الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

الوحدات ٥، ٦، ٧

دليل المعلم

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود.	• يتعرف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته. • يمثل الاقتران كثير الحدود بيانيًّا، ويجد مجاله ومداه. • يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود.	وحيد الحد، كثير الحدود، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفري، المعامل الرئيس، المجال، المدى.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.	• يجد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. • يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها. • يمثل الاقترانات النسبية بيانيًّا، ويجد خطوط التقارب. • يحل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية.	خوارزمية القسمة، اقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: تركيب الاقترانات.	• يتعرف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين. • يحسب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى. • يجد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمت قاعدتا مُركَّبتيه. • يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.	تركيب الاقترانات، الاقتران المُركَّب، المُركَّبتان.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
الدرس 4: الاقتران العكسي.	• يتعرَّف الاقتران العكسي. • يجد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، ويحدد مجاله ومداه. • يحل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي.	العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحايد، الاقتران الجذري.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	2
الدرس 5: المتتاليات.	• يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها. • يكتب حدود متتالية عُلِم حدها العام. • يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية. • يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.	المتتالية، الحد، الحد العام.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.	1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				18

الوحدةُ 5

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، والاقترانات الثابتة، والخطية، والتربيعية، وكيفية تمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلموا أيضًا المتتاليات الخطية، والتربيعية، والتكعيبية، ووصف الحد العام لكلٍّ منها. وسيتعلمون في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، ويتعرفون الاقتران النسبي، ويجدون مجاله ومداه، ويُمثّلونه بيانيًّا، ويجدون خطوط تقارب منحناه. سيتعلمون أيضًا تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المُركَّب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلمون المتتاليات الأسية بوصفها اقترانًا، ويجدون حدها العام.

الوحدةُ 5

الاقتراناتُ
Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ الاقتراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلًا، تُستعمَلُ بعضُ أنواعِ الاقتراناتِ لوصفِ العلاقةِ بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المبيعةِ منْها. سأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ أنواعًا عديدةً منَ الاقتراناتِ والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ الاقتراناتِ الخطِّيّةَ، والتربيعيةَ، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أوِ القيمةِ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ.
- ✓ تكوينَ معادلاتٍ تربيعيةٍ، وحلَّها.
- ✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
- ✓ المتتالياتِ الخطِّيةَ، والتربيعيةَ، وكتابةَ حدودِها.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ◄ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمتَها.
- ◄ الاقتراناتِ النسبيةَ، ومجالَها، ومداها.
- ◄ تركيبَ الاقتراناتِ، والاقترانَ العكسيَّ، والاقترانَ الجذريَّ.
- ◄ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ.

6

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- تعرف المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية.
- وصف الاقترانات التربيعية، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- وصف الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية، والتعبير عنه بمقدار جبري.

الصف العاشر

- تعرف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانيًّا.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المُركَّب ومداه.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقتران ومعكوسه.
- تعرف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات أسية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والمتفرعة، واستنتاج خواصها الأساسية.
- اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وإيجاد حدها العام ومجموع (n) من حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لانهائية تقاربية.
- إدخال أوساط حسابية وهندسية بين عددين.

مشروعُ الوحدةِ

نمذجةُ علاقاتٍ حياتيةٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بيانــاتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّريْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باســتعمالِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ.

الموادُّ والأدواتُ جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختــارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّريْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ ســلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّريْنِ آخريْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ x، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ y (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.3
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

3. أستعملُ برمجيةَ إكســلِ لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أُدخِلُ البيانــاتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكســلِ، وأُظلِّــلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّط الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
   - أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
   - إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
   - عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.
4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

7

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار.			
2	جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة.			
3	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
4	دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج.			
5	مراعــاة أن يكون التقريــر المكتوب كامــلًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.

2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.

3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود.

هدف المشــروع: نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتران كثير حدود، واســتعمال النمــوذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إن أمكن.

خطوات تنفيذ المشروع

- عــرِّف الطلبة بالمشــروع وأهميته في تعلــم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية)، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اطلــب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشــروع، ثم كتابة تقرير مفصل عنه، ودور كل منهم في إنجازه.
- وجــه أفراد المجموعــات إلى اختيار متغيريــن من واقع الحياة، مثل: العمر بالســنوات، والطول بالســنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين ســنة و15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشــروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشــروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- اطلــب إلى أفراد كل مجموعة المشــاركة في عرض جزء من نتائج المشــروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهــارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهــم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- وضِّح للطلبة أهمية اشــتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليهــا، والمعلومات الجديدة التــي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشــروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

» إذا كان $f(x) = 2x + 5$، فجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $f(0)$ $\quad 5$
2. $f(3)$ $\quad 11$
3. $f(-1)$ $\quad 3$

» اكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

4. $3(2x-5) + 4x$ $\quad 10x - 15$
5. $4a(2a^2 + 5ab^3 + 2)$ $\quad 8a^3+20a^2b^3+8a$
6. $(3x^2 - 4x) + (7x + 5)$ $\quad 3x^2+3x+5$

» جد x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:

7. $y = x + 4$ $\quad x = y - 4$
8. $y = 5x$ $\quad x = \frac{y}{5}$
9. $y = 4x + 3$ $\quad x = \frac{(y-3)}{4}$

» أجد الحدين التاليين في كلٍّ ممّا يأتي:

10. $2, 4, 6, 8, \ldots.$ $\quad 10, 12$
11. $40, 35, 30, 25, \ldots.$ $\quad 20, 15$

إجابات المسائل (أختبر معلوماتي):

13) 104°F $\quad$ 14) 30°C $\quad$ 15) 16, 19

16) 76, 70 $\quad$ 17) 27, 38

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ.

إذا كانَ $f(x) = 3x-2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(0)$ $\quad -3$
2. $f(2)$ $\quad 4$
3. $f(-3)$ $\quad -11$
4. $g(-4)$ $\quad 21$

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

قاعدةُ الاقترانِ	$g(x) = 2x^2 + 5x + 4$
بتعويضِ $x = -2$	$g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$
بالتبسيطِ	$= 8 - 10 + 4 = 2$

تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $-3(2x - 2y - 4)$ $\quad -6x + 6y + 12$
2. $(4a + b) + 2(a - 3b)$ $\quad 6a - 5b$
3. $5x^2(2x - 5)$ $\quad 10x^3 - 25x^2$
4. $(x - 3)^2 + 11x$ $\quad x^2 + 5x + 9$

مثالٌ: أكتبُ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ في أبسطِ صورةٍ.

المقدارُ الأصليُّ	$-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$
خاصيةُ التوزيعِ	$= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2$
بالتبسيطِ	$= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= -a^2 + 4ab + 10a$

التعبيرُ عنْ مُتغيِّرٍ بدلالةِ الآخرِ.

أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = 4x - 7$ $\quad x = \frac{y+7}{4}$
2. $y = 3 - 5x$ $\quad x = \frac{3-y}{5}$
3. $y = x^2 - 5$ $\quad \pm\sqrt{y+5}$
4. $y = \frac{1}{2x-1}$ $\quad x = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1+y}{2y}$

تُستعمَلُ الصيغةُ: $F = \frac{9}{5}C + 32$ لتحويلِ درجةِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس C إلى مقياسِ فهرنهايت F.

5. أُحوِّلُ 40° C إلى مقياسِ فهرنهايت F. $\quad$ 104°F
6. أُحوِّلُ 86° F إلى مقياسِ سيلسيوس C. $\quad$ 30°C

مثالٌ: أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 3x - 8$

المعادلةُ الأصليةُ	$y = 3x - 8$
بإضافةِ 8 إلى الطرفيْنِ	$y + 8 = 3x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 3	$\frac{y+8}{3} = x$

b) $y = \frac{3}{2-x}$

المعادلةُ الأصليةُ	$y = \frac{3}{2-x}$
بضربِ الطرفيْنِ في $(2-x)$	$y(2-x) = 3$
	$2y - yx = 3$
بطرحِ $2y$ منَ الطرفيْنِ، وضربِ الطرفيْنِ في -1	$yx = 2y - 3$
بقسمةِ الطرفيْنِ على y	$x = \frac{2y-3}{y}$

إيجادُ حدودٍ متتاليةٍ.

أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1. $4, 7, 10, 13, \ldots.$ $\quad$ 16, 19
2. $100, 94, 88, 82, \ldots.$ $\quad$ 76, 70
3. $3, 6, 11, 18, \ldots.$ $\quad$ 27, 38

مثالٌ: أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتاليةِ: **2, 7, 12, 17, ...**

أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ **5**:

$7-2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$, $22 + 5 = 27$

الدرس 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

المصطلحاتُ وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ ثُريّاتٍ عددُها x ثُريّا أسبوعيًّا، حيثُ $0 \leq x \leq 350$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ x مِنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدُ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُريّا أسبوعيًّا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad$ $f(x) = 3x - 4$ $\quad$ $f(x) = 2$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. x: مُتغيِّرٌ.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

8

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يتعرف كثير الحدود وصورته القياسية، ويعين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- يمثل كثيرات الحدود بيانيًّا، ويعين مجالها ومداها.
- يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية تتعلَّق بكثيرات الحدود.

المواد والأدوات:

برمجية جيوجبرا، ورق رسم بياني، آلة حاسبة.

التعلم القبلي:

- حساب قيمة الاقتران لقيم معلومة للمتغير المستقل.
- تمثيل المعادلات بيانيًّا.
- ضرب حد جبري في آخر، وكتابة الناتج في أبسط صورة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بالعلاقة، والاقتران، والفرق بينهما، والرمز المستخدم للاقتران: اكتب الاقتران $f(x) = 3x + 5$، ثم اطلب إليهم إيجاد كلٍّ ممّا يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- اطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم ناقِشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين وما يُمثِّلانه في هذه المعادلة.
- اطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ ممّا يأتي: $(2x^2y^3)(3xy^2), (2xy^3)(-2.5y^4)$

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فبكم دينارًا يبيع الواحدة؟ 120 دينارًا.
  » ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
  » كيف تجد ربح المصنع مــن إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ طرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
  » ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، واذكر أمثلة على ذلك.
- ناقش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

مثال 1

- شارك الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثِّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إن كان كثير حدود.

مثال إضافي

- حدِّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فاكتبه بالصورة القياسية، ثم حدِّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا

b) $h(x) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:

$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$، ومعامله الرئيس: -3، ودرجته 5، وحده الثابت 7

c) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا

ملاحظات المعلم

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى a_0 الحدَّ الثابتَ.

يكونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياسيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِها درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

مثال 1

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1 $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملُهُ الرئيسُ -2، وحدُّهُ الثابتُ -4

2 $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

3 $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4 $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملُهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$ ، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ: انظر الهامش

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

! أخطاء مفاهيمية: قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد المعامل الرئيس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لذا ذكِّرهم أن المعامل الرئيس هو معامل الحد الأكبر درجة بعد تبسيط الاقتران.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في خطوات تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، وشاركهم في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية تمثيل كثير الحدود بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره، مُبيِّنًا لهم أن أصفار الاقتران هي الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنى مع المحور x، وأن الناتج في هذه الطريقة يكون أحيانًا قيمة تقريبية لعدم دقة الرسم، وأنه يمكن إيجاد الأصفار جبريًّا بحل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرق التي تعلموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) كثير حدود، صورته القياسية: $h(x) = \sqrt{2x^5} - 5x + 9$ ، ودرجته 5، والمعامل الرئيس $\sqrt{2}$، والحد الثابت 9

b) ليس كثير حدود.

c) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$، ودرجته 4، والمعامل الرئيس -2، والحد الثابت 0

d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = 7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$ درجته 5، المعامل الرئيس 7، وحده الثابت 2π

منهاجي

متعة التعليم الهادف

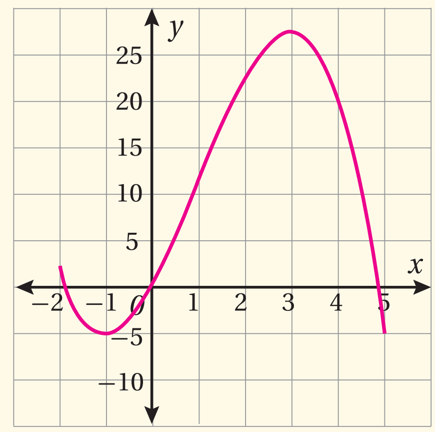
مثال إضافي

- مثِّل بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x, -2 \le x \le 5$

مجاله: $-2 \le x \le 5$ مداه: $-5 \le y \le 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

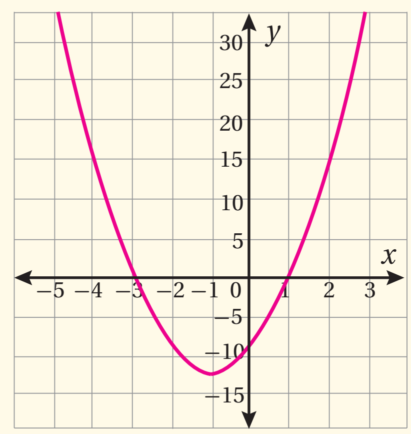


b) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \ge -12$

أصفاره: $-3, 1$



تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: اقتران function ، وكثير الحدود polynomial ، والدرجة degree، والمعامل الرئيس leading coefficient، والمجال domain، والمدى range.

