المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

الفرعين العلمي والصناعي

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

ISBN:978-9957-84-771-5
9 789957 847715

مطبعة

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

الفصل الدراسي الأول

النّاشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:
هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب. (١٩٣٠) الرمز البريدي: ١١١١٨
أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في جميع مدارس المملكة الأردنية الهاشمية بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٢م تاريخ ٢٠١٧/١/١٧م بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م.

عمان / الأردن – ص . ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنيّة
(٢٠١٧/٣/١٥٦٩)

ISBN: 978 – 9957 – 84 – 771–5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

د. لانا كمال عرفة
إبراهيم أحمد عمايرة
د. يوسف محمد صبح
د. حسين عسكر الشرفات
نقين أحمد جوهر
أمل حسني الخطيب

التحرير العلمي: نقين أحمد جوهر

التصميم: عمر أحمد أبو عليان
الرسم: عمر أحمد أبو عليان
التصوير: أديب أحمد عطوان
التحرير اللغوي: ميساء عمر الساريسي
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب
الإنتاج: د. عبدالرحمن سليمان أبو صعيليك

دقّق الطباعة: هبة ماهر التميمي
راجعها: نقين أحمد جوهر

الطبعة الأولى **١٤٣٨هـ / ٢٠١٧م**

أعيدت طباعته **٢٠١٨ – ٢٠١٩م**

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة

الفصل الدراسي الأول

منهاجي
متعة التعليم الهادف

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

نضع بين أيديكم كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر للفرعين العلمي والصناعي، الذي أُعِدَّت محتوياته بشكل ينسجم مع التطورات والتغيرات في مختلف المجالات، ومعايير العمليات والمحتوى العالمية، مثل: حل المسألة، والتبرير والبرهان، والربط، والتواصل، والتمثيل، والنمذجة.

اعْتُمِدَت طرائق رياضية مختلفة في تقديم المحتوى الرياضي، كالاستقراء، وحلّ المشكلات، بالإضافة إلى تقديم المسائل والتمارين التي تنمي مهارات التواصل، والتفكير الرياضي، وحُلَّت العديد من التمارين والمسائل الرياضية بأكثر من طريقة؛ ما يكسب الطلبة مرونة التفكير.

هذا وقد تم التركيز في الكتاب على تقديم المفهوم الرياضي من خلال الرسوم والأشكال والألوان، مما يساعد على تثبيت المفهوم ومراعاة أنماط تعلم الطلبة المختلفة.

تقع مادة الكتاب في ست وحدات موزعة على فصلين دراسيين، حيث يضم الفصل الأول ثلاث وحدات هي: النهايات والاتصال، والتفاضل، و تطبيقات التفاضل.

أما الفصل الدراسي الثاني فيتضمن ثلاث وحدات هي: التكامل وتطبيقاته، والقطوع المخروطية، والإحصاء والاحتمالات.

ونسأل الله أن نكون قد وفقنا في تقديم المعرفة العلمية بطريقة منظّمة تنظيمًا منطقيًّا ونفسيًّا، الأمر الذي يُسهم في فهمها والتمكّن من مهاراتها.

الوحدة الأولى

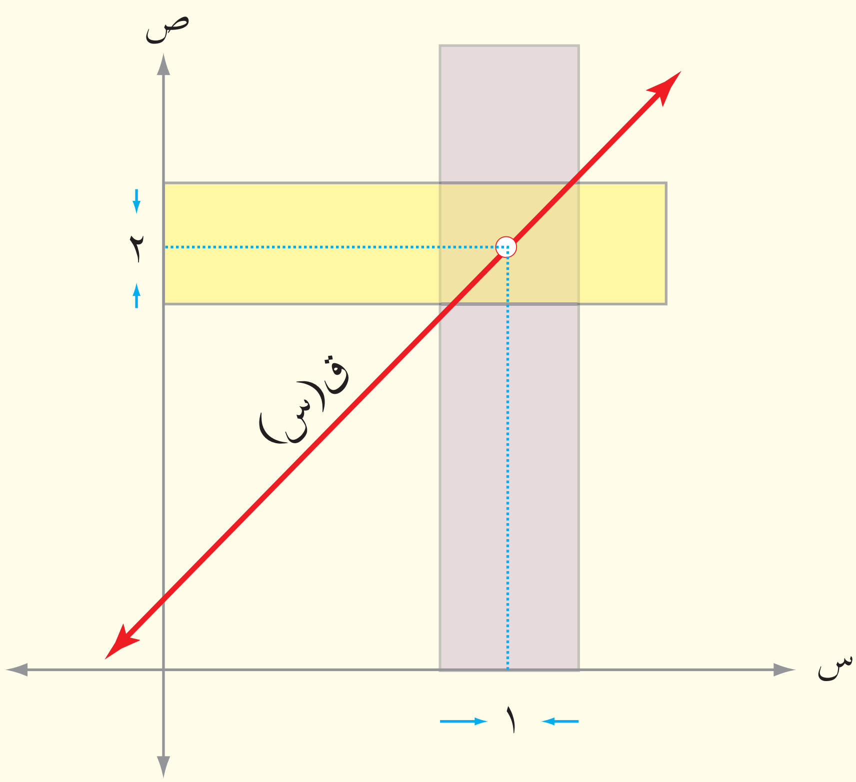
١

منهاجي
متعة التعليم الهادف

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغير فيها الأشياء، ويعتمد كلٌّ من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهاية. تتناول هذه الوحدة مفهومي النهايات والاتصال اللذين يشكلان مقدمة لعلم التفاضل.



يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مفهوم النهاية.
- إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًّا.
- تعرف نظريات النهايات وتوظيفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.
- تعرف مفهوم الاتصال عند نقطة، وعلى فترة.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة، وعلى فترة.

الفصل الأول

النهايات
Limits

النتاجات

- تتعرف مفهوم النهاية.
- تجد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًا.
- تتعرف نظريات النهايات وتوظفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.

أولاً مفهوم النهاية Concept of Limit

إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢}-١}{س-١}$ ، فما مجال الاقتران ق، وهل يمكن التنبؤ بسلوك الاقتران ق عندما تقترب قيم س من العدد ١؟

تعلمت سابقا إيجاد مجال الاقتران النسبي، فمجال الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢}-١}{س-١}$ هو ح ـ {١}، لماذا؟

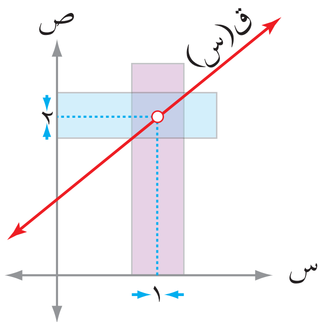
يمكن دراسة سلوك الاقتران ق عندما تقترب قيم س من العدد ١، من خلال دراسة الجدول الآتي:

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	١	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
ق(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	غير معرفة	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

لاحظ أنه كلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهة اليمين (أي س>١)، فإنَّ قيم ق(س) تقترب من العدد ٢، ويعبر عن ذلك بالرموز: $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ٢$

وتُقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهة اليمين تساوي ٢ .

وكلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهة اليسار (أي س<١)، فإن قيم ق(س) تقترب أيضا من العدد ٢، ويعبر عن ذلك بالرموز: $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) = ٢



الشكل (١-١)

وتُقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهة اليسار تساوي٢.

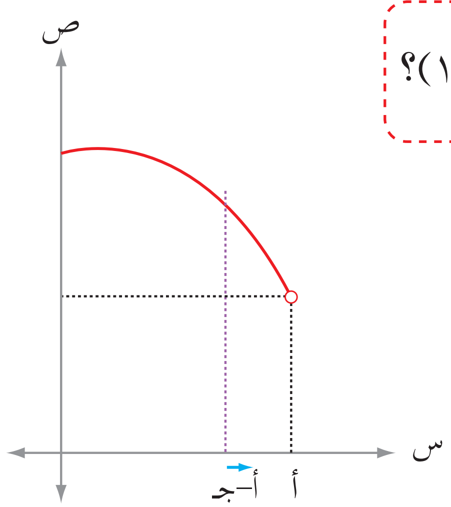
وفي حالة $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) ، نقول إنَّ نهاية ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ موجودة وتساوي ٢

ويعبر عن ذلك بالرموز: $\lim_{س \to ١}$ ق (س) = ٢ ،

والشكل (١-١) يوضح منحنى الاقتران ق(س).

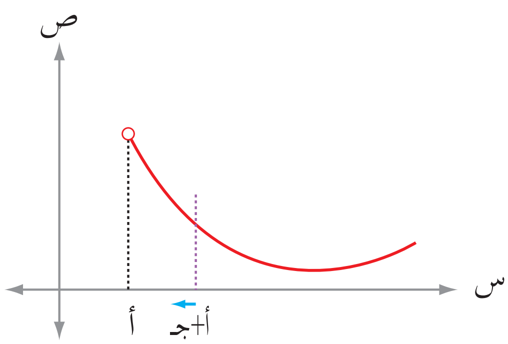
فكر وناقش

لماذا رسمت حلقة على منحنى الاقتران ق في الشكل (١-١)؟



الشكل (١-٢)

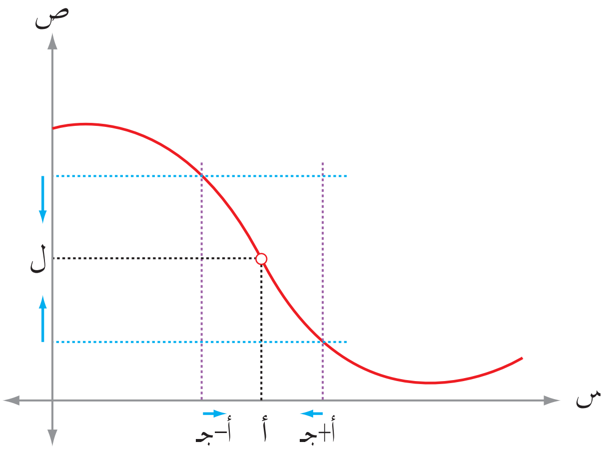
ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ من جهة اليسار، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند أ من جهة اليسار على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ - جـ، أ)، انظر الشكل (١-٢).



الشكل (١-٣)

ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ من اليمين، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند أ من اليمين على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ ، أ + جـ)، انظر الشكل(١-٣).

ولإيجاد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ − جـ، أ + جـ)، وتحوي العدد أ، حيث جـ عدد حقيقي صغيرجدًّا، (وليس من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند العدد أ نفسه). انظر الشكل (١−٤).



الشكل (١−٤)

تعميم

إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل، حيث أ ، ل أعداد حقيقية، فإنَّ:

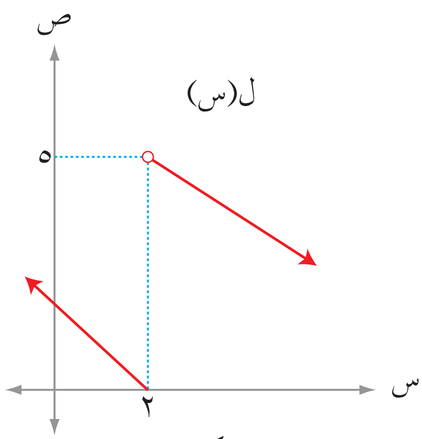
$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة، وتكون $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل

وإذاكانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) ، فـإنَّ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

مثال ١

معتمدًا الشكل (١−٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل المعرف على ح، جد:

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ل (س)



الشكل (١−٥)

الحل

من خلال الشكل(١−٥) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره (لماذا؟)

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = صفرًا

بما أنَّ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) ، إذن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

تدريب ١

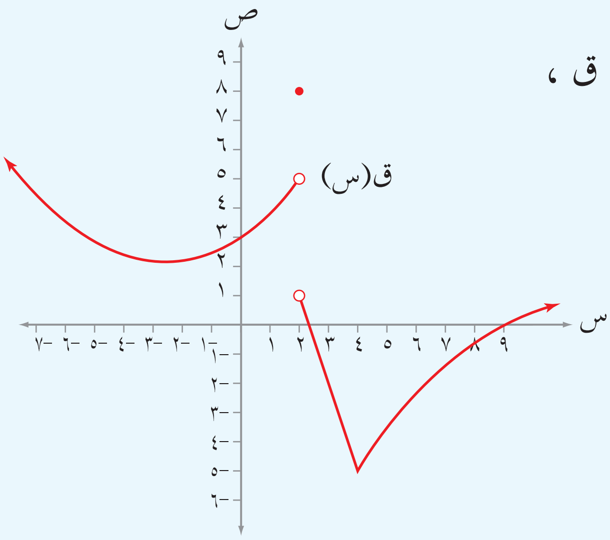
معتمدًا الشكل(١–٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،
جد كلًّا مما يأتي إن أمكن ذلك:

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ق (س)

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ق (س)

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ ق (س)

٤) ق (٢)



الشكل (١–٦)

مثال ٢

معتمدًا الشكل (١–٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ك، جد كلًّا مما يأتي:

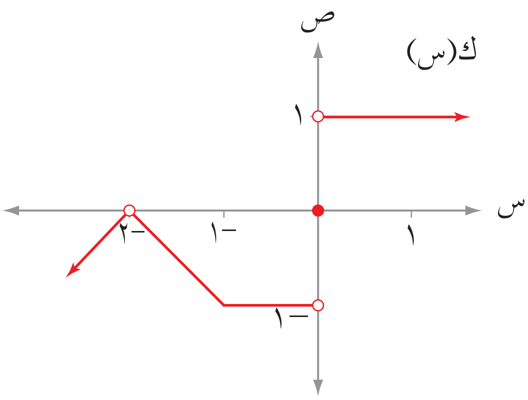
١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ ك (س)

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ ك (س)

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢}$ ك (س)

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -١^{-}}$ ك (س)

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to -١}$ ك (س)



الشكل (١–٧)

الحل

١) ١ — تحقّق شرط النهاية

٢) غير موجودة — لأنَّ النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

٣) صفر — تحقّق شرط النهاية

٤) –١ — لماذا؟

٥) –١ — لماذا؟

مثال ٣

معتمدًا الشكل (١–٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{-س}$ ، جد كلًّا مما يأتي:

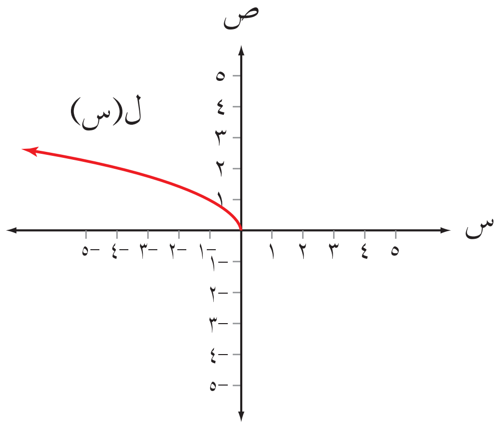
١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^+}$ ل(س)

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^-}$ ل(س)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ل(س)

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ل(س)

٥) $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ل(س)



الشكل (١–٨)

الحل

لاحظ أنَّ مجال الاقتران ل هو: س ≤ صفر، لماذا؟

١) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة على يمين الصفر.

٢) صفر — الاقتران معرَّف على فترة مفتوحة على يسار الصفر.

٣) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة حول الصفر.

٤) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة حول العدد ١.

٥) ١ — الاقتران معرَّف على فترة مفتوحة حول العدد −١ والنهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار.

تدريب ٢

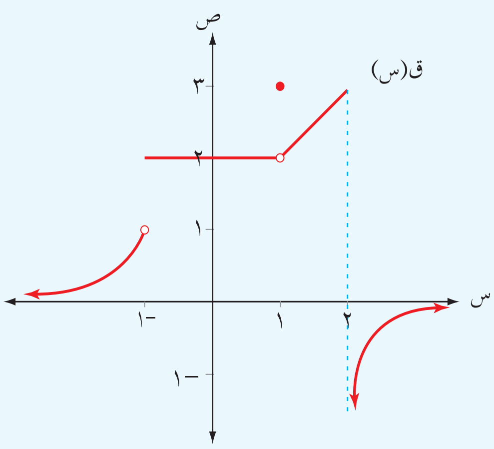
بالاعتماد على الشكل (١–٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرَّف على ح، جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س)

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ق(س)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ق(س)

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س)



الشكل (١–٩)

تحدث

تحدث إلى زملائك بشكل عام عن الحالات التي تكون فيها $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة.

١) معتمدًا الشكل (١-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

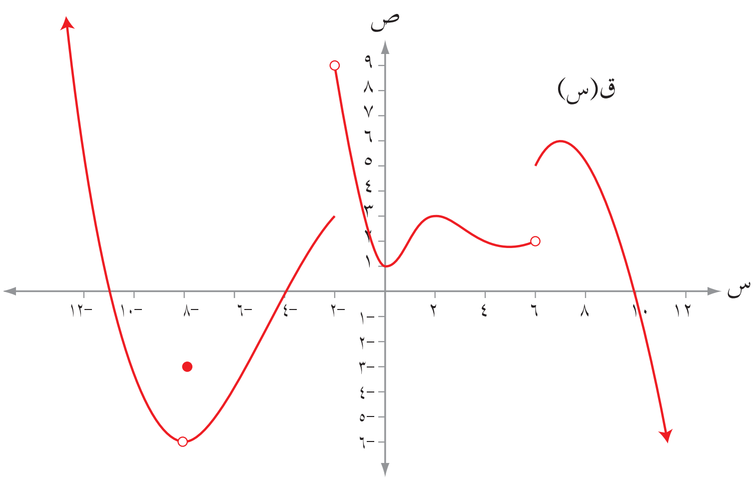
د) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \text{ق (س)}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٨}^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٨}^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$

ز) ق(−٨)

ح) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١٠}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)}$



الشكل (١-١٠)

٢) معتمدًا الشكل (١-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{\text{س} + \text{٤}}$
جد كلًّا مما يأتي:

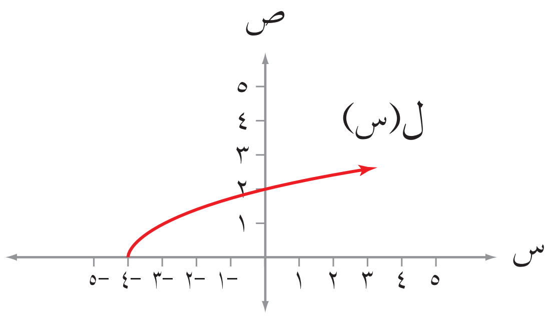
أ) مجال الاقتران ل

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٤}^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{ل(س)}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٤}^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{ل(س)}$

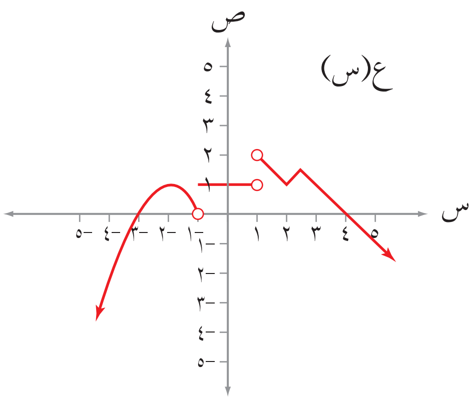
د) $\underset{\text{س} \leftarrow -\text{٤}}{\text{نهــا}}\ \text{ل(س)}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}}\ \text{ل(س)}$



الشكل (١-١١)

٣) معتمدًا الشكل (١–١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٢)

أ) مجموعة قيم أ حيث:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}\ \text{ع(س)} = ١$$

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{جـ}^{+}}{\text{نهـــا}}\ \text{ع (س)} = ١$$

جـ) مجموعة قيم ك حيث:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ك}}{\text{نهـــا}}\ \text{ع(س) غير موجودة}$$

د) مجموعة قيم ل حيث:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{ل}}{\text{نهـــا}}\ \text{ع(س)} = \text{صفرًا}$$

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ & \text{، س} \in \text{ص} \\ \text{س}^{٢} + ٤ & \text{، س} \notin \text{ص، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة} \end{cases}$

فجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \text{ل(س)}$

ثانيًا نظريات النهايات

Theorems of Limits

إذا كان ق(س) = س^{٤} + س^{٢} ، فجد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق(س)}}$

تعلمت في الدرس السابق إيجاد قيمة النهاية لاقتران عند عدد بيانيًّا، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد جبريًّا باستخدام نظريات النهايات.

نظرية (١)

١) إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان ق(س) = ب لكلِّ س ∈ح، فإنَّ: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ب

٢) إذا كانت أ ∈ح ، ن عدد صحيح موجب، وكان ق(س) = س^{ن}، فإنَّ:

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = أ^{ن}

نظرية (٢)

إذا كان ق ، هـ اقترانين، حيث أ، ب،جـ ، م أعداد حقيقية وكان:

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ب ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = جـ ، فإنَّ:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق(س) + هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) + $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ب + جـ

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق(س) − هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) − $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ب − جـ

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ م ق(س) = م × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = م × ب

٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ (ق(س) × هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ب × جـ

٥) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ (س)}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{هـ (س)}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، حيث جـ ≠ صفرًا.

٦) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \sqrt[ن]{\text{ق(س)}} = \sqrt[ن]{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}} = \sqrt[ن]{\text{ب}}$ ، (بشرط ب> صفر إذا كان ن عددًا زوجيًّا)

مثال ١

إذا كان ق(س) = $س^{٣} + س^{٢} + ٥$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) ٢) ق(٢)

الحل

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ($س^{٣} + س^{٢} + ٥$)

= $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} س^{٣} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} س^{٢} + \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} ٥$

= ٨ + ٤ + ٥

= ١٧

٢) ق(٢) = $٢^{٣} + ٢^{٢} + ٥$

= ٨ + ٤ + ٥

= ١٧ ماذا تلاحظ؟

تعميم

إذا كان ق اقتران كثير حدود ، فإنَّ: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق (أ)

فكر وناقش

أعط مثالًا يبين أنَّ العبارة الآتية غير صحيحة:

« إذا كان ق(أ) = ل ، فإنَّ: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ل »

مثال ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} -\sqrt{س + ٣}$ ٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٤} + ١}$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} (س + ١)\sqrt{س^{٢} + ٢١}$

الحل

١) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} -\sqrt{س + ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} -١ \times \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \sqrt{س + ٣}$

$$= -١ \times \sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \, (س + ٣)}$$

$$= -١ \times \sqrt{٦} = -\sqrt{٦}$$

٢) $$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٤} + ١} = \frac{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٥)}{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (س^{٤} + ١)} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

٣) $$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) \sqrt{س^{٢} + ٢١} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} + ٢١}$$

$$= ٣ \times ٥ = ١٥$$

تدريب ١

إذا كان $ق(س) = ٢س$ ، $هـ(س) = س^{٣} + س$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \left(ق(س) + هـ(س) \times س \right)$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{ق(س)} + ٣ \sqrt{هـ(س)} \right) + ١٥$

مثال ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٤) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

الحل

١) $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٤) = ٩ - ٤ = ٥$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٤) = ٥$

٣) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره، (لماذا؟)

$$\underset{\text{س}\rightarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\rightarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٢} - ٤) = \text{صفرًا}$$

$$\underset{\text{س}\rightarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\rightarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ (٤ - \text{س}^{٢}) = \text{صفرًا}$$

وبما أن $\underset{\text{س}\rightarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\rightarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{صفرًا}$

$$\therefore\ \underset{\text{س}\rightarrow ٢}{\text{نهـا}}\ |\text{س}^{٢} - ٤| = \text{صفرًا}$$

٤) $\underset{\text{س}\rightarrow ١}{\text{نهـا}}\ |\text{س}^{٢} - ٤| = \underset{\text{س}\rightarrow ١}{\text{نهـا}}\ (٤ - \text{س}^{٢}) = ٣$

تدريب ٢

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{\text{س}\rightarrow ٠}{\text{نهـا}}\ |\text{س} - ٨|$

٢) $\underset{\text{س}\rightarrow ١٦}{\text{نهـا}}\ |\text{س} - ١٦|$

٣) $\underset{\text{س}\rightarrow ٤}{\text{نهـا}}\ |\text{س}^{٢} - ١٦|$

مثال ٤

جد $\underset{\text{س}\rightarrow ٤}{\text{نهـا}}\ [\text{٠,٥ س}]$

الحل

أعد تعريف [٠,٥ س] دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد ٤

$$[\text{٠,٥ س}] = \begin{cases} ٠ \ ، & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ١ \ ، & ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ٢ \ ، & ٤ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٤ وعن يساره، (لماذا؟)

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}] = ٢$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}] = ١$

بما أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}] \neq \underset{\text{س} \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}]$

$\therefore$ $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}]$ غير موجودة

فكر وناقش

قامت سارة بحل المثال السابق كما يأتي:

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [٠,٥\ \text{س}] = [٠,٥ \times ٤] = [٢] = ٢$

ناقش مع زملائك الأخطاء التي ارتكبتها سارة في حلّها للمثال.

تدريب ٣

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} [\text{س} - ٢]$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١,٥}{\text{نهـا}} [٤ - ٢\text{س}]$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠,١}{\text{نهـا}} [\text{س} + ١]$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} [٠,٢٥\ \text{س}]$

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = [٢ − س] ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{جـ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −١

فكر وناقش

بيِّن إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم لا، مبرّرًا إجابتك من خلال تقديم أمثلة:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}} [\text{س}] = \text{أ}$ ، حيث أ عدد صحيح.

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}} [\text{س}] = \text{أ} - ١$ ، حيث أ عدد صحيح .

مثال ٥

جد $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س - ٤}$

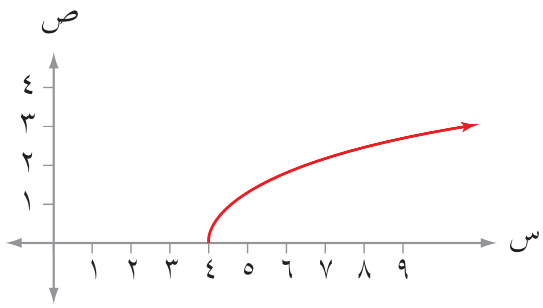
الحل

لابد من إيجاد مجال الاقتران

لاحظ أنَّ الاقتران معرَّف

على الفترة [٤ ، ∞)

انظر الشكل (١–١٣).



الشكل (١–١٣)

$\lim_{س \leftarrow ٤^+} \sqrt{س - ٤} = \sqrt{٤ - ٤} =$ صفرًا ‏ ‏ ‏ ق معرَّف على يمين العدد ٤

$\lim_{س \leftarrow ٤^-} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة ‏ ‏ ‏ ق غير معرَّف على يسار العدد ٤

$\therefore \lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة ‏ ‏ ‏ لماذا؟

فكر وناقش

أعط مثالًا على اقتران مثل ق(س) بحيث تكون ق(١) معرفة، لكن

$\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة

تدريب ٥

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \leftarrow ٧} \sqrt{س - ٧}$

٢) $\lim_{س \leftarrow ٩} \sqrt{س - ٧}$

٣) $\lim_{س \leftarrow ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

٤) $\lim_{س \leftarrow -٧} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

مثال ٦

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| &, \text{س} \geq ٠ \\ \sqrt{-\text{س}} &, \text{س} < ٠ \end{cases}$ ، فجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س})$، ثم جد ق(٠).

الحل

بما أنَّ الاقتران ق يغير قاعدته عند س = ٠ ، فلا بد من البحث في النهاية عن يمين العدد صفر وعن يساره

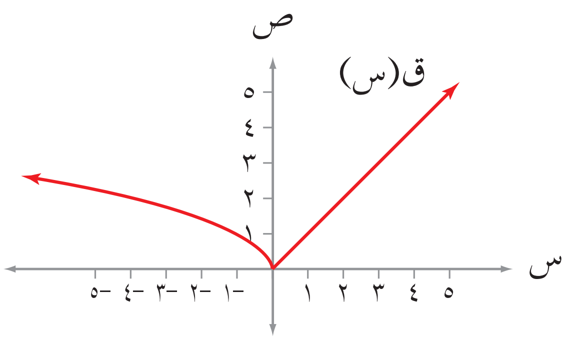
$$\lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^+} |\text{س}| = \lim_{\text{س} \to ٠^+} \text{س} = ٠$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^-} \sqrt{-\text{س}} = ٠$$

بما أن $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق}(\text{س}) = ٠$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س}) =$ صفرًا

ق(٠) = صفرًا



الشكل (١-١٤)

انظر الشكل (١-١٤) الذي يبين منحنى الاقتران ق.

تدريب ٦

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٢| &, \text{س} \geq ٢ \\ [٦ - \text{س}] &, \text{س} < ٢ \end{cases}$

فجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$

تدريب ٧

إذا كان ق(س) = [س + ٥] ، ل(س) = [٤ − س] ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)   ٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ل(س)

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (ق(س) + ل(س))

ماذا تلاحظ؟

تحدث

تحدث إلى زملائك عن ملاحظاتك التي توصلت إليها من خلال حلك لتدريب (٧).

تمارين ومسائل

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} − س − ٦ ، ل(س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)} \right)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \text{ل(س)}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ل(س)} \right)^{٤}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}}$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

٢) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ٢ ع(س) = ١٠ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ٣ل(س) + ١ = ٧ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(٢\,\text{ع(س)} + \text{ل(س)} \right)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)} \right)$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{ل (س)}}}{\text{ع (س)}}$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)} \right)$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right|$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \left| \text{س}^{٢} - ٢٥ \right|$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهــا}} \left| \text{س} - ٢ \right|$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \left| \text{س}^{٢} - ٦٤ \right|$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٤}{\text{نهــا}} [\text{س} - ٢]$

و) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}| \right)$

ز) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \sqrt{٥ - \text{س}}$

ح) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

ط) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهــا}} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = [٢,٠س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهــا}}$ [٢,٠س] = −١

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤أ &، \quad س \geq ٣ \\ [٦ - س] &، \quad س < ٣ \end{cases}$

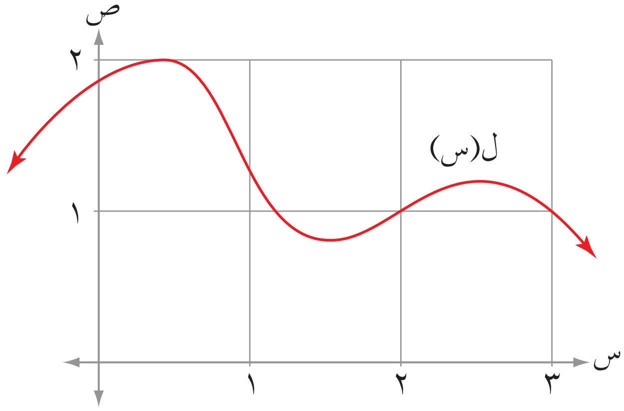
وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ل(٣س − ٣)

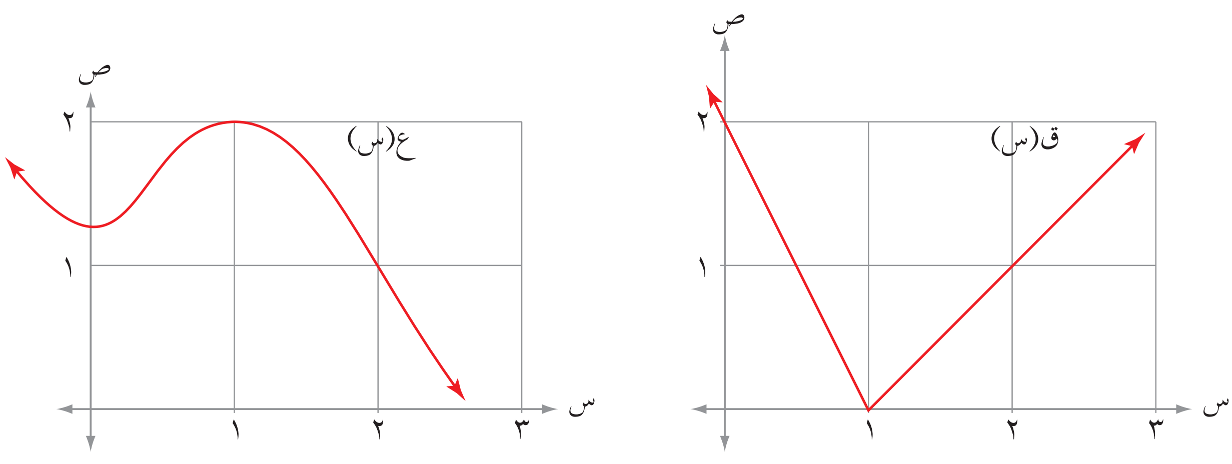
(إرشاد: افرض ص = ٣س − ٣)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (س + ل(س))



الشكل (١−١٥)

٨) معتمدًا الشكل(١−١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١−١٦)

أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س) + ع(س))

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (ق(س) × ع(س))

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \Big(٢\, ق(س-١) + ع(س) \Big)$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \Big(س - ل(س) \Big) = -١٠$

فجد $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \Big(ق^{٢}(س) - ٢\, ل(س) \Big)$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ ، فجد

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} (٣\, ع(س) + ٤\, س^{٢})$

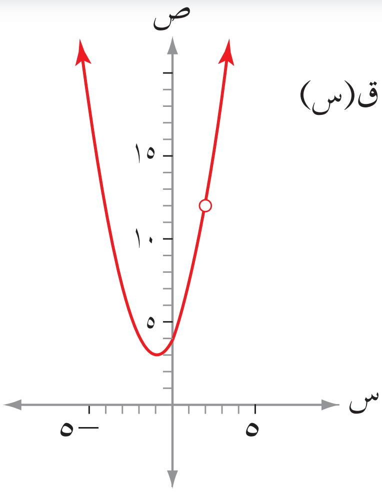
ثالثًا نهايات اقترانات كسرية
Limits of Fractional Functions

الشكل (١-١٧) يمثل منحنى ق(س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ ق(س) بيانيًّا.

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ ق(س) جبريًّا.



الشكل (١-١٧)

تعلمت في الدرس السابق إيجاد نهاية اقتران عند نقطة جبريًّا باستخدام نظريات النهايات، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهاية اقترانات كسرية.

ولإيجاد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ ق(س) في المسألة الموضّحة بداية الدرس، لا نستطيع استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

حلِّل البسط لمحاولة اختصار المقدار (س - ٢) للتخلص من الحصول على صفر في المقام عند تطبيق نظرية (٢) فرع (٤)، كما يأتي:

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$$ لماذا؟

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} (س^٢ + ٢ س + ٤) = ١٢$$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل؟ كيف؟

فكر وناقش

لماذا يمكن اختصار المقدار (س - ٢) في البسط مع المقدار (س - ٢) في المقام عند إيجاد النهاية؟

مثال ١

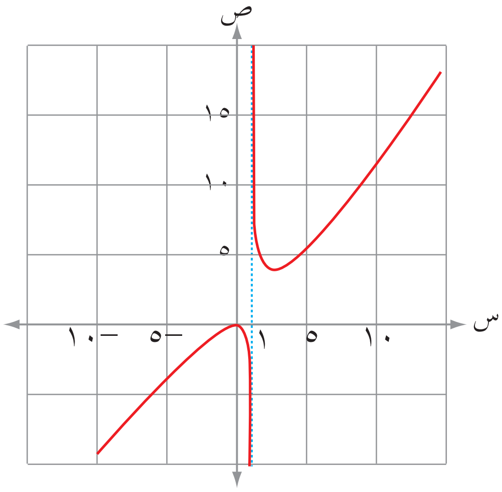
جد $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^{٢}}{س - ١}$

الحل

لاحظ أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ١} (س - ١) = $ صفرًا

وعليه لا يمكن استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

ولا يمكن أيضا إجراء اختصار للتخلص من المقدار (س − ١)، لماذا؟



الشكل (١−١٨)

وبالتالي فإنَّ النهاية هنا غير موجودة.

انظر الشكل (١−١٨) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \dfrac{س^{٢}}{س - ١}$

تحدث

بالاستعانة بالشكل (١−١٨) تحدث لزملائك عن سلوك منحنى الاقتران $ق(س) = \dfrac{س^{٢}}{س - ١}$ عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهتي اليمين واليسار.

نتيجة

إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س) = ل$ ، حيث ل عدد حقيقي ، $ل \neq ٠$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ} هـ(س) = $ صفرًا ،

فإنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة

تدريب ١

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow -٥} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س + ٥}$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^{٢} + ١}{س - ٣}$

مثال ٢

جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٤} + \dfrac{١}{-٤ + \text{س}}}{\text{س}}$

الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟

ويمكن تبسيط المقدار من خلال توحيد المقامات كما يأتي:

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٤} + \dfrac{١}{-٤ + \text{س}}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{-٤ + \text{س} + ٤}{٤\,(-٤ + \text{س}) \times \text{س}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{س}}{٤\,(-٤ + \text{س}) \times \text{س}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{١}{٤(-٤ + \text{س})}$$

$$= \dfrac{-١}{١٦}$$

مثال ٣

جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}{\text{س} - ٣}$

الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين، لماذا؟

يمكن تبسيط المقدار من خلال الضرب بمرافق البسط كما يأتي:

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}{\text{س} - ٣} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س} + ٦ - ٩}{(\text{س} - ٣)(\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\cancel{\text{س} - ٣}}{(\cancel{\text{س} - ٣})(\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣} = \dfrac{١}{٦}$$

تدريب ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right)$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٣٤} - ٦}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢} + ١} - \sqrt{١ - ٢س^{٢}}}{س^{٢}}$

مثال ٤

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢٥}}{\sqrt{س - ٥}}$ ٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢٥}}{\sqrt{س - ٥}}$

الحل

١) لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟

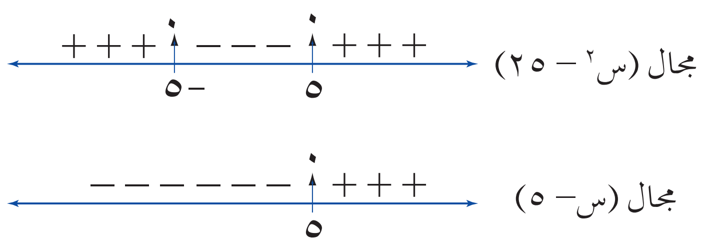
في هذه الحالة لابد من إيجاد مجال المقدار (لماذا؟)

مجال البسط هو: الفترة [٥ ، ∞) ، والفترة (− ∞ ، −٥]

مجال المقام هو: الفترة [٥ ، ∞)

إذن مجال المقدار هو: الفترة (٥ ، ∞) (لماذا وُضِعَ رمز الفترة المفتوحة عند العدد ٥ ؟)

انظر الشكل(١-١٩)



الشكل (١-١٩)

لاحظ أنَّ كلًّا من البسط والمقام معرفان على يمين العدد ٥؛ لذا يمكن إيجاد نهاية المقدار عن يمين العدد ٥ فقط

$$\text{إذن } \lim_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$$

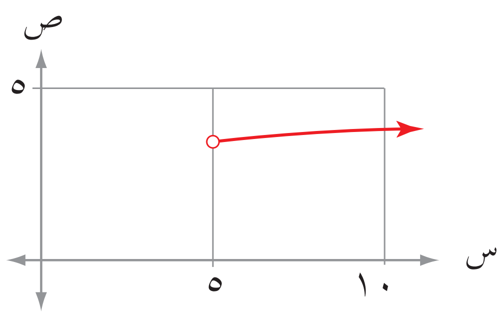
$$= \lim_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}}$$

$$= \lim_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \sqrt{\frac{(\text{س} + ٥)\cancel{(\text{س} - ٥)}}{\cancel{\text{س} - ٥}}} = \sqrt{١٠}$$

٢) $\lim_{\text{س} \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ غير موجودة، لماذا؟

انظر الشكل (١–٢٠) الذي يبين منحنى الاقتران

$$\text{ق(س)} = \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$$



الشكل (١–٢٠)

فكر وناقش

١) بالاستعانة بالشكل (١–٢٠) فسّر لماذا $\lim_{\text{س} \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ غير موجودة؟

٢) أوجد عبدالله $\lim_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ كما يأتي:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}} = \lim_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}}$$

$$= \lim_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \sqrt{\frac{(\text{س}+٥)\cancel{(\text{س}-٥)}}{\cancel{\text{س}-٥}}} = \sqrt{١٠}$$

اكتشف الخطأ في حلّه ثم اكتب الصواب.

