرى عشوائيًّا، ثم كُتِب لونها. أجد احتمال كلٍّ من الحادثين الآتيين:

a) سحب كرة خضراء في المرَّة الأولى، ثم سحب كرة حمراء في المرَّة الثانية.

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

b) سحب كرتين مختلفتي اللون.

$$P(G \cap R) + P(R \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$

إيجاد احتمال متمّمة الحادث (الدرس 2)

5 إذا كان احتمال أن تصل حافلة في موعدها يساوي $\frac{9}{11}$، فما احتمال أن تتأخر الحافلة؟

6 إذا كان احتمال إصابة شخص بالسكّري $\frac{1}{4}$، فما احتمال عدم الإصابة؟

7 إذا كان احتمال خسارة الفريق المباراة 0.4، فما احتمال ألّا يخسر الفريق المباراة؟

8 إذا كان احتمال اختيار طالبة من الصف السابع ترتدي نظّارة يساوي $\frac{1}{9}$، فما احتمال اختيار طالبة لا ترتدي نظّارة؟

9 إذا كان احتمال فوز فريق كرة القدم الذي يشجّعه عليّ $\frac{2}{7}$، فما احتمال ألاّ يفوز الفريق؟

10 إذا كان احتمال اختيار طالب من الصفّ السابع وحيد الوالدين $\frac{2}{5}$، فما احتمال أن يكون لديه إخوة؟

مثال:

a) إذا كان احتمال اختيار طالب من الصفّ السابع لديه دراجة هوائية يساوي $\frac{6}{10}$ ، فما احتمال اختيار طالب ليس لديه دراجة هوائية؟

1

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

لديه دراجة — ليس لديه دراجة

$$P\,(\text{ليس لديه دراجة}) = 1 - P\,(\text{لديه دراجة})$$
$$= 1 - \frac{6}{10}$$
$$= \frac{4}{10}$$
$$= \frac{2}{5}$$

b) إذا كان احتمال أن يهطل المطر غدًا يساوي 0.7، فما احتمال ألّا يهطل المطر غدًا؟

1

0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

يهطل المطر — لا يهطل المطر

$$P\,(\text{لا يهطل المطر}) = 1 - P\,(\text{يهطل المطر})$$
$$= 1 - 0.7$$
$$= 0.3$$

إيجاد احتمال الحوادث المتنافية (الدرس 2)

في تجربة اختيار عدد عشوائيًّا من بين الأعداد: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12:

11 ما احتمال اختيار عدد فردي، ويقبل القسمة على 4؟

12 ما احتمال اختيار عدد فردي، أو عدد يقبل القسمة على 4؟

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة:

a) ما احتمال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5؟

أفترض أنَّ (A) هو حادث ظهور عدد زوجي، وأنَّ (B) هو حادث ظهور عدد يقبل القسمة على 5

وبذلك، فإنَّ: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{5\}$

بما أنَّ $\{2, 4, 6\} \cap \{5\} = \phi$، فإنَّ (A) و(B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال ظهور عدد زوجي، ويقبل القسمة على 5 هو صفر. وبالرموز: $P(A \cap B) = 0$

b) ما احتمال ظهور عدد زوجي، أو عدد يقبل القسمة على 5؟

(A) و (B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال وقوع (A) أو (B) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

وبالرموز:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ صيغة احتمال حادثين متنافيين

$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ بإيجاد احتمالات كلٍّ من الحادثين، والتعويض

$= \frac{2}{3}$ بالجمع، ثم التبسيط

إيجاد احتمال الحوادث المتنافية الشاملة (الدرس 2)

13 قرص دائريّ مقسّم إلى 3 قطاعات غير متطابقة، وملوّنة بالأحمر والأصفر والأزرق. إذا كان الجدول المجاور يبيّن احتمال توقّف المؤشّر عند كلّ لون من هذه الألوانِ، فأجد قيمة x.

اللون	الأزرق	الأحمر	الأصفر
الاحتمال	0.3	0.4	x

14 قرص دائريّ مقسّم إلى 6 قطاعات غير متطابقة، وهي مرقّمة بالأرقام: 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1. إذا كان الجدول المجاور يبيّن احتمال توقّف المؤشّر عند كلّ رقم من هذه الأرقام، فأجد قيمة x.

الرقم	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0.2	0.25	0.15	x	0.15	0.1

مثال: قرص دائريّ مقسّم إلى 4 قطاعات غير متطابقة، وملوّنة بالأخضر والزهريّ والأزرق والأصفر. إذا كان الجدول الآتي يبيّن احتمال توقّف المؤشّر عند كلّ لون من هذه الألوان، فأجد قيمة x.