مجالُ (domain) أيِّ اقترانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ x، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ y.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ x ، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

> **أتعلَّمُ**
> **مجالُ** كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، **ومداهُ** هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ بتحليلِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

مثال 2

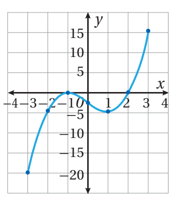
أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2, \ -3 \le x \le 3$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \le x \le 3$ ، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \le y \le 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

> **أتعلَّمُ**
> أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ منَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

2 $f(x) = x^2 - 4x$

هذا الاقترانُ تربيعيٌّ، ومنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأعلى؛ لأنَّ معاملَ x^2 عددٌ موجبٌ.

لرسمِ منحناهُ، أَجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ رأسِهِ.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

أتذكَّرُ

إحداثيا نقطةِ رأسِ القطعِ المُكافِئِ هما: $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ يكونُ منحنى القطعِ مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانَ معاملُ x^2 موجبًا، ومفتوحًا إلى الأسفلِ إذا كانَ معاملُ x^2 سالبًا.

الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافِئِ $\quad x = \frac{-b}{2a}$

بتعويضِ $b = -4, a = 1$ $\quad = \frac{-(-4)}{2(1)}$

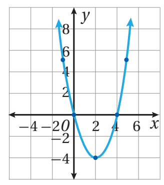
بالتبسيطِ $\quad x = 2$

بتعويضِ $x = 2$ في معادلةِ $f(x)$ والتبسيطِ $\quad y = 2^2 - 4(2) = -4$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ (الرأسُ ونقطتانِ إلى يسارِهِ، ونقطتانِ إلى يمينِهِ).

x	-1	0	2	4	5
$y = f(x)$	5	0	-4	0	5
(x, y)	$(-1, 5)$	$(0, 0)$	$(2, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 5)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ، وأضعُ سهمًا على طرفَيِ المنحنى للدلالةِ على أنَّهُ يمتدُّ إلى ما لا نهايةَ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ (لمْ يُحدَّدْ في نصِّ السؤالِ خلافُ ذلكَ)، ومداهُ هوَ الأعدادُ الحقيقيةُ التي لا تقلُّ عنْ -4؛ أيِ الفترةُ $[-4, \infty)$.

لهذا الاقترانِ صفرانِ، هما: $0, 4$

أُفكِّرُ

ما الفرقُ بينَ الفترةِ $[-4, \infty)$ والفترةِ $(-4, \infty)$؟

أتحقق من فهمي

أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 - 16 , -3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x), g(x)$، بحيث إن:

a) درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$

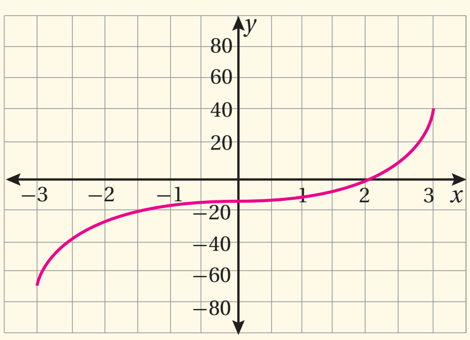
b) درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$

ثم اطلب إليهم كتابة ملاحظاتهم على درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-70	-32	-18	-16	-14	0	38



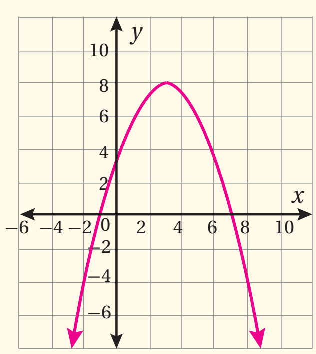
المجال: $-3 \leq x \leq 3$

المدى: $-70 \leq y \leq 38$

له صفر واحد هو 2

b)

x	-2	-1	1	3	7	8
$y = f(x)$	-4.5	0	6	8	0	-4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \leq 8$، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: -1، و 7

المثالان 3 و 4

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثالين 3 و 4، مُوضِّحًا جمع كثيري حدود بالطريقة الأفقية بتجميع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتها. بعد ذلك نبِّههم إلى أن المتغير يبقى كما هو بدرجته نفسها في الجمع وفي الطرح.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x)=12x+1-2x^2,\ h(x)=6x^2+4x+12$، فجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $f(x)+h(x)$ $\quad 4x^2+16x+13$

b) $h(x)-f(x)$ $\quad 8x^2-8x+11$

مثال 3

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x^3+4x-9,\ g(x)=7x^3+6x+4$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

$f(x)+g(x)=(2x^2-5x^3+4x-9)+(7x^3+6x+4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2+(-5x^3+7x^3)+(4x+6x)+(-9+4)$ بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$=2x^2+2x^3+10x-5$ بجمعِ المعاملاتِ

$=2x^3+2x^2+10x-5$ بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ

أتحقق من فهمي انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=3x^2+8x^3+2x+13,\ g(x)=-4x^3+6x^2-5$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُني أنْ أَجِدَ ناتجَ جمعِ اقترانيْنِ باستعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

أتعلَّمُ

النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ منْ عكسِ إشاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

مثال 4

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x-3,\ g(x)=6x-7x^2-8$، فأَجِدُ $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)=2x^2-5x-3-(+6x-7x^2-8)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2-5x-3+(-6x+7x^2+8)$ بتغييرِ الطرحِ إلى جمعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x-3 \\ +\ 7x^2-6x+8 \\ \hline \end{array}$$ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ

$9x^2-11x+5$ بجمعِ المعاملاتِ

أتحقق من فهمي انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=5x^3-12x^2+3x+20,\ g(x)=x^3+6x^2-14$، فأَجِدُ $g(x)-f(x)$.

12

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$f(x)+g(x)=4x^3+9x^2+2x+8$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$f(x)-g(x)=4x^3-18x^2+3x+34$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \,.\, g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

بتعويضِ $f(x)$ ، وَ $g(x)$	$f(x).g(x) = 3x^3\,(2x^2 - 5x - 4)$
بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ	$= 3x^3(2x^2) + 3x^3(-5x) + 3x^3(-4)$
خاصيةُ التجميعِ	$= (3\times 2)(x^3 . x^2) + (3\times -5)(x^3 . x) + (3\times -4)x^3$
بالتبسيطِ	$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا	$3x^4 - 5x^2 + x - 5$
	$(\times)\ 4x^2 - 7$
بضربِ $4x^2$ في حدودِ f	$12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2$
بضربِ -7 في حدودِ f	$(+)\quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$

أتذكّرُ

أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى مِنْ قوانينِ الأُسسِ عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \,.\, g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تُستعمَلُ كثيراتُ الحدودِ لتمثيلِ وحلِّ مسائلَ حياتيةٍ كثيرةٍ في الصناعةِ، والتجارةِ، والاقتصادِ، والزراعةِ، والتعليمِ، ومعظمِ مناحي الحياةِ.

13

إجابة أتحقق من فهمي5:

a) $35x^3 + 30x + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

مثال 5

- ناقِش الطلبة في ضرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّرًا إيّاهم بجمع الأسس عند ضرب قوى لها الأساس نفسه، وشاركهم في حل المثال.