تدريب ٣

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$

مثال ٥

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٣} - ١}$

الحل

حسب نظرية العامل فإنَّ المقدار(س – ١) عاملٌ من عوامل البسط ، و عاملٌ من عوامل المقام ، يمكن تحليل البسط باستخدام القسمة الطويلة أو القسمة التركيبية كما يأتي:

	$\text{س}^{٤}$	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	$\text{س}^{٠}$
	١	٠	٢−	٠	١
١		١	١	١−	١−
	١	١	١−	١−	٠

إذن، $\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٢} + ١ = (\text{س} - ١)\,(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - \text{س} - ١)$

ومنه $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٣} - ١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ١)}\,(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - \text{س} - ١)}{\cancel{(\text{س} - ١)}\,(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - \text{س} - ١)}{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}$

= صفرًا (لماذا؟)

مثال ٦

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٨} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$

تذكر

$أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$

$أ^٣ + ب^٣ = (أ + ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$

الحل

اضرب كلًّا من البسط والمقام بالمقدار ($\sqrt[٣]{س^٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤$)

$\therefore \lim\limits_{س \leftarrow ٨} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٨} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨} \times \dfrac{\sqrt[٣]{س^٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{\sqrt[٣]{س^٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٨} \dfrac{س - ٨}{(س - ٨)(\sqrt[٣]{س^٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \dfrac{١}{٤+٤+٤} = \dfrac{١}{١٢}$

(حُلَّ المثال(٦) بطريقة أخرى من خلال فرض $\sqrt[٣]{س} = ص$)

تدريب ٤

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٧} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ٧}$

مثال ٧

جد $\lim\limits_{س \leftarrow -٢} \dfrac{\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}}{س + ٢}$

الحل

تذكَّر

$\sqrt{س^٢} = |س|$

$\lim\limits_{س \leftarrow -٢} \dfrac{\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}}{س + ٢}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow -٢} \dfrac{\sqrt{(س + ٢)^٢}}{س + ٢} = \lim\limits_{س \leftarrow -٢} \dfrac{|س + ٢|}{س + ٢}$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد -٢ وعن يساره، لماذا؟

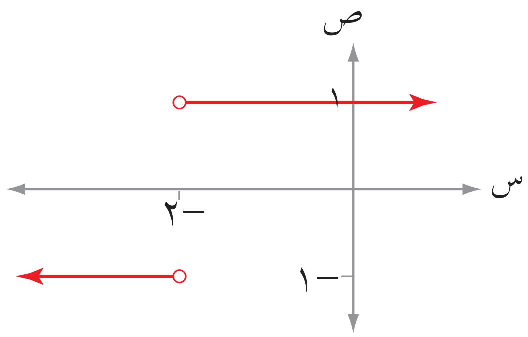
$$\lim_{س \leftarrow -٢^+} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -٢^+} \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$$

$$\lim_{س \leftarrow -٢^-} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -٢^-} \frac{-س - ٢}{س + ٢} = -١$$

إذن $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$ غير موجودة



الشكل (١-٢١)

انظر الشكل (١-٢١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) $= \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$.

فكر وناقش

ادرس الشكل (١-٢١) ثم فسّر لماذا $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$ غير موجودة؟

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١)^٢ - ٨١}{(س - ٨)}$

ب) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \frac{س}{٢}}$

جـ) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{(٢ + س)^٢} - \frac{١}{٤}\right)$

د) $\lim_{س \to -٢} \frac{٥ - |٣س + ١|}{س^٣ + ٨}$

هـ) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س\sqrt{س + ١}}{٩ - ٣س}$

و) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^٢ - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥}$

ز) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

ح) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$

ط) $\lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

ي) $\lim_{س \to ٢,٥} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٢٥}$

ك) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س^٢} - \sqrt{١ - س^٢}}{س^٢}$

٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ ،

$\lim_{س \to ٣} \left(ق(س) - ٢س + ٣ب\right) = ٧$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٣) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{أس^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

٤) جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(٦٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$

٥) إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ - ٢٧}{٢س^٢ + ٦س + ١٨} &، \quad س \leq ع \\ س + ٥ &، \quad س > ع \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim\limits_{س \leftarrow ع} ل(س)$ موجودة.

٦) إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٥س + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)$ غير موجودة.

٧) إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ،وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \dfrac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{هـ(س) + ٥}{س} = \dfrac{١}{٢}$ ،

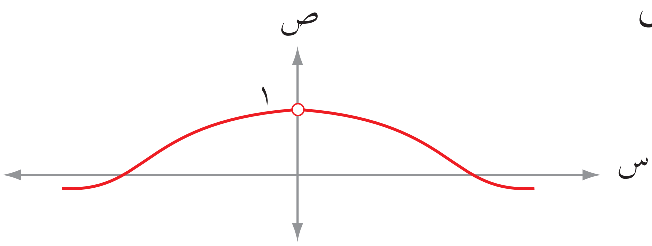
$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \left(هـ(س) - ٥ + ٣ جـ \right) = ٢$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

رابعًا نهايات اقترانات مثلثية
Limits of Trigonometric Functions

معتمدًا الشكل (١–٢٢) الذي يمثل منحنى

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

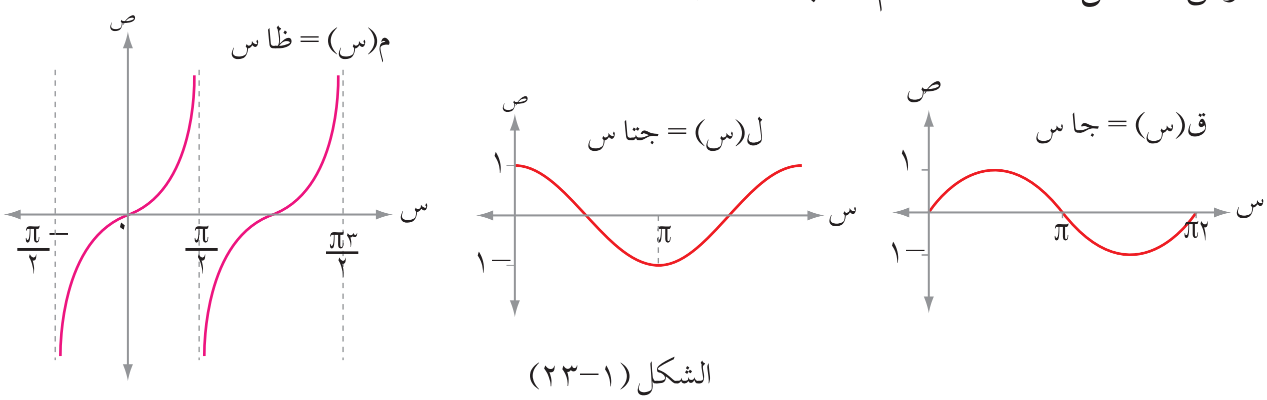
ما $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)؟



الشكل (١–٢٢)

تعلمت سابقًا إيجاد نهايات اقترانات كسرية، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهايات اقترانات مثلثية.

ادرس الشكل (١–٢٣) ، ثم أجب عما يليه:



الشكل (١–٢٣)

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ جاس =

٢) جا π =

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ جتاس =

٤) جتا π =

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ظا س =

٦) ظا ٠ =

ماذا تلاحظ؟

من خلال إجابتك عما سبق يمكن التوصل إلى ما يأتي:

تعميم

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}\ \text{جاس} = \text{جا أ}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}\ \text{جتاس} = \text{جتا أ}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}\ \text{ظاس} = \text{ظا أ}$ ، أ $\in$ ح $-$ $\{ \frac{\text{ن}}{٢}\pi$، ن $=$ ١، ٣، ٥، $\cdots \}$

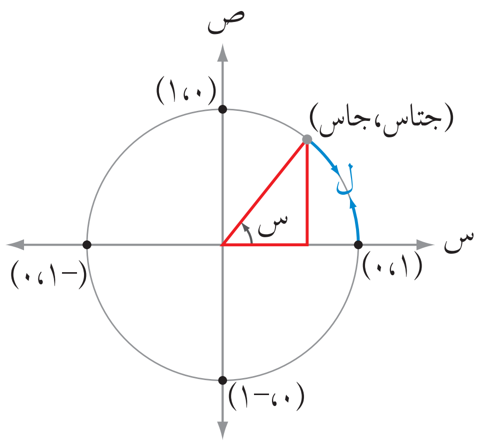
مثال ١

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ (جاس + جتاس)

الحل

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ (جاس + جتاس) $=$ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ جا س + $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ جتاس (نظريات النهايات)

$=$ ٠ + ١ $=$ ١



الشكل (١–٢٤)

الشكل (١–٢٤) يمثل دائرة الوحدة، لاحظ أنَّ رأس الزاوية س في الوضع القياسي يقع على مركز الدائرة، وطول القوس(ل) المقابل لها يمثل قياسها بالتقدير الدائري (لماذا؟)، والإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها مع الدائرة يمثل جاس (لماذا؟)، كلما صغر قياس الزاوية س فإنَّ طول القوس(ل) $\approx$ طول العمود أي أنَّ:

س $\approx$ جاس، وبذلك فإنَّ:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{جــاس}}{\text{س}} = ١$$

تحدث

بالاستعانة بالشكل(١–٢٢) تحدث إلى زملائك عن سلوك منحنى ق(س) $= \frac{\text{جــاس}}{\text{س}}$ عندما تقترب قيم س من العدد صفر من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

نظرية

$$\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = 1$$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

$$\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{س}}{\text{جاس}} = 1$$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

في هذا الكتاب، سنعتمد قياس الزوايا بالتقدير الدائري، مالم يُذكر غير ذلك.

مثال ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}}$ ٢) $\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$

الحل

١) افرض أنَّ ٣ س = ص ، إذن س = $\frac{\text{ص}}{٣}$ ، وعندما س ← ٠ ، فإنَّ ص ←٠ ، ومنه:

$$\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}} = \lim_{\text{ص} \leftarrow 0} \frac{\text{جاص}}{٥ \times \frac{\text{ص}}{٣}} = \frac{٣}{٥} \lim_{\text{ص} \leftarrow 0} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$$

$$= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$$

حل آخر

$$\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}} = \lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٣\text{س}} \times \frac{٣\text{س}}{٥\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٣\text{س}} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢) $\lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$

$$= \lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتاس}}}{\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \leftarrow 0} \frac{١}{\text{جتاس}} = ١$$

فكر وناقش

من خلال دراستك مثال(٢) ماذا تتوقع أن تكون قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}}$ ٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظا أس}}$

نتيجة

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، حيث أ ، ب أعداد حقيقية ، ب $\neq$ صفرًا

مثال ٣

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٣\text{س}}{\text{جاس}}$

الحل

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٣\text{س}}{\text{جاس}} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٣}{\frac{\text{جاس}}{\text{س}}} = \frac{\lim\limits_{س \leftarrow ٠} ٣}{\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}} = ٣$$

فكر وناقش

اكتشف الخطأ في ما يأتي، واكتب الصواب:

$$\lim\limits_{س \leftarrow \pi} \frac{\text{جا٤س}}{\text{٥س}} = \frac{٤}{٥}$$

تدريب ١

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٧س}}{\text{٣ س}}$ ٢) $\lim\limits_{س \leftarrow \pi} \frac{\text{جا(س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)}$

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{٩س}}{\text{ظاس}}$ ٤) $\lim\limits_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}$

مثال ٤

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جـا س} - \text{ظا ٥س}}{\text{جـا ٤س} - \text{٢س}}$

الحل

بقسمة حدود المقدار على س ، حيث س ←٠ تتضمن س ≠ صفرًا فتكون:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{س جا س}}{\text{س}} - \dfrac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{جـا٤س}}{\text{س}} - \dfrac{\text{٢س}}{\text{س}}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} - \dfrac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{جـا٤س}}{\text{س}} - ٢}$$

$$= \dfrac{\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{جا س} - \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٤ س}}{\text{س}} - \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٢}$$ (نظريات النهايات)

$$= \dfrac{٠ - ٥}{٤ - ٢} = -\dfrac{٥}{٢}$$

تدريب ٢

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \text{جـا ٣س} + \text{ظا ٥س}}{\text{٣س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

مثال ٥

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٢ س}}{\text{٣س}^{٢}}$

الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات ، لماذا؟

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٢ س}}{\text{٣س}^{٢}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - (١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س})}{\text{٣س}^{٢}}$$ (جتا٢س = ١ − ٢ جا²س)

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{٣س}^{٢}} = \dfrac{٢}{٣} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}}$$

$$= \dfrac{٢}{٣} \times ١ \times ١ = \dfrac{٢}{٣}$$

حُلَّ مثال (٥) بطريقة أخرى

إرشاد : $\frac{\text{١} - \text{جتا ٢ س}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{جتا ٠} - \text{جتا٢س}}{\text{٣س}^{\text{٢}}}$

فكر وناقش

ناقش مع زملائك طريقة أخرى ثالثة لحل مثال (٥)

مثال ٦

جد $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا ٦ س} - \text{جتا ٤ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات، لماذا؟

باستخدام القانون:

$\text{جتاس} - \text{جتاص} = -\text{٢ جا}\left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٢}}\right) \text{جا}\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{٢}}\right)$ نجد أنَّ:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا ٦س} - \text{جتا ٤س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{٢جا ٥س جا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= -\text{٢} \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$= -\text{٢} \times \text{٥} \times \text{١}$$

$$= -\text{١٠}$$

تدريب ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - \text{جتا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا ٨س} + \text{جا ٤ س}}{\text{س}}$

مثال ٧

جد $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات. (لماذا)

بالضرب بمرافق المقدار جاس − جتاس

$$\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جتا}٢\text{س}}{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ (جتا٢س = جتا^{٢}س − جا^{٢}س)

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س})}{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ (جتاس = جا($\frac{\pi}{٢}$ − س))

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - \text{س})}{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ إخراج ٢ عاملًا مشتركًا

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - \text{س})}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} \times \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ افرض ص = $\frac{\pi}{٤}$ − س

$$= ٢ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٢}$$

تدريب ٤

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$

٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}\text{س}}{\text{س} - ١}$

تمارين ومسائل

جد النهاية المطلوبة في كلٍّ من التمارين من (١) إلى (٢١) :

١) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا } ٨س}{٦س}$

٢) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س + \text{ظا}٢س - \text{جا } س}{س}$

٣) $\text{نهـا}_{س \to ٠} (\text{قاس} + \text{ظا } ٥س)$

٤) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \left(٧\, س^{٣}\, \text{ظتا}^{٢}\, (٢س)\, \text{قتا}\, (٥س)\right)$

٥) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا } ٤س - ٢\, \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}}$

٦) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{س\ \text{جا } س}$

٧) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جتاس}}{٢س - \pi}$

٨) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا } س - \text{جا } س}{س}$

٩) $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا } س}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

١٠) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{قا}(٢س) - ١}{س^{٢}}$

١١) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢س^{٢} + س\ \text{ظا}٢س}{\text{جا}^{٢}\, س}$

١٢) $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}^{٢}س - \text{جا}^{٢}\, س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١٣) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا } ٦س}{\text{جتا } ٨س - ١}$

١٤) $\text{نهـا}_{س \to ٠} ٣س(\text{ظتا } ٢س + \text{قتا } ٣س)$

١٥) $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتا } س}{\pi - ٢س}$

١٦) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س\ \text{جا} \frac{\pi}{س}}{س - ١}$

١٧) $\underset{\text{س}\leftarrow -٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}\,(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

١٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}}$

١٩) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣\pi}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

٢٠) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$

٢١) $\underset{\text{س}\leftarrow -\text{أ}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س} + \text{حا أ}}{\text{س} + \text{أ}}$ (إرشاد: $\text{جاس} + \text{جا ص} = ٢\ \text{جا}\left(\dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)\ \text{جتا}\left(\dfrac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$)

٢٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا أس}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ظا } ٣\text{ س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٦$ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

٢٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{جا}\,(٢\pi - ٢\text{س})}{-٥\text{س}}$ ، فجد $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)}$

الفصل الثاني

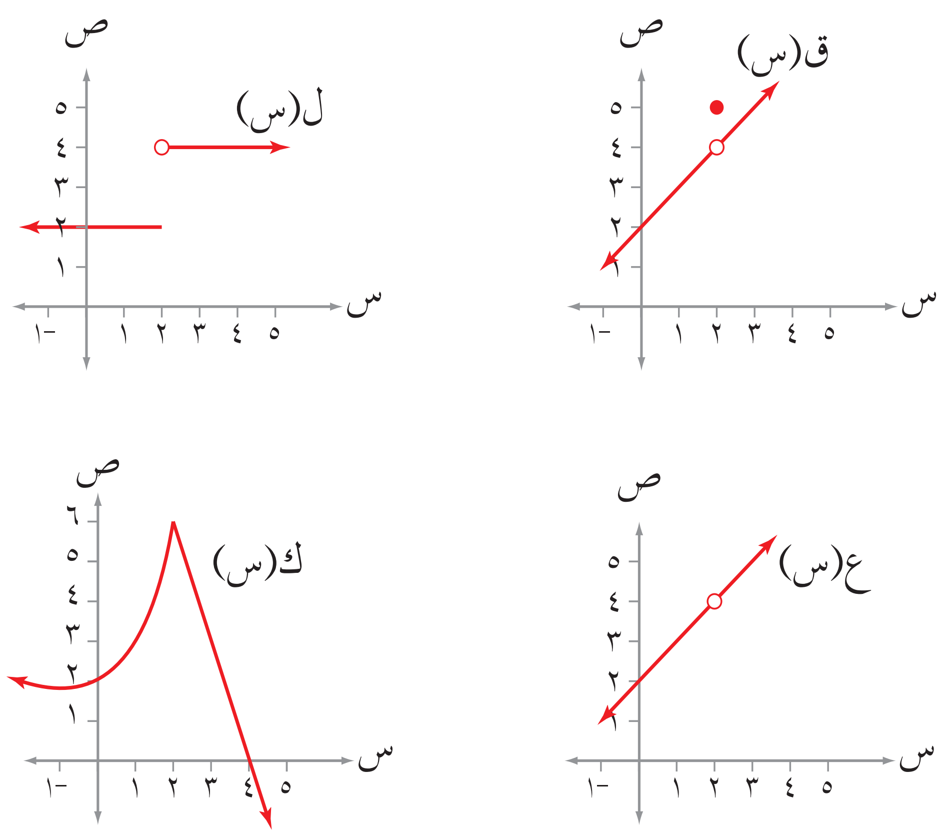
الاتصال
Continuity

النتاجات

- تتعرف اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.
- تبحث في اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.

أولاً الاتصال عند نقطة
Continuity at a point

معتمدًا الشكل (١-٢٥) أجب عن الأسئلة التي تليه:



الشكل (١-٢٥)

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ... ، ق(٢) = ...

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ل(س) = ... ، ل(٢) = ...

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ع(س) = ... ، ع(٢) = ...

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ك(س) = ... ، ك(٢) = ...

ماذا تلاحظ؟ أيُّ الاقترانات كان منحناه غير منقطع (متصل) على فترة مفتوحة تحوي العدد ٢؟ في مثل هذه الحالة نقول إنَّ الاقتران ك **اقتران متصل** عند س = ٢ ، بينما نقول إنَّ كلًّا من الاقترانات ق ، ل، ع **غير متّصل** (منفصل) عند س=٢

فكر وناقش

تحدث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران عند نقطة.

تعميم

يكون الاقتران ق متصلا عند س= أ ، إذا حقق الشروط الآتية:

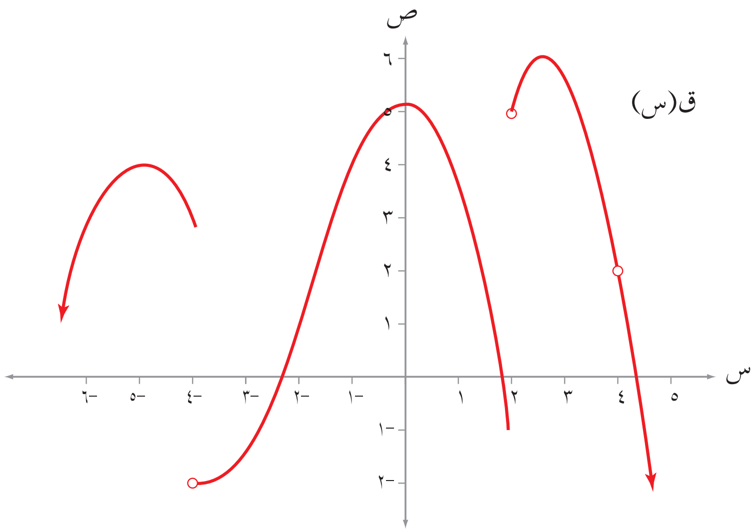
١) ق معرَّف عند س= أ ، أي أنَّ ق(أ) موجودة كعدد حقيقي.

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة.

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(أ)

مثال ١

معتمدًا الشكل (١-٢٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق اقترانًا غير متصل، مع ذكر السبب ؟



الشكل (١-٢٦)

الحل

$\text{س}_1 = -٤$ ، لأن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -٤}$ ق(س) غير موجودة.

$\text{س}_2 = ٢$ ، لأن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة.

$\text{س}_3 = ٤$ ، لأن ق غير معرف عند س = ٤

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - ٤}{٢ - \text{س}} & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٦ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

الحل

١) ق(س) معرف عند س = ٢ ، ق(٢) = -٤

٢) ابحث في نهاية ق عن يمين العدد ٢ ويساره، لماذا؟

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢^+} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \leftarrow ٢^+} (\text{س} - ٦) = -٤$$

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٢^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \leftarrow ٢^-} \frac{\text{س}^2 - ٤}{٢ - \text{س}} = -\lim_{\text{س} \leftarrow ٢^-} (\text{س} + ٢) = -٤$$

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = -٤

∴ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) موجودة وتساوي ق(٢)

∴ ق متصل عند س = ٢

تدريب ١

إذا كان ق(س) = $\frac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، س $\neq -٤$

فابحث في اتصال ق عند س = ٤

مثال ٣

إذا كان ق(س) = [٠,٥ س − ٤] ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٧

الحل

أعد تعريف الاقتران ق دون كتابة رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد ٧

لاحظ أن ق(س) = −١ في الفترة [٦، ٨) ، وأن ٧ ∈ [٦، ٨)

ابحث في شروط الاتصال عند س = ٧

ق معرف عند س = ٧ ، حيث إنَّ: ق(٧) = −١

$\lim_{س \leftarrow ٧^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٧^-}$ ق(س) = −١

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ٧}$ ق(س) = ق(٧)

∴ ق(س) متصل عند س = ٧

تدريب ٢

١) إذا كان ق(س) = [س] ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقترانًا غير متصل؟

٢) اقترح قاعدة لاقتران أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلا عند س= ١ ، وغير متصل عند س = ٢

مثال ٤

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^3 - \text{ب س} + 1 & \text{، س} < 1 \\ 5 & \text{، س} = 1 \\ \text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 2 & \text{، س} > 1 \end{cases}$

متصلًا عند س = ١ فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

الحل

بما أنَّ ق متصل عند س= ١ إذن:

١) $\lim_{\text{س} \to 1^-} (\text{أ س}^3 - \text{ب س} + 1) = \text{ق}(1)$

أ – ب + ١ = ٥ .... (١)

٢) $\lim_{\text{س} \to 1^+} \left(\text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 2\right) = 5$

١ – (أ + ب) + ٢ = ٥ .... (٢)

بتبسيط المعادلتين (١)، (٢) ينتج:

أ – ب = ٤ ، أ + ب = –٢

وبحلهما ينتج أ = ١ ، ب = –٣

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^2 + \text{ب} & \text{، س} < 3 \\ 6 & \text{، س} = 3 \\ \text{أ س} - 2\text{ ب} & \text{، س} > 3 \end{cases}$

متصلًا عند س = ٣ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

نظريات الاتصال (Continuity Theorems)

نظرية (١)

إذا كان ق اقتران كثير حدود فإنَّ ق متصل على ح.

نظرية (٢)

إذا كان ق ، ل اقترانين متصلين عند س = أ ، فإنَّ:

١) الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق − ل متصل عند س = أ

٣) الاقتران ق × ل متصل عند س = أ

٤) الاقتران $\frac{ق}{ل}$ متصل عند س = أ ، ل(أ) ≠ صفرًا.

٥) $\frac{ق}{ل}$ غير متصل عند س = أ ، إذا كانت ل(أ) = صفرًا.

نظرية (٣)

إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ ، في فترة مفتوحة تحتوي أ ، فإنَّ الاقتران

هـ (س) = $\sqrt{ق(س)}$ اقتران متصل عند س = أ

برهان نظرية (٢) فرع (١)

المعطيات: الاقترانان ق، ل متصلان عند س = أ

المطلوب: إثبات أنَّ الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

البرهان:

افرض أنَّ هـ = ق + ل

هـ (أ) = ق (أ) + ل (أ)   من تعريف الاقتران هـ.

وحيث إنَّ ق، ل اقترانان متصلان عند س = أ فإنَّ:

$$\lim_{س \to أ} هـ(س) = \lim_{س \to أ} ق(س) + \lim_{س \to أ} ل(س)$$

$$= ق(أ) + ل(أ)$$

وعليه فإنَّ الاقتران هـ متصل عند س = أ

تدريب ٤

برهن الفروع: ٢، ٣، ٤ من نظرية (٢)

فكر وناقش

اكتشف الخطأ في العبارات الآتية، ثم اكتب الصواب:

١) الاقتران $\text{ل}(\text{س}) = [\text{س} + ١] - [\text{س}]$، غير متصل عند س = ٠ ؛ لأنه نتج عن طرح اقتران من آخر، وكلاهما غير متصل عند س = ٠

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - ١$ اقترانًا متصلًا عند س = ١ ، فإنَّ $\sqrt{\text{ق}(\text{س})}$ هو اقتران متصل عند س = ١ .

مثال ٥

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ &،\ \text{س} < ٢ \\ \text{س} + ٦ &،\ \text{س} \geq ٢ \end{cases} \quad،\quad \text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} - ٢ &،\ \text{س} < ٢ \\ ٣\,\text{س} &،\ \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + ع) عند س = ٢

الحل

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = ٨$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٨ \quad،\quad \text{ق}(٢) = ٨$$

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

٢) ابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٢

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ع}(\text{س}) = ٦$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ع}(\text{س}) = ٦ \quad،\quad \text{ع}(٢) = ٦$$

∴ ع(س) متصل عند س = ٢

وحسب نظرية (٢) فرع (١)، فإنَّ (ق + ع) (س) متصل عند س=٢

إرشاد: يمكنك حل المثال السابق من خلال إيجاد قاعدة الاقتران (ق+ع)(س)، ثم البحث في اتصاله عند س=٢

تدريب ٥

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١+٢س & ، س < ١ \\ ٣س^٢ & ، س \geq ١ \end{cases}$ ، ل(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ١ \\ |س| & ، س \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق × ل) عند س = ١ بطريقتين.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = (س−١)^٢ ، ل(س) = [٢−س] ، فابحث في اتصال الاقتران (ق×ل)

عند س = ٣

الحل

ق(س) = (س − ١)^٢ متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود متصل على مجاله.

ل(س) = [٢ − س] غير متصل عند س = ٣ لأنها نقطة تفرع.

لا نستطيع استخدام نظرية (٢) فرع (٣) للبحث في اتصال الاقتران ق × ل ، لماذا؟

لابد من إيجاد قاعدة الاقتران (ق×ل)(س) والبحث في اتصاله عند س = ٣

(ق × ل)(س) = (س − ١)^٢ × [٢ − س]

اكتب الاقتران بصورة مجزأة في فترة تحوي العدد ٣ مثل [٢ ، ٤]

(ق×ل)(س) = $\begin{cases} (س-١)^٢ \times -١ & ، ٢ < س \leq ٣ \\ (س-١)^٢ \times -٢ & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصاله عند س = ٣

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهــا}$ (ق × ل)(س) = −٢ × (٣ − ١)^٢ = −٨

نهـــا$_{\text{س}\leftarrow ٣^-}$ (ق × ل)(س) = −١ × (٣ − ١)^{٢} = −٤

بما أنَّ نهـــا$_{\text{س}\leftarrow ٣^+}$ (ق × ل)(س) ≠ نهـــا$_{\text{س}\leftarrow ٣^-}$ (ق × ل)(س) إذن نهـــا$_{\text{س}\leftarrow ٣}$ (ق × ل)(س) غيرموجودة

∴ (ق×ل)(س) غير متصل عند س = ٣

تـحدث

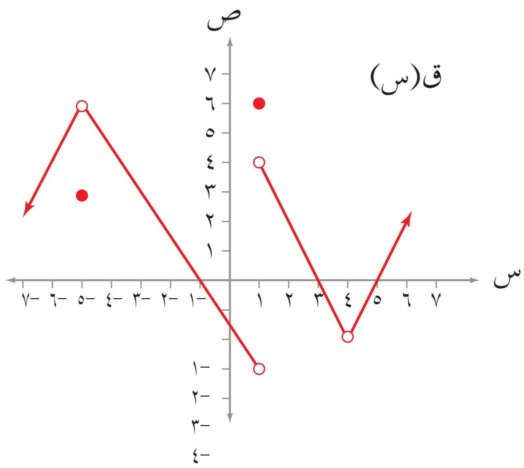
ناقش زملاءك في الحالات التي لا نستطيع فيها توظيف نظريات الاتصال في الحكم على اتصال الاقترانات.

تدريب ٦

إذا كان ق(س) = (س−٥)^{٣} ، هـ(س) = [س + ٢]

فابحث في اتصال الاقتران (ق×هـ) عند كلٍّ من س= −٢ ، س = ٥

١) معتمدًا الشكل (١–٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟



الشكل (١–٢٧)

٢) إذا كان $ق(س) = [\,٤س - ٤\,]$ ،فابحث في اتصال الاقتران ق عند $س = ١,٢٥$

٣) ابحث في اتصال الاقتران $ق(س) = \frac{١ - س^{٢}}{س - ١}$ عند $س = ١$

٤) ابحث في اتصال الاقتران $هـ(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا\,س|}{س} & ،\ س < ٠ \\ ١ - جتاس & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند $س = ٠$

٦) إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٣} & ،\ س > ٣ \\ |س^{٢} - ٩| & ،\ س \leq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند $س = ٣$

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س|-٢}{س-٢} &، \quad س \neq ٢ \\ ٥ &، \quad س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٨) إذا كان ك(س) = $\begin{cases} ٦+س &، \quad س \leq -٢ \\ ٢-س &، \quad -٢ \leq س < ٢ \\ ٢س-١ &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س= ٢

٩) إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \dfrac{أ}{س} + س^{٢} &، \quad ٠ < س \leq ٢ \\ [س]+٣ &، \quad ٢ < س < ٣ \\ ٧ &، \quad س = ٣ \end{cases}$

متصلًا عند س= ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣}+س^{٢}+٢س-٤}{س-١} &، \quad س \neq ١ \\ ٥س-١ &، \quad س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س= ١

١١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+س &، \quad س < ٢ \\ [س+٤] &، \quad س = ٢ \\ \sqrt{س^{٢}+٥} + \dfrac{٦}{س} &، \quad س > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

١٢) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ب} & ، \quad ٠ \le \text{س} < ٢ \\ |\text{س}| - ٥ & ، \quad ٢ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣\,\text{س} + ٥ & ، \quad \text{س} \in \text{ص} \\ ٢\,\text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} \notin \text{ص} \text{ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة} \end{cases}$

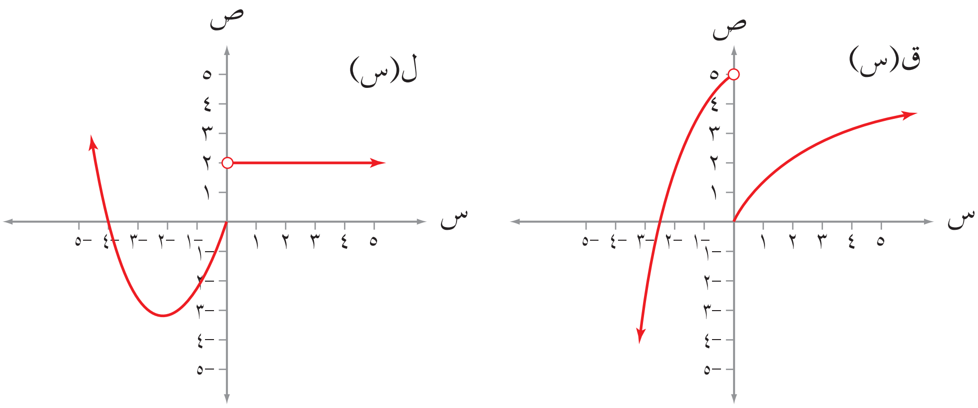
فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

١٤) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢ + ٢\text{س} & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٣\text{س}^{٢} & ، \quad \text{س} \ge ١ \end{cases}$ ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \quad \text{س} < ١ \\ |٢\text{س}| & ، \quad \text{س} \ge ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ) عند س = ١

ثانيًا الاتصال على فترة
Continuity on an Interval

معتمدًا الشكل (١–٢٨) الذي يمثل منحنى كلٍّ من الاقتران ق والاقتران ل المعرفين على ح، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–٢٨)

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{+}}$ ق(س)

٢) ق(٠)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{-}}$ ل(س)

٤) ل(٠)

ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الدرس السابق شروط اتصال اقتران عند نقطة. وفي هذا الدرس ستتعرف شروط اتصال اقتران على فترة.

في الشكل (١–٢٨) لا بد أنك لاحظت أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{+}}$ ق(س) = ق(٠) = ٠ وفي هذه الحالة يكون ق متصلًا عند س = ٠ من اليمين.

وأنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٠^{-}}$ ل(س) = ل(٠) = ٠ ، وفي هذه الحالة يكون ل متصلًا عند س=٠ من اليسار.

فكر وناقش

ادرس الشكل (١–٢٨) ثم أجب عن كل مما يأتي:

١) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليمين؟

٢) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليسار؟

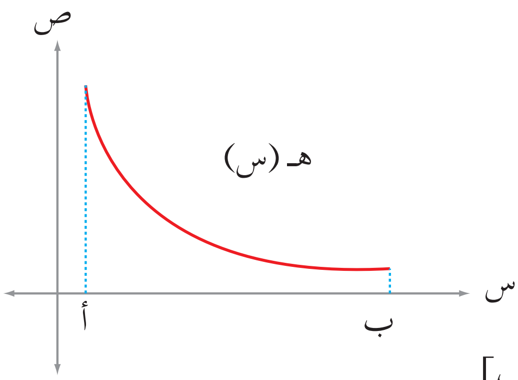
انظر الشكل(١–٢٩) لاحظ أنَّ:

الاقتران هـ متصل عند س = أ من اليمين، لماذا؟

وأيضا الاقتران هـ متصل عند س = ب من اليسار، لماذا؟

كما أن الاقتران هـ متصل عند كل س تنتمي للفترة (أ ، ب) ، لماذا؟

في هذه الحالة نقول إنَّ الاقتران هـ متصل على الفترة[أ ، ب].



الشكل (١–٢٩)

تحدث

تحدَّث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران على فترة مغلقة، وفترة مفتوحة، وفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة.

تعريف

إذا كان ق اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ ، ب] فإن:

١) ق يكون متصلًا عند س= أ من اليمين، إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = ق(أ)

٢) ق يكون متصلًا عند س= ب من اليسار، إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ب^-}$ ق(س) = ق(ب)

٣) ق يكون متصلًا على الفترة (أ ، ب) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)

٤) ق يكون متصلًا على الفترة [أ ، ب] إذا كان متصلًا على الفترة (أ ، ب) ومتصلًا عند س= أ من اليمين، و متصلًا عند س= ب من اليسار.

ملاحظة

١) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة [أ ، ب)، إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)، ومتصلًا عند س = أ من اليمين.

٢) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة (أ ، ب]، إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)، ومتصلًا عند س = ب من اليسار.

٣) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة (أ ، ∞) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ∞) .

٤) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة (−∞ ، ب) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (−∞ ، ب).

٥) يكون الاقتران ق متصلًا على ح إذا كان متصلًا عند كل س ∈ ح .

فكر وناقش

اقرأ العبارات الآتية ثم أجب بنعم أو لا، وقدّم تبريرًا:

١) كثيرات الحدود متصلة على ح.

٢) الاقترانات النسبية متصلة على ح.

٣) إذا كان الاقتران متصلًا على ح، فإنه يكون متصلًا على أية فترة جزئية منها.

٤) الاقترانان الدائريان (جاس، جتاس) متصلان على ح.

تحدث

تحدّث إلى زملائك كيف تحدد نقط عدم الاتصال للاقترانات الدائرية (القاطع، قاطع التمام، الظل ، ظل التمام).

مثال ١

$$\text{إذا كان ق(س)} = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، \quad -٢ \leq س < ١ \\ س + ٤ & ، \quad ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢ ، ٥]

الحل

١) الاقتران ق متصل على الفترة (−٢ ، ١) لأنه على صورة كثير حدود.

٢) الاقتران ق متصل على الفترة (١، ٥) لأنَّه على صورة كثير حدود.