اللون	الأخضر	الزهريّ	الأصفر	الأزرق
الاحتمال	0.3	0.4	x	$2x$

بما أنّ حوادث توقّف مؤشّر القرص على الألوان الأربعة هي حوادث متنافية وشاملة، فإنّ مجموع احتمالاتها هو 1:

$0.3 + 0.4 + x + 2x = 1$ مجموع الحوادث الشاملة

$0.7 + 3x = 1$ بجمع الثوابت، وجمع المتغيّرات

$3x = 0.3$ بطرح 0.7 من الطرفين

$x = 0.1$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

التباديل والتوافيق

Permutations and Combinations

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\frac{8!}{4!}$

2 ${}_7P_3$

3 ${}_7C_3$

4 ${}_9C_0$

5 ${}_5P_5$

6 $\frac{6! \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3}$

7 لدى أحمد 3 أزواج مختلفة من الأحذية، و4 بناطيل مختلفة، و4 قمصان مختلفة، و3 ربطات عنق مختلفة. بكم طريقةً مختلفة يُمكِن أنْ يظهر أحمد مُرتدِيًا زوجًا من الأحذية، وبنطالًا، وقميصًا، مع ربطة عنق، أو من دونها؟

8 اجتمع في قاعة 20 شخصًا، ثم بادر كلٌّ منهم إلى مصافحة جميع الأشخاص الآخرين الموجودين في القاعة. كم مصافحةً شهدتها هذه القاعة؟

9 في متحف 20 لوحة فنية، منها 8 لوحات لفنّان واحد، والبقية لفنّانين آخرين. إذا اختار المسؤول عن المتحف 4 لوحات عشوائيًّا لعرضها في أحد المعارض، فما عدد طرائق اختيار اللوحات الأربع إذا كان بينها لوحتان على الأكثر من لوحات الفنّان صاحب اللوحات الثماني؟

10 **سباق:** شارك كلٌّ من أحمد، وسلمان، وزياد في سباق 400 m مع 7 متسابقين آخرين. ما احتمال أنْ يفوز هؤلاء الثلاثة بالمراكز الثلاثة الأولى من السباق؟

11 نظر محمد في برنامج توزيع الدروس ليوم الخميس، فوجده يحوي 6 حصص للمباحث الآتية: الرياضيات، واللغة العربية، والفيزياء، واللغة الإنجليزية، والتربية الإسلامية، والكيمياء. إذا حُدِّد ترتيب هذه الحصص في البرنامج عشوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون الحصتان الأُوليان هما الفيزياء واللغة الإنجليزية بأيِّ ترتيب مُمكِن؟

رتّب فؤاد 4 كؤوس مختلفة ودرعين مختلفتين عشوائيًّا في صف واحد ضمن خزانة عرض. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

12 أنْ تكون الكؤوس الأربع متجاورة.

13 أنْ يكون الدرعان في وسط الصف.

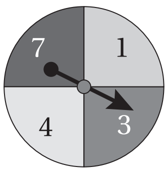
المُتغيِّرات العشوائية

Random Variables

أجد مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. سحب 6 كرات عشوائيًّا من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات خضراء، و 5 كرات زرقاء، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

2. إطلاق 8 طلقات على هدف ثابت، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات إصابة الهدف.



3. تدوير مُؤشِّر القرص المجاور مرَّتين، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين اللذيْنِ توقَّف عليهما المُؤشِّر.

4. سُحِب بالونان عشوائيًّا مع الإرجاع من كيس فيه 8 بالونات حمراء، وبالون واحد أصفر، و3 بالونات بيضاء. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البالونات الصفراء المسحوبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

يُبيِّن الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	1	2	5	7
$P(Y=y)$	b	0.4	$2b$	0.12

5. أجد قيمة b.

6. أجد ناتج: $P(Y \geq 2)$.

7. أجد ناتج: $P(1 < Y \leq 7)$.

8. أجد التوقُّع والتباين للمُتغيِّر العشوائي ذي التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-1	0	2	3
$P(X=x)$	0.15	0.25	0.35	0.25

سُئِل طلبة إحدى المدارس عن عدد الهواتف المحمولة في منازلهم، فكانت الإجابات كما في الجدول الآتي:

عدد الهواتف المحمولة (x)	1	2	3	4	5	6
عدد الطلبة (f)	35	55	105	140	110	75

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الهواتف المحمولة:

9. أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

10. أجد التوقُّع $E(X)$.