مثال إضافي

- جد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان
$f(y) = y^2 - 7y + 5 \,,\, f(y) = y^2 - y - 3$

$f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$

تنويع التعليم:

اعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلك بكتابة أحد الاقترانين فوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايا الجدول، ثم جمع النواتج داخل الجدول قطريًّا.

يُوضِّح الجدول المجاور طريقة ضرب:
$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$.

	x^2	$+4x$	$+3$
$2x^2$	$2x^4$	$+8x^3$	$+6x^2$
$-3x$	$-3x^3$	$-12x^2$	$-9x$
-2	$-2x^2$	$-8x$	-6

$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) + (+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6)$

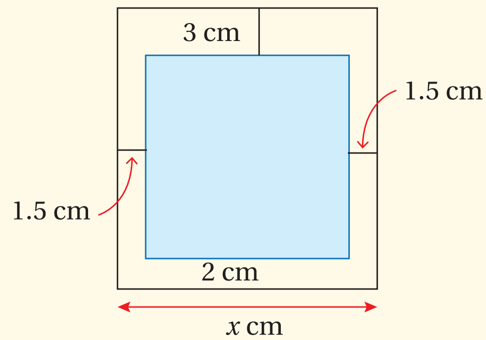
$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$

مثال 6: من الحياة

- ناقِش الطلبة في كيفية كتابة كثير حدود لنمذجة مسألة حياتية بطريقة مشابهة لترجمة المسألة إلى معادلة. وضِّح خطوات حل هذا المثال، ثم اطلب إلى الطلبة حله بطريقة بديلة بافتراض أن الزيادة هي x

مثال إضافي

إعلان: يريد سعد أن يطبع إعلانًا على ورقة مستطيلة محيطها 80 cm، بحيث يترك هامشًا من الأعلى عرضه 3 cm، وهامشًا من الأسفل عرضه 2 cm، وهامشًا من يمين الورقة ويسارها عرضه 1.5 cm



- اكتب اقترانًا يُمثِّل مساحة الإعلان بدلالة عرض الورقة x، ثم جد أبعاد الورقة التي تجعل مساحة الإعلان أكبر ما يمكن.

$A(x) = -x^2 + 38x - 105$, 19 cm, 21 cm

مثال 6: من الحياة

لياقةٌ: بلغَ عددُ المُشترِكينَ في مركزِ لياقةٍ بدنيةٍ 840 شخصًا، يدفعُ كلٌّ منْهُمْ اشتراكًا شهريًّا مقدارُهُ 30 دينارًا. في دراسةٍ للسوقِ، وجدَ الباحثونَ أنَّ المركزَ سيفقدُ 25 مُشترِكًا مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يزيدُهُ على قيمةِ الاشتراكِ. ما قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟

تُعَدُّ الرياضةُ الصباحيةُ أفضلَ وسيلةٍ لحرقِ الدهونِ وفقدانِ الوزنِ؛ إذْ تعملُ على تزويدِ الجسمِ بالطاقةِ التي تلزمُهُ منَ الحموضِ الدهنيةِ الحُرَّةِ الزائدةِ المفيدةِ لحرقِ الدهونِ.

أفترِضُ أنَّ المركزَ جعلَ قيمةَ الاشتراكِ x دينارًا، حيثُ: $x > 30$.

قيمةُ زيادةِ الاشتراكِ	$x - 30$
عددُ المُشترِكينَ الذينَ سيفقدُهُمُ المركزُ	$25(x-30)$
عددُ المُشترِكينَ الباقينَ	$840 - 25(x-30)$
الدخلُ $R(x)$ يساوي عددَ المُشترِكينَ الباقينَ مضروبًا في قيمةِ الاشتراكِ	$R(x) = x(840-25(x-30))$
بتوزيعِ الضربِ	$= 840x - 25x^2 + 750x$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= -25x^2 + 1590x$

هذا اقترانٌ تربيعيٌّ، معاملُهُ الرئيسُ سالبٌ؛ فمنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأسفلِ، ولهُ قيمةٌ عظمى عندَ رأسِهِ.

الإحداثيُّ x للرأسِ هوَ: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1590}{2(-25)} = \frac{1590}{50} = 31.8$

إذنْ، قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ هيَ 31.8 دينارًا منْ كلِّ مُشترِكٍ، ومقدارُ هذا الدخلِ هوَ $R(31.8)$.

بتعويضِ 31.8 بدلًا منْ x في اقترانِ الدخلِ	$R(31.8) = -25(31.8)^2 + 1590\ (31.8)$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$= 25281$

إذنْ، أعلى دخلٍ يُحقِّقُهُ المركزُ هوَ 25281 دينارًا كلَّ شهرٍ.

يُمكِنُني التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ بتمثيلِ الاقترانِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

ستادُ عمّانَ الدوليُّ أكبرُ ملاعبِ كرةِ القدمِ في الأردنِّ، افتُتِحَ عام 1968م.

أتحقق من فهمي

رياضةٌ: يتَّسِعُ ملعبٌ (ستادٌ) رياضيٌّ لنحوِ 62000 مُشجِّعٍ. إذا كانَ ثمنُ بطاقةِ الدخولِ 11 دينارًا، فإنَّ مُعدَّلَ عددِ الحضورِ هوَ 28000 مُشجِّعٍ. وجدَتْ دراسةٌ أنَّ عددَ بطاقاتِ الدخولِ المبيعةِ يزيدُ بمقدارِ 4000 بطاقةٍ مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يُخصَمُ منْ ثمنِ البطاقةِ. ما ثمنُ بطاقةِ الدخولِ الذي يُحقِّقُ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟ انظر الهامش

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسـئلة ذوات الأرقام الزوجية(18–2) ضمن مجموعات).
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن الاقتران في السـؤال 2 كثير حدود بسـبب إمكانية اختصار العامل x من البسـط والمقام، فيتحـول إلـى $f(x) = 5x+2$؛ لذا نبِّههم إلى أن القسـمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أن $x \neq 0$

أتدرب وأحل المسائل

1 إلى 20 انظر ملحق الإجابات

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = 4 - x$

2) $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3) $h(x) = 3x(4x-7) + 2x - 12$

4) $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5) $j(t) = \sqrt{7}\,t - 16t^2$

6) $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7) $f(x) = 13(2)^x + 6$

8) $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

9) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

10) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$

11) $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \le x \le 3$

12) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \le x \le 4$

إذا كانَ $f(x) = 2x+1, g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4, h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13) $h(x) + g(x)$

14) $g(x) - h(x)$

15) $f(x) \cdot h(x)$

16) $x(f(x)) + h(x)$

17) $(f(x))^2 - g(x)$

18) $h(x) - x(g(x))$

19) **صاروخٌ:** أُطلِقَ صاروخٌ إلى أعلى، وكانَ ارتفاعُهُ بالأمتارِ فوقَ سطحِ البحرِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$. أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يبلغُهُ الصاروخُ.