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: س=١

$\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = ١ + ٤ = ٥

$\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ٢ × ١ + ٢ = ٤

ق(١) = ٥

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س)، إذن $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة،

وعليه فإنَّ الاقتران ق غير متصل عند س =١

٤) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س= −٢ من اليمين.

$\lim_{س \leftarrow -٢^+}$ ق(س) = ٢ × −٢ + ٢ = −٢

ق(−٢) = −٢ ، بما أن $\lim_{س \leftarrow -٢^+}$ ق(س) = ق(−٢)

∴ الاقتران ق متصل عند العدد −٢ من اليمين.

٥) ابحث في اتصال ق عند س = ٥ من اليسار.

$\lim_{س \leftarrow ٥^-}$ ق(س) = ٩ ، ق(٥) = ٩

∴ الاقتران ق متصل عند س= ٥ من اليسار.

مما سبق ينتج أنَّ الاقتران ق متصل على الفترة [−٢ ، ٥] − {١} .

تدريب ١

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ٣ \leq س < ٥ \\ س + ٢٠ & ، ٥ \leq س < ٧ \\ ٩ & ، س = ٧ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٣ ، ٧) ، والفترة [٣ ، ٧].

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٦٤}{س - ٤} & ، \quad س \leq ٣ \\ -س + ٤ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على مجاله.

الحل

قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = ٣

في الفترة ($-\infty$ ، ٣) الاقتران ق متصل لأنَّه على صورة اقتران نسبي معرف على مجاله.

في الفترة (٣ ، ∞) الاقتران ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود.

ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: س = ٣

ق(٣) = ٣٧

$\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ق(س) = − ٣ + ٤ = ١

$\lim_{س \leftarrow ٣^{-}}$ ق(س) = $\dfrac{٣^{٣} - ٦٤}{٣ - ٤} = \dfrac{-٣٧}{-١} = ٣٧$

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ق(س) $\neq$ $\lim_{س \leftarrow ٣^{-}}$ ق(س) ، إذن $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) غير موجودة

وعليه فإنَّ الاقتران ق غير متصل عند س = ٣

مما سبق ينتج أنَّ الاقتران ق متصل على ح − {٣}

تدريب ٢

إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥} & ، \quad س \neq ٥ \\ ٥ + س & ، \quad س = ٥ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

مثال ٣

إذا كان ق(س) = |٣س − ٩| ، فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [١، ٥]

الحل

اكتب الاقتران ق بصورة مجزأة دون استخدام رمز القيمة المطلقة على الفترة [١ ، ٥] ، فتحصل على:

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - ٣\,س &، \quad ١ \leq س < ٣ \\ ٣س - ٩ &، \quad ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

١) الاقتران ق متصل على الفترة (١، ٣) ، لأنَّه على صورة كثير حدود.

٢) الاقتران ق متصل على الفترة (٣، ٥) ، لأنَّه على صورة كثير حدود.

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع س = ٣

$$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ٩ - ٣ \times ٣ = ٠$$

$$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٣ \times ٣ - ٩ = ٠ \text{ ، } ق(٣) = ٠$$

بما أن $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$ إذن ق (س) متصل عند س = ٣

٤) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ١ من اليمين:

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٩ - ٣ = ٦ \text{ ، } ق(١) = ٦$$

إذن ق(س) متصل عند العدد ١ من اليمين.

٥) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٥ من اليسار:

$$\lim_{س \to ٥^-} ق(س) = ٣ \times ٥ - ٩ = ٦ \text{ ، } ق(٥) = ٦$$

إذن ق(س) متصل عند العدد ٥ من اليسار.

وعليه فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة [١ ، ٥].

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = |٠,١ − س| ، فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠,٠١ ، ٠,٩].

مثال ٤

إذا كان هـ (س) $= \begin{cases} \dfrac{س^٢ - س - ٣٠}{أ س - ٦ أ} &، \quad س > ٦ \\ ١ &، \quad س = ٦ \\ ب س &، \quad س < ٦ \end{cases}$

متصلًا على ح ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب .

الحل

بما أنَّ الاقتران هـ متصل على ح إذن فهو متصل عند كل نقطة في ح .

وعليه: $\underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٦)

$$\underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^٢ - س - ٣٠}{أ س - ٦ أ} = ١$$

$$\underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{\cancel{(س - ٦)}(س + ٥)}{أ \cancel{(س - ٦)}} = ١$$

$\dfrac{١١}{أ} = ١$ ، ومنه أ = ١١

وكذلك $\underset{س \leftarrow ٦^-}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٦)

$\underset{س \leftarrow ٦^-}{\text{نهـــا}}$ ب س = ق(٦)

٦× ب = ١

ومنه ب = $\dfrac{١}{٦}$

تدريب ٤

إذا كان ع(س) $= \begin{cases} \dfrac{جا أ س}{٥ س} &، \quad -\pi \leq س < ٠ \\ ٢ &، \quad س = ٠ \\ ب (س+٢) &، \quad ٠ < س \leq \pi \end{cases}$

متصلًا على الفترة [$-\pi$ ، π]، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٣س}^{٢} + ٥ & ، \quad -٢ \le \text{س} < ١ \\ ٨\,\text{س} & ، \quad ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ٢].

٢) إذا كان ل(س) = $|\text{٢س} - ١٠|$، فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة[−١٠، ٨].

٣) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} < ٣ \\ ٥ + \text{س} & ، \quad \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٤ - \text{س}} & ، \quad \text{س} < ٤ \\ |\text{س}^{٢} - ١٦| & ، \quad \text{س} \ge ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٥ & ، \quad \text{س} = ٣ \\ [\text{س}] + ٥ & ، \quad ٣ < \text{س} < ٤ \\ ٤ & ، \quad \text{س} = ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة [٣، ٤].

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س + ١} & ، \quad ٠ \le س < ٣ \\ [٠,٢٥ \, س + ٢] & ، \quad ٣ \le س < ٦ \\ |٩ - س| & ، \quad س = ٦ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦].

٧) إذا كان الاقتران ع(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢(هـ - ١) س - ٤هـ}{س - ٢} & ، \quad س \ne ٢ \\ ٥ + س & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

متصلًا على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

٨) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٢س & ، \quad س < ٢ \\ [٠,٥س + ٢] & ، \quad ٢ \le س < ٤ \\ \dfrac{٥س}{س^٢ - ٣٦} & ، \quad س \ge ٤ \end{cases}$

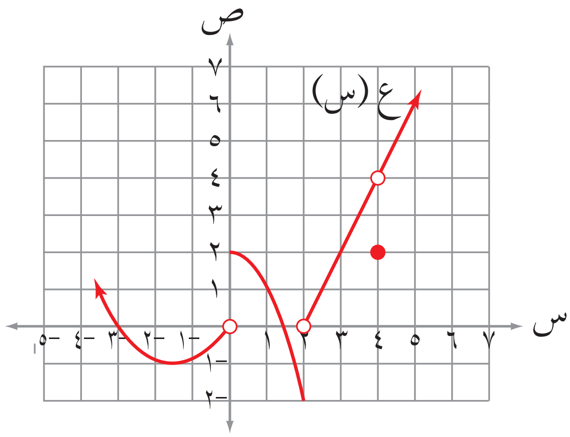
فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س] + س & ، \quad -١ \le س < ٠ \\ \dfrac{٣س^٢}{٥} + \sqrt{س} & ، \quad ٠ \le س \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-١، ٢].

١٠) إذا كان ل(س) = $\dfrac{س^٢ + ٥س + ٢}{أس^٢ + س + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

١) معتمدًا الشكل (١-٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١-٣٠)

أ) $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}\ ع(س)$

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}\ ع(س)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ ع(س)$

د) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}\ ع(س)$

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}\ ع(س)$ غير موجودة.

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب .

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ ق(س) = ٤$ ، ق(٣) = ٦ ، فجد قيمة:

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(ق^{٢}(٢س+١) - س+٢ \right)$$

٣) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣-س}{|س-٣|} & ، \quad س > ٣ \\[2ex] جـ س^{٢} - ٤ & ، \quad س \leq ٣ \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان $ق(س) = \dfrac{س^{٢} + (أ+١٣)\,س + أ}{س-٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ق(س)$ موجودة.

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ،\ س > ٥ \\[2ex] أ\ \text{جتا}\ \dfrac{\pi}{٥}س + ٥ & ،\ س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٦) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س - \text{جا}\ س}{\sqrt{١ - \text{جتا}\ ٢س}}$

ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س + \text{جا}\ ٢س}{٣س}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

هـ) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{٣}}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

و) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٣}} - ٢|س|}{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}$

ز) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + \text{جا}\ ٢س}{٣س}$

ح) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\ س - \sqrt{٣}\ \text{جا}\ س}{٦\ س - \pi}$

ط) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\ ٣س - \text{جتا}\ ٥س}{٢\ س^{٢}}$

ي) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - \text{جتا}(\dfrac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

٧) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤س^{٢} - \text{جا}\ ب\ س}{ب\ س - \text{ظا}\ ٤س} = \dfrac{١}{٤}$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤|}{س - ٢} & ، \quad س \neq ٢ \\ ٢ + س & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٢

٩) إذا كا ن ع(س) = $\begin{cases} \left|\dfrac{س}{٢} - ١\right| & ، \quad -١ \leq س < ٣ \\ [٠,٥س + ٣] & ، \quad ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س= ٣

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} & ، \quad \dfrac{-١}{٣} < س < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ & ، \quad س = \dfrac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \quad \dfrac{١}{٣} < س < \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\dfrac{١}{٣}$

١١) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{[س] + س}$ على الفترة (١، ٢] .

١٢) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^٣ & ، \quad س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١} & ، \quad -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س}[\text{س}] & ، \quad -١ \le \text{س} < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ١).

١٤) إذا كان ل(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ٢}$ ، هـ(س) = [س] ، فابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفترة [٠، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦، فما قيمة $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ (ق^{٢}(٢س+١) − س+٧)؟

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٢ د) ٣٧

(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦، وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٤^{+}}$ ق(س)=٤ب،

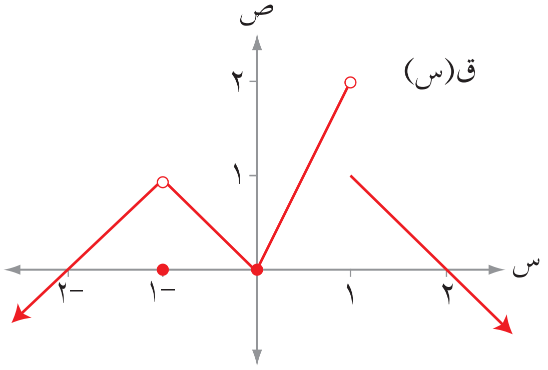
فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) −٢

(٣) إذا كان ق اقترانَ كثير حدود ، وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}}$ = ٣ ، فإنَّ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{ق}^{٢}\text{(س)}}{\text{س}}$ تساوي:

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدًا الشكل(١-٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرَّف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنَّ مجموعة قيم أ حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = صفرًا هي:



الشكل (١-٣١)

أ) {-٢ ، ٠ }

ب) { ٠ }

جـ) { ٠ ، ٢ }

د) {-٢ ، ٠ ، ٢ }

(٥) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ تساوي:

أ) -١   ب) صفر   جـ) -٣   د) ٣

(٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{٦س^{٤} + ١٨س^{٢}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$ تساوي:

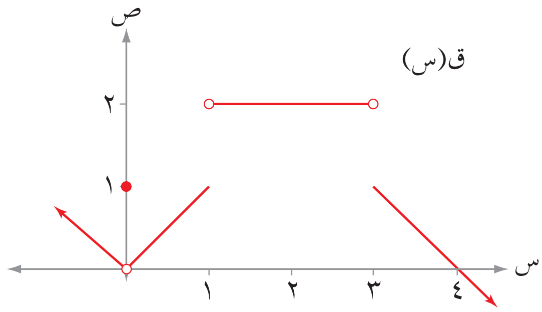
أ) -٦   ب) -٢   جـ) ٣   د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، وكان ق(١) = ٤ ، فإنَّ

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{|س-١|}{س - ١} + ق(س) \right)$ تساوي:

أ) ٣   ب) ١   جـ) ٥   د) غير موجودة

(٨) معتمدًا الشكل (١-٣٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة؟



الشكل (١-٣٢)

أ) {٠، ١، ٣} ب) {١، ٣، ٤} جـ) {٠، ١، ٣، ٤} د) {١، ٣}

(٩) إذا كان ل(س)= $\begin{cases} ٢\text{جتا}^٢ س & ، \quad س < \frac{\pi}{٢} \\ أ س^٢ + \pi^٢ & ، \quad س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإنَّ قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س= $\frac{\pi}{٢}$ هي:

أ) -٢ ب) صفر جـ) -٤ د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٣ & ، \quad س = ١ \\ [س] +٥ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ ٤ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة:

أ) [١ ، ٢] ب) (١، ٢) جـ) [١ ، ٢) د) (١ ، ٢]

الوحدة الثانية

٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

التفاضـــــل

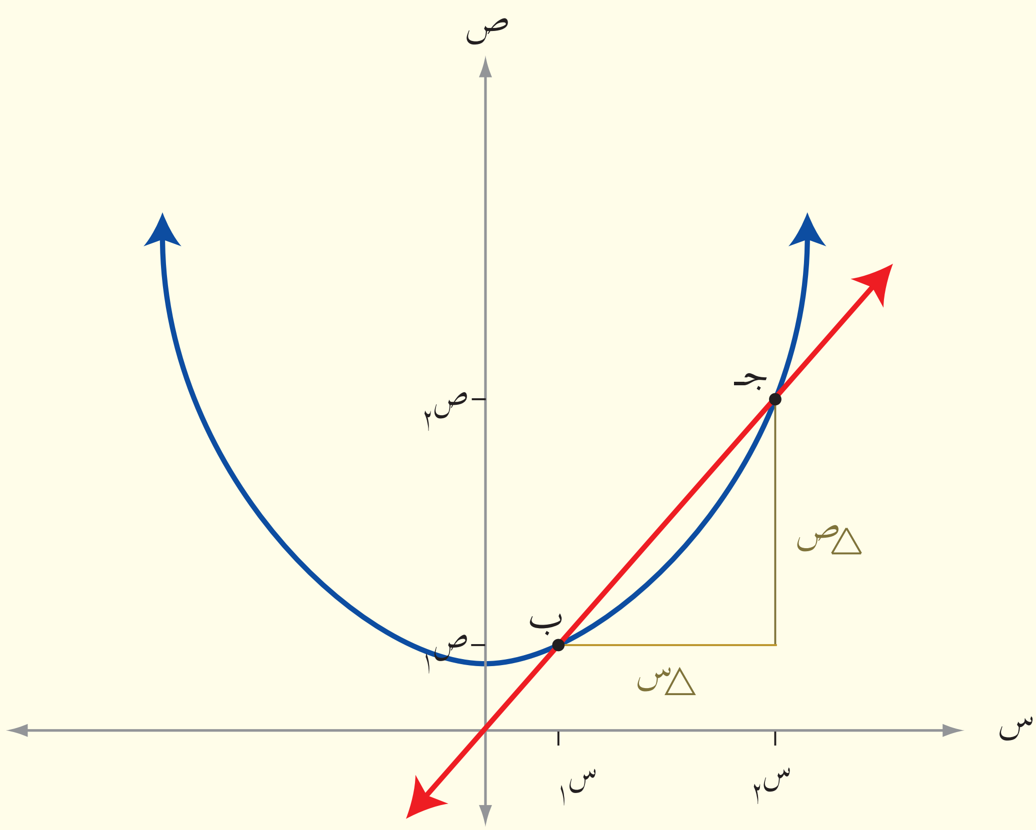
Differentiation

تتضمن بعض الظواهر في حياتنا تغيرًا في كمياتها أو قياساتها بالنسبة لمتغير آخر، مثل سرعة صاروخ بالنسبة للزمن، أو قيمة العملة بالنسبة لعملة أخرى، أو حجم بالون كروي بالنسبة لطول نصف قطره ، ... إلخ، يُستخدم علم التفاضل في دراسة مثل هذه التغيرات.

تطور علم التفاضل عبر دراسة ثلاث مسائل رئيسة هي:

مسألة المماس و مسألة السرعة و مسألة القيم القصوى (الكبرى و الصغرى).

و سنقدم في هذه الوحدة مفهوم المشتقة وقواعد إيجادها.



يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- وصف القاطع والمماس لمنحنى اقتران هندسيًّا.
- إظهار فهم للمشتقة وإيجادها باستخدام التعريف.
- وصف وحساب المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف بصيغ مختلفة.
- استخدام رموز مختلفة للتعبير عن المشتقة الأولى.
- التمييز بين الاتصال والقابلية للاشتقاق عند نقطة.
- تعليل عدم قابلية الاشتقاق.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الفصل الأول

معدل التغير والمشتقات

Rate of Change and Derivatives

النتاجات

- تجد معدل التغير في فترة محددة.
- تفسر مفهوم معدل التغير هندسيًّا، وفيزيائيًّا.
- تتعرف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، وتُفسرها هندسيًّا.
- تجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف، وَبصورتها العامة .
- تبحث في قابلية اشتقاق اقتران على فترة.
- تفسر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
- تدرس قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة معينة مستعينا بالاتصال، وتفسر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.

أولاً معدّل التغيّر

Rate of Change

عند رمي حجر في بركة ماء راكدة تتكون دائرة يزداد طول قطرها بمرور الزمن . ما معدّل الزيادة في مساحة الدائرة عندما يزداد طول قطرها من ٨ سم إلى ١٠ سم ؟

يُستعمل معدل التغير في مجالات كثيرة، مثل: دراسة تزايد عدد السكان ومعدّلات الإنتاج، والسرعة والتسارع. وتُشكل دراسة حركة جُسَيم يتحرك على خط مستقيم (أفقي أو عمودي)، وميل القاطع الواصل بين نقطتين على منحنى اقتران مسألتين مهمتين في استخدامات معدل التغير.

تعريف

إذا تغيرت قيمة متغير مثل س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإنَّ **مقدار التغير في س** هو $س_٢ - س_١$، وسنرمز للتغير في س بالرمز Δ**س** (ويقرأ دلتا س).

مثال ١

جد Δس إذا تغيّرت س من ٢,٣ إلى ٢,٥

الحل

Δ س = $س_٢ - س_١$ = ٢,٥ – ٢,٣ = ٠,٢

تدريب ١

جد Δ س في الحالات الآتية:

١) $س_١$ = ٤ ، $س_٢$ = ٣,٧

٢) إذا تغيرت س من $س_١$ = ن إلى $س_٢$ = ن + ١

تعريف

مقدار التغير في الاقتران

إذا كان ص = ق(س) اقترانًا معرفًا على الفترة[أ ، ب] وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإنَّ ص ستتغير تبعًا لذلك من قيمة $ص_١$ إلى قيمة $ص_٢$، حيث $ص_١$ = ق($س_١$) ، $ص_٢$ = ق($س_٢$).

يُرمز لمقدار التغير في قيمة الاقتران ق بالرمز

Δ ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) – ق($س_١$)= Δ ق(س)

مثال ٢

إذا كان ص = ق(س) = $س^٢$ – ٤س + ١، فَجِد مقدار التغير في الاقتران ق في الحالات الآتية :

١) إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢) إذا تغيرت س من $س_١$ = ن إلى $س_٢$ = ن – ١

الحل

١) Δ ص $=$ ص$_٢$ $-$ ص$_١$

$=$ ق(٣) $-$ ق(١) $=$ (٣^٢ $-$ ٤ $\times$ ٣ $+$ ١) $-$ (١ $-$ ٤ $+$ ١)

$=$ ($-$ ٢) $-$ ($-$ ٢) $=$ صفرًا

٢) Δ ص $=$ ق(ن $-$ ١) $-$ ق(ن)

$=$ ((ن $-$ ١)^٢ $-$ ٤ (ن $-$ ١) $+$ ١) $-$ (ن^٢ $-$ ٤ن $+$ ١)

$=$ ن^٢ $-$ ٢ ن $+$ ١ $-$ ٤ ن $+$ ٤ $+$ ١ $-$ ن^٢ $+$ ٤ ن $-$ ١ $=$ ٥ $-$ ٢ن

تعريف

إذا كان ص $=$ ق(س) ، س$_١$ $\neq$ س$_٢$ فإنَّ المقدار $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ يُسمى **معدل التغير** في ص عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_٢$ حيث:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

حيث س$_٢$ $=$ س$_١$ $+$ Δ س

مثال ٣

إذا كان ق(س) $=$ س^٣ $-$ س ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من $-$١ إلى ٢

الحل

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{٦ - ٠}{٣} = ٢$$

تدريب ٢

إذا كان ص $=$ ق(س) $=$ ٥ $-$ س^٢، جد معدل التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من ٢ إلى ٢,١ .

مثال ٤

إذا كان ق(س) $=$ |٢س $-$ ٦| ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٤].

الحل

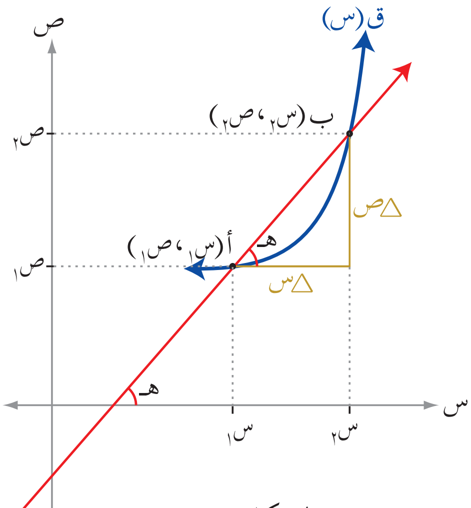
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} - ٦ & ، \text{س} \geq ٣ \\ ٦ - ٢\text{س} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

، س$_١$ $=$ ١ ، س$_٢$ $=$ ٤

$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١} = \frac{٢ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

تدريب ٣

إذا كان ق(س)= [$\frac{١}{٢}$س − ١] فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة[٣ ، ٥].



الشكل (٢−١)

التفسير الهندسي لمعدّل التغير

يمثل الشكل (٢− ١) منحنى الاقتران ق.

النقطتان أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢) واقعتان عليه.

يُسمى المستقيم الواصل بين النقطتين أ ، ب قاطعًا لمنحنى الاقتران ق.

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ تعريف ميل المستقيم إذا عُلمت نقطتان عليه

$= \frac{\Delta ص}{\Delta س} =$ ظا هـ العلاقة بين ميل المستقيم وزاوية ميله

حيث هـ زاوية ميل $\overleftrightarrow{أب}$ (وهي الزاوية المحصورة بين $\overleftrightarrow{أب}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات).

أي أنَّ:

ميل القاطع = معدّل التغير = ظا هـ

مثال ٥

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) ، (٥ ، ق(٥)) الواقعتين على منحنى الاقتران ق حيث ق(س) = س^{٢} − ٣س .

الحل

ميل القاطع = معدّل تغير الاقتران ق في الفترة[٢ ، ٥]

$= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = \frac{١٠ - (-٢)}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

تدريب ٤

إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١))، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد معدّل تغير الاقتران ق في الفترة [١ ، ٣].

التفسير الفيزيائي لمعدّل التغير

في دراسة حركة جُسيم يتحرك على خط مستقيم أفقي أو عمودي غالبًا ما يُستخدم محور أفقي مع نقطة أصل عليه بوصفه نموذجًا للمستقيم الذي يتحرك عليه الجسيم. في هذه الحالة يُعتبر التحرك في الاتجاه الموجب إذا كان من اليسار إلى اليمين، وفي الاتجاه السالب إذا كان من اليمين إلى اليسار.
على فرض أنَّ جُسيمًا يتحرك على خط مستقيم بحيث كان موقعه من نقطة الأصل في أية لحظة ن معرفًا بالقاعدة ف(ن)، إذا تغيرت ن من $ن_١$ إلى $ن_٢$ فإنَّ موقع الجُسيم سيتغير من الموقع ف($ن_١$) إلى الموقع ف($ن_٢$). إذا قطع الجُسيم خلال الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] مسافة Δ ف فإنَّ النسبة :

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن} \quad ، \quad \Delta ن > ٠$$

تُسمى **السرعة المتوسطة** للجُسيم في الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] ويُرمز لها بالرمز $\bar{ع}$ ، أي أنَّ $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

تعريف

السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) لجُسيم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] هي معدل التغير في اقتران المسافة ف(ن) وبالرموز:

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن} \quad ، \quad \Delta ن > ٠$$

مثال ٦

يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٢$ − ن حيث ن الزمن بالثواني ، ف(ن) المسافة بالأمتار ، أجب عن السؤالين الآتيين:

١) هل سرعة الجُسيم ثابتة أم متغيرة ؟ برِّر إجابتك.

٢) احسب السرعة المتوسطة للجُسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] .

الحل

١) المسافة المقطوعة بين ن = ١ ، ن = ٢ : هي ف(٢) – ف(١) = ٢ – ٠ = ٢ م

المسافة المقطوعة بين ن = ٢ ، ن = ٣ : هي ف(٣) – ف(٢) = ٦ – ٢ = ٤ م

السرعة متغيرة؛ لأنَّ المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [١ ، ٢] تختلف عنها في الفترة الزمنية [٢، ٣]

٢) $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٢٠ - ٢}{٣} = ٦$ م/ث

تدريب ٥

يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ ن^٢ – ٤ن + ٢٠؛ حيث ف بُعد الجسيم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٤] .

مثال ٧

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٦] يساوي ١٢، وكان هـ(س) = ٢س – ٣ ق(س) ، فَجِد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٦].

الحل

$\frac{ق(٦) - ق(١)}{٦ - ١} = ١٢$ لماذا؟

$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(٦) - هـ(١)}{٦ - ١} = \frac{\left(٢ \times ٦ - ٣ق(٦)\right) - \left(٢ \times ١ - ٣ق(١)\right)}{٥}$

$= \frac{١٢ - ٣ق(٦) - ٢ + ٣ق(١)}{٥} = \frac{١٢ - ٢}{٥} - ٣\left(\frac{ق(٦) - ق(١)}{٥}\right)$

$= \frac{١٠}{٥} - ٣ \times ١٢ = ٢ - ٣٦ = -٣٤$

تدريب ٦

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٦ ، وكان هـ(س) = ٣ س – ق(س) + ٢ ، فَجِد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٤].

تمارين ومسائل

١)إذا كان ق(س) = س^{٢}– س ، فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق إذا تغيرت س من :

أ) ٣ إلى ٤ ب) س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٢ + هـ

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} – ٣ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (١) إلى (١ + هـ).

٣) تحرك جُسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (٢، ٥). إذا كانت Δس = ١,٠ ، Δ ص = ٦,٠ فجد إحداثيي النقطة أ.

٤) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٦سم إلى ٦,١ سم، فَجِد معدل تغير مساحة الصفيحة.

٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [–١ ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ٤ س^{٢} – ٣ق(س) على الفترة نفسها .

٦) قُذف جسم رأسيًا للأعلى بحيث يكون بُعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بَعد (ن) ثانية معطىً بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن – ٥ن^{٢} جد:

أ) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥].

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة Δ ن ؛ إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن.

٧) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ق^{٢}(س) على الفترة [١ ، ٤] .

٨) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، و كان معدل تغيره على الفترة [٥ ، ٩] يساوي ١٤، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٩].

٩) إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد ق(١).

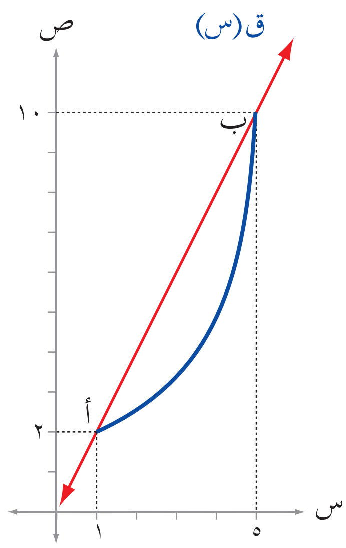
١٠) إذا كان ق(س) $= \begin{cases} |٢س - ٣| & ،\quad ٠ \leq س < ٢ \\ [س + ١] & ،\quad ٢ \leq س < ٦ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

١١) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + س)$^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى س$_{٢}$ يساوي ($-\frac{١}{٣}$) ، فجد قيمة س$_{٢}$ حيث س$_{٢}$ > ٠

١٢) يمثل الشكل (٢-٢) منحنى الاقتران ق على الفترة [١، ٥] .

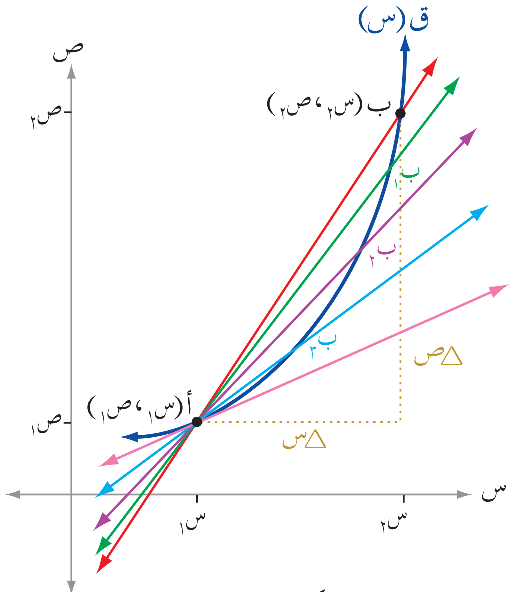
جد ميل العمودي على القاطع $\overleftrightarrow{أب}$.



الشكل (٢-٢)

إذا كان ص = أس + ب ، فجد $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$، وحدِّد علاقة هذه النهاية بميل هذا المستقيم.

تعلَّمت سابقًا معدل التغير لاقتران معطىً وتفسيره الهندسي والفيزيائي. في هذا الدرس سوف تستخدم النهايات ومعدل التغير لإيجاد المشتقة قَ للاقتران ق ، وسيظهر لك أنَّ قَ ($س_1$) تمثل ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة ($س_1$، ق($س_1$)) ، وإذا كان ص = ق(ن) يمثل اقتران مسافة لجسم يتحرك على خط مستقيم فإنَّ قَ ($ن_1$) يصف السرعة اللحظية للجسم عند الزمن $ن_1$.



الشكل (٢-٣)

في الشكل (٢-٣) إذا تحركت النقطة ب على منحنى الاقتران ق مقتربة من النقطة أ، فإنَّك تلاحظ أنَّ $س_2$ تقترب من $س_1$، وأنَّ Δس تصغر شيئًا فشيئًا، وتبعًا لذلك يأخذ القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ أشكالًا مختلفة $\overleftrightarrow{أب_1}$ ، $\overleftrightarrow{أب_2}$ ، $\overleftrightarrow{أب_3}$ ،....وتتغير Δ ص.

عندما تؤول Δ س إلى الصفر (أي تقترب إلى القيمة صفر) يؤول القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ إلى مماسّ لمنحنى الاقتران ق عند النقطة أ (تنطبق ب على أ)، أي يؤول ميل القاطع إلى ميل المماسّ عند النقطة أ($س_1$ ، $ص_1$). في هذه الحالة يصبح ميل المماسِّ لمنحنى ق عند النقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$) يساوي $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ إن وُجدت.

يُسمى المقدار $\lim\limits_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ معدل التغير في ص بالنسبة إلى س أو **المشتقة الأولى للاقتران ق عند النقطة $(س_1 ، ق(س_1))$** ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$ق'(س_1) \quad \text{أو} \quad ص'\Big|_{س = س_1} \quad \text{أو} \quad \frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س_1}$$

أي أنَّ $ق'(س_1) = \lim\limits_{س_2 \to س_1} \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \lim\limits_{\Delta س \to 0} \frac{ق(س_1 + \Delta س) - ق(س_1)}{\Delta س}$

تعريف

إذا كان ص = ق(س) اقترانًا معرَّفًا على فترة مفتوحة تحتوي $س_1$، وكانت $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$ موجودة ، فإنَّ هذه النهاية تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق عند $س = س_1$.

ويُرمز لها بالرمز $ق'(س_1)$ أو $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س_1}$

ويكون $ق'(س_1)$ هو ميل المماس لمنحنى ق عند $س_1$.

لاحظ أنَّه تم استخدام هـ بدلًا من Δ س للتبسيط .

إذا كانت **النهاية موجودة** نقول إنَّ **ق قابل للاشتقاق عند $س_1$** ، أو يوجد لمنحنى الاقتران ق مماس عند $س_1$.

أما إذا كانت **النهاية غير موجودة** فنقول إنَّ $ق'(س_1)$ غير موجودة أي إنَّ **ق غير قابل للاشتقاق عند $س_1$.**

مثال ١

إذا كان $ق(س) = س^٢ + ٣$ ، فجد ، $قَ(١)$.

الحل

$$قَ(١) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{\left((١+هـ)^٢ + ٣\right) - (٤)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١+٢هـ+هـ^٢ +٣ - ٤}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٢هـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ(٢+هـ)}{هـ} = ٢$$

لاحظ أنَّ $قَ(١) = ٢$ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٤).

مثال ٢

إذا كان $قَ(٢) = ٩$ ، فجد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢+٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$.

الحل

بفرض أنَّ $٤هـ = م \Leftarrow هـ = \frac{م}{٤}$

عندما $هـ \leftarrow ٠$ فإنَّ $م \leftarrow ٠$

$$\therefore \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢+٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ} = \lim_{م \leftarrow ٠} \frac{ق(٢+م) - ق(٢)}{٦\times\frac{م}{٤}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \lim_{م \leftarrow ٠} \frac{ق(٢+م) - ق(٢)}{م}$$

$$= \frac{٢}{٣} قَ(٢) = \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$$

تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان $ق(س) = س^٣ + ٢س$ ، فجد $قَ(-١)$.

٢) إذا كان $قَ(٠) = ٦$، فجد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٣هـ}$

في تعريف المشتقة، إذا استخدمت الرمز س بدلًا من الرمز $س_١ + هـ$ (أي أنَّ $س = س_١ + هـ$) فإنَّ

$هـ = س - س_١$

وإنَّ $س \leftarrow س_١$ عندما $هـ \leftarrow ٠$ ويكون

$$قَ(س_١) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ} = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

وعليه؛ يمكن التوصل إلى الصورة الآتية لمشتقة ق عند $س_١$:

تعميم

$$قَ(س_١) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

مثال ٣

إذا كان $ق(س) = \sqrt{س + ١}$ ، فجد $قَ(٣)$.

الحل

$$قَ(٣) = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س + ١ - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{١}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

تدريب ٢

إذا كان $ص = ق(س) = \frac{س}{س + ١}$، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ٢$

مثال ٤

إذا كان $ق(س) = |س - ١|$ فجد $قَ(س)$ عند كلٍّ من القيم الآتية:

١) $س = ٣$ ٢) $س = ٠$

الحل

$$ق(س) = |س - ١| = \begin{cases} س - ١ &، \quad س \geq ١ \\ ١ - س &، \quad س < ١ \end{cases}$$

لماذا؟

١) $ق\bar{}(٣) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س - ١ - ٢}{س - ٣} = ١$

٢) $ق\bar{}(٠) = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - س - ١}{س} = -١$

تعريف

ليكن الاقتران ق معرَّفًا عند العدد س = أ :

١) إذا كانت $ق\bar{}_{+}(أ) = \lim\limits_{س \leftarrow أ^{+}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجودة ، فإنَّ $ق\bar{}_{+}(أ)$ تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ .

٢) إذا كانت $ق\bar{}_{-}(أ) = \lim\limits_{س \leftarrow أ^{-}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجودة ، فإنَّ $ق\bar{}_{-}(أ)$ تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ .

٣) إذا كانت $ق\bar{}_{-}(أ) = ق\bar{}_{+}(أ) = ل$ ، فإنَّ $ق\bar{}(أ)$ موجودة وتساوي ل ، وبخلاف ذلك، فإنَّ $ق\bar{}(أ)$ غير موجودة أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ .

مثال ٥

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} &، \quad س \geq ٣ \\ ٦س - ٩ &، \quad س < ٣ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٣ .

الحل

لاحظ أنَّ قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = ٣ ؛ لذا يجب إيجاد $ق\bar{}_{-}(٣)$ ، $ق\bar{}_{+}(٣)$

$$ق\bar{}_{-}(٣) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{٦س - ٩ - ٩}{س - ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$ق'_+(٣) = \lim_{س \leftarrow ٣^+} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣^+} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٣^+} \frac{(س-٣)\ (س+٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣^+} (س+٣) = ٦$$

بما أنَّ $ق'_-(٣) = ق'_+(٣) = ٦$

∴ $ق'(٣) = ٦$، أي أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

تدريب ٣

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ &، \quad -٣ \leq س < ١ \\ ٢س + ٣ &، \quad ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

جد $ق'(-١)$ ، $ق'(١)$ إن وجدت.

في كثير من الأحيان تحتاج دراسة مشتقة الاقتران عند أي نقطة في مجاله ، أي دراسة المشتقة الأولى كاقتران في س. لإيجاد هذا الاقتران ، ضع الرمز س بدلًا من الرمز $س_١$ في تعريف المشتقة.

تعميم

$$ق'(س) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} \quad .... (١)$$

وإذا استبدلت ع بـ (س + هـ) ، أي أنَّ ع = س + هـ فإنَّ هـ = ع − س .

عندما هـ ← ٠ فإنَّ ع ← س . تصبح المعادلة (١) على الصورة الآتية:

تعميم

$$ق'(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} \quad .... (٢)$$

يمكنك إيجاد $ق'(س)$ باستخدام إحدى الصورتين (١) ، (٢).

تعميم

إذا كان الاقتران ق معرَّفًا على الفترة [أ ، ب] ، فإنَّ $ق'(أ)$، $ق'(ب)$ غير موجودتين؛ لأنَّ ق غير معرّف على يسار العدد أ، وغير معرّف على يمين العدد ب.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = ١ − س^{٢} ، س ∈ [١ ، ٤] ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) قَ (س) ٢) قَ (٣) ٣) قَ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$

الحل

$$قَ(س) = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{١ - (س+هـ)^{٢} - (١ - س^{٢})}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{١ - س^{٢} - ٢س هـ - هـ^{٢} - ١ + س^{٢}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـــا} \frac{هـ (-٢س - هـ)}{هـ} = -٢س$$

∴ قَ(س) = − ٢ س لجميع قيم س ∈ (١ ، ٤) (الفترة مفتوحة، لماذا ؟)

٢) قَ(٣) = −٢ × ٣ = − ٦

٣) قَ $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ = − ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = − ٣

يمكن إيجاد قَ (س) ، س ∈ (١ ، ٤) في الفرع (١) بالطريقة الآتية :

$$قَ(س) = \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{١ - ع^{٢} - ١ + س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{س^{٢} - ع^{٢}}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{(س - ع)(س + ع)}{ع - س} = - ٢س$$

مثال ٧

إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + س، س ∈ ح فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$قَ(س) = \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ع^{٣} - ٣ ع^{٢} + ع - س^{٣} + ٣س^{٢} - س}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س} - ٣ \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \underset{ع \to س}{نهـــا} \frac{ع - س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + ع س + س^{٢})}{ع - س} - ٣ \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + ١$$

$$= ٣ س^{٢} - ٦ س + ١$$

تدريب ٤

إذا كان ق(س) $= \frac{س}{س^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

مثال ٨

أثبت أنَّ معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أي قيمة) يساوي محيط الدائرة.