20) **زراعةٌ:** وجدَ مُزارِعٌ أنَّهُ إذا زرعَ 75 شجرةً فاكهةٍ في بُستانِهِ، فإنَّ مُعدَّلَ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ هوَ 21 صندوقًا في الموسمِ. وكلَّما نقصَ عددُ الأشجارِ شجرةً واحدةً زادَ مُعدَّلُ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ بمقدارِ 3 صناديقَ؛ فتباعدُ الأشجارِ بعضِها عنْ بعضٍ يُعزِّزُ فرصَها في الحصولِ على حاجاتِها منَ التربةِ. ما عددُ الأشجارِ التي يتعيَّنُ عليْهِ زراعتُها لإنتاجِ أكبرِ قدرٍ منَ الثمرِ؟ ما مقدارُ هذا الثمرِ؟ انظر ملحق الإجابات

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة 8 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

منهاجي

متعة التعليم الهادف

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 25 إلى كتابة أي مقدار ذي حدين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شرط أن تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسبة إلى عملية الجمع، فيكون مجموعها صفرًا، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 26 إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:

نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعات أول n من الأعداد الطبيعية بالاقتران:

$$F(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

a) جد قيمة $F(5), F(10)$

b) صف ما تُمثِّله كلٌّ من القيمتين في الفقرة a.

c) جد مجموع: $1+4+9+16+\dots+400$

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة وصف طرائق مختلفة لتصنيف كثيرات الحدود، ثم إعداد قائمة تتضمن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

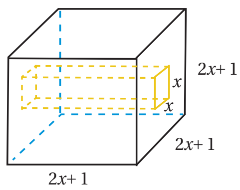
تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اختيار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- ذكِّر الطلبة بضرورة تدوين قيمة المتغير الأول (المستقل) مع قيمة المتغير الثاني (التابع) المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول.

---

21 **سـياجٌ:** لدى سعيدٍ 120 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يستعملَها لتسييجِ 3 حظائرَ مستطيلةٍ متساويةٍ كما في المُخطَّطِ الآتي. ما أكبرُ مساحةٍ ممكنةٍ لهذهِ الحظائرِ؟ انظر ملحق الإجابات

22 **هندسـةٌ:** مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ. انظر ملحق الإجابات



23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $P(x)=-0.2x^2+90x-6300$

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَ كلٌّ منْ طه وقاسمٍ ناتجَ $3x(x^2-2x-3)-(5x^3+7x^2-3)$:

طه	قاسمٌ
$3x^3-6x^2-9x+5x^3+7x^2-3$	$3x^3-6x^2-9x+(-5x^3-7x^2+3)$
$=8x^3+x^2-9x-3$	$=-2x^3+6x^2-6x$

أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي. 24 إلى 27 انظر ملحق الإجابات

25 **مسـألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

26 **تحدٍّ:** أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x)=x^3-x^2-4x+4$.

27 **تبريـرٌ:** إذا كانَ f, g كثيريْ حـدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحـدودِ h الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس
2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقترانات النسبيةُ

Dividing Polynomials and Rational Functions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

مسألةُ اليومِ بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4-3x^3-33x^2+54x$ وحدةً مكعبةً، ومِســاحةُ قاعدتِهــا $3x^2-6x$ وحدةً مربعةً. كيــفَ يُمكِنُ إيجادُ ارتفاعِ البركةِ؟ ما مقدارُ هذا الارتفاعِ؟

إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشــبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تســاوي درجةَ $h(x)$. لقســمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقســومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياســيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 1

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ ، وباقيَها.

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - 10x + 74 \\
x+5 \,\big) & 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 \\
(-) & 2x^3 + 10x^2 \\
 & -10x^2 + 24x \\
(-) & -10x^2 - 50x \\
 & 74x - 15 \\
(-) & 74x + 370 \\
 & -385
\end{array}
$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وتنزيلِ $24x$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وتنزيلِ -15

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3+24x-15}{x+5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5}, \; x \neq -5$$

إرشادٌ
تتوقــفُ عمليةُ قســمةِ كثيــراتِ الحدودِ عندما تصبــحُ درجــةُ باقــي القســمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

17

الدرس
2

نتاجات الدرس

- يقسم اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- يبين إن كان كثير حدود أحد عوامل كثير حدود آخر.
- يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها.
- يجد خطوط التقــارب (إن وجدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- يمثل اقترانات نسبية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

التعلم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

1 التهيئة

- راجــع الطلبة في قوانين الأســس، ثــم اطلب إليهم تبسيط ما يأتي:

$$\frac{6x^3+8x^2}{2x^2} \qquad \frac{12x^4}{4x^2} \qquad \frac{6x^3}{2x} \qquad x^5 \div x^2$$

» اطلب إلى الطلبة حل المعادلات الآتية:

a) $3x - 2 = 10$

b) $2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة.
  - » كيف نجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه.
  - » إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف نجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- اطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- وضِّح لهم أنه يتعيَّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 + 9x + 5$ على $2x + 1$
- اسألهم:
  - » كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال قسمة الأعداد الكلية؟

مثال 1

- ناقِش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال، ونبِّههم إلى أنه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أي قوة مفقودة في أي منهما.

مثال إضافي

- جد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.

  الناتج: $3x^2 - 6x + 9$، والباقي -4

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أي قوة مفقودة؛ لذا أكِّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

ملاحظات المعلم

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)-385 &= 2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385\\ &= 2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15\\ &= 2x^3+24x-15 \checkmark\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$ انظر الهامش

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسومِ عليْهِ، وإضافةِ الباقي. فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسومِ كانَ الحلُّ صحيحًا.

إذا كانَ $f(x)$ وَ $h(x)$ كثيرَيْ حدودٍ، وكانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$، وَ $h(x) \neq 0$، فإنَّهُ يوجدُ كثيرا حدودٍ وحيدانِ، هما: $q(x)$ (ناتجُ القسمةِ)، وَ $r(x)$ (باقي القسمةِ)، ودرجتُهُ أصغرُ منْ درجةِ $h(x)$، حيثُ:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \text{أوْ} \quad f(x) = h(x)\,.\,q(x) + r(x)$$

إذا كانَ $r(x) = 0$، فإنَّ $f(x)$ يقبلُ القسمةَ على $h(x)$، ويكونُ $h(x)$ أحدَ عواملِ $f(x)$.

معلومةٌ

يُمكِنُ استعمالُ خوارزميةِ القسمةِ للتأكُّدِ أنَّ كثيرَ الحدودِ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ كثيرِ حدودٍ آخرَ $f(x)$ أمْ لا.

مثال 2

أُثبِتُ أنَّ $(2x^2 + x + 7)$ هوَ أحدُ عواملِ الاقترانِ $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21$.

يكونُ $(2x^2+x+7)$ أحدَ عواملِ الاقترانِ $f(x)$ إذا كانَ باقي قسمةِ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$ يساوي 0 ، أَقْسِمُ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$:

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - 5x - 3 \\ \hline 2x^2+x+7 & 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 \\ (-) & 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 \\ \hline & -10x^3 - 11x^2 - 38x \\ (-) & -10x^3 - 5x^2 - 35x \\ \hline & -6x^2 - 3x - 21 \\ (-) & -6x^2 - 3x - 21 \\ \hline & 0 \end{array}$$

بقسمةِ $6x^4$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $3x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(2x^2+x+7)$ في $3x^2$

بالطرحِ، وتنزيلِ $-38x$

بقسمةِ $-10x^3$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $-5x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، وضربِها في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ، وتنزيلِ -21

بقسمةِ $-6x^2$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ -3 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ -3 في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فشجِّعهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في الشرط الذي يجعل عددًا عاملًا لعدد آخر. وبطريقة مماثلة، وضِّح الشرط الذي يجعل اقتران كثير حدود عاملًا لاقتران كثير حدود آخر، ثم شارك الطلبة في حل المثال، والتحقق من صحة الحل.

مثال إضافي

- بيِّن إذا كان $h(x) = x + 1$ أحد عوامل الاقتران: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 12$ أم لا.

لا، $h(x)$ ليس أحد عوامل $f(x)$؛ لأن باقي القسمة -11، وليس 0

إجابة أتحقق من فهمي 1:

الناتج:

$4x^3 + 9x^2 + 36x + 156$ ، والباقي: 599

منهاجي
متعة التعليم الهادف

بما أنَّ باقي القسمةِ $r(x)$ يساوي 0، فإنَّ المقسومَ يساوي المقسومَ عليْهِ مضروبًا في ناتجِ القسمةِ؛ أيْ إنَّ:

$$6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 = (2x^2 + x + 7)(3x^2 - 5x - 3)$$

وهذا يعني أنَّ $(2x^2+x+7)$ عاملٌ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ ذلكَ بضربِ العامليْنِ في النتيجةِ السابقةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55, \; h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3, \; h(x) = x^2 + 3x - 1$

الاقتراناتُ النسبيةُ (rational functions) هي اقتراناتٌ يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيرَيْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$. ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x} \quad , \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مفهومٌ أساسيٌّ

الاقترانُ النسبيُّ: اقترانٌ تكونُ قاعدتُهُ (معادلتُهُ) بصورةِ $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، حيثُ إنَّ $g(x) \neq 0$، وَ $g(x)$، وَ $f(x)$ كثيرا حدودٍ.

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الأعدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا.

مثال 3

أجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ في ما يأتي:

1) $q(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$:

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ 3, 3−، ويُكتَبُ برمزِ المجموعةِ كما يأتي: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ استعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2 - 9 = 0$

19

مثال 3

- ناقِش الطلبة في مفهوم الاقتران النسبي، واذكر أمثلة عليه، مُوضِّحًا أنه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفرًا؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك شارك الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

مثال إضافي

- جد مجال كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\{x | x \neq 2\}$

b) $g(x) = \frac{3}{x^2 - 16}$ $\{x | x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \frac{2x - 6}{x^2 + 25}$ كل الأعداد الحقيقية

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) ناتج القسمة هو $x^2 + 2x - 11$، والباقي 0

b) ناتج القسمة هو $5x - 3$، والباقي 0

2 $y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $2x^3-5x^2-3x = 0$:

بإخراجِ x عاملٍ مشتركٍ	$x(2x^2-5x-3) = 0$
بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ $2x^2-5x-3$	$x(2x+1)(x-3) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x = 0$ أو $2x+1 = 0$ أو $x-3 = 0$
بحلِّ المعادلاتِ	$x = 0, x = \frac{-1}{2}, x = 3$

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \frac{-1}{2}$ ، أوْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \frac{-1}{2}\}$

أفكِّرُ
هلْ مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x) = x-3$؟

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مجالَ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $h(x) = \frac{x^3+8}{x^2-5x+6}$ b) $y = \frac{x^2-4}{6x-3x^2}$

مِنْ أبسطِ الاقتراناتِ النسبيةِ الاقترانُ $f(x) = \frac{1}{x}$ الذي يُسمّى **اقترانَ المقلوبِ** (reciprocal function)، ومنْهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ. يُمكِنُ تمثيلُ هذا الاقترانِ بيانيًّا في الفترةِ $[-4, 4]$ مثلًا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ معَ استثناءِ 0؛ لأنَّهُ ليسَ منْ مجالِهِ.

أُخِذَتْ قيمٌ صغيرةٌ للمُتغيِّرِ x قريبةٌ منَ الصفرِ لتمثيلِ الاقترانِ بدقةٍ؛ فالقيمُ الصحيحةُ وحدَها لا تُمثِّلُ الصورةَ كاملةً، وإنَّما تكونُ الصورةُ مُجتزَأةً ناقصةً.

x	-4	-2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1.25	-2	-5	5	2	1.25	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يمينَ $x = 0$ بمنحنى، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يسارَ $x = 0$ بمنحنى آخرَ؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ $x = 0$، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.

اقتران المقلوب

ناقِش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، مُوضِّحًا لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم ناقِشهم في خصائص اقتران المقلوب.

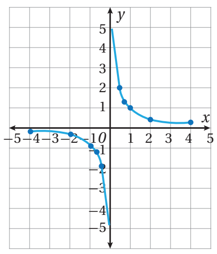
تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران النسبي rational function، واقتران المقلوب reciprocal function، وخط التقارب الرأسي vertical asymptote، وخط التقارب الأفقي horizontal asymptote .

إجابة أتحقق من فهمي 3:

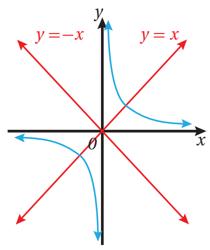
a) مجال $H(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و3، أي $\{x| x\neq 2, x\neq 3\}$

b) مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و2 ؛ أي $\{x| x\neq 0, x\neq 2\}$



أُلاحِظُ منَ الشكلِ الخصائصَ الآتيةَ لاقترانِ المقلوبِ:

- كلَّما اقتربَتْ x منَ الصفرِ اقتربَ المنحنى منَ المحورِ y. ولذلكَ يكونُ المحورُ y الذي معادلتُهُ $x=0$ **خطَّ تقاربٍ رأسيٍّ** (vertical asymptote) للمنحنى $f(x)=\frac{1}{x}$.
- كلَّما زادَتْ قيمةُ $|x|$ اقتربَ المنحنى أكثرَ وأكثرَ منَ المحورِ x. ولذلكَ يكونُ المحورُ x الذي معادلتُهُ $y=0$ **خطَّ تقاربٍ أفقيٍّ** (horizontal asymptote) لهذا المنحنى.