البرهان

معدل تغير اقتران عند نقطة هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، كما تعلمت في بداية هذا الدرس.

بفرض أنَّ طول نصف قطر الدائرة س والمساحة م ، فتكون م(س) $= \pi$ س^{٢}.

والمطلوب إثبات أنَّ مَ (س) $= ٢\pi$س

$$مَ (س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\pi ع^{٢} - \pi س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\pi (ع^{٢} - س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\pi (ع - س)(ع + س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \pi (ع + س) = ٢\pi س$$ وحدة طول.

تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

مثال ٩

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤\,\text{قَ}(\text{س})$$

البرهان

بطرح وإضافة ق(س) في البسط

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

بفرض ل = ٢هـ ، فإن هـ = $\frac{\text{ل}}{٢}$

وأنَّ ل ← ٠ عندما هـ ← ٠

بفرض و = −٢هـ ، فإن هـ = $\frac{-\text{و}}{٢}$

وأنَّ و ← ٠ عندما هـ ← ٠

$$= \underset{\text{ل}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\frac{\text{ل}}{٢}} + \underset{\text{و}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} + \text{و})}{\frac{-\text{و}}{٢}}$$

$$= ٢\underset{\text{ل}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ل}} + ٢\underset{\text{و}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= ٢\,\text{قَ}(\text{س}) + ٢\,\text{قَ}(\text{س}) = ٤\,\text{قَ}(\text{س})$$

تمارين ومسائل

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = س^{٣} + س^{٢} ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د) ع(س) = { س^{٢} − س ، ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٥س − ٩ ، ٣ < س ≤ ٦ }

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = |س^{٢} − ٤| ، س = ١ ، س = ٢

و) ص = $\frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣}$ ، س = −١

٢) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ) ص = س^{٢} − $\frac{٤}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ ب) ص = $\sqrt{٢\text{س} - ٦}$ ، س > ٣

جـ) ص = س^{٣} د) ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

أ) $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$ = ٢ قَ(س)

ب) $\lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع ق}(\text{س}) - \text{س ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$ = ق(س) − س قَ(س)

جـ) $\lim\limits_{ع \leftarrow س} \frac{٣ ع\, ق(ع) - ٣س ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣س\, قَ(س)$

٤) إذا كان $قَ(٥) = ٦$ فجد $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٥ - ٢هـ) - ق(٥ + ٤هـ)}{هـ}$

٥) إذا كان ق(س) = (س − أ) ل(س) ، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، أ ثابت، فبيِّنْ باستخدام تعريف المشتقة أن قَ(أ) = ل(أ) .

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظًا على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

٧) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي
$(٦ س^٢هـ + ٦س هـ^٢ + ٢هـ^٣)$، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد قَ (−٢).

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظًا على شكله، جد معدّل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتَيْ طولٍ.

٩) أثبت أنَّ معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

إذا كان ق(س) = |س − ١|، فأجب عما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س=١.

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=١.

١) للبحث في اتصال الاقتران ق عند س=١ يجب إيجاد النهاية عن يمين العدد ١ وعن يساره، لماذا؟

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} (س - ١) = ٠.$$

$$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} (١ - س) = ٠.$$

ومنه $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٠.$

ق(١) = ٠.

∴ ق متصل عند س = ١ لأنَّ $\lim_{س \to ١} ق(س) = ق(١)$

٢) وللبحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=١، لا بد من إيجاد $ق'_-(١) = ق'_+(١)$ ،لماذا؟

$$ق'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{س - ١ - ٠}{س - ١} = ١$$

$$ق'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{١ - س}{س - ١} = -١$$

∴ ق'(١) غير موجودة لأنَّ $ق'_+(١) \neq ق'_-(١)$

لاحظ في المسألة السابقة أنَّ الاقتران ق متصل عند النقطة (١ ، ق(١)) لكنه غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

والآن، إذا كان اقتران ما قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$ فهل يكون متصلًا عندها ؟ وإذا كان غير متصل عند س = $س_١$ فهل يمكن أن يكون قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$؟

نظرية ١

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$ فإنه يكون متصلًا عند س = $س_١$.

البرهان

بما أنَّ ق قابل للاشتقاق عند س = $س_١$ ، فإنَّ $ق'(س_١) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ موجودة

والمطلوب إثبات أنَّ $\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) = ق(س_١)$

$$ق(س) - ق(س_١) = \left(ق(س) - ق(س_١)\right)\left(\frac{س - س_١}{س - س_١}\right) \text{ ، } س \neq س_١$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{س \leftarrow س_١} \left(ق(س) - ق(س_١)\right) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times \lim_{س \leftarrow س_١} (س - س_١)$$

$$\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س_١) = ق'(س_١) \times ٠$$

$$\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - ق(س_١) = ٠$$

$$\therefore \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) = ق(س_١)$$

وبما أنَّ ق($س_١$) معرفة ، فإنَّ ق(س) متصل عند س = $س_١$.

مثال ١

إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤س & \text{ ، } س < -٢ \\ ٨س + أ & \text{ ، } س \geq -٢ \end{cases}$$

قابلًا للاشتقاق عند س = −٢ ، فَجد قيمة الثابت أ .

الحل

بما أنَّ ق اقتران قابل للاشتقاق عند س = −٢ ، فإنَّ ق(س) متصل عند س = −٢ ، أي أنَّ

$\lim_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) موجودة وعليه يكون:

$$\lim_{س \leftarrow -٢^-} (٨س + أ) = \lim_{س \leftarrow -٢^+} (س^٣ - ٤ س)$$

$-١٦ + أ = -٨ + ٨$، ومنه أ = ١٦

هندسيًّا إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$ فإنَّه يوجد لمنحنى الاقتران ق مماسًا واحدًا فقط عند $(س_١ ، ق(س_١))$.

والمثال الآتي يوضح أنَّ عكس النظرية (١) غير صحيح. (أي أنَّه: إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س = $س_١$ ، فليس شرطًا أن يكون قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$)

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س} + ٣ & ، \quad س \geq ٤ \\ ٣س - ٧ & ، \quad س < ٤ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٤

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

الحل

١) $\lim_{س \leftarrow ٤^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤^-} (٣س - ٧) = ١٢ - ٧ = ٥$

$\lim_{س \leftarrow ٤^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤^+} (\sqrt{س} + ٣) = \sqrt{٤} + ٣ = ٥$

ومنه: $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = ٥

ق(٤) = $\sqrt{٤} + ٣ = ٥$

∴ الاقتران ق متصل عند س = ٤ لأنَّ $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ق(٤)

٢) لإيجاد قَ (٤) جد قَ₋ (٤) ، قَ₊ (٤) ، لماذا؟

$$قَ_-(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٣س - ٧ - ٥}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤^-} \frac{٣(س - ٤)}{س - ٤} = ٣$$

$$قَ_+(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\sqrt{س} + ٣ - ٥}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)} = \frac{١}{٤}$$

قَ(٤) غير موجودة لأنَّ قَ₋ (٤) ≠ قَ₊(٤) . أي أنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٤ .

لاحظ هنا أنَّ ق اقتران متصل عند س = ٤ لكن قَ (٤) غير موجودة.

ملاحظة

يمكنك إيجاد $\lim_{س \to ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ بتحليل المقام إلى ($\sqrt{س}$ + ٢) ($\sqrt{س}$ − ٢) .

تدريب ١

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٤}{س} + ١ & ، س \geq ٢ \\ ٥س - ١ & ، س < ٢ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٢) ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق عند س = ٢

لا بدَّ أنَّك لاحظت أنَّ كل الاقترانات في الأمثلة السابقة التي تم بحث مشتقتها عند نقطة كانت متصلة عند هذه النقطة، لكن ماذا يحدث لمشتقة الاقتران عند نقطة؛ إذا كان الاقتران غير متصل عند هذه النقطة؟

تناقش النظرية الآتية علاقة عدم الاتصال عند نقطة بقابلية الاشتقاق عندها.

نظرية ٢

إذا كان ق اقترانًا غير متصل عند النقطة $(س_١ ، ق(س_١))$ فإنّه غير قابل للاشتقاق عندها.

مثال ٣

إذا كان ق(س) = $[\frac{١}{٣} س + ٢]$ ، فأجب عما يأتي :

١) ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١.

٢) ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٣.

الحل

١) أعد تعريف الاقتران ق حول س = ١

ق(س) = ٢ لكل س ∈ [٠، ٣)

ق متصل عند س= ١ . تحقَّقْ من ذلك. لماذا؟

$$ق'(١) = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{٢ - ٢}{س - ١} = ٠$$

٢) أعد تعريف ق حول س = ٣

$$[\frac{١}{٣}س + ٢] = \begin{cases} ٢ & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \le س < ٦ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣ قبل أن تبحث قابليته للاشتقاق عند س = ٣.

$$\lim_{س \leftarrow ٣^-} ق(س) = ٢، \quad \lim_{س \leftarrow ٣^+} ق(س) = ٣$$

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^-}$ ق(س) $\neq$ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^+}$ ق (س) ، فإن:

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) غير موجودة ، أي أنَّ ق غير متصل عند س = ٣

وعليه فإنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣ (نظرية ٢).

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س + ١} & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، \quad ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

فابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢ ، س = ٤ .

مثال ٤

إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \frac{٦}{س} - ٤ & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س + ١ & ، \quad ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، فجد قَ(س) على مجاله.

الحل

١) ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س=١ ، س= ٥ لأنَّهما طرفا فترة

٢) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢ ، لماذا؟

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ $\left(\frac{٦}{س} - ٤\right)$ = -١

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ (٣س + ١) = ٧

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) $\neq$ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س)، فإنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة

$\therefore$ ق غير متصل عند س = ٢ وعليه فإنَّ قَ(٢) غير موجودة.

٣) ابحث المشتقة عندما ١< س< ٢

$$قَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{\left(\frac{٦}{ع} - ٤\right) - \left(\frac{٦}{س} - ٤\right)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{٦}{ع} - \frac{٦}{س}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{٦س - ٦ع}{ع\,س}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـــا}} \frac{٦(س - ع)}{ع\,س(ع - س)} = \frac{-٦}{س^{٢}}$$

٤) ابحث المشتقة عندما ٢< س < ٥

$$ق'(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\left(٣(س + هـ) + ١\right) - \left(٣س + ١\right)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٣س + ٣هـ + ١ - ٣س - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$$

مما سبق تجد أنَّ:

$$ق'(س) = \begin{cases} \frac{-٦}{س^{٢}} & ،\quad ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ،\quad س = ١، ٢، ٥ \\ ٣ & ،\quad ٢ < س < ٥ \end{cases}$$

تمارين ومسائل

١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) $ق(س) = \frac{س}{س - ١}$ ، $س = ١$

ب) $ع(س) = (س - ٢)[س]$ ، $س = ٢$

جـ) $ل(س) = [٣ - ٢س]$ ، $س = \frac{١}{٤}$ ، $س = -١$

د) $ك(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ، ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$ $س = ٠$ ، $س = ٣$، $س = ٥$

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \ne ٩ \\ ٦ & ، س = ٩ \end{cases}$

فجد $قَ(٩)$ إن وُجدت.

٣) إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \le ١ \\ ٢س + أ & ، س > ١ \end{cases}$

اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند $س = ١$ ، فَجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} -١ - ٢س & ، س < -١ \\ س^{٢} & ، -١ \le س \le ١ \\ س & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة $قَ(س)$.

٥) إذا كان $ع(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، س < ٢ \\ ٢س - س^{٢} & ، س \ge ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ع للاشتقاق عند $س = ٢$

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٠ & ، \quad س \leq ٠ \\ ٥ - س & ، \quad ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{٥ - س} & ، \quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ (س).

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\,س\,] & ، \quad ١ \leq س < ٢ \\ |\,س - ٣\,| & ، \quad ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

الفصل الثاني

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

منهاجي
متعة التعليم الهادف

النتاجات

- تستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.
- تجد المشتقات العليا لاقترانات و علاقات معطاة حتى المشتقة الرابعة.
- تجد مشتقات الاقترانات الدائرية.
- تستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة صِيَغ الاقترانات المركّبة.
- تجد مشتقة علاقة ضمنية.

أولًا قواعد الاشتقاق (١)

Differentiation Rules 1

إذا كان ق(س) = س^{٣} |س| ، فَجِد قَ(س) عند س = ٤ .

درست سابقًا إيجاد مشتقة اقترانات بسيطة باستخدام التعريف، ولكنَّ إيجاد مشتقات بهذه الطريقة لاقترانات مثل ق(س) = (س^{٣} + ٦س – ٥) أو ق(س) = س^{٣}|س| عند س = ٤ يتطلب إجراء عمليات جبرية مطولة.

في هذا الدرس ستتعلم قواعد تـمكنك من إيجاد المشتقة بطرق مختصرة.

قاعدة (١)

إذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت ، فإنَّ قَ(س) = صفرًا ، لكل س ∈ ح.

البرهان

باستخدام تعريف المشتقة يكون

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جـ} - \text{جـ})}{\text{هـ}} = \text{صفرًا}$$

تفسير هذه النتيجة هندسيًا بأنَّ التمثيل البياني للاقتران الثابت ق(س) = جـ مستقيم أفقي، وميل المستقيم الأفقي= صفرًا.

مثال ١

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٣}$ فجد قَ(س) ، قَ(١)، قَ(− ٤)

الحل

قَ(س) = ٠، لكل س ∈ ح ؛ لأنَّ ق(س) اقتران ثابت.

قَ(١) = ٠، قَ(− ٤) = ٠

قاعدة (٢)

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإنَّ قَ(س) = ن $س^{ن-١}$

البرهان

سنحتاج الحقيقة الآتية في البرهان

$ع^{ن} - س^{ن} = (ع - س)\,(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \ldots + ع\,س^{ن-٢} + س^{ن-١})$

$\text{قَ(س)} = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{ع - س}$ (المشتقة الأولى من التعريف)

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{\cancel{(ع - س)}\,(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \ldots + ع\,س^{ن-٢} + س^{ن-١})}{\cancel{ع - س}}$

$= \lim\limits_{ع \to س} (ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}س + ع^{ن-٣}س^{٢} + \ldots + ع\,س^{ن-٢} + س^{ن-١})$

$= س^{ن-١} + س^{ن-١} + س^{ن-١} + \ldots + س^{ن-١}$ ن من المرات

$= ن\,س^{ن-١}$

مثال ٢

جد قَ(س) ثم جد قَ(−١) في كلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) = $س^{٥}$ ٢) ق(س) = س ٣) ق(س) = $س^{١٢}$

الحل

١) $قَ(س) = ٥ س^٤$ ، $قَ(-١) = ٥$

٢) $قَ(س) = ١ \times س^٠ = ١$ ، $قَ(-١) = ١$

٣) $قَ(س) = ١٢ س^{١١}$ ، $قَ(-١) = -١٢$

نحتاج إيجاد مشتقات اقترانات مكونة من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة اقترانات بسيطةٍ، سنناقش إيجاد هذه المشتقات في القواعد الآتية.

قاعدة (٣)

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س، جـ عدد ثابت، وكان هـ (س) =جـ ق(س) ، فإنّ: الاقتران هـ (س) قابل للاشتقاق عند س وأن هـَ(س) =جـ قَ(س).

البرهان

$$هـَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{جـ ق(ع) - جـ ق(س)}{ع - س}$$

$$= جـ \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = جـ قَ(س)$$

أي أنَّ مشتقة عدد ثابت مضروبًا في اقتران يساوي العدد الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران.

مثال ٣

جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

١) $ق(س) = ٤س^٥$ ٢) $ق(س) = -س^٦$ ٣) $ق(س) = \frac{س^٣}{\pi}$

الحل

١) $قَ(س) = ٤\times(٥س^٤) = ٢٠س^٤$

٢) $قَ(س) = (-١)(٦س^٥) = -٦س^٥$

٣) $قَ(س) = \frac{١}{\pi}(٣س^٢) = \frac{٣}{\pi}س^٢$

تدريب ١

جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $ق_١(س) = ٦$ ‏ ‏ ‏ ٢) $ق_٢(س) = -٤س^٢$ ‏ ‏ ‏ ٣) $ق_٣(س) = \frac{س}{\sqrt{٢}}$

مثال ٤

إذا كان $ق(س) = س^٤ |س|$ فجد $قَ(-٢)$

الحل

عبّر عن ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة حول العدد -٢:

$ق(س) = س^٤ \times -س = -س^٥$ ، لماذا؟

$قَ(س) = -٥س^٤$

$\therefore قَ(-٢) = -٥(-٢)^٤ = -٨٠$

قاعدة (٤)

قاعدة الجمع والطرح

إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، م قابلًا للاشتقاق عند س، وكان،

$ق(س) = ل(س) + م(س)$ ، $هـ(س) = ل(س) - م(س)$

فإنَّ كلًّا من الاقترانين ق، هـ قابل للاشتقاق عند س، وتكون:

$قَ(س) = لَ(س) + مَ(س)$

$هـَ(س) = لَ(س) - مَ(س)$

البرهان

$$قَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(ل(ع) + م(ع)) - (ل(س) + م(س))}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \lim_{ع \leftarrow س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$$

$$= لَ(س) + مَ(س)$$

لإثبات أنَّ $هـَ(س) = لَ(س) - مَ(س)$، يمكن كتابة هـ(س) على الصورة:

$هـ(س) = ل(س) + (-١)\,م(س)$ وباستخدام قاعدة مشتقة مجموع اقترانين؛ وقاعدة مشتقة حاصل

ضرب عدد ثابت في اقتران تجد أنَّ هـَ(س) = لَ(س) + (−١) مَ(س) ومنه هـَ(س) = لَ(س) − مَ(س)

مثال ٥

جد قَ (س) في كلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = ٧ س^{٢} + $\sqrt{٣}$ س^{٤} ٢) ق(س) = ٤ س^{٥} − π س^{٦}

الحل

١) قَ (س) = ١٤ س + ٤ $\sqrt{٣}$ س^{٣}

٢) قَ (س) = ٢٠ س^{٤} − ٦ πس^{٥}

وبصورة عامة : إذا كان كلٌّ من الاقترانات ق$_{١}$، ق$_{٢}$، ... ، ق$_{ن}$ قابلًا للاشتقاق عند س وكان :

ل(س) = ق$_{١}$(س) + ق$_{٢}$(س) + ق$_{٣}$(س) + ... + ق$_{ن}$(س)، فإنَّ:

لَ (س) = قَ$_{١}$ (س) + قَ$_{٢}$ (س) + قَ$_{٣}$ (س) + ... + قَ$_{ن}$(س)

نتيجة

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود ، فإنَّ ق قابل للاشتقاق لكل س ∈ ح.

مثال ٦

إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٦س^{٢} + ٤ ، فجد كلًّا مما يأتي :

١) قَ(س) ٢) قيم س التي يكون عندها لمنحنى الاقتران ق مماس أفقي.

الحل

١) قَ(س) = ٤س^{٣} − ١٢ س

٢) يكون المماس أفقيًّا عندما قَ(س) = ٠

أي أنَّ ٤س^{٣} − ١٢ س = ٠

٤س (س^{٢} − ٣) = ٠

ومنه س = ٠ ، س = ± $\sqrt{٣}$

∴ يكون المماس أفقيًّا عند س = ٠، س = ± $\sqrt{٣}$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٥س^{٤} $\left(٢س - \frac{٣}{س}\right)$ فجد قَ (−١)

مثال ٧

إذا كان ق(س) = ٤ س^{٣} − [٢س + ١] فجد قَ (٠,٦)

الحل

أعد تعريف الاقتران ق دون استخدام رمز اقتران أكبر عدد صحيح حول س =٠,٦

[٢س + ١] يغير قاعدته بعد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$، وبما أنَّ ٠,٦ ∋ [$\frac{١}{٢}$، ١)

[٢س + ١] = [٢ × ٠,٦ + ١] = [٢,٢] = ٢

إذن تصبح القاعدة ق(س) = ٤ س^{٣} − ٢

قَ (س) = ١٢س^{٢}

قَ (٠,٦) = ١٢ × (٠,٦)^{٢} = ٤,٣٢

مثال ٨

إذا كان ق(س) = | س − ٢ | + ٣ س^{٢} ، فجد قَ (١).

الحل

أعد تعريف الاقتران ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

لاحظ أنَّ | س − ٢ | = ٢ − س حول العدد ١

وعليه فإنَّ ق(س) = ٣س^{٢} − س + ٢

قَ (س) = ٦س − ١

قَ(١) = ٥

تدريب ٣

أجب عن كلٍّ مما يأتي :

١) إذا كان ق(س)= ٢س^{٣} (٤س − ٥س^{٢}) فجد قَ (س).

٢) إذا كان ق(س) = [٣س + ١] + | س | فجد قَ (٠,٤).

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$ ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ د) $ق(س) = (\frac{١}{٢} س)^{٤}$

٢) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$ ب) $ص = \frac{١}{٤} (س^{٢} + ٨)$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$ د) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$ ، $س = -١$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ ، $س = ٣$

جـ) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س + ٥] - ٤س^{٢}$ ، $س = ٢,٤$

د) $ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] - |س|$ ، $س = -١$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) $ق(س) = ٦ ل(س) - ٢هـ(س)$

ب) $ق(س) = \frac{١}{٢} ل(س) + هـ(س) + س^{٣}$

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ب س & ، س \leq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س & ، س > ١ \end{cases}$

وكانت قَ(١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \geq \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ) (س}-\text{جـ)} & \text{، س} < \text{جـ} \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س= جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.
فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

ثانيًا قواعد الاشتقاق ٢

Differentiation Rules 2

إذا كان ق(س) $= \frac{٤س^٢ - ٣}{س^٤ + ٢س + ١}$ ، فجد قَ (س) .

تعلمت سابقًا القواعد العامة لاشتقاق نوع معين من الاقترانات، وستتعرف في هذا الدرس قواعد أخرى.

لإيجاد مشتقة الاقتران ق(س) = (س^٣ + ٦س − ٥) (٤س^٢ +١) جد ناتج الضرب ثم استخدم قواعد الاشتقاق السابقة.

ق(س) = ٤ س^٥ + ٢٥ س^٣ − ٢٠ س^٢ + ٦ س − ٥

قَ (س) = ٢٠ س^٤ + ٧٥س^٢ − ٤٠ س + ٦

يمكن إيجاد قَ(س) دون إيجاد ناتج الضرب كما في القاعدة الآتية:

قاعدة (١)

قاعدة الضرب

إذا كان الاقترانان ل، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س)= ل(س) × هـ (س) ، فإنَّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ:

قَ(س) = ل(س) × هـَ(س) + هـ (س) × لَ(س)

أي أنَّ مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي:

الاقتران الأول × مشتقة الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الأول

مثال ١

إذا كان ق(س) = (س^٣ + ٦س) (٤س^٢ − ٣) فجد قَ (س).

الحل

قَ (س) = (س^٣ + ٦س) $\frac{ى}{ىس}$ (٤س^٢ − ٣) + (٤س^٢ − ٣) $\frac{ى}{ىس}$ (س^٣ + ٦س)

$= ($س$^3 + 6$س$) (8$س$) + (4$س$^2 - 3) (3$س$^2 + 6)$

$= 8$س$^4 + 48$س$^2 + 12$س$^4 + 24$س$^2 - 9$س$^2 - 18 = 20$ س$^4 + 63$ س$^2 - 18$

حُلَّ المثال (١) بطريقة أخرى.

تدريب ١

إذا كان ق(س) $= (4 - 2$ س$^3) (\frac{1}{2}$ س $+ 3)$ فجد قَ (س).

قاعدة (٢)

قاعدة القسمة

إذا كان الاقترانان ل، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) $= \frac{\text{ل (س)}}{\text{هـ (س)}}$، هـ (س) $\neq 0$،
فإنَّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{هـ(س)} \times \text{لَ(س)} - \text{ل(س)} \times \text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^2}$$

أي أنَّ مشتقة حاصل قسمة اقترانين تساوي :

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال ٢

إذا كان ق(س) $= \frac{\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^2 + 5}$ ، فجد قَ (س) .

الحل

استخدم قاعدة القسمة لتجد أنَّ:

$$\text{قَ(س)} = \frac{(\text{س}^2 + 5) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س}^3 + \text{س}) - (\text{س}^3 + \text{س}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}(\text{س}^2 + 5)}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + 5)(3\text{س}^2 + 1) - (\text{س}^3 + \text{س})(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(3\text{س}^4 + \text{س}^2 + 15\text{س}^2 + 5) - (2\text{س}^4 + 2\text{س}^2)}{(\text{س}^2 + 5)^2} = \frac{\text{س}^4 + 14\text{س}^2 + 5}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

تدريب ٢

إذا كان ص $= \frac{٦س + ١}{س^{٢} - ٤}$ فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١}$

قد تواجهك بعض الاقترانات المكوّنة من بسط ومقام يكون بسطها عددًا ثابتًا . النتيجة الآتية تُسهل عليك العمليات الجبرية لإيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات.

نتيجة (١)

إذا كان الاقتران ل قابلًا للاشتقاق عند س، أ عدد ثابت وكان:

ق(س) $= \frac{أ}{ل(س)}$ ، ل(س) $\neq ٠$ فإنَّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ:

$$قَ(س) = \frac{-أ\,لَ(س)}{\left(ل(س)\right)^{٢}}$$

فكِّر وناقش

أثبت نتيجة (١).

نتيجة (٢)

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، س $\neq ٠$ ، ن عدد صحيح سالب، فإنَّ قَ(س) = ن $س^{ن-١}$

البرهان

افرض أنَّ ن = − م ، س $\neq ٠$ حيث م عدد صحيح موجب، فيكون ق(س) = $س^{ن} = س^{-م}$.

باستخدام خصائص الأسس يكون ق(س) $= \frac{١}{س^{م}}$

$$قَ(س) = \frac{س^{م} \times ٠ - (١)(م\,س^{م-١})}{(س^{م})^{٢}} = \frac{-م \times س^{م-١}}{(س^{م})^{٢}} = -م\,س^{م-١-٢م} = -م\,س^{-م-١}$$

$$قَ(س) = -م\,س^{-م-١} = ن\,س^{ن-١} \quad \text{لأن } -م = ن$$

مثال ٣

جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\pi}{\text{س}^{٢}}$ ٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-٤}$ ٣) $\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤} - ٣}{\text{س}^{٣}}$

الحل

١) باستخدام النتيجة (١) يكون:

$$\text{لَ}(\text{س}) = \frac{-\pi\,(٢\,\text{س})}{(\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{-٢\,\pi}{\text{س}^{٣}}$$

٢) باستخدام النتيجة (٢) يكون:

$$\text{قَ}(\text{س}) = -٤\,\text{س}^{-٤-١} = -٤\,\text{س}^{-٥} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$$

٣) يمكن إعادة كتابة ق على الصورة

$$\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٣}} - \frac{٣}{\text{س}^{٣}} = \text{س} - \frac{٣}{\text{س}^{٣}} = \text{س} - ٣\,\text{س}^{-٣}$$

باستخدام النتيجة (٢) وقواعد الاشتقاق يكون :

$$\text{عَ}(\text{س}) = ١ - ٣(-٣)\,\text{س}^{-٤} = ١ + ٩\,\text{س}^{-٤} = ١ + \frac{٩}{\text{س}^{٤}}$$

فكّر وناقش

حُلَّ فرع (٣) من مثال (٣) بطريقة أخرى.

تدريب ٣

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ مما يأتي :

١) $\text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{\text{س}^{٢}}$ ٢) $\text{ص} = \frac{٢ - \text{س}^{٣}}{\text{س}}$

لإيجاد مشتقة الاقتران المتشعب ق(س) = $\begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \geq \text{أ} \\ \text{هـ(س)} & \text{، س} < \text{أ} \end{cases}$

حيث لَ(س) موجودة لكل س > أ ، هـَ(س) موجودة لكلِّ س < أ ، اتبع الخطوات الآتية:

١) جد لَ(س) عندما س > أ، هـَ(س) عندما س < أ فيكون :

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{لَ(س)} & \text{، س} > \text{أ} \\ \text{هـَ(س)} & \text{، س} < \text{أ} \end{cases}$$

٢)ابحث في اتصال ق(س) عند س = أ وهناك حالتان :

أ) ق اقتران غير متصل عند س = أ وبناءً عليه ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ (نظرية ٢ في الاتصال والاشتقاق)

ب) ق متصل عند س = أ وفي هذه الحالة يجب بحث قابلية الاشتقاق عند س = أ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

ويمكنك استخدام قواعد الاشتقاق في الاقترانات المتشعبة التي قواعدها على صورة كثيرات حدود أو نسبية.

مثال ٤

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٨س}^{٣} + \text{٤س} & \text{، س} \geq ١ \\ \text{٨س}^{٢} + \text{١٢س} - ٨ & \text{، س} < ١ \end{cases}$ ، فجد قَ(س).

الحل

١) عندما س>١ ، ق اقتران متصل؛ لأنَّه على صورة كثير حدود، إذن قَ(س) = ٢٤س^{٢} + ٤

عندما س <١، ق اقتران متصل؛ لأنه على صورة كثير حدود، إذن قَ(س) = ١٦ س + ١٢

أي إنَّ قَ (س) = $\begin{cases} \text{٢٤س}^{٢} + ٤ & \text{، س} > ١ \\ \text{١٦س} + ١٢ & \text{، س} < ١ \end{cases}$

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١.

ق متصل عند س = ١ لماذا؟

$ق'_+(١) = ٢٤(١)^٢ + ٤ = ٢٨$

$ق'_-(١) = ١٦(١) + ١٢ = ٢٨$

بما أن $ق'_+(١) = ق'_-(١) = ٢٨$

إذن $ق'(١) = ٢٨$

يمكنك الآن كتابة ق َ(س) لكل س ∈ ح على الصورة :

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢٤س^٢ + ٤ & ، س > ١ \\ ٢٨ & ، س = ١ \\ ١٦س + ١٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

مثال ٥

إذا كان $ق(س) = س^٣|س - ٢|$ فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح .

الحل

١) أعد كتابة الاقتران ق دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$$

وعليه فإنَّ:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٤ - ٢س^٣ & ، س \geq ٢ \\ ٢س^٣ - س^٤ & ، س < ٢ \end{cases}$$

٢) عندما س > ٢ ، ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود، $ق'(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢$

عندما س < ٢ ، ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود، $ق'(س) = ٦س^٢ - ٤س^٣$

$$\text{أي أنَّ } ق'(س) = \begin{cases} ٤س^٣ - ٦س^٢ & ، س > ٢ \\ ٦س^٢ - ٤س^٣ & ، س < ٢ \end{cases}$$

٣) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢.

ق اقتران متصل عند س = ٢ لماذا؟

$ق َ_{+}(٢) = ٤(٢)^{٣} - ٦(٢)^{٢} = ٨$

$ق َ_{-}(٢) = ٦(٢)^{٢} - ٤(٢)^{٣} = -٨$

بما أنَّ $ق َ_{+}(٢) \neq ق َ_{-}(٢)$ فإنَّ ق َ(٢) غير موجودة.

يمكنك الآن كتابة ق َ(س) لكلِّ س ∈ ح على الصورة :

$$ق َ(س) = \begin{cases} ٤س^{٣} - ٦س^{٢} & ، س > ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \\ ٦س^{٢} - ٤س^{٣} & ، س < ٢ \end{cases}$$

تدريب ٤

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س + ١} & ، س \leq ١ \\ س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح.

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍّ مما يأتي:

أ) $ص = س^٢ (١ + س^٣)$

ب) $ص = (س^٣ - ٢س + ١) (٤س - ٣)$

جـ) $ص = \frac{س^٣}{١ - س}$

د) $ص = \frac{س^٢ - ١}{٢س + ٣}$

٢) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

أ) $ق(س) = س(س + ٢) (س^٢ - ٣س - ٦)$

ب) $ق(س) = |س - ٣| (س^٢ + س)$

جـ) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س^٢ + ٤}$

د) $ق(س) = \frac{|س^٢ - ٥س + ٤|}{س(س - ١)}$ ، $س \in] ١ ، ٥ [$

٣) إذا علمت أنَّ هـ (س) قابلٌ للاشتقاق وأنَّ هـ (٢) = ٣ ، هـَ(٢) = −١، فجد قَ (٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) $ق(س) = س هـ (س)$

ب) $ق(س) = ٣س^٢هـ (س) - ٥س$

جـ) $ق(س) = هـ (س) - \frac{١}{هـ(س)}$

د) $ق(س) = \frac{٢س + ١}{٣ هـ (س)}$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (−٢) = ٣ ،لَ(−٢) = − ١ ، هـ(−٢) = ٤
هـَ (−٢) = −٦ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) $ق(س) = ل(س) \times هـ(س)$

ب) $ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س) + ١}$

٥) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي، عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) $ق(س) = س^٢ - [٢س + ١]$ ، $س = ١,٤$

ب) $ق(س) = \frac{[\frac{١}{٤}س + ٣]}{|٢س - ١|}$ ، $س = ٢$

جـ) $ق(س) = \frac{٢س + ١}{س^٢ - ٤}$ ، $س = -١$

٦) إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أنَّ:

$$\frac{ى}{ىس}(ل(س) \times م(س) \times هـ(س))$$

$$= ل(س) \times م(س) \times هـَ(س) + ل(س) \times هـ(س) \times مَ(س) + م(س) \times هـ(س) \times لَ(س)$$

٧) اعتمد على النتيجة في السؤال(٦) لإثبات أنَّ :

$$\frac{ى}{ىس}(ل(س))^٣ = ٣(ل(س))^٢ \times لَ(س)$$

٨) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س^٣ & ، س \leq ١ \\ ٣س^٤ + ١ & ، س > ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١ ، ثم اكتب قاعدة قَ(س).

٩) إذا كان $ق(س) = |س| (س^٢ + ٦س)$ ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم $س \in ح$.

١٠) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^٢ - ب س & ، س \leq ٢ \\ ٤ - ب س^٣ + أس & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ٢ ، فجد كلًّا من الثابتين أ ، ب .

ثالثًا المشتقات العليا
Higher Derivatives

إذا كان ق(س) = $(٢س^{٤} - ٣س + ١)(س^{٢} + ٧)$، فجد قً(−١).

تعلمت سابقًا أنَّه إذا كان ص = ق(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ مشتقته بالنسبة إلى س تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

صَ ، $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(ق (س)) ، قَ(س)

لاحظ أنَّ قَ (س) اقتران في س يمكن أن يكون قابلا للاشتقاق بالنسبة إلى س، ومشتقة قَ(س) تُسمى **المشتقة الثانية** للاقتران ق، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

صً ، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(قَ (س)) ، قً(س)

يمكنك أن تحسب مشتقة اقتران من أي رتبة تريد (شرط وجودها) ، حيث إنَّ **المشتقة الثالثة** هي مشتقة المشتقة الثانية ويُرمز لها بأحد الرموز: صً ، $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(قً (س)) ،قً (س)

تُسمى مثل هذه المشتقات **بالمشتقات العليا** للاقتران ق. لاحظ أنَّ التسلسل ضروري في إيجاد المشتقات، فمثلًا لإيجاد المشتقة الثالثة لاقتران؛ يجب إيجاد المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة.

إنَّ استخدام الإشارات (////) للتعبير عن المشتقة الرابعة غير عملي وكذلك الأمر بالنسبة إلى المشتقات الخامسة والسادسة ، ... إلخ. لذلك تُستخدم الأعداد الصحيحة بين قوسين للتعبير عن المشتقات الرابعة ، والخامسة ، ... إلخ. فمثلًا $ص^{(٤)}$ أو $ق^{(٤)}$(س) تعبر عن المشتقة الرابعة للاقتران ق. سنكتفي بإيجاد المشتقات حتى الرابعة في هذا الدرس.

مثال ١

إذا كان ق(س) = $٤س^{٥} - ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١$. فجد قً (س)

الحل

قَ(س) = $٢٠ س^{٤} - ٦س^{٢} + ١٢س$

قً(س) = $٨٠س^{٣} - ١٢س + ١٢$

$ق'''(س) = ٢٤٠ س^٢ - ١٢$

تدريب ١

١) إذا كان $ق(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ + ٦س + ١$ ، فجد $ق''(-١)$.

٢) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٢

إذا كان $ق(س) = س^ن$ ، وكان $ق'''(س) = ٢٤س^{ن-٣}$ ، فجد قيمة ن .

الحل

$ق'(س) = ن س^{ن-١}$

$ق''(س) = ن (ن - ١) س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = ن (ن - ١) (ن - ٢) س^{ن-٣} = ٢٤س^{ن-٣}$

$\therefore$ ن (ن - ١) (ن - ٢) = ٢٤

ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ٢٤.

الأعداد هي ٢، ٣، ٤

أي أنَّ ن = ٤.

تدريب ٢

إذا كان $ق(س) = \frac{١}{١٠} س^ن$ ، وكان $ق'''(س) = أس^٢$ ، فجد قيمة الثابت أ.

مثال ٣

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٠

٢) اكتب قاعدة $ق'(س)$ لجميع قيم س ∈ح .

٣) بيّن أنَّ $ق''(٠)$ غير موجودة.

الحل

١) ق اقتران متصل لجميع قيم س > ٠ لأنه على صورة كثير حدود ، قَ(س) = ٢س.

ق اقتران متصل لجميع قيم س < ٠ لأنَّه اقتران ثابت ، قَ(س) = صفرًا .

$$\therefore\ \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س} > ٠ \\ ٠ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

ق اقتران متصل عند س = ٠ ، تحقَّقْ من ذلك.

$\text{قَ}_{+}(٠) = ٢(٠) = ٠$

$\text{قَ}_{-}(٠) = ٠$

بما أنَّ $\text{قَ}_{+}(٠) = \text{قَ}_{-}(٠) = ٠$.

إذن قَ(٠) = ٠ ، ويكون الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند س = ٠

٢) يمكنك كتابة قَ (س) لجميع قيم س ∈ ح على الصورة :

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س} > ٠ \\ ٠ & \text{، س} = ٠ \\ ٠ & \text{، س} < ٠ \end{cases} \qquad \text{أو} \qquad \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س} > ٠ \\ ٠ & \text{، س} \leq ٠ \end{cases}$$

٣) اتبع الخطوات السابقة لتصل إلى $\text{قً(س)} = \begin{cases} ٢ & \text{، س} > ٠ \\ ٠ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$

$\text{قً}_{+}(٠) = ٢$، $\text{قً}_{-}(٠) = ٠$.