- منحنى اقترانِ المقلوبِ $f(x)=\frac{1}{x}$ لا يقطعُ المحوريْنِ أبدًا، ولكنَّهُ يقتربُ كثيرًا منْهُما.
- للمنحنى محورا تماثلٍ، هما المستقيمانِ:

$y=x, y=-x$

يُلاحَظُ منَ الرسمِ أنَّ مدى الاقترانِ $f(x)=\frac{1}{x}$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الصفرِ. وباستعمالِ رمزِ المجموعاتِ، يُكتَبُ مداهُ كما يأتي:

$\{y \mid y \neq 0\}$

أتعلَّم

إذا لمْ توجدْ عواملُ مشتركةٌ بينَ بسطِ الاقترانِ النسبيِّ ومقامِهِ، فإنَّهُ توجدُ خطوطُ تقاربٍ رأسيةٌ عندَ أصفارِ مقامِهِ جميعِها.

مثال 4

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x)=\frac{5}{x-3}+2$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

الخطوةُ 1: أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ.

لهذا الاقترانِ خطُّ تقاربٍ رأسيٍّ عندَ صفرِ المقامِ؛ أيْ عندما $x-3=0$ يكونُ خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمَ $x=3$

كلَّما زادَتْ $|x|$ اقتربَ $\frac{5}{x-3}$ منَ الصفرِ، واقتربَتْ قيمةُ $f(x)$ منْ 2؛ أيْ إنَّ خطَّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ $y=2$

21

مثال 4

- شـارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يُوضِّح خطوات تمثيل اقتران نسبي بسيط بيانيًّا.

مثال إضافي

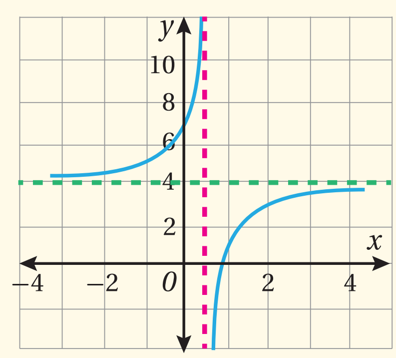
- جد خطوط التقارب للاقتران: $g(x)=\frac{-3}{2x-1}+4$، ومثّله بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه.

له خط تقارب رأسي هو المستقيم $x=0.5$، وخط تقارب أفقي هو المستقيم $y=4$

x	-2	-1	0	0.25	0.75	1	2	3
$y=(x)$	4.6	5	7	10	-2	1	3	3.4

المجال: $\{x|x\neq 0.5\}$

المدى: $\{y|y\neq 4\}$



إرشاد: وجِّه الطلبة إلى استعمال ورق الرسم البياني لتمثيل الاقترانات بصورة دقيقة ومرتبة، مُنبِّهًا إيّاهم إلى اختيار قيم للمتغير x على جانبي كل خط تقارب رأسي.

إرشادات للمعلم

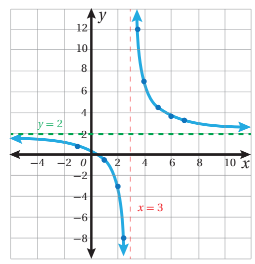
بيِّن للطلبة أنه يوجد للاقتران النسبي $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. فإذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي، وإذا تساوت درجتا البسط والمقام فإن خط التقارب الأفقي يكون المستقيم $y=\frac{a_n}{b_n}$، حيث a_n المعامل الرئيس للبسط، و b_n المعامل الرئيس للمقام. وإذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام كان خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=0$.

بيِّن لهم أيضًا أنه قد يوجد للاقتران النسبي الذي ليس لبسطه ومقامه عوامل مشتركة عِدَّة خطوط تقارب رأسية تبعًا لأصفار مقامه، وأنه قد لا يوجد له خطوط تقارب رأسية إذا لم يكن لمقامه أصفار، وأنه لا يمكن أن يقطع منحناه خط التقارب الرأسي.

الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولَ القيمِ الآتيَ باستثناءِ العددِ 3 ؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$y=\frac{5}{x-3}+2$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطوةُ 3: أرسمُ خطَّيِ التقاربِ، ثمَّ أُعيِّنُ النقاطَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يمينِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّيِ التقاربِ، ثمَّ أَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يسارِ المستقيمِ $x= 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّيِ التقاربِ، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.



المجالُ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 3، أوْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 2، أوْ $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتعلَّمُ

يشيرُ خطُّ التقاربِ الأفقيُّ إلى سلوكِ الاقترانِ النسبيِّ عندما تصبحُ القيمةُ المطلقةُ للمُتغيِّرِ x كبيرةً جدًّا. فإذا اقتربَتْ قيمةُ الاقترانِ منْ عددٍ حقيقيٍّ ثابتٍ هوَ c، فإنَّ المستقيمَ $y = c$ يكونُ خطَّ تقاربٍ أفقيٍّ لمنحنى الاقترانِ النسبيِّ.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

توجدُ مواقفُ حياتيةٌ كثيرةٌ تُستعمَلُ فيها الاقتراناتُ النسبيةُ، مثلُ حسابِ مُعدَّلاتٍ تتضمَّنُ مُتغيِّراتٍ.

مثال 5: من الحياة

محاليلُ: يحتوي خزّانٌ كبيرٌ على 100 لترٍ منَ الماءِ، أُذيبَ فيهِ 5 kg منَ السكَّرِ. وعندَ فتحِ الصنبورِ، بدأَ الماءُ يصبُّ في الخزّانِ بمُعدَّلِ 10 لتراتٍ في الدقيقةِ، وفي الوقتِ نفسِهِ أُضيفَ إلى الخزّانِ 1 kg منَ السكَّرِ كلَّ دقيقةٍ. أَجِدُ تركيزَ السكَّرِ في الخزّانِ (أيْ نسبةَ السكَّرِ إلى الماءِ) بعدَ 12 دقيقةً، مُحدِّدًا إذا كانَ هذا التركيزُ أكبرَ منْهُ في البدايةِ أمْ لا.

مثال 5: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 5 الذي يُمثِّل موقفًا حياتيًّا تستعمل فيه الاقترانات النسبية، ثم اسألهم عن مجال هذا الاقتران ومداه. بعد ذلك وضِّح لهم أن المجال في هذه الحالة هو الأعداد الحقيقية غير السالبة فلا يكون الزمن سالبًا، وأن المدى هو الأعداد الحقيقية من 0.05 إلى أقل من 0.1؛ لأن خط التقارب الأفقي هو $y = 0.1$

مثال إضافي

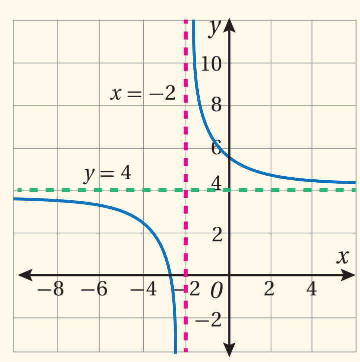
- يبيع خالد اشتراكات إحدى الصحف لمؤسسات. فإذا باع 5 اشتراكات لكل واحدة من أول 12 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أُخرى، وباع لكلٍّ منها اشتراكين. جد متوسط عدد الاشتراكات التي باعها خالد لكل مؤسسة زارها، ثم جد قيمة x إذا كان هذا المتوسط 3 اشتراكات.