بما أنَّ $\text{قً}_{+}(٠) \neq \text{قً}_{-}(٠)$ فإنَّ قً(٠) غير موجودة.

تدريب ٣

إذا كان $\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & \text{، س} \geq ٠ \\ ٠ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ كلًّا من قَ(٠)، قً(٠) موجودة، ثم جد قيمة كلٍّ منها.

٢) اكتب قاعدة كل من قَ (س)،قً(س) لجميع قيم س ∈ ح .

٣) بيّن أنَّ قًّ(٠) غير موجودة.

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الثانية لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = ٤س^{٣} − $\frac{٧}{٢}$ س^{٢} − ٦ س

ب) ص= $\frac{س^{٢} + ١}{س}$

جـ) ص = |س| (س^{٢} + س)

٢) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٤س) (س^{٣} + ١)، فجد قيمة قَ (−١)× قً(−١)

٣) إذا كان ق(س) = س^{ن} ، ن عدد صحيح موجب وكانت قً(س) = أ س فجد قيمة الثابت أ .

٤) إذا كان ص = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فأثبت أنَّ صً = $\frac{١}{٢}$ ص^{٣}

٥) إذا كان ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} − ٦ س^{٢} − س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) قً(س) = ٠

ب) قً(س) ≤ ٠

جـ) قً(س) > ٠

٦) جد المشتقة الثالثة لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^{٤} − ٣س$^{-٥}$

ب) ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س ، حيث أ ، ب، جـ ثوابت.

٧) جد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) قً(π) حيث ق(س) = س^{٢} − ٦س

ب) قً(−١) حيث ق(س) = $\frac{١}{٢٠}$س^{٥} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

جـ) ق$^{(٤)}$(١) حيث ق (س) = $\frac{١}{س}$

٨) إذا كان كلٌّ من ل ، لَ ، لً قابلًا للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = س^{٢} ل(س)

فجد قً (س) ، قً (س).

٩) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين، فأثبت أنَّ :

(ل × هـ)ً (س) = (لً× هـ) (س) + ٢(لَ × هـَ) (س) + (ل × هـً) (س)

١٠) جد قاعدة اقتران كثير الحدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه ق(١) = ٣، قَ (١) = −٢

قً(١) = ٤ .

١١) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين فأثبت أنَّ :

ل(س) هـً (س) − لً(س) هـ(س) = $\frac{ى}{ىس}$ (ل(س) هـَ (س) − لَ(س) هـ(س))

١٢) إذا كانت ل، ق، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان

هـ (س) = ل(س) × ق(س) ، لَ(س) × قَ(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فأثبت أنَّ:

هـً (س) = ل(س) × قً(س) + ق(س) × لً(س)

١٣) إذا كان ق(س) = أ س^{٤} + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان قً (٢) = ٩٠ فجد قيمة الثابت أ.

١٤) إذا كان ق(س) = ٨ س − ٤(م − ٣) س^{٢} ، فجد قيم الثابت م التي تجعل قً(س) < ٠

رابعًا مشتقات الاقترانات المثلثية
Derivatives of Trigonometric Functions

إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، فجد قَ ($\frac{\pi}{٦}$).

تعلمت سابقًا الاقترانات المثلثية وتمثيلها البياني، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة هذه الاقترانات.

تعرفت سابقًا أنَّ المشتقة الأولى للاقتران ق عند س هي: $قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

ستستخدم هذا التعريف والنظرية $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = ١$

لإثبات القاعدتين الآتيتين:

قاعدة ١

إذا كان ق(س) = جا س ، س ∈ ح ، فإنَّ قَ (س) = جتا س

البرهان

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ جتا \frac{ع + س}{٢} جا \frac{ع - س}{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جتا \frac{ع + س}{٢} جا \frac{ع - س}{٢}}{\frac{ع - س}{٢}}$$

تذكّر

$$جاع - جاس = ٢ جتا \frac{ع + س}{٢} جا \frac{ع - س}{٢}$$

$$جتاع - جتاس = -٢ جا \frac{ع + س}{٢} جا \frac{ع - س}{٢}$$

بفرض أنَّ ص = $\frac{ع - س}{٢}$ يكون $\frac{ع + س}{٢}$ = س + ص، وعندما ع ←س، فإنَّ ص← ٠.

$\therefore$ قَ (س) $=$ $\lim\limits_{ص \to 0}$ $\left(\text{جتا (س + ص)}\right) \times \left(\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}\right)$

$= \lim\limits_{ص \to 0}$ جتا (س + ص) $\times \lim\limits_{ص \to 0} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$ $=$ جتا(س + ٠) $\times$ ١ $=$ جتا س

مثال ١

إذا كان ق(س) $=$ س^{٢} $+$ $\frac{١}{٣}$ جا س ، فجد قَ(س).

الحل

قَ (س) $=$ ٢س $+$ $\frac{١}{٣}$ جتا س

مثال ٢

إذا كان ق(س) $=$ ٢س $-$ ٦جاس ، جد قَ ($\frac{\pi}{٦}$) .

الحل

قَ (س) $=$ ٢ $-$ ٦ جتاس

قَ ($\frac{\pi}{٦}$) $=$ ٢ $-$ ٦ جتا $\frac{\pi}{٦}$ $=$ ٢ $-$ ٦ $\times$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $=$ ٢ $-$ ٣ $\sqrt{٣}$

تدريب ١

إذا كان ق(س) $=$ ٢ جاس $+$٦س ، فجد قَ($\frac{\pi}{٣}$)

قاعدة ٢

إذا كان ق(س) $=$ جتا س ، س $\in$ ح ، فإنَّ قَ(س) $=$ $-$ جاس.

البرهان

قَ(س) $=$ $\lim\limits_{ع \to س}$ $\frac{\text{ق(ع) } - \text{ ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ $=$ $\lim\limits_{ع \to س}$ $\frac{\text{جتاع} - \text{جتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= (-1) \underset{ع \leftarrow س}{نهــا} \frac{جا \frac{ع + س}{2} \; جا \frac{ع - س}{2}}{\frac{ع - س}{2}}$$

$$= (-1) \underset{ع \leftarrow س}{نهــا} \left(جا \frac{ع + س}{2} \times \frac{جا \frac{ع - س}{2}}{\frac{ع - س}{2}} \right)$$

بفرض ص $= \frac{ع - س}{2}$ يكون $\frac{ع + س}{2} =$ س + ص،

عندما ع ← س ، فإنَّ ص ← ٠ .

$$\therefore \; قَ(س) = (-1) \underset{ص \leftarrow ٠}{نهــا} \left(جا (س + ص) \times \frac{جاص}{ص} \right)$$

$$= (-1) \underset{ص \leftarrow ٠}{نهــا} جا (س + ص) \times \underset{ص \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{جاص}{ص} = - جاس \times 1$$

$$\therefore \; قَ(س) = - جا س$$

مثال ٣

إذا كان ق(س) $= \frac{جتاس}{س}$ ، س $\neq$ ٠ ، فجد قَ $(\frac{\pi}{3})$.

الحل

طبِّق قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين:

$$قَ(س) = \frac{س \times \frac{ء}{ءس}(جتا س) - (جتا س) \times \frac{ء}{ءس}(س)}{س^2} = \frac{س \times - جا س - جتا س \times 1}{س^2}$$

$$= \frac{- س جاس - جتاس}{س^2}$$

$$قَ(\frac{\pi}{3}) = \frac{- \frac{\pi}{3} \times جا \frac{\pi}{3} - جتا \frac{\pi}{3}}{(\frac{\pi}{3})^2} = \frac{- \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{(\frac{\pi}{3})^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{9}{2\pi^2}$$

مثال ٤

إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ، أ،ب ∈ ح ، فأثبت أنَّ صً + ص = ٠

الحل

صَ = أ جتاس – ب جاس

صً = – أجاس – ب جتاس = – (أجاس + ب جتاس)

أي أنَّ صً = – ص ومنه صً + ص = صفرًا

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = س جاس ، فجد قَ $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$.

يمكنك استخدام القاعدتين ١ ، ٢ في إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية: ظاس، ظتاس، قاس، قتاس.

مثال ٥

إذا كان ق(س) = ظاس ، فأثبت أنَّ قَ (س) = قا^{٢}س.

البرهان

يمكنك كتابة الاقتران ق بالصورة ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$

طبِّق قاعدة القسمة في الاشتقاق.

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جا س} \times - \text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

تدريب ٣

استخدم القاعدتين (١)، (٢) في إثبات قواعد اشتقاق الاقترانات: ظتاس ، قتاس، قاس كما في الجدول الآتي:

الاقتران: ق(س)	المشتقة: قَ(س)
قاس	قاس ظا س
قتاس	– قتاس ظتاس
ظتاس	– قتا^{٢}س

مثال ٦

إذا كان ق(س) = قتاس + ظتاس ، فأثبت أنَّ $\text{قَ(س)} = \frac{\text{١}}{\text{جتاس} - \text{١}}$

البرهان

$$\text{قَ(س)} = -\ \text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{-\text{١}}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} - \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= \frac{-\text{جتاس} - \text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= \frac{-\left(\text{جتاس} + \text{١}\right)}{\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$= \frac{-\left(\text{جتاس} + \text{١}\right)}{\left(\text{١} - \text{جتاس}\right)\left(\text{١} + \text{جتاس}\right)}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{١} - \text{جتاس}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{جتاس} - \text{١}}$$

تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = ٣جاس – جتاس   ب) ص = س^{٢}جاس

جـ) ص = $\frac{س}{جتا س}$ د) ص = ظا س – $\sqrt{٣}\pi$ س

هـ) ص = جا^{٢}س + جتا^{٢} س   و) ص = قتا س – س ظتا س

٢) إذا كان ص = جاس ، فجد صً + ٦ص بدلالة ص .

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = جاس جتا س ، س = $\frac{\pi}{٣}$

ب) ق(س) = جا(– س) + جتا(– س) ، س = $\frac{\pi}{٤}$

جـ) ق(س) = $\frac{جتاس}{١+ جاس}$ ، س = π

د) ق(س) = س قـاس ، س = $\frac{\pi}{٦}$

هـ) ق(س) = $\frac{ظاس + س}{جاس}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$

٤) أثبت أنَّ كلًّا من ص= جتاس ، ص = جاس يُعتبَرُ حلًّا للمعادلة ص + صً = صفرًا

٥) جد قيم س في الفترة [–٢ π ، ٢ π] التي تحقق المعادلة قَ(س) = ٠ في كلٍّ مما يأتي :

أ) ق(س) = س + جتاس   ب) ق(س) = قـا س

٦) جد $\frac{ء^٢ ص}{ءس^٢}$ لكلٍّ مما يأتي:

أ) ص = قتاس   ب) ص = س جتا س – ٤ جا س

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{جتاس} &، \text{ س} \leq ٠ \\ \text{أس + ب} &، \text{ س} > ٠ \end{cases}$

فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند س= ٠

٨) إذا كان ق(س) = |جا س|، س ∈ [٠ ، ٢ π] فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س= π .

٩) إذا كان ق(س) = جاس – $\frac{١}{٢}$ س ، س ∈ [٠ ، ٢ π] فجد قيمة (قيم) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقيًا.

إذا كان ص = (س^{٣} − س)^{٦} ، فجد $\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س}$

تعلمت سابقًا بعض قواعد الاشتقاق التي تمكنك من إيجاد مشتقات اقترانات بسيطة، مثل: مشتقة حاصل جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة اقترانين. في هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة صيغ لاقترانات مركبة.

تذكر

تركيب اقترانين

إذا كان ق ، هـ اقترانين حيث ص = ق(ع) ، ع = هـ (س) وكان مدى هـ مجموعة جزئية من مجال ق ، فإنَّه يمكن كتابة ص على الصورة:

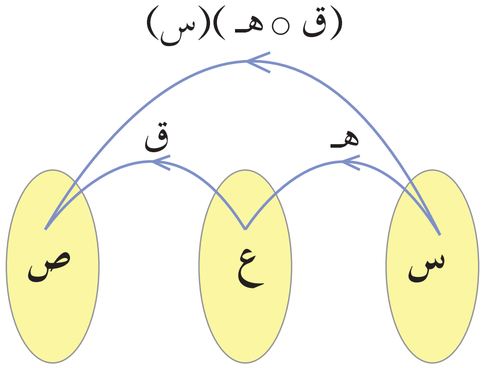
ص = ق(ع) = ق(هـ (س)) أو (ق ∘ هـ)(س).

قاعدة

قاعدة السلسلة

إذا كان الاقترانان ق، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند هـ (س)، فيكون الاقتران المركب (ق ∘ هـ)(س) قابلًا للاشتقاق عند س وإنَّ:

(ق ∘ هـ)َ (س) = قَ (هـ(س)) × هـَ (س).



في الشكل المجاور تجد أنَّ:

ص = ق(ع) .... (١)

ع = هـ (س) .... (٢)

أي أنَّ ص = ق(هـ (س)) = (ق ∘ هـ)(س)

إن إيجاد $\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س}$ يعني إيجاد مشتقة تركيب اقترانين أي أنَّ:

$\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س}$ = (ق∘هـ)َ(س) = قَ (هـ(س)) × هـَ (س) حسب قاعدة السلسلة

= قَ (ع) × هـَ (س) .... (٣)   لأنَّ ع = هـ (س)

لكن قَ (ع) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ من العلاقة (١)، هـَ (س) = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ من العلاقة (٢)

بالتعويض في العلاقة (٣) ينتج أنَّ:

تعميم

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

وهذه صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

مثال ١

إذا كان ص = $(\text{س}^{٣} - ١)^{١٠}$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

يمكن حل المسألة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث نكتب ص على صورة اقتران مركب متغيره (س) بفرض ع = $\text{س}^{٣} - ١$ ، فيصبح ص = $\text{ع}^{١٠}$ وباستخدام قاعدة السلسلة تحصل على

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

= $١٠\text{ع}^{٩} \times (٣\text{س}^{٢})$ ، عوض عن ع بدلالة س لتحصل على :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٠ (\text{س}^{٣} - ١)^{٩} \times (٣\text{س}^{٢}) = ٣٠\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ١)^{٩}$.

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٢}$ ، هـ (س) = ١ − ٦س ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) (ق ∘ هـ)َ(س)

٢) (ق ∘ هـ)َ(١)

الحل

قَ (س) = ٢س ، هـَ (س) = −٦

١) (ق ∘ هـ)َ(س) = قَ(هـ (س)) × هـَ (س)

= قَ (١ − ٦س) × −٦

= ٢(١ –٦س) × –٦ = ٧٢س –١٢

٢) (ق ٥ هـ)َ(١) = ٧٢(١) –١٢ = ٦٠

مثال ٣

إذا كان ل(س) = ظا س^{٣} ، فجد لَ(س)

الحل

ابحث عن اقترانين ق ، هـ بحيث يكون ل = ق ٥ هـ

بفرض هـ (س) = س^{٣} ، ق(س) = ظاس ، فإنَّ:

هـَ (س) = ٣س^{٢} ، قَ (س) = قا^{٢}س

ق(هـ (س)) = ق(س^{٣}) = ظا س^{٣} = ل(س)

لَ (س) = قَ(هـ (س)) × هـَ (س)

= قَ (س^{٣}) × ٣س^{٢}

= (قا^{٢}س^{٣}) (٣س^{٢}) = ٣س^{٢}قا^{٢}س^{٣} .

تدريب ١

١) حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

٢) إذا كان ق(س) = ٢ س + $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = جاس فجد (ق ٥ هـ)َ (س)

من فوائد قاعدة السلسلة إيجاد مشتقة اقتران مرفوع لقوة مثل ص= (ل(س)) ^{ن} ، ص= جا^{ن}س واقترانات أخرى مثل ص= جاهـ(س) ...... إلخ

نتيجة

إذا كان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، وكان ص = (ل(س))^{ن}، حيث ن عدد صحيح ، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس}$ = ن (ل(س))$^{ن-١}$× لَ (س)

البرهان

بفرض ع = ل (س) ، ومنه $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{لَ(س)}$

فيكون ص = $\text{ع}^{\text{ن}}$ ، ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{ن ع}^{\text{ن}-١} = \text{ن (ل(س))}^{\text{ن}-١}$

باستخدام قاعدة السلسلة ينتج أنّ: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن (ل(س))}^{\text{ن}-١} \times \text{لَ(س)}$

مثال ٤

إذا كان ص = $(\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{\text{ن}}$، ن عدد صحيح موجب فبيِّن أنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ن ص قتاس}$.

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}(\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{\text{ن}-١} (-\text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^٢\text{س})$

$= \text{ن}(\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{\text{ن}-١} \times -\text{قتاس} (\text{ظتاس} + \text{قتاس})$

$= -\text{ن} (\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{\text{ن}} \times \text{قتاس}$

ومنه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ن ص قتاس}$.

تدريب ٢

١) إذا كان ص = $(\text{قا س} + \text{ظا س})^٢$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٠

مثال ٥

إذا كان ص = $\text{ظا}^٤\text{س}$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل

ص = $(\text{ظا س})^٤$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤(\text{ظا س})^٣ (\text{ظا س})'$ باستخدام النتيجة السابقة

$= ٤(\text{ظا س})^٣ (\text{قا}^٢\text{س}) = ٤\,\text{ظا}^٣\text{س قا}^٢\text{س}$

مثال ٦

إذا كان ص = جتا(س^{٢} + ١) ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل

بفرض ع = س^{٢} + ١ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢س

ص = جتا ع ، $\frac{ءص}{ءع}$ = − جا ع = − جا(س^{٢}+١)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ قاعدة السلسلة

= − جا (س^{٢} + ١) × ٢س

= −٢س جا (س^{٢} + ١)

مثال ٧

إذا كان هـ (س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س وكان ص = جا(هـ (س))، فأثبت أنَّ :

$\frac{ءص}{ءس}$ = هـَ (س) جتا(هـ (س))

البرهان

بفرض ع = هـ (س) ، ومنه $\frac{ءع}{ءس}$ = هـَ (س)

ص = جا ع ، ومنه $\frac{ءص}{ءع}$ = جتاع = جتا (هـ (س))

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ قاعدة السلسلة

= جتا(هـ (س)) × هـَ(س) = هـَ (س) جتا(هـ (س)).

تعميم

إذا كان ع اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، فيمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إثبات صحة القواعد الآتية:

١) $\frac{ء}{ءس}$(جا ع) = جتاع × $\frac{ءع}{ءس}$

٢) $\frac{ء}{ءس}$(جتا ع) = − جاع × $\frac{ءع}{ءس}$

٣) $\frac{ء}{ءس}$(ظا ع) = قا^{٢}ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٤) $\frac{ء}{ءس}$(ظتا ع) = − قتا^{٢}ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٥) $\frac{ء}{ءس}$(قا ع) = قا ع ظا ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٦) $\frac{ء}{ءس}$(قتا ع) = − قتا ع ظتا ع × $\frac{ءع}{ءس}$

مثال ٨

إذا كان ص = جتا^{٣}(س^{٢} − ١)^{٢} فجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$$\frac{ءص}{ءس} = \left(٣ \text{ جتا}^{٢}(س^{٢} - ١)^{٢}\right)\left(-\text{جا}(س^{٢}-١)^{٢}\right)\left(٢(س^{٢}-١) \times ٢س\right)$$

$$= -١٢ \text{ س } (س^{٢} - ١) \text{ جتا}^{٢}(س^{٢} - ١)^{٢} \text{ جا}(س^{٢}-١)^{٢}$$

تدريب ٣

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = قا ٤ س

٢) ق(س) = (س^{٣} + ٢س − ٨)^{٧}

٣) ق(س) = جا^{٤} س^{٢}

مثال ٩

إذا كان ق(٣س) = ٦ س^{٢} + ٩س ، فجد قَ(٣)

الحل

ق(٣س) يُشكل تركيبًا لاقترانين

باشتقاق الطرفين :

قَ(٣س) × ٣ = ١٢س + ٩

ضع س = ١ فتحصل على قَ(٣)

∴ قَ(٣) × ٣ = ١٢(١) + ٩ ، ومنه: قَ(٣) = ٤ + ٣ = ٧

مثال ١٠

إذا كان هـ(س) = ق(جا ٢س) وكان قَ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨ ، فجد هـَ($\frac{\pi}{٦}$)

الحل

باشتقاق الطرفين نجد أنَّ:

هـَ(س) = قَ(جا٢س) (جا٢س)َ = ٢ جتا٢س قَ(جا٢س)

$$هـَ(\frac{\pi}{٦}) = ٢ \times جتا(\frac{\pi}{٣})\ قَ(حا\frac{\pi}{٣})$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times قَ(\frac{\sqrt{٣}}{٢})$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٨ = ٨$$

تدريب ٤

إذا كان $ق(س^{٣} - ١) = \frac{١}{س} - س^{٢}$ ، فجد قَ (٧)

١) استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ) $ص = (س^{٣} - ٢س + ٤)^{٨}$

ب) $ص = \frac{١}{(س^{٢} + ١)^{٥}}$

جـ) $ص = \frac{س^{٤}}{(١ - س^{٣})^{٤}}$

د) $ص = جتا(س^{٢} - س)$

٢) إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٢س$ ، $هـ(س) = س^{٣} + ١$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $(ق \circ هـ)'(١)$

ب) $(هـ \circ ق)'(١)$

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان $هـ(٢) = ٣$ ، $ق'(٣) = ٤$ ، $هـ'(٢) = -٦$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $(ق \circ هـ)'(٢)$

ب) $(ق(س^{٢}))'$ عند $س = \sqrt{٣}$

٤) إذا كان هـ (س) قابلًا للاشتقاق عند س، وكان $ص = جا^{ن}(هـ(س))$ ، حيث ن عدد صحيح

فأثبت أنَّ:

$$\frac{ءص}{ءس} = ن\,جا^{ن-١}(هـ(س))\,جتا(هـ(س)) \times هـ'(س)$$

٥) جد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ) $ص = ظا ع$ ، $ع = س^{٣} - س$

ب) $ص = ل^{٢} + ٢ل$ ، $ل = (س^{٢} + ١)^{٥}$

٦) إذا كان $ص = جتا(س + \frac{\pi}{٢})$، فأثبت أنَّ: $ص + ص'' = ٠$

٧) إذا كان $ص = ظا س + \frac{١}{٣} ظا^{٣}س$ ، فبرهن أنَّ : $\frac{ءص}{ءس} = قا^{٤}س$

٨) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ص = حا^{٢} ٣س ، س = $\frac{\pi}{٩}$ ب) ص = $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٤}$ ، س = ١

٩) جد صً في كلٍّ مما يأتي :

أ) ص = س ظا $\left(\frac{١}{س}\right)$ ب) ص = $\frac{جتا٢س}{س}$

١٠) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق وكان ق (حا٢س) = قتا (٢س) حيث س ∈ $] ٠ ، \frac{\pi}{٣} [$
فجد قَ $\left(\frac{١}{٢}\right)$.

١١) إذا كان ص = ق(س^{٢} + ٢س) ، قَ(٣) = ٥ ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = ١}$

١٢) إذا كان ق(٤س) = $\frac{ء}{ءس}$(س^{٢} +٣) ، فجد قَ (٤).

١٣) إذا كان ق(س) = س^{٣} +٢س ، هـ (س) = ٣س^{٢} ، فجد كلًّا مما يأتي :

أ) (قَ ٥ هـ)َ (١) ب) (قَ ٥ هـَ)َ (٢)

جـ) (قَ ٥ هـ)ً (–١) د) (قَ ٥ هـَ)ً (٣)

سادسًا الاشتقاق الضمني Implicit Differentiation

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} = ١ عند النقطة $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$.

تعلمت سابقًا إيجاد مشتقات لاقترانات معطاة بصورة واضحة على الشكل ص = ق(س)

مثل ص = (س^{٢}+١)^{٣} ، ص = س^{٢}ظاس ، ص = $\begin{cases} س^{٢} + ٤ & ، س \leq ٠ \\ ٤ - ٦س & ، س > ٠ \end{cases}$

وتُسمى اقترانات صريحة؛ لأن المتغير التابع (ص) يظهر وحيدًا في طرف والمتغير المستقل (س) في الطرف الآخر. في هذا الدرس سوف تجد مشتقات علاقات أو معادلات قد يصعب فيها فصل المتغير المستقل عن المتغير التابع، وتُسمى **بالعلاقات الضمنية**.

يمكنك الحصول على أكثر من اقتران من علاقة ضمنية واحدة؛ فمثلًا من العلاقة س^{٢} + ص^{٢}=١ يمكنك الحصول على ص= ± $\sqrt{١ - س^{٢}}$ وهذه علاقة مكونة من اقترانين ص= $\sqrt{١ - س^{٢}}$ ، ص= − $\sqrt{١ - س^{٢}}$. في هذا الدرس سوف تتعرف كيفية إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقات ضمنية .

لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقة ضمنية اتبع الخطوات الآتية :

١) اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س.

٢) جمِّع الحدود التي تحوي $\frac{ءص}{ءس}$ في طرف، وباقي الحدود في الطرف الآخر.

٣) أخرِج $\frac{ءص}{ءس}$ عاملًا مشتركًا.

٤) جد $\frac{ءص}{ءس}$ بإجراء عملية القسمة.

مثال ١

إذا كان ٤ ص − ٢س + ٨ = ٠ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

في هذا المثال يمكنك إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى : التعبير عن ص بدلالة س (إيجاد علاقة صريحة بين س، ص)

$$ص = \frac{٢س - ٨}{٤} = \frac{١}{٢}س - ٢ ، \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$$

الطريقة الثانية : اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س باستخدام قاعدة السلسلة.

$$٤ \times \frac{ءص}{ءس} - ٢ = ٠ ، منه \ \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$$

مثال ٢

إذا كان $س^٣ + ص^٣ = ٦$ س ص ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد صَ .

٢) جد ميل المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند النقطة (٣، ٣).

الحل

١) $٣ س^٢ + ٣ ص^٢ صَ = ٦س \times صَ + ص \times ٦$

$$٣ ص^٢ صَ - ٦س صَ = ٦ص - ٣ س^٢$$

$$٣صَ \ (ص^٢ - ٢س) \ = ٦ص - ٣ س^٢$$

$$صَ = \frac{٦ص - ٣س^٢}{٣(ص^٢ - ٢س)} = \frac{٢ص - س^٢}{ص^٢ - ٢س}$$

٢) عندما س = ٣ ، ص = ٣

$$صَ = \frac{٢ \times ٣ - ٣^٢}{٣^٢ - ٢ \times ٣} = -١$$

مثال ٣

إذا كان $٤ص^٢ -$ جا ص $= س^٢$ ، فجد صَ .

الحل

٤×٢ ص صَ $-$ جتاص $\times$ صَ $= ٢$س

$$٨\,ص\,صَ - صَ\,جتاص = ٢س$$

$$صَ\,(٨ص - جتاص) = ٢س$$

$$صَ = \frac{٢س}{٨ص - جتاص}$$

تدريب ١

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $٣س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$

٢) $٢\,س\,ص - ص^{٣} + ١ = س + ٢ص$

٣) $س^{٢} + ص = ظاص$

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لتعميم مشتقة $س^{ن}$ ؛ عندما يكون ن عددًا نسبيًّا كما في النظرية الآتية :

نظرية

إذا كان $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي فإنَّ : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{م}{ن}(س)^{\frac{م}{ن}-١}$

البرهان

ارفع طرفي المعادلة $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ إلى الأس ن لتحصل على :

$ص^{ن} = س^{م}$ ، ثم اشتق الطرفين ضمنيًّا بالنسبة إلى س لتحصل على :

$$ن\,ص^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس} = م\,س^{م-١}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{(س)^{م-\frac{م}{ن}}} = \frac{م}{ن}س^{م-١-م+\frac{م}{ن}}$$

إذن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{م}{ن}س^{\frac{م}{ن}-١}$

مثال ٤

إذا كان $ص^{٢} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، ص > ٠ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١٦

الحل

$$٢ص \times \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$$

عندما س=١٦ تكون ص = ٢ وعليه تكون

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٤ \times ٢\sqrt{١٦}} = \frac{١}{٣٢}$$

نتيجة

إذا كان ق(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، وكان ص= $(ق(س))^{ن}$، حيث ن عدد نسبي، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس} = ن(ق(س))^{ن-١} \times قَ(س)$

مثال ٥

إذا كان ص= $\sqrt{هـ(س)}$ ، وكان هـ (س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س فأثبت أنَّ:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

الحل

يمكنك التعبير عن ص= $\sqrt{هـ(س)}$ بالصورة ص= $(هـ(س))^{\frac{١}{٢}}$ ، وبما أنَّ هـ (س) اقتران قابل للاشتقاق عند س ، فيمكن تطبيق النتيجة السابقة لتحصل على :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} \times (هـ(س))^{\frac{١}{٢}-١} \times هـَ(س) = \frac{١}{٢}(هـ(س))^{\frac{-١}{٢}} \times هـَ(س)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{هـَ(س)}{(هـ(س))^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

مثال ٦

إذا كان $(س - ص)^{٥} = س^{٢}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(١ ، ٠)$.

الحل

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س لتحصل على :

$$٥(س - ص)^{٤} \ \left(١ - \frac{ءص}{ءس} \right) = ٢ س$$

$$\left(١ - \frac{ءص}{ءس} \right) = \frac{٢ س}{٥(س - ص)^{٤}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ١ - \frac{٢ س}{٥(س - ص)^{٤}}$$

$$\left. \frac{ءص}{ءس} \right|_{(١،٠)} = ١ - \frac{٢ \times ١}{٥(١ - ٠)^{٤}} = ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

تدريب ٢

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $\sqrt{ص} + جتا س = ٤$

٢) $(س - ص)^{٢} - ص = ٠$

مثال ٧

إذا كان س = ظتا ٢ ص فأثبت أنَّ $صً = - صَ \ جا ٤ ص$

الحل

اشتقَّ الطرفين بالنسبة إلى س

$$١ = (- قتا^{٢} \ ٢ ص)(٢ صَ)$$

$$صَ = \frac{-١}{٢ قتا^{٢} ٢ ص} = \frac{-١}{٢} \ جا^{٢} \ ٢ ص$$

$$صً = - \frac{١}{٢} \ (٢ \ جا \ ٢ ص) \ (جتا ٢ ص)(٢ صَ)$$

٢ جاس جتاس = جا ٢ س

$$= - \frac{١}{٢} \ (جا \ ٤ ص) \ (٢ صَ)$$

$$صً = - صَ \ جا \ ٤ ص$$

تدريب ٣

إذا كان جتا ص = س ، ص ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$)، فأثبت أنَّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$$

مثال ٨

إذا كان ص = ن^٤ ، س = ٦ن + ١ ، فجد $\left.\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right|_{ن = ١}$

الحل

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$$ قاعدة السلسلة

لتجد $\frac{ءن}{ءس}$ جد أولاً $\frac{ءس}{ءن}$،

$$\frac{ءس}{ءن} = ٦ \text{ ومنه } \frac{ءن}{ءس} = \frac{١}{٦}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = (٤ن^٣) \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣} ن^٣$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٣ \times \frac{٢}{٣} ن^٢ \times \frac{ءن}{ءس}$$ لأنَّ الاشتقاق بالنسبة إلى س

$$= ٢ن^٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣} ن^٢$$

عندما ن = ١ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{١}{٣}$

تدريب ٤

إذا كان س = جا ٣ن ، ص = جتا٣ن ، فجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ عند ن = $\frac{\pi}{٣}$

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٦$

ب) $ص^{٢} = \sqrt{س^{٣} + ٤س^{٢}}$

جـ) $س^{٣} + ص^{٣} = س\ ص$

د) $جا(س\ ص) = س^{٢}$

٢) جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ) $(س\ ص)^{٣} = ٤س$

ب) $٤س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١٦$

جـ) $ص = س\ جتا\ ص$

د) $جا\ س = \sqrt{ص} + ٢$

٣) جد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) $٨\ س\ ص + جتا\ ص = \pi^{٢}$ ، $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

ب) $س^{٣} - ٢س\ ص + ص^{٣} = ٢$ ، $(١، -١)$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ ، $(٤، ١)$

٤) إذا كان $جا(س + ص) = ص^{٢}\ جتاس$، فجد $صَ$.

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يصنع عندها المماس زاوية مقدارها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ) $ص = \sqrt[٣]{(٢س + ١)^{٢}}$

ب) $ص = \sqrt{س^{٢} + \sqrt{٣س}}$

٧) إذا كان س = جاص ، فأثبت أنَّ صً = ظاص قا^{٢}ص.

٨) إذا كان ص جتا٢س = س جا ٢ص ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}،\frac{\pi}{٢})$.

٩) إذا كان س ص = جاس، فأثبت أنَّ: س صً + ٢صَ + س ص = ٠

١٠) إذا كان ص = ن^{٣} + ٢ن ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ن ، فجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند ن = ١ .

١١) إذا كان س + ص = جا ص، فأثبت أنَّ:

(صَ)^{٢}= صً (ظتا ص− قتاص)

١٢) إذا كان ص = جاس + س ص ، فأثبت أنَّ :

صً + ص = $\frac{٢صَ}{١ - س}$

١) إذا كان ق(س) = ظاس وتغيرت س من س إلى س + هـ ، فأثبت أنَّ معدّل التغير للاقتران ق يساوي:

$$\frac{\text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ظاهـ}}{\text{هـ}\,(١ - \text{ظاس} \times \text{ظاهـ})}$$

٢) إذا كان ق(س) = جا ٢س، فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

٣) ليكن $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٢ &، \quad ٠ \leq \text{س} < ١ \\ [\text{س}] + ٤\text{س} &، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$ ، جد قَ(س).

٤) إذا كان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = −١ ، ل(−١) = ١، لَ(−١) = ٢
فجد قَ(−١) في كلٍّ مما يأتي :

أ) $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س} + ٥} \times \text{ل(س)}$

ب) $\text{ق(س)} = \frac{(\text{ل(س)})^{٢}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

جـ) $\text{ق(س)} = \text{ل (س)} - \frac{\text{ل(س)}}{\text{س}}$

د) $\text{ق(س)} = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{٣}\text{ل(س)}\right)$

٥) أ) إذا علمت أنَّ ص = س ظا س ، فأثبت أنَّ :

$$\text{صً} = ٢\text{قا}^{٢}\text{س}(١ + \text{ص})$$

ب) إذا كان جا ص = س ، |س| < ١ ، فأثبت أنَّ :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} \text{، ص} \in \left(٠، \frac{\pi}{٢}\right)$$

٦) إذا كان ص = ن² − ٤ن ، س = ٢ن − ٥ ، فجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ عند ن = ٦

٧) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق؛ بحيث كان هـَ (س) = ق(س) ،
قَ(س) = − هـ (س) ، وكان ل(س) = (هـ(س))² + (ق (س))² ، فجد لَ(س) .

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} (س+١)^٤ & ، س \geq ٠ \\ (س-١)^٤ & ، س < ٠ \end{cases}$

فأجب عن كلٍّ مما يأتي :

أ) جد قَ(س) لجميع قيم س ، س ≠ ٠

ب) بيّن أنَّ ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

٩) إذا كان ص^٣ = ق(٤س^٢ − س) ، قَ(٥) = ٤ ، ق(٥) = −٨ ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١}$.

١٠) إذا كان ق(س) = جاهـ(س) ، هـ (١) = $\frac{\pi}{٣}$ ، هـَ (١) = ٠ ، هـً (١) = ٤ ،
فجد قً (١) علمًا بأنَّ ق، قَ قابلان للاشتقاق.

١١) إذا كان ق(س) = س^٣ + ٢س ، هـ (س) = ٣س^٢ ، فجد كلاًّ مما يأتي:

أ) (قَ ∘ هـ)َ (٢) ب) (قَ ∘ هـ)ً (٢)

١٢) إذا كان ل(س) = ق(هـ(س))، وكان هـ (١) = ٤ ، لَ (١) = ٢ ، قَ (٤) = −٥، فجد هـَ (١)

١٣) إذا كان ص = س هـ (س) ، وكان هـ(−١) = ٦ ، هـَ(−١) = ٢، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = −١

١٤) إذا كان جا ص = ظا س ، فأثبت أنَّ : ظاص = $\frac{صً}{٢ قا^٢س + (صَ)^٢}$

١٥) إذا كان ق(٣س−١) = $\frac{١}{س^٢}$ − $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ فأثبت أنَّ قَ (٥) = $\frac{١}{١٢}$

١٦) إذا كان جتا ص − س ص = ٢س ، فأثبت أنَّ:

صً (س + جا ص) + صَ(٢ + صَ جتا ص) = ٠

١٧) إذا كانت ص = أ جاس − ب جتاس ، أ ، ب ثابتان، فأثبت أنَّ :

(صَ)^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢

١٨) إذا كان ص^٣ = ق(٢ س^٢ − س) ، قَ(٦) = ٤ ، ق(٦) = − ٨ ، فجد
$\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢ .

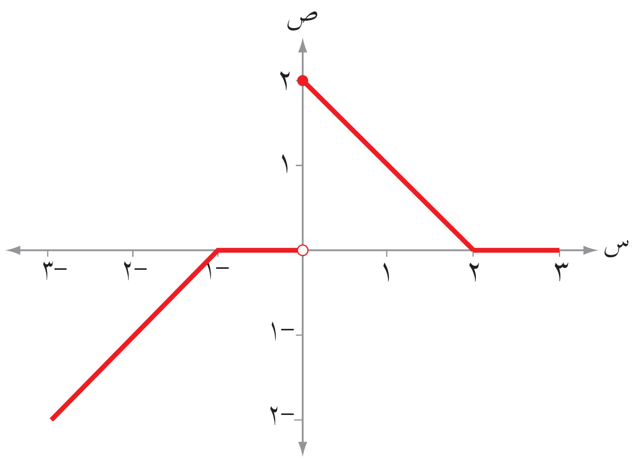
١٩) إذا كان ق(س) = $س^٣ - س^٢$ ، هـ(س) = $٣س^٢ + س$ ، فجد كلاًّ مما يأتي:

أ) (ق ٥ هـ)َ (١)   ب) (ق ٥ هـ)ً (١)

٢٠ [*]) اعتماداً على الشكل (٢-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [-٣، ٣]، جد كلاًّ مما يأتي:

أ) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل.

ب) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق.



الشكل (٢-٤)

٢١) يتكون هذا السؤال من (٨) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٣)، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٣}{٦ - ٣س}$$ تساوي:

أ) ١   ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $-\frac{١}{٣}$ د) -٣

(٢) $$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٢س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$$ تساوي:

أ) ١   ب) صفر   جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\sqrt{٢}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

(٣) $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{٢} - \text{جتا}(\frac{\pi}{٣} + \text{هـ})}{\text{هـ}}$ تساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) إذا كان قَ(٢) = ٦ ، فإنَّ $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٢+٣\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{-\text{هـ}}$ تساوي:

أ) − ١٨ ب) ١٨ جـ) − ٦ د) − ٢

(٥) إذا كان معدّل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [−٢، م] يساوي

$\dfrac{\text{م}^{٢} - ٤}{\text{م} + ٢}$ فإنَّ $\text{قَ}_{+}(-٢)$ تساوي:

أ) ٢ ب) صفر جـ) − ٤ د) ٤

(٦) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي

$\text{س}^{٢}\text{هـ} + \text{س هـ}^{٢} + \frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣}$ ، فإنَّ قَ(٣) تساوي:

أ) ٩ ب) − ٩ جـ) صفر د) − ٣

(٧) إذا كان ق(س) = |٤ − ٢س| فإنَّ قَ(٢):

أ) ٢ ب) − ٢ جـ) صفر د) غير موجودة

(٨) إذا كان ق(٤) = ٥ ، قَ(٤) = − ١ ، قً(٤) = ٢ فإنَّ = $(\dfrac{\text{ق}}{\text{قَ}})'$ (٤) تساوي:

أ) ١١ ب) − ٩ جـ) − ٦ د) ٦

الوحدة الثالثة

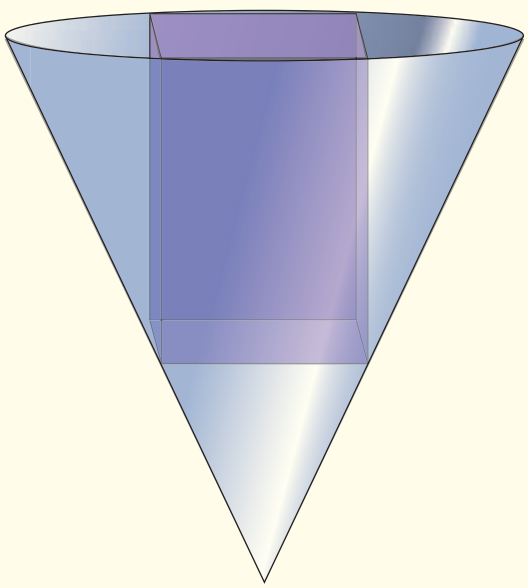
٣

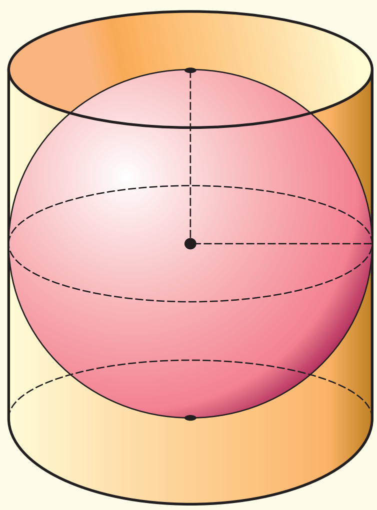
منهاجي
متعة التعليم الهادف

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

تم توظيف علم التفاضل في مجالات متعددة تخدم العلوم الأخرى، كعلوم الفيزياء والكيمياء وعلوم الفضاء والاقتصاد والصناعات. وتضم دراسة خصائص الاقترانات، من حيث نهاياتها واتصالها ومجالات تزايدها وتناقصها ومجالات تقعرها، كذلك تم توظيف المعادلات التفاضلية في مجالات الاتصالات والمركبات الفضائية وفي المجالات العسكرية، كما تم توظيفها في العلوم الحياتية والسكانية.





يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة.
- حل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- حل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع.
- تفسير مفهوم المعدل الزمني.
- حل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدّلات المرتبطة بالزمن.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، ومجالات التزايد والتناقص له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تحديد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، والقيم القصوى المحلية له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في ايجاد القيم القصوى المحلية و المطلقة لاقتران معطى، إن وُجدت.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل، ونقط الانعطاف، والقيم القصوى.
- حل مسائل عملية تتضمن القيم القصوى.

تطبيقات هندسية وفيزيائية

Geometric and Physical Applications

الفصل الأول

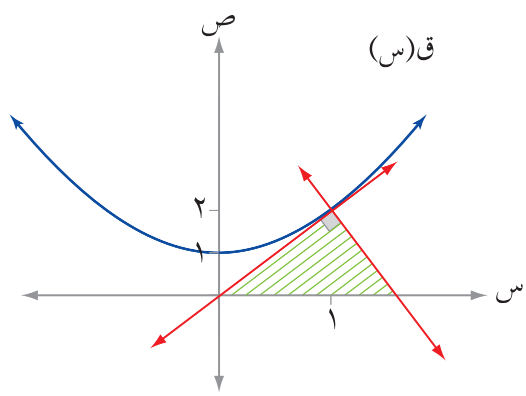
النتاجات

- تجد معادلة المماس عند نقطة.
- تحل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- تحل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع
- تفسر مفهوم المعدل الزمني.
- تحل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

أولًا تطبيقات هندسية

Geometrical Applications

جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}+١ عند النقطة (١، ٢). انظر الشكل (٣-١).



الشكل (٣-١)

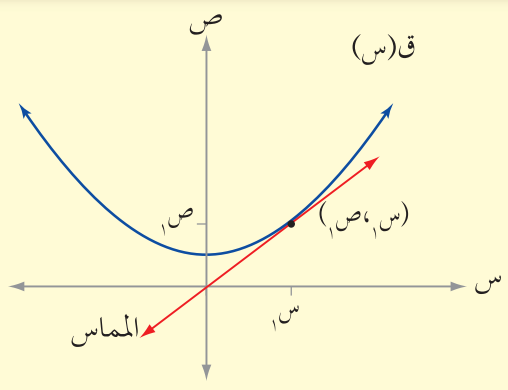
تعلمت سابقًا أنَّ ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) يساوي المشتقة الأولى للاقتران ق عند تلك النقطة.

أي أنَّ ميل المماس عند (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) = قَ (س$_{١}$)، وتسمى النقطة (س$_{١}$، ق(س$_{١}$)) نقطة تماس.

بشكل عام إذا كان للاقتران ص = ق(س) مشتقة عند النقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$، فعندئذ يكون لمنحنى ق مماس عند تلك النقطة، ميله يساوي $\text{قَ}(\text{س}_١)$. وتكون معادلة مماسه هي:

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{قَ}(\text{س}_١)\,(\text{س} - \text{س}_١)$$

انظر الشكل (٣-٢).



الشكل (٣-٢)

مثال ١

إذا علمت أنَّ ق(س) = $\text{س}^٢ + ٣$ ، جد معادلة كلٍّ من المماس، والمستقيم العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١، ٤).

الحل

١) معادلة المماس لمنحنى الاقتران

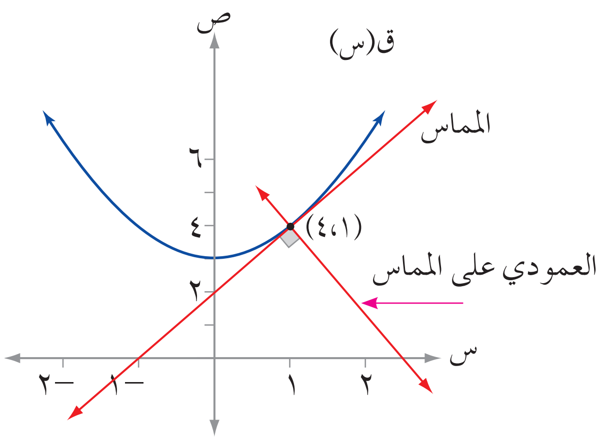
ق(س) = $\text{س}^٢ + ٣$ عند النقطة (١، ٤) هي :

ص − ٤ = قَ(١)(س − ١)

قَ(س) = ٢س، ومنه قَ(١) = ٢

إذن معادلة المماس هي: ص − ٤ = ٢(س − ١)

ومنه ص = ٢س + ٢



الشكل (٣-٣)

٢) معادلة العمودي على المماس عند النقطة (١، ٤) هي:

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{قَ}(\text{س}_١)}\,(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٢}\,(\text{س} - ١)$$

$$\text{ومنه}\quad \text{ص} = \frac{-١}{٢}\,\text{س} + \frac{٩}{٢}$$

انظر الشكل (٣-٣).

تذكر

١) ميل المستقيم × ميل العمودي عليه = −١

٢) المستقيم العمودي على منحنى اقتران عند نقطة هو نفسه العمودي على مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة.

تدريب ١

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س+٣}$ عند النقطة (١، ٢).

ملاحظة

يكون مماس منحنى الاقتران ق(س) عمودياً على مماس منحنى الاقتران هـ(س) عند نقطة تقاطعهما ($س_١$، $ص_١$)، إذا كانت قَ($س_١$)، هـَ ($س_١$) موجودتين، وكانت قَ($س_١$) × هـَ ($س_١$) = −١

مثال ٢

إذا كان ق(س) = $س^٢$ ، هـ (س) = $س^٢$−٢س+١ ، فجد النقطة التي يكون عندها مماسّا منحنيي الاقترانين ق، هـ متعامدين.

الحل

قَ(س) = ٢س ، هـَ(س) = ٢س−٢

قَ(س) × هـَ (س) = −١ (لماذا؟)

٢ س(٢س−٢) = −١

أي أنَّ ٤$س^٢$−٤س+١ = ٠

ومنه $(٢س−١)^٢$ = ٠ ومنه س = $\frac{١}{٢}$

لاحظ أن ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ ، هـ ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$

إذن النقطة التي يكون عندها مماسّا منحنيي الاقترانين متعامدين هي ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$).

تدريب ٢

بيِّن أنَّ مماس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{س}$، ومماس منحنى الاقتران هـ (س) = س متعامدان عند نقطة تقاطع المنحنيين.

مثال ٣

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}−٦س+١٢ مماسًّا أفقيًّا عند النقطة (٣، ٣).

المماس الأفقي هو: المماس الذي يوازي محور السينات ويكون ميله يساوي صفرًا.

الحل

ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هو قَ(س$_{١}$)،

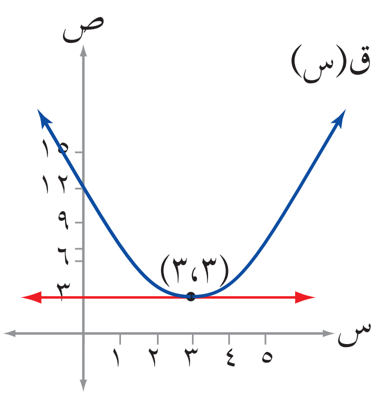
قَ(س$_{١}$) = ٢س$_{١}$ − ٦

قَ(٣) = ٢ × ٣ − ٦

= صفرًا

إذن لمنحنى ق مماس أفقي عند النقطة (٣،٣).

انظر الشكل (٣−٤).



الشكل (٣−٤)

تدريب ٣

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = جا^{٢}س مماسًّا أفقيًّا في الفترة [٠ ، π]

مثال ٤

إذا كان مماس منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢}+٣س+١ عند س = س$_{١}$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد إحداثيّي نقطة التماس.

الحل

قَ(س$_{١}$) = ظا ٤٥°

٢س$_{١}$+٣ =١

ومنه س$_{١}$= −١

إذن نقطة التماس هي: (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$)) = (−١ ، −١)

ميل المستقيم (المماس) = ظا هـ حيث هـ الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

تدريب ٤

إذا كان الاقتران ق(س) = جـ س^{٢} + جـ س +٢ ، وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢،ق(٢)) هو ١٣٥° ، فجد قيمة الثابت جـ .

مثال ٥

جد الإحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٤}−٤س^{٢}+٤ موازيًا للمستقيم الذي معادلته ل: ص+٤س+١=٠

الحل

افرض أنَّ ميل المماس م ، و ميل المستقيم م$_{١}$.

والنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس لمنحنى الاقتران ق.

إذن م = قَ (س$_{١}$) = ٤س$_{١}^{٣}$ − ٨س$_{١}$

وبما أنَّ مماس منحنى الاقتران ق عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) يوازي المستقيم ل، إذن:

م = م$_{١}$

٤س$_{١}^{٣}$ − ٨س$_{١}$ = −٤ لماذا؟

٤س$_{١}^{٣}$ − ٨س$_{١}$ + ٤ =٠

٤(س$_{١}$ −١)(س$_{١}^{٢}$ + س$_{١}$ −١) = ٠

ومنه س$_{١}$= ١

أو س$_{١}$ = $\frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢}$

أو س$_{١}$ = $\frac{-١ - \sqrt{٥}}{٢}$

مثال ٦

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} + ١ مماسيْن مرسومين من النقطة (٠ ، ٠)، ثم جد معادلة كلٍّ منهما.

الحل

النقطة (٠،٠) لا تقع على منحنى الاقتران ق، لماذا؟

افرض أنَّ النقطة ($س_١$،$ص_١$) نقطة تماس تقع على منحنى الاقتران ق.

ومنه $ص_١ = س_١^٢ + ١$

ميل المماس عند نقطة التماس = ميل منحنى الاقتران ق عند تلك النقطة.

ميل المماس= قَ ($س_١$) عند نقطة التماس

$= ٢س_١$

معادلة المماس هي: $ص = ٢س_١ (س - ٠)$

$ص = ٢س_١ س$

$ق(س_١) = ص_١$

ومنه $س_١^٢ + ١ = ٢س_١^٢$

ومنه $س_١^٢ = ١$

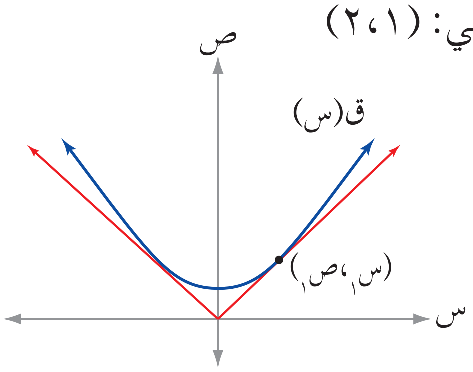
أي أنَّ قيم $س_١$ هي: -١، ١

نقطة التماس الأولى هي: (-١،٢)، نقطة التماس الثانية هي: (١،٢)

انظر الشكل (٣-٥).

∴ معادلة المماس الأول هي: $ص = -٢س$

معادلة المماس الثاني هي: $ص = ٢س$



الشكل (٣-٥)

تدريب ٥

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران $ق(س) = ٥ - س^٢$ ، مماسين مرسومين من النقطة (٣،٠) التي لا تقع عليه.

تمارين ومسائل

١) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$+٦س ـ٥ عند النقطة (١ ، ٢).

٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − س − ٦ = ٠

٣) جد النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ − ٣س + ٣ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤) جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $(ص-٤)^{٢}$ = س+٢ التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم الذي معادلته: ٣س + ٦ص + ٢ =٠.

٥) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$−٤س+٣ بحيث يكون المماس عموديًّا على المستقيم الذي معادلته: ٦ص − ٣س − ٥ =٠.

٦) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ عند النقطة (١،٢)

٧) جد قيمة كلٍّ من الثابتين ب،جـ اللّتين تجعلان المستقيم الذي معادلته: ص − س − ٢ =٠ مماسًّا لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٢).

٨) إذا كان المستقيم ٢س − ص + جـ = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٢}{س}$ عند النقطة ($س_{١}$،$ص_{١}$) فجد قيم الثابت جـ.

٩) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س= $ص^{٢}$ −٤ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات.

١٠) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة: $ص^{٢}$ + $س^{٢}$ + ٦ص − ٢س + ٢ =٠ عند النقطة (٣ ، −١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ ظتا س + $قا^{٢}$س عند س= $\frac{\pi}{٤}$.

١٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران

هـ(س) = $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$.

١٣) جد مساحة المثلث القائم الزاوية، المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة

ص= $\sqrt{س}$ ، س> ٠ عند النقطة (٤،٢) ومحور السينات والمستقيم س=٤ .

١٤) حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

ثانيًا تطبيقات فيزيائية Physical Applications

قُذف جسم من سطح برج رأسيًا إلى أعلى، حيث إنَّ ارتفاعه بالأمتار عن سطح البرج بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٥ن − ٥ن^{٢}، جد ارتفاع البرج إذا كانت سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض تساوي (− ٥٥م/ث).

تعلمت سابقًا أنَّ السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) في الفترة الزمنية من ن إلى ن + Δ ن لجُسيم يتحرك على خط مستقيم، وفق العلاقة ل = ف(ن) هي:

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن+\Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$ ، وإذا كانت $\lim\limits_{\Delta ن \leftarrow ٠} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ موجودة فتسمى **السرعة اللحظية للجُسيم عند ن** ويرمز لها بالرمز ع.

تعريف

إذا تحرك جُسيم على خط مستقيم وتحدد موقعه في اللحظة ن بالعلاقة ل = ف(ن) فإنَّ:
السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة ن هي ع حيث ع(ن) = فَ(ن)
وإذا كان فَ(ن) قابلًا للاشتقاق في ن، فإنَّ فً (ن) = عَ(ن) يسمى تسارع الجُسيم في اللحظة ن ويرمز له بالرمز ت(ن).

مثال ١

يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٣، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، احسب سرعة الجُسيم وتسارعه عند ن = ٤ ثوانٍ.

الحل

السرعة ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن^{٢} − ٦ن
ع(٤) = ٢٤م/ث
التسارع ت(ن) = عَ(ن) = فً (ن) = ٦ن − ٦
ومنه ت(٤) = ١٨م/ث^{٢}

تدريب ١

إذا كانت ف(ن) = ٤ جا٣ن – ٥ جتا٣ن، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب كلاًّ من المسافة و السرعة و التسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$ ثانية.

مثال ٢

يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣}–٦ن^{٢}+١ ،حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، جد سرعة الـجُسيم عندما ينعدم تسارعه.

الحل

السرعة ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن^{٢} – ١٢ن

التسارع ت(ن) = فً (ن) = ٦ن – ١٢

عندما ينعدم تسارعه فإنَّ ت(ن) = ٠

∴ ٦ن – ١٢ = ٠

ومنه ن =٢، أي ينعدم تسارع الـجُسيم عندما ن = ٢ ثانية.

إذن ع(٢) = ٣(٢)^{٢} – ١٢(٢) = –١٢م/ث.

تدريب ٢

إذا كانت ف(ن) = ن^{٣}–٩ن^{٢}+١٥ن، هي العلاقة الزمنية لحركة جُسيم على خط مستقيم، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، فجد تسارع الـجُسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

مثال ٣

قذف جسم رأسيًّا للأعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف (ن) = ٣٠ن – ٥ن^{٢}، جد كلًّا مما يأتي:

١) السرعة الابتدائية للجسم.

٢) أقصى ارتفاع يَصِلُ إليه الـجسم.

٣) اللحظة التي تكون عندها سرعة الـجسم ١٠م/ث.

٤) الزمن اللازم حتى يعود الـجسم إلى سطح الأرض.

الحل

١) السرعة الابتدائية ($ع_.$) للجسم هي السرعة التي قذف بها الـجسم أي عندما (ن=٠)

ع(ن) = ٣٠−١٠ن   ومنه ع. = ٣٠م/ث

٢) يصل الـجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة ع = ٠، أي أنَّ ٣٠ − ١٠ن = ٠ ويتحقق ذلك عندما ن = ٣ث، وعند هذه اللحظة تكون المسافة المقطوعة ف(٣) = ٩٠ − ٤٥=٤٥م.

٣) ع = ٣٠−١٠ن=١٠، ومنه ن = ٢ ثانية

٤) عندما يعود الـجسم إلى سطح الأرض تكون ف = ٠   ومنه ٣٠ن − ٥ن^{٢}=٠

ن (٣٠ − ٥ن) = ٠، ومنه ن = ٠، ن = ٦ ثانية

وبما أنَّ ن=٠ هي لحظة الانطلاق، إذن يعود الـجسم إلى سطح الأرض بعد ٦ ثوانٍ من بدء الحركة.

تدريب ٣

حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

مثال ٤

أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض سقوطًا حرًّا؛ حيث إنَّ المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي $ف_{١}$(ن) = ٥ن^{٢} وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حيث إنَّ المسافة التي يقطعها هي $ف_{٢}$(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{٢}، جد اللحظة التي يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.

الحل

يكون الـجسمان على الارتفاع نفسه عن سطح الأرض عندما $ف_{١}$(ن) + $ف_{٢}$(ن) = ١٢٠م

٥ن^{٢}+٦٠ن − ٥ن^{٢}=١٢٠

٦٠ن = ١٢٠ ومنه ن = ٢ثانية

أي أنَّ الجسمين يكونان على الارتفاع نفسه بعد ثانيتين من بدء حركتهما.

١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ٦ن^{٢} + ٩ن + ٣، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة المقطوعة بالأمتار، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) السرعة الابتدائية للجُسيم.

ب) تسارع الـجُسيم لحظة سكونه.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ جا^{٢}($\frac{ن}{٢}$) + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ،

ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] حيث ف: المسافة بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد تسارع الـجُسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م/ث.

٣) قذف جسم رأسيًّا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث كان بعده عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو ف(ن) = ١٩,٦ن − ٤,٩ن^{٢} متر، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) أقصى ارتفاع يصل اليه الـجسم عن سطح الأرض.

ب) تسارعه في اللحظة ن.

جـ) سرعة الـجسم لحظة وصوله إلى سطح الأرض.

٤) قذف جسم رأسيًّا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد زمن ن ثانية هو ف(ن) = ١٢٨ن−١٦ن^{٢} قدم، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) مجموعة قيم ن التي تكون عندها السرعة سالبة.

ب) أقصى ارتفاع يصل اليه الـجسم عن سطح الأرض.

جـ) تسارع الـجسم عند أي لحظة.

د) سرعة الـجسم الابتدائية.

٥) قُذفَ جسم رأسيًّا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأقدام بعد ن ثانية معطى وفق العلاقة ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن^{٢}. جد سرعة الـجسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدمًا.

٦) قذف جسم رأسيًا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث إنَّ بعده عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركه معطى بالعلاقة ف(ن) = أ ن − ٥ن^{٢} بالأمتار، فجد قيمة أ علمًا بأنَّ أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٨٠ مترًا.

٧) قُذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = ٤٠ن−٥ن^{٢} حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار ، جِد كلًّا مما يأتي:

أ) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف.

ب) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض.

جـ) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.

د) متى تصبح سرعه الجسم ٣٠ م/ث ؟

هـ) متى يصبح ارتفاع الجسم ١٣٥ مترًا عن سطح الأرض؟

٨) أسقط شخص جسمًا من السكون من سطح بناية وفق العلاقة ف$_{١}$(ن) = ١٦ن^{٢}، وفي اللحظة نفسها قذف شخص ثانٍ جسمًا عموديًا إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ قدم/ث من السطح نفسه وفق العلاقة ف$_{٢}$(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^{٢} ، فإذا ارتطم الجسم الأول بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض، فجد ارتفاع البناية.

٩) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إنَّ سرعته ع = أ $\sqrt{ف}$ ، أ > ٠، ف > ٠، ف: المسافة بالأمتار، إذا علمت أنَّ تسارعه ٨م/ث^{٢}. فجد قيمة الثابت أ.

١٠) يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع^{٢}= ١ − ٢ف^{٢} حيث ع السرعة، ف المسافة بالأمتار. جد تسارع الجُسيم عندما تنعدم سرعته.

ثالثًا المعدلات المرتبطة بالزمن
Related Rates

أطلق صاروخ عموديًّا لأعلى بسرعة ١٠٠م/ث، وعلى بعد ٢٠٠متر من نقطة انطلاق الصاروخ، كان مشاهد جالسًا على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.

تعلمت سابقًا أن $\frac{ءص}{ءس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س في حالة ارتباط ص بالمتغير س، غير أنَّ هناك حالات أخرى كثيرة فيها ارتباط بين عدة متغيرات، وكلٌّ منها له علاقة بالزمن ويعبر عنها بالصيغ التالية:

$\frac{ءص}{ءن}$ معدل تغير ص بالنسبة إلى الزمن ن.

$\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة إلى الزمن ن.

تسمى هذه العلاقات **بالمعدلات المرتبطة بالزمن**، ولها تطبيقات فيزيائية وحياتية متنوعة.

مثال ١

تتحرك نقطة على منحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ - ٥س + ٣ص - ٦ = ٠$، فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة إلى الزمن ٣ سم/ث عند النقطة (١،٢)، فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها.

الحل

افرض أنَّ النقطة (س،ص) تقع على منحنى العلاقة.

المعطيات : $\frac{ءس}{ءن} = ٣$ سم/ث ، عند النقطة (١ ، ٢).

المطلوب : $\frac{ءص}{ءن}$ عند النقطة (١،٢).

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات $\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ اشتق طرفي المعادلة ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

$$\text{٢س}\ \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٢ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \text{٥}\ \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٣}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$$

$$(\text{٢ص}+\text{٣})\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + (\text{٢س}-\text{٥})\ \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٠}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٥}-\text{٢س}}{\text{٢ص}+\text{٣}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$ لماذا؟

وبتعويض $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٣}$، س=١، ص=٢ نجد أنَّ:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٣}}{\text{٧}} \times \text{٣} = \frac{\text{٩}}{\text{٧}}\ \text{سم/ث}$$

أي أنَّ معدل التغير في الإحداثي الصادي عند النقطة (١ ، ٢) يساوي $\frac{\text{٩}}{\text{٧}}$ سم/ث.

مثال ٢

قرص معدني دائريُّ الشكل يتمدد بالحرارة محافظًا على شكله، تزداد مساحة سطحه بمعدل ٦سم^{٢}/ث، جد معدل تغير طول نصف قطر القرص؛ عندما يكون طول نصف قطره ٣سم.

الحل

افرض أنَّ:

نق = طول نصف قطر القرص في اللحظة ن.

م = مساحة سطح القرص في اللحظة ن.

المعطيات: $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{٦سم}^{٢}\text{/ث}$

المطلوب: $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ عندما نق = ٣سم.

العلاقة التي تربط بين متغيرات المسألة م، نق هي:

$$\text{م} = \pi\ \text{نق}^{٢} \quad \text{........ (١)}$$

وباشتقاق طرفي العلاقة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن تحصل على:

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{٢}\pi\text{نق}\ \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} \quad \text{........(٢)}$$

وبالتعويض عن $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{٦سم}^{٢}\text{/ث}$، نق = ٣سم في العلاقة (٢) تجد أنَّ:

$$\text{٦سم}^{٢}\text{/ث} = \text{٢}\pi \times \text{٣سم} \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$$

ومنه $\frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{\pi}$ سم/ث

أي أنَّ طول نصف قطر القرص يزداد بمعدل $\frac{١}{\pi}$ سم/ث.

تدريب ١

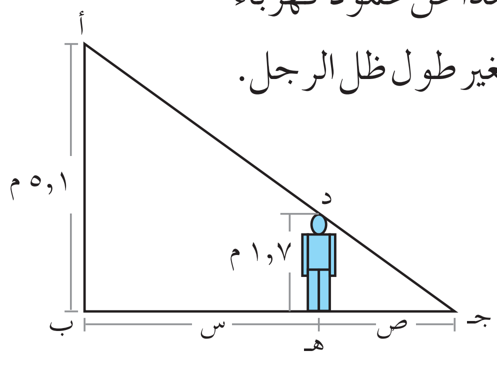
كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها، إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,٠١ سم/ث ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠سم.

٢) معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥سم.

مثال ٣

رجل طوله ١,٧ متراً، يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح، يرتفع ٥,١ أمتار عن سطح الأرض، جد معدل تغير طول ظل الرجل.



الشكل (٣-٦)

الحل

افرض أنَّ: س بُعد الرجل عن عمود الكهرباء.

ص طول ظل الرجل.

انظر الشكل (٣-٦)

حدد الثوابت والمتغيرات والمعدّلات الزمنية المعطاة والمطلوبة كما يأتي:

المعطيات:

الثوابت: طول الرجل = ١,٧ م ، طول عمود الكهرباء = ٥,١ م

المتغيرات: بُعد الرجل عن عمود الكهرباء س ، طول ظل الرجل ص .

المعدلات المعطاة: $\frac{د س}{د ن} = ٢$ م/ث

المعدلات المطلوبة: $\frac{د ص}{د ن}$

ابحث عن علاقة تربط بين المتغيرات س، ص، فتجد من خلال تشابه المثلثين أ ب جـ، د هـ جـ أن:

$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{س + ص}{ص}$ ومنه $\frac{٥,١}{١,٧} = \frac{س + ص}{ص}$ ومنه ٣ ص = س + ص

٢ص = س .... (١)

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات: $\frac{ءص}{ءن}$ ، $\frac{ءس}{ءن}$، اشتق طرفي المعادلة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

$$٢\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءس}{ءن} \text{ ، ومنه } \frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٢}\ \frac{ءس}{ءن} \text{............ (٢)}$$

وبالتعويض عن $\frac{ءس}{ءن}$ في المعادلة (٢)، تـجد أنَّ:

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$ م/ث.

أي أنَّ طول ظل الرجل يزداد بمعدل ١ م/ث.

تدريب ٢

في مثال (٣) جد معدل تغير بُعد رأس الرجل عن المصباح؛ عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار عن عمود الكهرباء.

مثال ٤

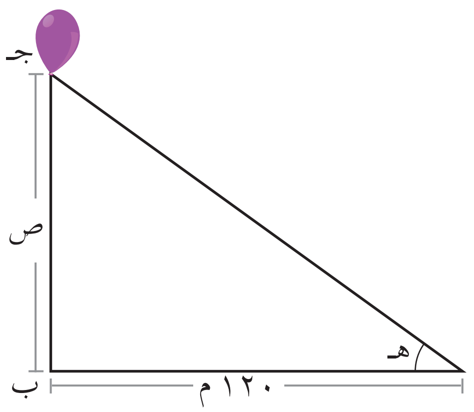
يرتفع بالون رأسيًّا إلى أعلى بمعدل ثابت قدرهُ ٤٠ م/د، رصدَهُ مشاهد يقف على الأرض، ويبعدُ ١٢٠م عن موقع البالون على الأرض، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون؛ عندما يكون البالون على ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض.

الحل

افرض أنَّ هـ زاوية ارتفاع نظر المشاهد في اللحظة ن،

وأنَّ ص ارتفاع البالون عن سطح الأرض،

انظر الشكل (٣-٧).



الشكل (٣-٧)

المعطيات: $\frac{ءص}{ءن} = ٤٠$ م/د

المطلوب: $\frac{ءهـ}{ءن}$ عندما ص = ١٢٠م

العلاقة التي تربط بين المتغيرين ص، هـ هي ظاهـ = $\frac{ص}{١٢٠}$ .... (١)

وباشتقاق العلاقة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن نجد أنَّ:

$$\text{قا}^2\text{هـ} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{1}{120} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \quad \text{.........} \quad (2)$$

عندما ص = ١٢٠م يصبح المثلث القائم متطابق الضلعين، فعندئذ تصبح هـ $= \frac{\pi}{4}$ ، وبالتالي

قا^{2}هـ = ٢، وبالتعويض في المعادلة (٢) تجد أنَّ:

$$2 \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{1}{120} \times 40 \quad \text{ومنه} \quad \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}} = \frac{1}{6} \text{ راديان/ ث.}$$

تدريب ٣

مثلث متطابق الضلعين طول كلٍّ من ضلعيه المتطابقين ٨سم ، يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل ٢°/د، جد معدل التغير في مساحة المثلث في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°.

٢) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°.

قارن بين الإجابتين وفسر ذلك.

مثال ٥

دائرتان متحدتان في المركز، طولا نصفي قُطريهما ٥سم، ٢٠سم، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢سم/د، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١سم/د، جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما.

الحل

افرض أنَّ الزمن لتغيرهما هو ن دقيقة

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٥+٢ن — لماذا؟

طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢٠ −ن — لماذا؟

م(ن) المساحة المحصورة بينهما

$$\text{م(ن)} = \pi(20 - \text{ن})^2 - \pi(5 + 2\text{ن})^2$$

المطلوب: $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ عندما م = ٠ أي عندما ٢٠ −ن = ٥ + ٢ن

ومنه ٣ن = ١٥

∴ ن = ٥ دقائق.

$\frac{د م}{د ن} = -٢ \pi (٢٠ - ن) - ٤ \pi (٥ + ٢ ن)$

عندما ن = ٥، فإنَّ $\frac{د م}{د ن} = -٢ \pi (٢٠ - ٥) - ٤ \pi (٥ + ١٠) = -٩٠ \pi$ سم^٢/د

فكر وناقش

ما دلالة الإشارة السالبة التي حصلت عليها في حل مثال(٥)؟

وبصورة عامة، لحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يمكنك اتباع الخطوات الآتية:

١) ارسم شكلًا تقريبيًا للمسألة موضّحًا عليه البيانات المعطاة، إن أمكنك ذلك.

٢) حدد الثوابت والمتغيرات، والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة.

٣) ابحث عن علاقة رياضية مستعينًا بالرسم تربط متغيرات المسألة؛ بحيث تكون معدلات جميع متغيرات المسألة معلومة باستثناء المعدل المطلوب إيجاده.

٤) عوِّض عن الثوابت في العلاقة التي حصلت عليها قبل إجراء عملية الاشتقاق لطرفيها في حالات معينة تتطلب ذلك.

٥) اشتقَّ طرفي العلاقة التي حصلت عليها بالنسبة إلى الزمن؛ للحصول على علاقة أخرى تربط بين المعدلات.

٦) عوِّض بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب.

١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠٠١ سم/ث، جد معدل التغير في كلٍّ من حجمه ومساحته الكلية؛ عندما يكون طول ضلعه ١٠سم.

٢) يرتكز سلم طوله ٥ أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم؛ عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م عن الحائط.

٣) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦سم، وطول نصف قطر قاعدته ٨سم، صُبَّ فيه سائل بمعدل ١٢سم^{٣}/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨سم.

٤) انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما (١٢٠°)، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠كم/ساعة، وسرعة الثانية ٤٠كم/ساعة، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦كم، ٨كم على الترتيب.

٥) بدأت النقطتان أ، ب الحركة معًا من نقطة الأصل (م)؛ بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث، وتتحرك النقطة أ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣}، بحيث تبقى $\overline{\text{أب}}$ دائمًا عموديّة على محور السينات الموجب، جد:

أ) معدل التغير في مساحة المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (٥، ٠) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥،٠)؛ عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$ راد .

٨) تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤سم/ث، رُسِمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه ، وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع، عندما يكون طول ضلع المربع ١٠سم.

٩) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي، المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢ م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني.

الفصل الثاني

تطبيقات عملية على التفاضل

Applications of Derivative

النتاجات

- تحدد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- تحدد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى، إن وجدت، لاقتران معطى.
- تتعرف مفهوم التقعر ونقط الانعطاف، وتحدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
- تستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
- تحل مسائل عملية على القيم القصوى.

أولًا النقط الحرجة Critical Points

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = | س^٢ − ٢س |، س ∈ [١، ٣].

سيتناول هذا الدرس تطبيقًا آخر للمشتقة الأولى، وهو **النقط الحرجة**.

تعريف

إذا كانت س$_١$ ضمن مجال الاقتران ق، فإنَّ القيمة س$_١$ تسمى **قيمة حرجة** للاقتران ق إذا تحقق أنَّ:
قَ (س$_١$) = ٠ أو قَ (س$_١$) غير موجودة. وفي هذه الحالة تسمى النقطة (س$_١$،ق(س$_١$)) **نقطة حرجة** للاقتران ق.

مثال ١

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = ٣س^٢ - س^٣$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

الحل

$قَ(س) = ٦س - ٣س^٢$ ، $قَ(س) = ٠$ عندما $٦س - ٣س^٢ = ٠$ ومنه:

$٣س(٢ - س) = ٠$ أي عند: س = ٠، س = ٢ وكلاهما في الفترة [−٢، ٣]

وتكون قَ(س) غير موجودة عندما س = −٢، س = ٣ (أطراف الفترة)

وعليه يكون للاقتران ق أربع نقط حرجة هي: (−٢، ٢٠)، (٠، ٠)، (٢ ، ٤)، (٣، ٠)

تدريب ١

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = س^٣ - ١٢س + ١$، س ∈ [−٣، ٣]

مثال ٢

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = جا س - \frac{١}{٣} جا^٣ س$ ، س ∈ [٠ ، π]

الحل

$قَ(س) = جتا س - جا^٢س جتا س = جتا س(١ - جا^٢س)$، $قَ(س) = جتا^٣س$

قَ(س) = ٠ عندما:

جتا س = ٠ أي عند $س = \frac{\pi}{٢}$

وتكون قَ(س) غير موجودة عندما س = ٠، س = π (أطراف الفترة)

وعليه يكون للاقتران ق ثلاث نقط حرجة هي:

$(٠، ٠)$ ، $(\frac{\pi}{٢}، \frac{٢}{٣})$ ، $(\pi، ٠)$.

تدريب ٢

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = جا س - جا^٢س$ ، س ∈ [٠ ، π]

مثال ٣

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{٤ - س^٢}$ ، س ∈ [−٣، ٣]

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٢}{٣} \times \frac{\text{س}}{\sqrt[٣]{(٤ - \text{س}^{٢})^{٢}}} \text{ ،}$$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٠$ عندما البسط $= ٠$ أي أنَّ $\text{س} = ٠$

وتكون $\text{ق}'(\text{س})$ غير موجودة عندما المقام $= ٠$، وعند أطراف الفترة، أي عندما

$\text{س} = -٢$، $\text{س} = ٢$، $\text{س} = -٣$، $\text{س} = ٣$ وعليه يكون للاقتران خمس نقط حرجة هي:

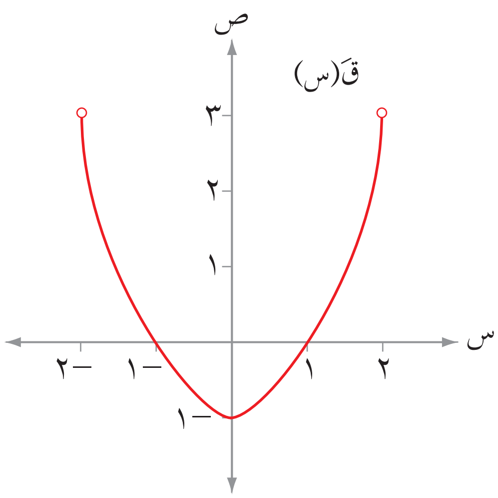
$(-٣، \sqrt[٣]{-٥})$، $(-٢، ٠)$، $(٠، \sqrt[٣]{٤})$، $(٢، ٠)$، $(٣، \sqrt[٣]{-٥})$

تدريب ٣

جد النقط الحرجة للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ، $\text{س} \in [-٢، ٢]$

مثال ٤

يمثل الشكل (٣-٨) منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعرف على الفترة $[-٢، ٢]$ اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.



الشكل (٣-٨)

الحل

للاقتران نقط حرجة عندما $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$، أو غير موجودة (ويكون ذلك عند المقطع السيني لمنحنى المشتقة الأولى وأطراف الفترة)

أي عندما $\text{س} = -١، ١، -٢، ٢$

وعليه يكون للاقتران أربع نقط حرجة هي:

$(-١، \text{ق}(-١))$، $(١، \text{ق}(١))$، $(-٢، \text{ق}(-٢))$، $(٢، \text{ق}(٢))$.

تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١) جد النقط الحرجة لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $س^٤ - ٤س + ١$ ، س ∈ [−٢، ٢]

ب) ق(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠، ٢π]

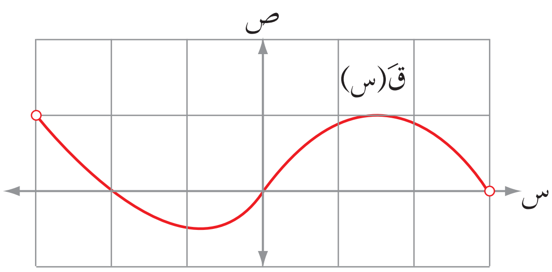
جـ) ق(س) = $س^٢ |س − ١|$ ، س ∈ [−٣، ٢]

د) ق(س) = $\sqrt{جتا^٢ س}$ ، س ∈ [٠ ، π]

هـ) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، −٢ \leq س \leq ١ \\ ٢س & ، ١ < س \leq ٢ \end{cases}$

٢) جد قيم أ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = $س^٣ + أ س^٢ + ب س$ نقطتين حرجتين عند س = −١، س = ٣.

٣) يمثل الشكل (٣−٩) منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرَّف على الفترة[−٣،٣] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.



الشكل (٣−٩)

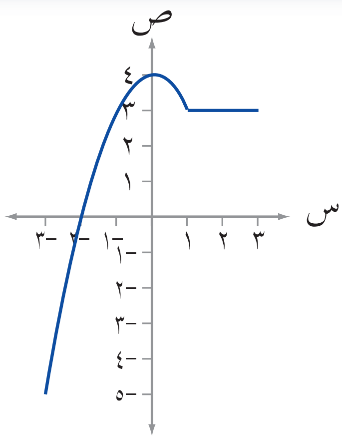
٤) جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٣ + ١}$

ثانيًا التزايد والتناقص Increasing and Decreasing

اعتمادًا على الشكل (٣-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ &، \quad -٣ \leq س \leq ١ \\ ٣ &، \quad ١ < س \leq ٣ \end{cases}$$

صف سلوك منحنى الاقتران ق كلما زادت قيم س في الفترة [-٣، ٣]



الشكل (٣-١٠)

لاحظ من خلال الشكل (٣-١٠) ما يأتي:

١) في الفترة [-٣، ٠] كلما زادت قيم س زادت قيم ق(س)، وفي هذه الحالة يكون ق متزايدًا على الفترة [-٣، ٠] مثلًا -٢ < -١ وأيضًا ق (-٢) < ق (-١).

٢) وفي الفترة [٠، ١] كلما زادت قيم س نقصت قيم ق(س)، وفي هذه الحالة يكون ق متناقصًا على الفترة [٠، ١] مثلًا $\frac{١}{٢}$ < ١ ، وأيضًا ق ($\frac{١}{٢}$) > ق (١).

٣) في الفترة [١، ٣] كلما زادت قيم س بقيت قيم ق(س) ثابتة، وفي هذه الحالة يكون ق ثابتًا على الفترة [١، ٣] مثلًا $\frac{٣}{٢}$ < ٢، ولكن ق ($\frac{٣}{٢}$) = ق(٢).

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ، ب] وكان $س_١$، $س_٢$ ∈ [أ، ب]، عندئذٍ يكون الاقتران ق:

١) متزايدًا على الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_١$) < ق($س_٢$) لكلِّ $س_١$ < $س_٢$

٢) متناقصًا على الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_١$) > ق($س_٢$) لكلِّ $س_١$ < $س_٢$

٣) ثابتًا على الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_١$) = ق($س_٢$) لكلِّ $س_١$ < $س_٢$

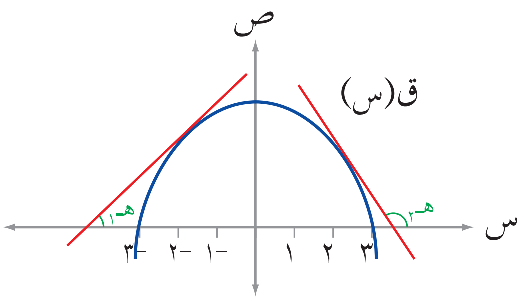
ومن التعريف لاحظ أنَّ الاقتران ق يكون متزايدًا عندما يصعد منحناه إلى الأعلى كلما تحركت س إلى اليمين، ويكون متناقصًا عندما يهبط منحناه إلى أسفل كلما تحركت س إلى اليمين.

في الشكل (٣-١١) إذا رسمت مماسًّا لمنحنى ق في الفترة (−٣،٠) تجد أنَّ المماسَّ يصنع زاوية حادة (هـ$_{١}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ومنه ظاهـ$_{١}$ > ٠، ماذا تتوقع أن تكون إشارة قَ(س)؟

وإذا رسمت مماسًّا لمنحنى ق في الفترة (٠،٣) نجد أنَّ المماس يصنع زاوية منفرجة (هـ$_{٢}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السنات.

ومنه ظاهـ$_{٢}$ < ٠، ماذا تتوقع أن تكون إشارة قَ(س)؟



الشكل (٣-١١)

نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ،ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ،ب) وكان:

١) قَ(س) > ٠، لجميع قيم س ∋ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون متزايدًا على الفترة [أ ، ب].

٢) قَ(س) < ٠، لجميع قيم س ∋ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون متناقصًا على الفترة [أ ، ب].

٣) قَ(س) = ٠، لجميع قيم س ∋ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون ثابتًا على الفترة [أ ، ب].

يمكنك من خلال هذه النظرية تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق، وذلك بإيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق ، ودراسة إشارتها كما في الأمثلة الآتية:

مثال ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س ، س ∋[−٢ ، ٢]

الحل

ق اقتران متصل على الفترة [−٢ ، ٢] وقابل للاشتقاق على الفترة (−٢ ، ٢) لأنَّه على صورة كثير حدود

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٣، قَ(س) = ٠، عندما ٣(س − ١)(س + ١) = ٠

∴ س = −١، س = ١

يبين الجدول (٣-١) إشارة قَ(س)، وبتطبيق النظرية أعلاه تجد أنَّ:

الجدول (٣-١)

ق(س)		↗		↘		↗	
إشارة قَ(س)	غير موجودة	+ + +	٠	− − −	٠	+ + +	غير موجودة
قيم س	−٢		−١		١		٢

١) قَ(س) > ٠ على الفترة (−٢ ، −١)، والفترة (١ ، ٢) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين [−٢ ، −١] ، [١ ، ٢].

٢) قَ(س) < ٠ على الفترة (−١ ، ١) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة [−١ ، ١]

والجدول (٣−١) يوضح إشارة قَ(س) وفترات تزايد الاقتران ق، ويعبر عن التزايد بالرمز (↗)، كما يوضح الجدول فترات تناقص الاقتران ق، ويعبر عن التناقص بالرمز (↘).

لاحظ أنَّه لتحديد إشارة المشتقة الأولى على فترة معينة بين نقطتين حرجتين؛ تقوم باختبار إشارة المشتقة الأولى عند أي قيمة داخل الفترة وما تحصل عليه من إشارة لهذه القيمة يمثل إشارة المشتقة الأولى على كل هذه الفترة.

تدريب ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = ٣س^{٢}ـ س^{٣}ـ ٢

مثال ٢

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = جتاس، س ∈[٠ ، ٢π]

الحل

ق اقتران متصل على الفترة [٠ ، ٢π] وقابل للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٢π)

قَ(س) = − جاس

قَ(س) = ٠، عندما س = π

الجدول (٣−٢)

قيم س	٠		π		٢π
إشارة قَ(س)	غير موجودة	− − −	٠	+ + +	غير موجودة
ق(س)		↘		↗	

والجدول (٣−٢) يبين إشارة قَ(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

قَ(س) < ٠، لكلِّ س ∈ (٠ ، π) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة [٠ ، π]

قَ(س) > ٠، لكلِّ س ∈ (π ، ٢ π).

وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترة[π ، ٢ π].

تدريب ٢

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = جا^{٢}س، س ∈ [٠ ، ٢ π].

مثال ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: $ق(س) = \sqrt[3]{س^{3} - 6س^{2}}$

الحل

ق اقتران متصل على ح.

$$ق'(س) = \frac{س^{2} - 4س}{\sqrt[3]{(س^{3} - 6س^{2})^{2}}}$$

$ق'(س) = 0$ عندما البسط $= 0$،

ومنه $س^{2} - 4س = 0$، أي أن $س = 4$ ، $س = 0$ تهمل (لماذا؟)

$ق'(س)$ غير موجودة عند أصفار المقام أي عند $س = 0$، $س = 6$

والجدول (٣–٣) يبين إشارة $ق'(س)$، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

الجدول (٣–٣)

ق(س)	↗		↘		↗		↗
إشارة ق'(س)	+ + +	غير موجودة	− − −	•	+ + +	غير موجودة	+ + +
قيم (س)		٠		٤		٦	

$ق'(س) > 0$ ، لكلِّ $س \in (-\infty ، 0)$، $(4 ، \infty)$ وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين $(-\infty ، 0]$، $[4 ، \infty)$

$ق'(س) < 0$ ، لكلِّ $س \in (0 ، 4)$ وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة $[0 ، 4]$.

تدريب ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: $ق(س) = \sqrt[3]{س - 1}$ ، $س \in ح$.

مثال ٤

إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} س^{2} + 6س + 4 & ، \quad س \leq 0 \\ [س + 4] & ، \quad 0 < س < 1 \\ |3س + 1| & ، \quad س \geq 1 \end{cases}$$

فحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق على مجاله.

الحل

أعد تعريف الاقتران ق(س) =
$$\begin{cases} \text{س}^{٢}+٦\text{س}+٤ & \text{،} \quad \text{س} \leq ٠ \\ ٤ & \text{،} \quad ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س}+١ & \text{،} \quad \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

ق(س) اقتران متصل على ح

قَ(س) =
$$\begin{cases} ٢\text{س}+٦ & \text{،} \quad \text{س} < ٠ \\ ٠ & \text{،} \quad ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣ & \text{،} \quad \text{س} > ١ \\ \text{غير موجودة} & \text{،} \quad \text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ١ \end{cases}$$

تكون قَ(س) غير موجودة عندما س = ٠، س = ١

قَ(س) = ٠، عندما ٢س+٦ = ٠، أي أنَّ س = −٣

الجدول (٣−٤)

قيم س	(١ ، ∞)	١	(٠ ، ١)	٠	(−٣ ، ٠)	−٣	(−∞ ، −٣)
إشارة قَ(س)	+ + +	غير موجودة	صفر	غير موجودة	+ + +	٠	− − −
ق(س)	↗		→		↗		↘

والجدول (٣−٤) يبين إشارة قَ(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

قَ(س) < ٠، لكلِّ س ∈ (−∞ ، −٣) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة (−∞ ، −٣]

قَ(س) > ٠، لكلِّ س ∈ (−٣ ، ٠)، (١ ، ∞) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين [−٣ ، ٠]، [١ ، ∞)

قَ(س) = ٠، لكلِّ س ∈ (٠ ، ١) وعليه يكون ق(س) اقترانًا ثابتًا على الفترة [٠ ، ١]

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٤س − $س^{٢}$ ، س ∈ ح.

ب) ق(س) = |$س^{٢}$ − ٩| ، س ∈ [−٥ ، ٥]

جـ) ق(س) = $جتا^{٢}$س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

د) ق(س) = $(١ - س)^{٣}$ ، س ∈ ح.

هـ) ق(س) = $(٢ - س)^{٤}$ ، س ∈ ح.

و) ق(س) = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٥ ، ٥]

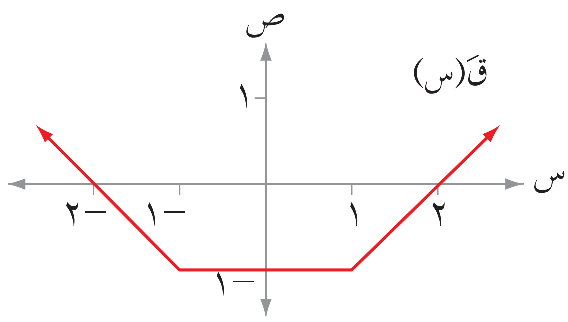
ز) ق(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٤)^{٢}}$ ، س ∈ ح.

ح) ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

ط) ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، س \le ١ \\ \frac{٢}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

ي) ق(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٣} & ، س < ١ \\ \frac{٣}{س} & ، س \ge ١ \end{cases}$

٢) يمثل الشكل (٣−١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق،حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

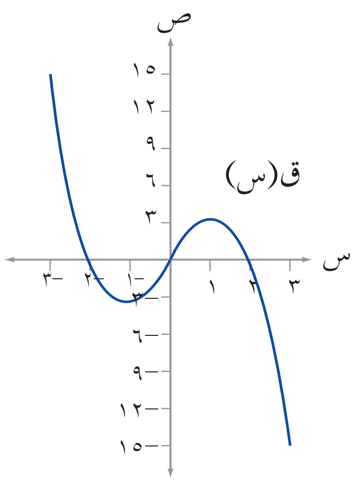


الشكل (٣−١٢)

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + $س^{٣}$، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

ثالثًا القيم القصوى Extreme Values

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = |١ − س٢| ، س ∈[−٣، ٤].



الشكل (٣-١٣)

من خلال تأمل الشكل (٣-١٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٤س − س٣، س ∈ [−٣ ، ٣] ، يمكنك التحقق من أنَّ:

١) ق($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق.

٢) ق(−٣) هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [−٣ ، ٣]، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى مطلقة** للاقتران ق.

٣) ق ($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) هي أصغر قيمة للاقتران ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق.

٤) ق(٣) هي أصغر قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [−٣ ، ٣]، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى مطلقة** للاقتران ق.

تعلّم

تسمى القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتران **قيمًا قصوى محلية**، كذلك تسمى القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للاقتران **قيمًا قصوى مطلقة**.

فكر وناقش

معتمدًا الشكل السابق (٣-١٤)، ما العلاقة بين النقط الحرجة للاقتران ق وقيمه القصوى؟

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ ، ب]، وكان $س_١$ ∋ [أ ، ب]، فإنَّ:

١) ق($س_١$) **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق، إذا وُجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي $س_١$، وكان ق($س_١$) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∋ ف.

٢) ق($س_١$) **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق، إذا وُجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي $س_١$، وكان ق($س_١$) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∋ ف.

٣) ق($س_١$) **قيمة عظمى مطلقة** للاقتران ق،إذا كان ق($س_١$) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∋[أ ، ب].

٤) ق($س_١$) **قيمة صغرى مطلقة** للاقتران ق،إذا كان ق($س_١$) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∋[أ ، ب].

نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ ، ب] وكانت ق(جـ) قيمة قصوى للاقتران ق حيث جـ ∋[أ ، ب]، فإنَّ قَ(جـ) غير موجودة أو قَ (جـ)= ٠

نظرية

نظرية (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكانت النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق، حيث جـ ∋ (أ،ب) عندئذٍ:

١) إذا كان قَ(س) ≤ ٠ لكلِّ س < جـ وكان قَ(س) ≥ ٠ لكلِّ س > جـ ، فإنَّ:
ق(جـ) تكون **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق.

٢) إذا كان قَ(س) ≥ ٠ لكلِّ س < جـ وكان قَ(س) ≤ ٠ لكلِّ س > جـ ، فإنَّ:
ق(جـ) تكون **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق.

والأمثلة الآتية توضح ذلك.

مثال ١

جد قيم س الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ١ ، س ∈[−٢ ، ٤].

الحل

لاحظ أنَّ الاقتران ق كثير حدود؛ فهو متصل على الفترة [−٢ ، ٤]، وقابل للاشتقاق على الفترة(−٢، ٤) حيث

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س

قَ(س) = ٠ إذن ٣س^{٢}− ٦س =٠

٣س(س−٢) = ٠، أي عندما س = ٠ ، س =٢

وتكون قَ(س) غير موجودة. عندما يكون س = −٢، س =٤ (طرفَيْ فترة).

ومن الجدول (٣−٥)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى عند قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق.

تجد أنَّ للاقتران ق:

الجدول (٣−٥)

ق(س)		↗		↘		↗	
إشارة قَ(س)	غير موجودة	+ + +	•	− − −	•	+ + +	غير موجودة
قيم(س)	−٢		٠		٢		٤

قيمة عظمى محلية عند س = ٠ وهي ق(٠) = ١

قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وهي ق(٢) = −٣

قيمة عظمى مطلقة عند س =٤ وهي ق(٤) = ١٧ (طرف فترة ولا تعتبر قيمة عظمى محلية)

قيمة صغرى مطلقة عند س = −٢ وهي ق(−٢) = −١٩ (طرف فترة ولا تعتبر قيمة صغرى محلية)

تدريب ١

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٦س^{٢} ـ س^{٣} ـ ٩س + ٢، س ∈[−١ ، ٥].

مثال ٢

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) =٤س− س^{٢}+١

الحل

ق(س) كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح.

يكون للاقتران نقط حرجة عند قَ(س) = ٠ ، قَ(س) = ٤−٢س = ٠

ومنه س = ٢

إذن النقطة الحرجة هي (٢ ، ٥)

ومن الجدول (٣−٦)، الذي يوضح إشارة قَ(س) وحسب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أنَّ للاقتران ق: قيمة عظمى محلية، ومطلقة عند س = ٢ وهي ق(٢) = ٥ .

الجدول (٣−٦)

ق(س)	↗ ↘
إشارة قَ(س)	+++ ⁝ −−−
قيم س	٢

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

جد القيم القصوى المحليه والمطلقة (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣}س، س ∈[٠ ، ٢π]

الحل

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، ٢π]، وقابل للاشتقاق لكلٍّ س ∈(٠، ٢π)

حيث قَ(س) = −جاس + جتا^{٢}س جاس

قَ(س) = −جا^{٣}س (لماذا؟)

جد النقط الحرجة للاقتران وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أنَّ:

قَ(س) = ٠ عندما − جا^{٣}س = ٠ ، ومنه س = π

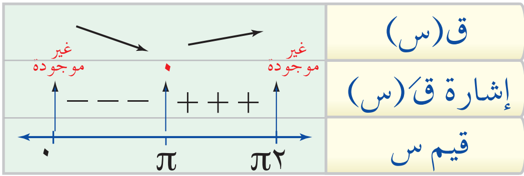
قَ(س) غير موجودة عند س = ٠ ، ٢π

إذن النقط الحرجة للاقتران ق هي: (٠ ، $\frac{٢}{٣}$)، (π ، −$\frac{٢}{٣}$)، (٢π ، $\frac{٢}{٣}$)

ومن الجدول (٣–٧) الذي يوضح إشارة قَ(س)

وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى نجد أنَّ للاقتران ق:

الجدول (٣–٧)



قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = π

هي ق(π) = − $\frac{٢}{٣}$

وقيمة عظمى مطلقة عند س = ٠ ، ٢π هي $\frac{٢}{٣}$.

تدريب ٣

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س + ٢ جاس، س∈[٠ ، π] .

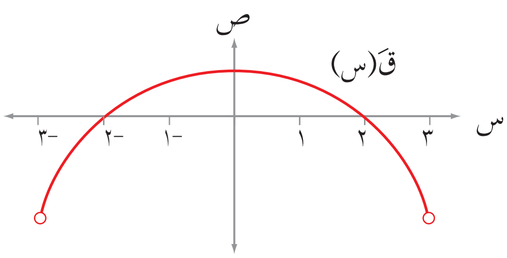
مثال ٤

معتمدًا الشكل (٣–١٤) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرف على الفترة [−٣، ٣]، جد كلًّا مما يأتي:

١) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

٣) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية .



الشكل (٣–١٤)

الحل

١) للاقتران ق نقط حرجة عندما قَ(س) = ٠ أو غير موجودة

أي عندما س = −٣، س = −٢، س = ٢، س = ٣ (لماذا؟)

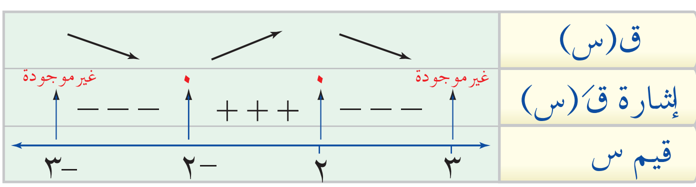
وعليه فإنَّ مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق هي {−٣،−٢،٢،٣}

٢) من جدول الإشارات (٣–٨)، الذي يوضح إشارة قَ(س) نجد أنَّ:

ق اقتران متناقص في الفترتين [−٣ ، −٢]، [٢ ، ٣]

ق اقتران متزايد في الفترة [−٢ ، ٢]

الجدول (٣–٨)



٣) يوجد للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = −٢

يوجد للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٢

١) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وُجدت)، لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ٩$ ، $س \in [٠ ، ٥]$

ب) $ق(س) = س^{٣} - ١٢س$ ، $س \in [-٤ ، ٤]$

جـ) $ق(س) = (٢ - س)^{٣}$ ، $س \in [٠ ، ٤]$

د) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، -٢ \leq س < ٣ \\ ٣س + ١ & ، ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

هـ) $ق(س) = |(س - ١)^{٣}|$ ، $س \in [-١ ، ٣]$

و) $ق(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - \frac{١}{٣}س^{٣}$ ، $س \in [٠ ، ٣]$

ز) $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، $س \in [-٨ ، ١]$

ح) $ق(س) = س + جاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ط) $ق(س) = (١ - س)^{٣}$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$

ي) $ق(س) = (١ - س)^{٤}$ ، $س \in [-٣ ، ٣]$

٢) إذا كان لاقتران كثير الحدود ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٣)، بيِّن أنَّ للاقتران $هـ(س) = (١ - ق(س))^{٣}$ قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، -٨).

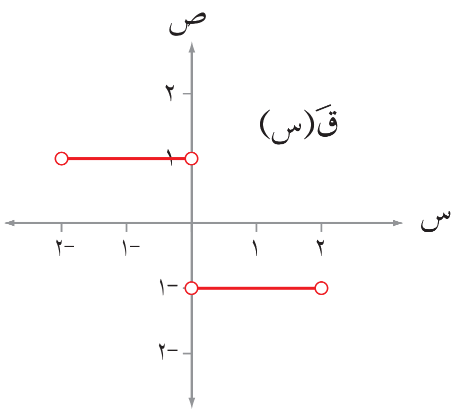
٣) معتمدًا الشكل (٣–١٥) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على الفترة [–٢، ٢]

جد كلًّا مما يأتي:

أ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.



الشكل (٣–١٥)

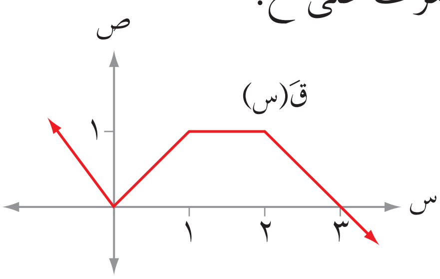
٤) يمثل الشكل (٣–١٦) منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المعرَّف على ح.

اعتمد على ذلك في إيجاد كلٍّ مما يأتي:

أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.



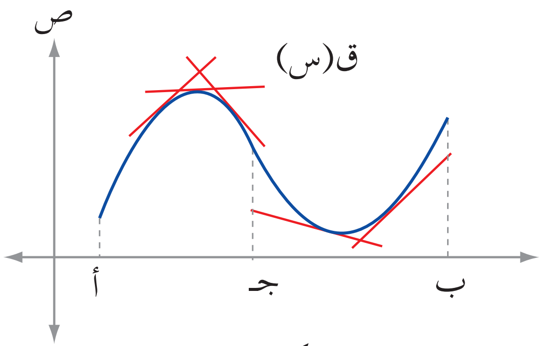
الشكل (٣–١٦)

إذا كان ق(س) = ٢جتاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س ، س ∈[٠ ، ٢ π] ، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق.

تعلمت سابقًا بعض تطبيقات المشتقة الأولى، مثل: إيجاد فترات التزايد والتناقص لمنحنيات الاقترانات.

وفي هذا الدرس ستتعرف بعض تطبيقات المشتقة الثانية للاقتران مثل: معرفة نوع تقعر منحنى الاقتران، وتعيين نقط الانعطاف لمنحناه، بالإضافة إلى تمييز القيم القصوى للاقتران، وسيتم توضيح ذلك في ما يأتي:

يبين الشكل (٣-١٧) منحنى الاقتران ق، المعرَّف على الفترة [أ ، ب]، القابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)، ويعني ذلك أنَّ لمنحنى ق عددًا كبيرًا من المماسَّات على الفترة (أ ، ب) عند النقط (س، ق(س))، حيث س ∈ (أ ، ب).



الشكل (٣-١٧)

لاحظ أنَّ جميع المماسات المرسومة عند النقط (س ، ق(س))، حيث س ∈ (أ،جـ) تقع جميعها فوق منحنى الاقتران ق. ويقال في هذه الحالة إنَّ منحنى الاقتران ق(س) **مقعر للأسفل** على الفترة [أ ، جـ].

ولاحظ أنَّ جميع المماسات المرسومة عند النقط (س ، ق(س))، حيث س ∈ (جـ ، ب) تقع جميعها تحت منحنى الاقتران ق. ويقال في هذه الحالة إنَّ منحنى الاقتران ق(س) **مقعر للأعلى** على الفترة [جـ ، ب].

تعريف

ليكن ق اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ، ب) فيكون منحنى ق:

١) مقعرًا للأسفل على الفترة [أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران ق في الفترة [أ ، ب].

٢) مقعرًا للأعلى على الفترة [أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الاقتران ق في الفترة [أ ، ب].

وبالرجوع إلى شكل (٣-١٧) لاحظ أنَّ منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل على الفترة [أ، جـ]، وتجد أنَّه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس(س، ق(س)) نَقَصَ ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة، أي أنَّ قَ(س) اقتران متناقص على الفترة (أ ، جـ)، ومنه تكون إشارة قً(س) سالبة على (أ ، جـ)، أي أنَّ قً(س) < ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، جـ).

وبالمثل لاحظ أنَّ منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى على الفترة [جـ ، ب] ، وأنَّه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس(س، ق(س)) زاد ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة، أي أنَّ قَ(س) اقتران متزايد على الفترة (جـ ، ب)، ومنه تكون مشتقة قَ (س) موجبة على الفترة (جـ ، ب)، أي أن قً(س) > ٠، لكلِّ س ∋ (جـ ، ب).

تذكر

ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = $س_١$ يساوي قَ($س_١$).

قَ($س_١$) = ظا هـ ، حيث هـ زاوية ميل المماس عند $س_١$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

نظرية

(اختبار التقعر)

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب]، ، وكان كلٌّ من قَ(س)، قً(س)، معرّفين على الفترة (أ ، ب) فإنّهَ :

١) يكون منحنى الاقتران ق مقعرًا للأسفل على الفترة[أ ، ب]، إذا كان قً(س) < ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، ب)

٢) يكون منحنى الاقتران ق مقعرًا للأعلى على الفترة[أ ، ب]، إذا كان قً(س) > ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، ب)

مثال ١

إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٣س + ١ ، جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق .

الحل

يمكنك تحديد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق ، من خلال إشارة مشتقته الثانية.

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س + ٣

قً(س) = ٦س − ٦

وتكون قً(س) = ٠، عندما ٦س − ٦ = ٠، أي أنَّ س = ١

ومن الجدول (٣−٩)، الذي يوضح إشارة قً وحسب اختبار التقعر تجد أنَّ:

منحنى الاقتران مقعر للأسفل على الفترة (−∞ ، ١] لأنَّ قً(س) < ٠،

لكل س ∈ (−∞ ، ١).

ومقعر للأعلى على الفترة [١ ، ∞) لأنَّ قً (س) >٠،

لكلِّ س ∈ (١ ، ∞).

الجدول (٣−٩)

ق(س)	∪		∩
إشارة قً(س)	+ + +	٠	− − −
قيم س	∞	١	−∞

تدريب ١

جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق،

حيث ق(س) = س^{٤} − ٦س^{٣} + ١٢س^{٢}، س ∈ [−٥ ، ٥].

مثال ٢

حدد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{\frac{١}{٥}}$ ، س ∈[−٢ ، ٢].

الحل

قَ(س) = $\frac{١}{٥}$ س$^{\frac{-٤}{٥}}$

قً(س) = $\frac{-٤}{٢٥}$ س$^{\frac{-٩}{٥}}$ = $\frac{-٤}{٢٥}$ × $\frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٩}}}$

لاحظ من خلال إشارة قً(س) حول س=٠ في الجدول (٣ – ١٠) أنَّ منحنى ق مقعر للأعلى على الفترة [–٢ ، ٠] ، ومقعر للأسفل على الفترة [٠ ، ٢]

الجدول (٣–١٠)

ق(س)	∩		∪
إشارة قً(س)	– – –	غير موجودة	+ + +
قيم س	٢	٠	–٢

تدريب ٢

ليكن ق(س)= س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، جد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق.

من خلال المثالين (١)، (٢)، السابقين لا بد أنَّك لاحظت أنَّ منحنى ق يغيِّر من اتجاه تقعره حول نقطة في مجاله؛ فقد غيَّر اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى حول النقطة (١ ، ٢) في المثال(١)، كما أنَّه غيَّر اتجاه تقعره من أعلى إلى أسفل حول النقطة (٠ ، ٠) في المثال (٢)، وتسمى كلٌّ من هذه النقط التي يغير الاقتران ق اتجاه تقعره حولها **نقطةَ انعطاف**.

تعريف

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على فترة مفتوحة تحوي س$_١$، وكان منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند س$_١$ فإنَّ النقطة (س$_١$، ق(س$_١$)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق.

مثال ٣

جد نقط الانعطاف لمنحنى ق حيث:

ق (س) = س^٤ – ٦س^٢ + ١ ، س ∈ ح

الحل

الاقتران ق كثير حدود؛ فهو متصل لكلِّ س ∈ ح

وتكون قَ ، قً معرَّفتين لكلِّ س ∈ ح حيث:

قَ(س) = ٤س^٣ – ١٢ س

قً(س) = ١٢س^٢ – ١٢

وتكون قً (س) = ٠ عندما ١٢س^٢ – ١٢=٠

ومنه ١٢(س – ١)(س + ١) =٠، ومنه س=–١، س = ١

ومن خلال دراسة إشارة قً في الجدول (٣ – ١١) نلاحظ أنَّ ق يغير اتجاه تقعره عند س = –١، وعند س = ١ ، لذلك فإنَّ: (–١، –٤)، (١ ، –٤) نقطتا انعطاف.

الجدول (٣–١١)

ق(س)	∪		∩	∪
إشارة قً(س)	+++	───		+++
قيم (س)	∞–	١–	١	∞

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = ٦ س^{٣} – س^{٤}، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وُجدت).

مثال ٤

جد قيم س التي يكون لمنحنى الاقتران ق عندها نقط انعطاف، حيث:

ق(س) = ٢ جاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س، س ∈ [٠ ، ٢ π]

الحل

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، ٢ π] ، وقابل للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٢ π)

لايجاد نقط الانعطاف جد قً لتحديد فترات التقعر لأعلى و لأسفل.

قَ(س) = ٢ جتاس + جتا٢س

قً(س) = –٢ جاس – ٢ جا٢س

وتكون قً(س) = ٠

إذن –٢ جاس – ٢ جا٢س = ٠

–٢ جاس – ٤ جاس جتاس = ٠

–٢ جاس(١ + ٢ جتاس) = ٠

إما –٢ جاس = ٠ أو ١ + ٢ جتاس = ٠

ومنه، س = ٠ ، π ، ٢ π (ترفض القيم ٠ ، ٢π لماذا ؟) ، أو س = $\frac{٢π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$

الجدول (٣–١٢)

ق(س)	∩	∪		∩	∪
إشارة قً(س)	غير موجودة ───	+++	───	+++ غير موجودة	
قيم (س)	٠	$\frac{٢π}{٣}$	π	$\frac{٤π}{٣}$	٢π

ومن خلال دراسة إشارة قً(س) في الجدول (٣ – ١٢) لاحظ أنَّ منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند س = $\frac{٢π}{٣}$ ، س = π ، س = $\frac{٤π}{٣}$، لذلك فإنَّ للاقتران ق ثلاث نقط انعطاف عند س = $\frac{٢π}{٣}$ ، س = π ، س = $\frac{٤π}{٣}$

تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

بالإضافة إلى التطبيقات السابقة تُستخدم إشارة المشتقة الثانية للاقتران ق في تمييز القيم القصوى المحلية للاقتران، والنظرية الآتية توضح ذلك.

تعريف

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية:

على فرض أنَّ المشتقة الأولى قَ(س)، والمشتقة الثانية قً(س)، للاقتران ق(س) معرَّفتان عند $س_1 \in (أ، ب)$ عندئذٍ:

١) إذا كان قَ($س_1$) = ٠، و قً($س_1$) > ٠، فإنَّ للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند $س_1$ هي ق($س_1$)

٢) إذا كان قَ($س_1$) = ٠، و قً($س_1$) < ٠، فإنَّ للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند $س_1$ هي ق($س_1$)

٣) إذا كان قَ($س_1$) = ٠، و قً($س_1$) = ٠ ، فإنَّ الاختبار يفشل، فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى.

مثال ٥

إذا كان ق(س) = $س^3$ − $٣س^2$ + ٢ فَجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

الحل

قَ(س) = $٣س^2$ − ٦س

وتكون قَ(س) = ٠ إذا كان $٣س^2$ − ٦س = ٠ أي أنَّ ٣س(س −٢) = ٠ ومنه، س=٠، س=٢

إذن للاقتران ق نقطتان حرجتان هما: (٠ ، ٢)، (٢ ، −٢)

قً(س) = ٦س −٦، وحسب اختبار المشتقة الثانية نجد أنَّ:

قً (٠) = −٦ < ٠ ، إذن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ٢

قً (٢) = ٦ > ٠ إذن للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = −٢

تدريب ٥

ليكن ق(س) = $س^3$ − ١٢س + ٣، جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

١) حدد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س + \frac{٤}{س}$

ب) $ق(س) = \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٤، ٤]$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س < ٢ \\ ٥ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

د) $هـ(س) = \left(\frac{س - ١}{س}\right)^{٢}$

هـ) $ق(س) = جتاس - جاس + ١$ ، $س \in [٠ ، \pi]$

٢) حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$ ، $س \in ح$

ب) $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}}$ ، $س \in ح$

جـ) $ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ ، $س \in ح$

د) $ق(س) = س - ظا س$ ، $س \in \left(-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right)$

٣) جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكلٍّ من الاقترانات الآتية، باستخدام اختبار المشتقة الثانية، إن أمكن ذلك:

أ) $ق(س) = جاس - جتاس$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

ب) $ق(س) = س^{٤}$ ، $س \in ح$

جـ) $ق(س) = ٤ \left|س - ٢\right| - \left|س + ١\right| + س$ ، $س \in ح$

د) $ق(س) = س^{٢} + \frac{١٢٨}{س}$ ، $س \neq ٠$

٤) عيِّن قاعدة الاقتران ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، (أ ≠ ٠ ، ب، جـ، د أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة (١، ٥)، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢، ١)، هي :

ص + ٣س − ٧ = ٠

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ فأجب عما يأتي:

أ) قارن مجالات التقعر لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ.

ب) جد قيم س التي يكون عندها كلٌّ من الاقترانين ق، هـ غير متصل.

جـ) جد نقط الانعطاف لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ إن وُجدت.

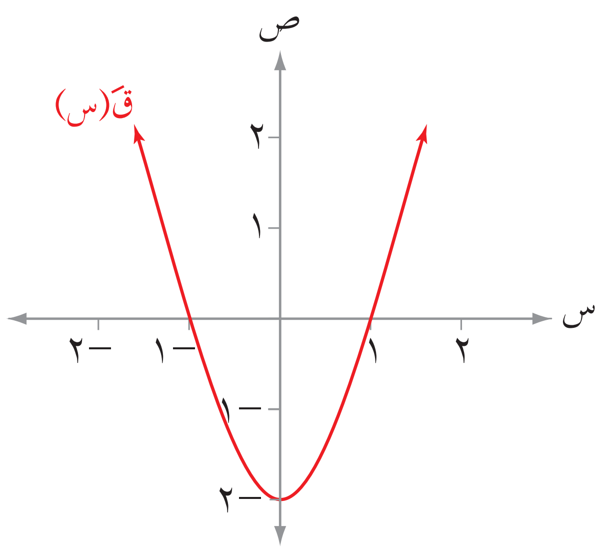
٦) يمثل الشكل (٣−١٨) منحنى قَ(س)، للاقتران ق(س) المعرّف على ح. اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ) عيِّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

ب) عيِّن قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.

جـ) عيِّن مجالات التقعر للاقتران ق.

د) عيِّن نقط الانعطاف للاقتران ق.



الشكل (٣−١٨)

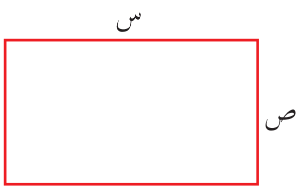
خامسًا تطبيقات القيم القصوى
Applications of Extreme Values

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨سم^{٢}، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كلٍّ من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كلٍّ من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فجد بُعدَيْ الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

تواجهك كثير من القضايا (المسائل) الحياتية في العلوم والهندسة والاقتصاد وغيرها، تحتاج إلى معرفة أكبر قيمة أو أصغر قيمة لكمية متغيرة، ولحل هذه المسائل تلجأ إلى تحويلها من صور لفظية إلى معادلات واقترانات؛ من أجل إيجاد القيم القصوى لها. وفي ما يأتي نقدم بعض المسائل في تلك المواضيع بوصفها أمثلة محلولة توضح كيفية التعامل معها رياضيًّا، ومن ثَم تجد لها القيم القصوى المطلوبة.

مثال ١

قطعة أرضٍ مستطيلة الشكل، محيطها ٨٠٠ متر. جد بُعدَي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-١٩)

الحل

نفرض أنَّ س، ص بُعدا قطعة الأرض، ومساحتها م، كما في الشكل (٣-١٩).

المعطيات: محيط قطعة الأرض = ٨٠٠ متر.

المطلوب: إيجاد قيمتي س، ص لتكون م أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقترانًا لمتغير مستقل واحد.

م = س ص ...... (١)

ولجعل العلاقة بدلالة متغير واحد س أو ص، وظِّف معطيات المسألة، وهي أنَّ محيط قطعة الأرض=٨٠٠م أي أنَّ:

٢س + ٢ص=٨٠٠ ، ومنها ص = ٤٠٠ − س ...... (٢)

وبالتعويض في (١) تجد أنَّ:

م(س) = س (٤٠٠ ـ س) حيث ٠ < س < ٤٠٠ لماذا؟

وبذلك تصبح (م) بالصورة الآتية:

م(س) = ٤٠٠س − س^{٢} ..... (٣) وهو اقتران بمتغير واحد (س)، وقابل للاشتقاق.

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران م(س) نشتق المعادلة (٣) ونتحقق من ذلك كما يأتي:

مَ (س) = ٤٠٠ ـ ٢س.

مَ (س) =٠ أي أنَّ ٤٠٠ − ٢س=٠، ومنه س = ٢٠٠

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى عند س=٢٠٠ تجد مً (س) عند س = ٢٠٠

مً (س) = −٢ ، ومنه مً (٢٠٠) = −٢

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند (س =٢٠٠) لماذا؟

أي تكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن عندما س =٢٠٠ متر

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٢) تجد أنَّ

ص =٤٠٠ − ٢٠٠ = ٢٠٠ متر.

تدريب ١

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدمًا تطبيقات التفاضل.

لحل المسائل العملية على القيم القصوى؛ يمكنك اتباع الخطوات الآتية:

١) اقرأ المسألة وحدد المتغيرات، وارسم شكلًا توضيحيًّا للمسألة.

٢) حدد المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى، واكتب المعادلة (العلاقة) التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى.

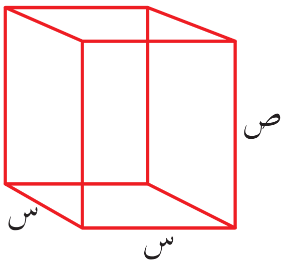
٣) اكتب المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى كاقتران في متغير واحد.

٤) حدد مجال الاقتران الناتج إن أمكن.

٥) استخدم ما تعلمته في الدروس السابقة في إيجاد القيم القصوى (اختبار المشتقة الثانية، اختبار المشتقة الأولى).

مثال ٢

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل، ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠سم، جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-٢٠)

الحل

افرض أنَّ س طول قاعدته،وص ارتفاعه، وأنَّ ح حجمه.

كما في الشكل (٣-٢٠).

المعطيات:

مجموع أطوال أحرف متوازي المستطيلات (٦٠٠سم)

المطلوب:

إيجاد أبعاد متوازي المستطيلات س، ص ليكون حجمه (ح) أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد كالآتي:

ح = س^{٢}ص ..... (١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ص بدلالة الآخر، استخدم معطيات المسألة وهي أنَّ مجموع أطوال أحرفه يساوي (٦٠٠سم)، أي أنَّ:

٤ص + ٨س = ٦٠٠ ومنها ص = ١٥٠-٢س ..... (٢)

وبالتعويض في (١) تجد أنَّ:

ح(س) = س^{٢}(١٥٠-٢س) حيث ٠ < س < ٧٥ (لماذا؟)

= ١٥٠س^{٢}-٢س^{٣} ..... (٣) وهو اقتران بمتغير واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح(س) اشتقَّ المعادلة (٣)، وتحقق من ذلك كما يأتي:

ح'(س) = ٣٠٠س - ٦س^{٢}

وتكون ح'(س) = ٠ عندما ٣٠٠س-٦س^{٢}=٠، أي عندما س = ٥٠، س= ٠ (تهمل)

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى عند (س=٥٠) جد ح''(س) عند س=٥٠

ح''(س) = ٣٠٠ - ١٢س، ومنه ح''(٥٠) = -٣٠٠

وبما أنَّ ح''(٥٠) < ٠ إذن للاقتران ح قيمة عظمى محلية عند س = ٥٠، وبالتعويض في المعادلة (٢)

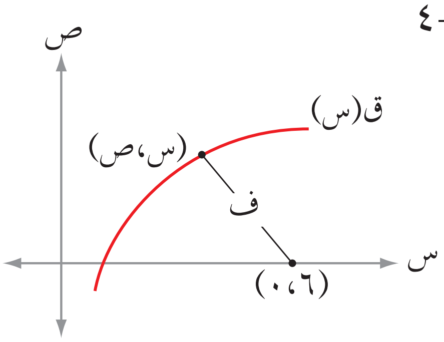
تجد أنَّ ص=٥٠، أي أنَّ حجم متوازي المستطيلات يكون أكبر ما يمكن عندما تكون س=٥٠ سم، ص =٥٠سم.

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال ٣

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى ق(س) = $\sqrt{س^{٢}-٤}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٦،٠)



الشكل (٣-٢١)

الحل

افرض النقطة (س،ص) تقع على منحنى ق وأنَّ ف البُعد بين النقطة (س،ص) والنقطة (٦،٠).انظر الشكل (٣-٢١).

المعطيات:

ق(س)= $\sqrt{س^{٢}-٤}$ ، إحداثيا النقطة (٦،٠).

المطلوب: إيجاد إحداثيي النقطة (س،ص) لتكون المسافة ف أقل ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح المسافة ف المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد، كالآتي:

ف = $\sqrt{(س-٦)^{٢}+(ص-٠)^{٢}}$ ، ص = $\sqrt{س^{٢}-٤}$

ف = $\sqrt{(س-٦)^{٢}+ص^{٢}}$ = $\sqrt{٢س^{٢}-١٢س+٣٢}$ ....(١)

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ف؛ اشتق المعادلة (١) وتحقق من ذلك كما يأتي:

فَ = $\frac{٤س-١٢}{٢\times\sqrt{٢س^{٢}-١٢س+٣٢}}$ ، فَ = ٠

ومنه: ٤س - ١٢ = ٠ ومنه س = ٣

الجدول (٣-١٣)

ف(س)	↗	↘
فَ(س)	+ + +	- - -
قيم س	٣	

وبدراسة إشارة فَ في الجدول (٣-١٣) تجد أنَّ:

للاقتران ف قيمة صغرى محلية عند س=٣، ،بالتعويض تجد أنَّ ص= $\sqrt{٥}$

أي أنَّ المسافة ف تكون أقل ما يمكن عندما تكون النقطة (س،ص) هي (٣، $\sqrt{٥}$)

تدريب ٣

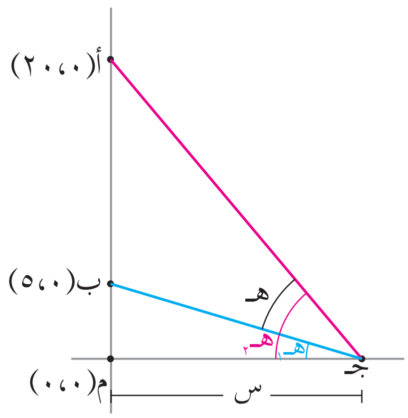
يقع المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤$ والمستقيم $\text{ص} = ٤$ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه الآخران جـ، د على المستقيم $\text{ص} = ٤$، جد بُعدَيْ المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

مثال ٤

أ (٠،٢٠)، ب (٠،٥) نقطتان ثابتتان، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب، جد بعد النقطة جـ عن نقطة الأصل ليكون قياس الزاوية أ جـ ب أكبر ما يمكن.

الحل

افرض أنَّ (هـ) قياس الزاوية أ جـ ب، ($\text{هـ}_{١}$) قياس الزاوية ب جـ م، ($\text{هـ}_{٢}$) قياس الزاوية أ جـ م، طول $\overline{\text{جـ م}} = \text{س}$ كما في الشكل (٣-٢٢).



الشكل (٣-٢٢)

المعطيات: أ (٠،٢٠)، ب (٠،٥)، جـ نقطة تتحرك على محور السينات.

المطلوب: إيجاد أكبر قياس ممكن للزاوية أ جـ ب.

اكتب المعادلة التي تربط المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقترانًا لمتغير واحد.

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_{٢} - \text{هـ}_{١}) = \frac{\text{ظاهـ}_{٢} - \text{ظاهـ}_{١}}{١ + \text{ظاهـ}_{٢}\ \text{ظاهـ}_{١}}$$

$$\text{ظا هـ}_{١} = \frac{٥}{\text{س}} \text{ ، } \text{ظا هـ}_{٢} = \frac{٢٠}{\text{س}} \text{ ومنه}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\frac{٢٠}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}}}{١ + \frac{٢٠}{\text{س}} \times \frac{٥}{\text{س}}} = \frac{\frac{١٥}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^{٢}+١٠٠}{\text{س}^{٢}}} = \frac{١٥\text{س}}{\text{س}^{٢}+١٠٠}$$

وباشتقاق الطرفين تجد أنَّ:

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} \times \text{هـ}' = \frac{(\text{س}^{٢}+١٠٠)(١٥) - ١٥\text{س}\times٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}} = \frac{١٥\text{س}^{٢}+١٥٠٠-٣٠\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}} = \frac{١٥٠٠-١٥\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}}$$

هـَ = ٠ عندما ١٥٠٠ − ١٥ س^{٢} = ٠ ومنه س = ١٠

وبدراسة إشارة هـَ في الجدول (٣−١٤) تجد أنَّ:

الجدول (٣−١٤)

هـ	↗		↘
هـَ	+ + +	٠	− − −
قيم س		١٠	

أي أنَّ أكبر قياس ممكن للزاوية (هـ) عندما س = ١٠

أي عندما تبعد النقطة جـ بمقدار ١٠ وحدات عن نقطة الأصل.

تدريب ٤

نحتاج إلى قص لوح خشبي، على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما ٨سم، إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة، فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

مثال ٥

جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦)سم وارتفاعه (٩)سم.

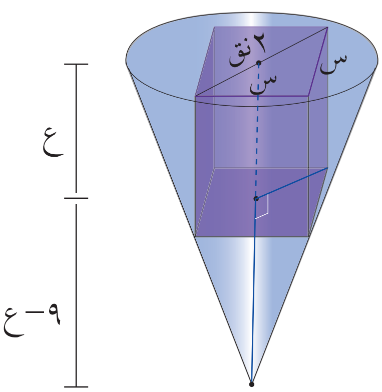
الحل

المعطيات: طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦)سم، وارتفاعه (٩)سم.

المطلوب: إيجاد أكبر حجم لموشور رباعي قائم، قاعدته مربعه الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ٦سم وارتفاعه ٩سم.

افرض أنَّ طول قطر قاعدة الموشور (٢نق)، وارتفاعه (ع) وطول ضلع قاعدته (س).

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد. انظر الشكل (٣−٢٣).



الشكل (٣−٢٣)

ح = س^{٢} ع ......(١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س، ع بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس، وتشابه المثلثات من خلال

معطيات المسألة: أي أنَّ:

$(٢نق)^٢ = س^٢ + س^٢$ ومنه $٤نق^٢ = ٢س^٢$ أي أنَّ:

$٢نق^٢ = س^٢$ ..... (٢)

ومن التشابة تجد $\frac{نق}{٩-ع} = \frac{٦}{٩}$ ومنه $٣نق = ١٨ - ٢ع$

$ع = \frac{١}{٢}(١٨ - ٣نق)$ ..... (٣)

وبتعويض كلٍّ من (٢) و(٣) في المعادلة (١) تجد أنَّ

$ح(نق) = ١٨نق^٢ - ٣نق^٣$ ..... (٤) وهو اقتران بمتغير واحد.

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح، اشتق المعادلة (٤) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$حَ(نق) = ٣٦نق - ٩نق^٢$

وتكون $حَ(نق) = ٠$، عندما $٣٦نق - ٩نق^٢ = ٠$ أي عندما نق = ٤ ، نق = ٠ (تهمل)

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى محلية جد $حً(نق)$

$حً(نق) = ٣٦ - ١٨نق$

ومنه $حً(٤) = ٣٦ - ٧٢ = -٣٦ > ٠$

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند نق = ٤. لماذا؟

أي أنَّ أكبر حجم للموشور عندما تكون نق = ٤

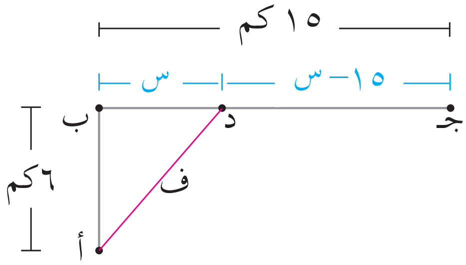
ومنه يكون حجم موشور $ح(٤) = ١٨ \times ١٦ - ٣ \times ٦٤ = ٩٦$ سم^٣.

تدريب ٥

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته ٦سم، وارتفاعه ١٢سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

مثال ٦

يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦كم جنوب النقطة ب، يريد أن يصل إلى النقطة جـ الواقعة شرق النقطة ب ، مرورًا بالنقطة د ، إذا كان يسير بسرعة ٣كم/ساعة عند الانتقال من النقطة أ إلى النقطة د، ويسير بسرعة ٦كم/ساعة عند الانتقال من النقطة د إلى النقطة جـ ، فحدِّد موقع النقطة د بحيث يصل في أقصر وقت ممكن، علمًا بأنَّ البُعد بين النقطة ب والنقطة جـ (١٥) كم. انظر الشكل (٣-٢٤).



الشكل (٣-٢٤)

الحل

المعطيات: أ ب = ٦كم، ب جـ = ١٥كم

سرعة الرجل عند الانتقال من أ إلى د = ٣كم/ساعة

سرعة الرجل عند الانتقال من د إلى جـ = ٦كم/ساعة

المطلوب: تعيين موقع النقطة (د) الذي يجعل الرجل يصل إلى النقطة (جـ) مرورًا بالنقطة (د) بأقصر وقت.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد.

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$ن = \frac{ف}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦} \quad .... (١)$$

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ف بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس من خلال معطيات المسألة؛ أي أنَّ:

$$ف^٢ = س^٢ + ٣٦ \text{ ، ومنه } ف = \sqrt{س^٢ + ٣٦} \quad .... (٢)$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أنَّ:

$$ن(س) = \frac{\sqrt{س^٢ + ٣٦}}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦} \quad .... (٣)$$ وهو اقتران بمتغير واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ن اشتق المعادلة (٣) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$ن\bar{}(س) = \frac{١}{٣}\left(\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^٢+٣٦}} - \frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٣} \times \frac{٢س - \sqrt{س^٢+٣٦}}{٢\sqrt{س^٢+٣٦}}$$

وتكون $ن\bar{}(س) = ٠$ عندما $٢س = \sqrt{س^٢+٣٦}$ ومنه $٣س^٢ = ٣٦$ أي عندما $س = ٢\sqrt{٣}$

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة صغرى محلية ندرس إشارة ن في الجدول (٣-١٥) تجد أنَّ:

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = ٢\sqrt{٣}$

أي أنَّ النقطة د تبعد عن ب بمقدار $٢\sqrt{٣}$ كم

الجدول (٣-١٥)

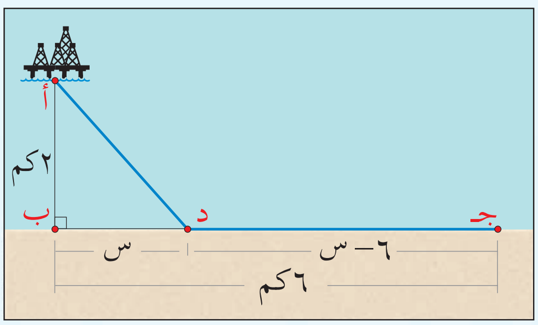
ن(س)	↗	↘
ن̄(س)	+ + +	− − −
س	$٢\sqrt{٣}$	

تدريب ٦

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢كم عن أقرب نقطة ب على الساحل، وأردنا أن نضخَّ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل، وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ، على فرض أنَّ الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠ دينار لكلِّ كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر، فأجب عما يأتي:

١) أين يجب أن تكون د لتحقق أقل تكلفة ممكنة؟

٢) أين يجب أن تكون د لتحقق أكبر تكلفة ممكنة؟



الشكل (٣-٢٥)

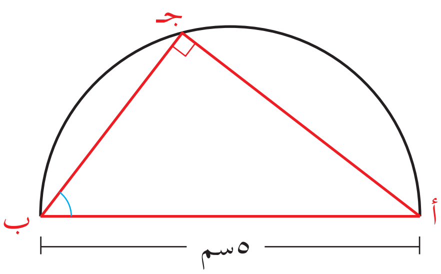
١) جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}]$ الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن.

٢) وعاء أسطواني الشكل مفتوح من الأعلى، حجمه ١٠٠٠ π سم^{٣}، جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه.

٣) جد إحداثيي النقطة أ(س،ص) الواقعة على منحنى العلاقة ص= س^{٢} التي بُعدها عن النقطة ب(١٨ ، ٠) أقل ما يمكن.

٤) جد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين الموجبين مثلثًا مساحته أقل ما يمكن.

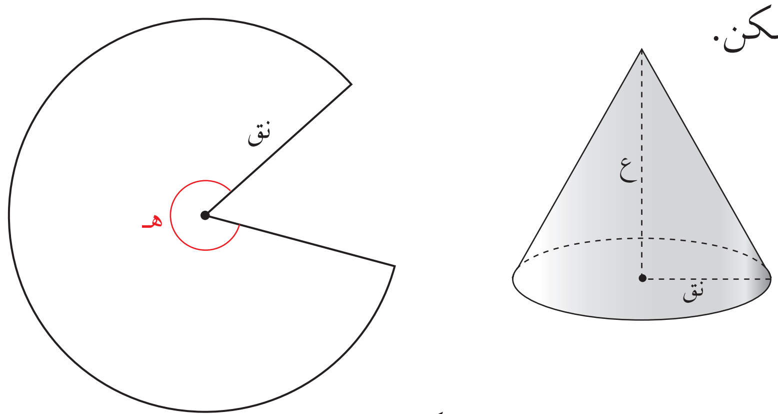
٥) يمثل الشكل (٣-٢٦) نصف دائرة طول قطرها أب(٥سم)، بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثًا جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبرما يمكن.



الشكل (٣-٢٦)

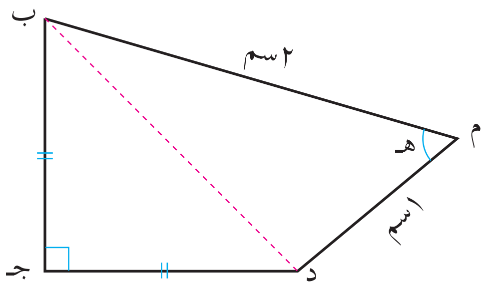
٦) جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة.

٧) قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري ، وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات، حُوِّلَ إلى مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته نق، وارتفاعه ع. جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن.



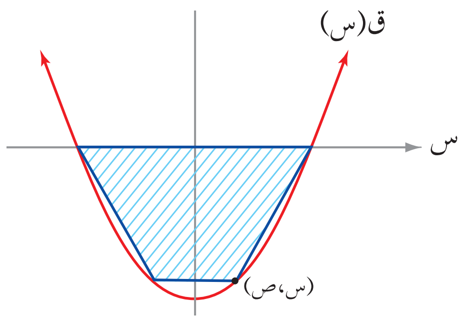
الشكل (٣-٢٧)

٨) مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهازًا سنويًا يبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ − ٠,٠١ س) دينار، فإذا كان تكلفة إنتاج هذه الأجهزة (٥٠س+٢٠) دينار، فَكم جهازًا ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنويًا ؟



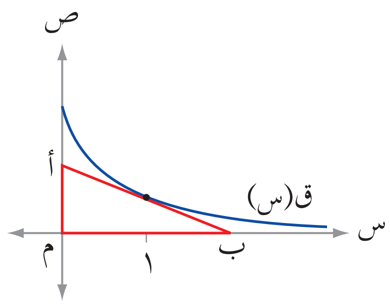
الشكل (٣−٢٨)

٩) معتمدًا الشكل (٣−٢٨) الذي يمثل الشكل الرباعي م ب جـ د ، الذي فيه الضلع $\overline{\text{م ب}}$ ثابت وطوله ٢سم وفيه $\overline{\text{م د}}$ ثابت طوله ١سم، إلا أنَّ وضعه متحول، يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م، أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة ، والضلعان $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ متطابقان دومًا. جد قياس الزاوية(هـ) التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن.



الشكل (٣−٢٩)

١٠) جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٤ ، انظر الشكل (٣−٢٩).



الشكل (٣-٣٠)

١) معتمدًا الشكل (٣-٣٠)، الذي فيه المثلث أ م ب الذي ضلعه $\overline{\text{أب}}$ يمس منحنى الاقتران ق(س) $= \frac{\text{جـ}}{\text{س}+١}$ عند (١، ق(١))، جد قيمة الثابت جـ التي تجعل مساحة المثلث تساوي $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إنَّ بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بَعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن)$= \frac{\text{ن}}{٢} -$ جا^{٢} ن، ن ∈ [٠، π]، جد تسارع الجُسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

٣) إذا كان ق(س) $= \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٢٧\text{س}}$ ، س ∈ ح، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقط حرجة.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى مبينًا نوعها.

٤) عيِّن قاعدة الاقتران ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، حيث:
أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية ثابتة، ويمر منحنى الاقتران ق بالنقطة (٠، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة (١،ق(١)) هي: ٩س + ص - ٩ = ٠، ولمنحناه نقطة انعطاف هي (٢، -١١).

٥) يمثل الشكل (٣-٣١) منحنى المشتقة الأولى لكثير الحدود ق(س) جد:

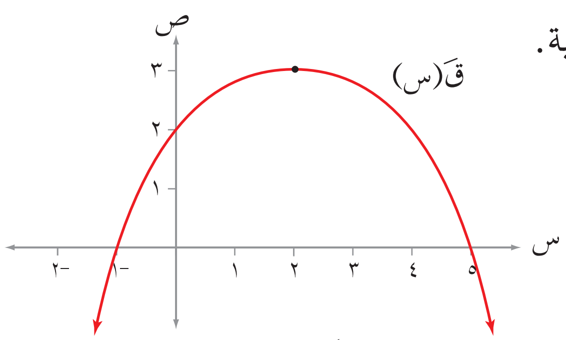
أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية.

د) فترات التقعر لمنحنى ق.

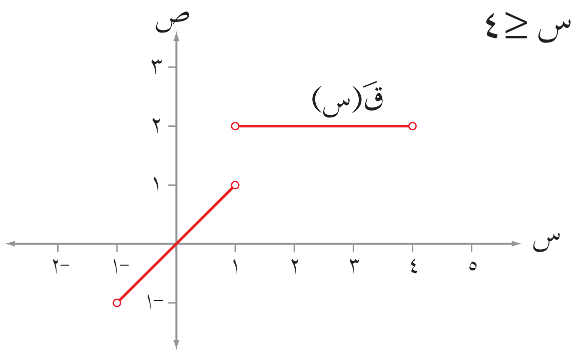
هـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف.



الشكل (٣-٣١)

٦) إذا كان الاقتران ق(س) متصل على [-١ ، ٤] ،

$$\text{وكان ق(س)} = \begin{cases} \text{جـ س}^{٢} + \text{ءس} + \text{هـ} & ، \ -١ \le \text{س} < ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، \ ١ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$



الشكل (٣-٣٢)

ومُثِّلَ منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق كما في الشكل (٣-٣٢)، فجد كلًّا مما يلي:

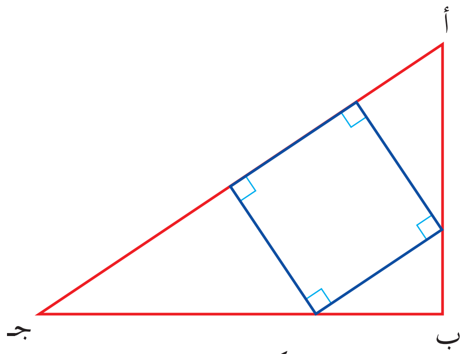
أ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد، وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية.

د) قيم كلٍّ من الثوابت أ، ب، جـ ، د، هـ ، علمًا بأنَّ ق(-١)=٢ ، ق(٤)=٨

٧) يمثل الشكل (٣-٣٣) مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب= ٦سم، ب جـ= ٨سم، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كلٌّ منهما على ضلعي القائمة. جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-٣٣)

٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، يلي كل فقرة (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :-

(١) تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث إنَّ المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي: ف(ن) =٦ن^{٢} - ن^{٣} + ١٣ ، المسافة ف عندما يصبح التسارع صفرًا هي:

أ) ١٤م ب) ١٨ م

جـ) ٢٩ م د) ٣٤ م

(٢) معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥سم يساوي:

أ) ١٠٠سم^{٣}/سم ب) ٤ π سم^{٣}/سم

جـ) ٢٠ π سم^{٣}/سم د) ١٠٠πسم^{٣}/سم

(٣) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل، ارتفاعه ١٦سم، وطول نصف قطر قاعدته ٤سم، صُبَّ الماء فيه بمعدل ٢ πسم^{3}/ث، فإنَّ معدل تغير ارتفاع الماء فيه في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء ٨سم يساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ سم/ث　　　　ب) ٢ سم/ث

جـ) $\frac{١}{٨}$ سم/ث　　　　د) $\frac{١}{٢\pi}$ سم/ث

(٤) إذا كان ق(س) = ١٢س + ٦(م − ٢)س^{٢} فإنَّ قيم م التي تجعل منحنى الاقتران ق مقعرًا للأسفل:

أ) [٢ ، ∞)　　　　ب) (− ∞ ، ٢]

جـ) (٢ ، ∞)　　　　د) (− ∞ ، ٢)

(٥) إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س) = جا ٤س نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإنَّ ميل المماس عندها يساوي:

أ) −٤　　　　ب) ٤

جـ) −٢　　　　د) −١

(٦) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٢}}$ فإنَّ منحنى الاقتران ق متناقص على الفترة:

أ) (− ∞ ، ٠)　　　　ب) (١ ، ∞)

جـ) [٠ ، ١]　　　　د) (٠ ، ١]

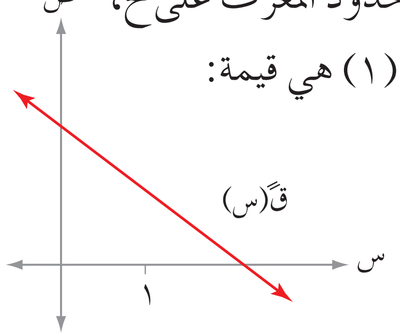
(٧) الشكل (٣−٣٤) يمثل منحنى قً(س) للاقتران ق كثير الحدود المعرف على ح، إذا كان للاقتران ق نقطة حرجة عند (١ ، ق(١))، فإنَّ ق(١) هي قيمة:

أ) عظمى محلية

ب) عظمى مطلقة

جـ) صغرى مطلقة

د) صغرى محلية



الشكل (٣−٣٤)

(٨) إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س^{٢}}$: س ∈ [−١ ، ١] ، فإنَّ للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند النقطة:

أ) (−١ ، ١)　　　　ب) (١ ، ١)

جـ) (٠ ، ٠)　　　　د) (٠ ، ١)

(٩) يُراد صنع علبة مفتوحة من الأعلى من قطعة كرتون مستطيلة الشكل أبعادها ١٦سم، ٣٠سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الأربع طول كلٍّ منها (س) وحدة ، ثم طيّ الجوانب للأعلى، ما قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن؟

أ) ١٢سم　　　　　ب) $\frac{١٠}{٣}$ سم

جـ) ١٠ سم　　　　　د) ٨سم

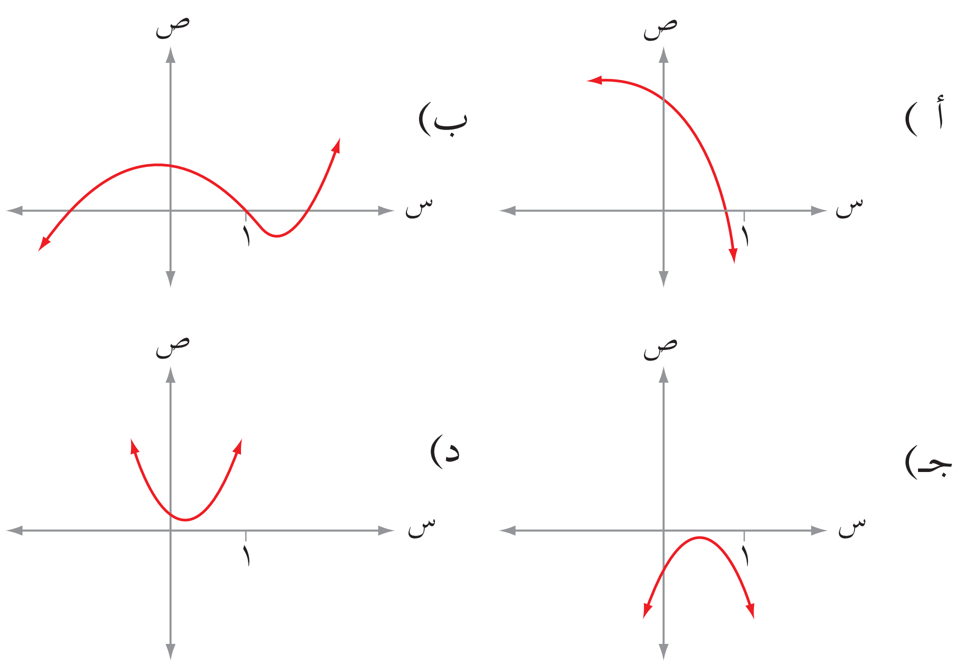
(١٠) إذا كان ق(س)= جتاس − جاس: س ∈ [٠، π] فإنَّ قيمة س التي يكون للاقتران عندها قيمة صغرى مطلقة هي:

أ) ٠　　　　　ب) $\frac{\pi}{٤}$

جـ) $\frac{\pi}{٢}$　　　　　د) $\frac{٣\pi}{٤}$

*(١١) أي المنحنيات في الشكل (٣-٣٥) يمثل رسم الاقتران ق الذي فيه قَ (٠) > ٠،

قَ (١) < ٠ ، قَّ(س) سالبة دائمًا:

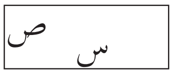
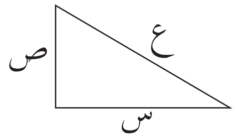
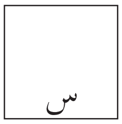
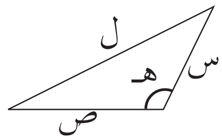
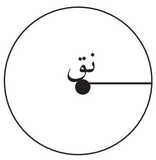
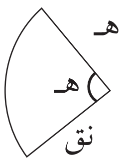
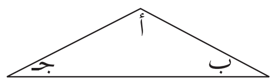
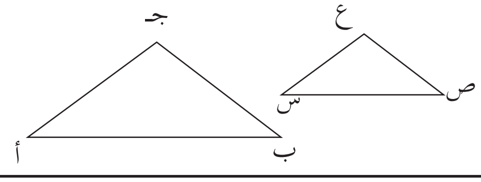
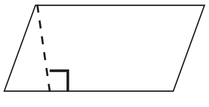


الشكل (٣-٣٥)

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

ملحق(١)

قوانين رياضية مهمة(المعدلات المرتبطة، تطبيقات القيم القصوى)

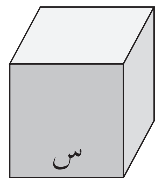
١) المسافة بين نقطتين (س$_١$ ، ص$_١$) ، (س$_٢$ ، ص$_٢$) ف= $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$	٩) محيط المستطيل = ٢ (س+ص) مساحة المستطيل = (س × ص) حيث س: البعد الأول ص: البعد الثاني 
٢) نظرية فيثاغورس: (الوتر)^٢ = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين. ع^٢= س^٢ + ص^٢ 	١٠) محيط المربع = ٤س مساحة المربع = س^٢ حيث س: طول الضلع 
٣) قانون جيب التمام: لإيجاد ضلع في مثلث عُلِمَ فيه طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما: ل^٢=س^٢+ص^٢−٢س ص جتاهـ 	١١) محيط الدائرة =٢نق π مساحة الدائرة =πنق^٢ حيث نق: طول نصف القطر 
٤) بعد النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) عن المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ البعد = $\dfrac{\lvert \text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ} \rvert}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$	١٢) مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢}هـ طول القوس = نق× هـ حيث هـ: الزاوية المركزية 
٥) إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين (س$_١$ ، ص$_١$) (س$_٢$ ، ص$_٢$) هو: $\left(\dfrac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \dfrac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$ ٦) قانون الجيب $\dfrac{\text{أَ}}{\text{جاأ}} = \dfrac{\text{بَ}}{\text{جاب}} = \dfrac{\text{جـَ}}{\text{جاجـ}}$ 	١٣) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع إذا عُلِمَ فيه طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما هـ الزاوية المحصورة بين الضلعين مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول الضلع الأول × طول الضلع الثاني × جاهـ مساحة المثلث متطابق الأضلاع = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}جا٦٠ حيث س: طول ضلع المثلث
٧) إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية $\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = \dfrac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}} = \dfrac{\text{ب أ}}{\text{ص س}}$ 	١٤) مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع  ١٥) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع
٨) الربح = سعر البيع − سعر التكلفة	١٦) المسافة = السرعة × الزمن

١٧) حجم المكعب = س^{٣}

المساحة الكلية = ٦ س^{٢}

المساحة الجانبية = ٤ س^{٢}

حيث س: طول ضلع المكعب

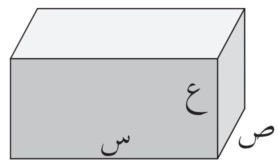


١٨) حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

المساحة الجانبية = ٢ (س+ص) × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

= ٢(س+ص) × ع + ٢س ص

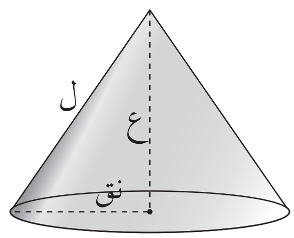


١٩) المخروط الدائري القائم

الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢}ع

مساحة سطح المخروط

= π نق ل + π نق^{٢}

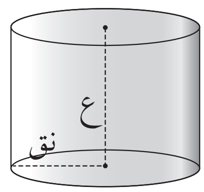


٢٠) الاسطوانة:

الحجم = π نق^{٢} ع

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

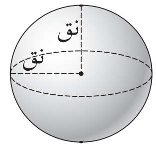
المساحة الكلية = ٢ π نق^{٢} + ٢ π نق ع



٢١) الكرة

الحجم = $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^{٣}

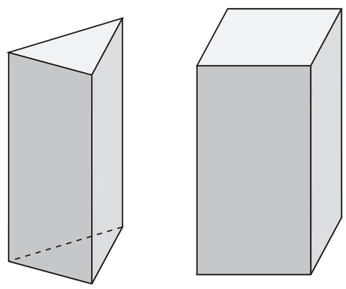
مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}



٢٢) المنشور (الموشور) القائم: هو مجسم له قاعدتان مستويتان ومتطابقتان ومتوازيتان، وأسطحه الجانبية مستطيلات، إذا كانت قاعدته مثلثة الشكل يسمى منشورًا قائمًا ثلاثيًا، وإذا كانت قاعدته مربعة الشكل يسمى منشورًا قائمًا رباعيًا.

مساحة المنشور القائم الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

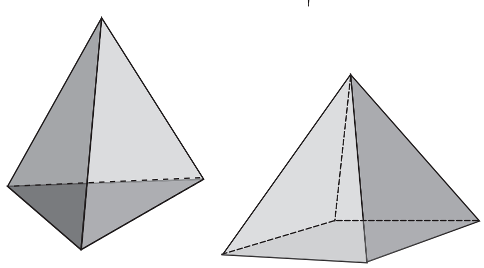
حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع



٢٣) الهرم القائم: عبارة عن مجسم تكون قاعدته منتظمة، والأوجه الجانبية عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين، ويسمى ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين: الارتفاع الجانبي للهرم. ويسمى الهرم بالهرم القائم الثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، وهرمًا قائمًا رباعيًا إذا كانت قاعدته مربعة الشكل.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم



٢٤) زاوية الارتفاع أو الانخفاض: هي الزاوية المحصورة بين خط البصر (النظر) والخط الأفقي المارّ بالعين.

متطابقات مثلثية

ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

قاس = $\frac{\text{١}}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{\text{١}}{\text{جاس}}$

جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س

١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = ١ − ٢جا^{٢}س

= ٢جتا^{٢}س − ١

= جتا^{٢}س − جا^{٢}س

جا (أ + ب) = جاأجتاب + جتاأ جاب

جا (أ − ب) = جاأجتاب − جتاأ جاب

جتا (أ + ب) = جتاأجتاب − جاأ جاب

جتا (أ − ب) = جتاأجتاب + جاأ جاب

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظاأ + ظاب}}{\text{١ − ظاأ ظاب}}$

ظا (أ − ب) = $\frac{\text{ظاأ − ظاب}}{\text{١ + ظاأ ظاب}}$

جا^{٢}س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (١ − جتا٢س)

جتا^{٢}س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (١ + جتا٢س)

ظا٢س = $\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{س}}$

جاس جاص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

جاس جتاص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (جا(س + ص) + جا(س − ص))

جتاس جتاص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س + ص) جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س − ص)

جاس + جاص = ٢ جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س + ص) جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س − ص)

جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س + ص) جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س − ص)

جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س + ص) جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$(س − ص)

جتا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ − س) = جاس

جا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ − س) = جتاس

ظا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ − س) = ظتاس

ظتا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ − س) = ظاس

جا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ + س) = جتاس

جتا ($\frac{\pi}{\text{٢}}$ + س) = −جاس

جا (π − س) = جاس

جتا (π − س) = −جتاس

ظا (π − س) = − ظاس

جا (π + س) = − جاس

جتا (π + س) = − جتاس

ظا (π + س) = ظاس

جا (− س) = − جاس

جتا (− س) = جتاس

ظا (− س) = −ظاس

تم بحمد الله