$$M(x) = \frac{60 + 2x}{12 + x}, x = 24$$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

له خط تقارب رأسي هو $x = -2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 4$

x	-8	-6	-4	-3	-2.5	-1.5	-1	0	1	4
$y=f(x)$	3.5	3.25	2.5	1	-2	10	7	5.5	5	4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2؛ أي $\{x|x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{y|y \neq 4\}$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسـئلة ذوات الأرقام الزوجية (12–2) ضمن مجموعات.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة في الصفحة التاسـعة من كتـاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إذا كانَ t هوَ عددَ الدقائقِ التي تلي فتحَ الصُّنبورِ، فإنَّ:

$W(t) = 100 + 10t$ — كميةَ الماءِ هيَ الكميةُ الأصليةُ مضافًا إليْها مُعدَّلُ الصَّبِّ مضروبًا في t

$S(t) = 5 + 1t$ — كميةَ السكَّرِ هيَ الكميةُ الأصليةُ مضافًا إليْها مُعدَّلُ الإضافةِ مضروبًا في t

$C(t) = \dfrac{5+t}{100+10t}$ — تركيزَ السكَّرِ هوَ نسبةُ السكَّرِ إلى الماءِ في الخزّانِ

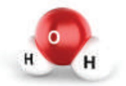
$C(12) = \dfrac{5+12}{100+10(12)}$ — تركيزَ السكَّرِ بعدَ 12 دقيقةً هوَ نتيجةُ تعويضِ $t = 12$ في الاقترانِ: $C(t)$

$C(12) = \dfrac{17}{220} \approx 0.08$ — بالتبسيطِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، تركيزُ السـكَّرِ في الخـزّانِ بعدَ 12 دقيقةً هـوَ 0.08 kg/L وقدْ كانَ تركيـزُهُ في البدايةِ $\frac{5}{100} = 0.05$ kg/L ، إذنْ، تركيزُ السكَّرِ بعدَ 12 دقيقةً أكبرُ منْهُ في البدايةِ؛ لأنَّ $0.08 > 0.05$

أتحقق من فهمي

محاليـلُ: يحتوي خزّانٌ كبيـرٌ على **300** لترٍ منَ الماءِ، أُذيبَ فيهِ **8 kg** منَ السـكَّرِ. وعندَ فتحِ الصنبورِ، بدأَ الماءُ يصبُّ في الخزّانِ بمُعدَّلِ **20** لترًا في الدقيقةِ، وفي الوقتِ نفسِـهِ أُضيفَ إلى الخزّانِ **2 kg** منَ السـكَّرِ كلَّ دقيقةٍ. أجِدُ تركيزَ السـكَّرِ في الخزّانِ بعدَ t دقيقةً، ثمَّ أجِدُ قيمةَ t التي يكونُ عندها تركيزُ السكَّرِ في الخزّانِ **0.04 kg/L** انظر الهامش



تسـمحُ الروابـطُ القطبيةُ للمـاءِ بإذابـةِ العديدِ منَ الموادِّ؛ ما يجعلُـهُ مذيبًا مثاليًّا.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ القسمةِ والباقيَ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(x^2 + 5x - 1) \div (x-1)$ الناتج: $x + 6$، والباقي: 5
2. $(3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$ الناتج: $3x + 2$، والباقي: 0
3. $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$ الناتج: $x^2 - x + 3$، والباقي: 0
4. $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$ الناتج: $3x^2 - 2x + 5$، والباقي: 11
5. $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$ الناتج: $-3x^2 - 4x - 6$، والباقي: -14
6. $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$ الناتج: $2x^2 - 3$، والباقي: $3x + 5$

أُثبِتُ أنَّ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7. $h(x) = x - 2$, $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x - 6$ الناتج: $3x^3 + 4x + 3$، والباقي: 0
8. $h(x) = 2x^2 - 7x - 4$, $f(x) = 6x^4 - 17x^3 - 28x^2 - x + 4$ الناتج: $3x^2 + 2x - 1$، والباقي: 0

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$C(t) = \frac{8 + 2t}{300 + 20t}$$

$$0.04 = \frac{8 + 2t}{300 + 20t}$$

$$8 + 2t = 0.04(300 + 20t)$$

$$8 + 2t = 12 + 0.8t$$

$$1.2t = 4 \Rightarrow t = 3.33 \text{ min}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ: انظر ملحق الإجابات

9 $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$ **10** $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$ **11** $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ: انظر ملحق الإجابات

12 $f(x) = \frac{2}{x-3}$ **13** $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

14 $w(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x}$ **15** $g(x) = \frac{5x^2}{x^2+4}$

16 أدرسُ إحدى مسائلِ القسمةِ في هذا الدرسِ، ثمَّ أكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منَ المقسومِ والمقسومِ عليْهِ والباقي.
درجة ناتج القسمة تساوي درجة المقسوم ناقص درجة المقسوم عليه، ودرجة باقي القسمة أصغر من درجة المقسوم عليه.

17 مِساحةُ ورقةٍ مستطيلةٍ تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحداتٍ مُربَّعةً، وطولُها يساوي $(x+2)^2$ وحدةً. أَجِدُ قيمةَ a. انظر ملحق الإجابات

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا (19–21) انظر ملحق الإجابات

19 **أيُّها لا ينتمي:** أُحدِّدُ فيما يأتي الاقترانَ المختلفَ عنِ الاقتراناتِ الثلاثةِ الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي:

$l(x) = \frac{7}{x^2-9}$	$h(x) = \frac{9}{x^2+1}$
$g(x) = \frac{5}{x+2}$	$f(x) = \frac{3}{x+5}$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ: $y = 3$، وخطّا تقاربٍ رأسيانِ هما: $x=-2, x=7$.

21 **تحدٍّ:** أَجِدُ اقترانَ كثيرِ حدودٍ منَ الدرجةِ الثالثةِ، يكونُ أحدُ عواملِهِ $(x-1)^2$، وباقي قسمتِهِ على $(x+2)$ هوَ 9، وباقي قسمتِهِ على $(x-3)$ هوَ 44

24

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 22 إلى كتابة العامل $(x-1)^2$ بصورة (x^2-2x+1)، ثم اسألهم:
  » ماذا يكون العامل الآخر الذي ناتج ضربه في (x^2-2x+1) اقتران من الدرجة الثالثة؟

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  » إذا كان $(x-1)$ أحد عوامل الاقتران $f(x) = x^3-2x^2-19x+20$، فما مجموع مربعات أصفار $f(x)$؟ 42

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة إعداد قائمة تتضمن الخطوات التي يتبعونها في قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، ويُطبِّقوها في قسمة $f(x) = 3x^2+6x^4-28x-10$ على $h(x) = 2x^2+5$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الانتهاء من جمع البيانات عن المتغيرين اللذين اختاروهما.
- ذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يتعرف مفهوم تركيب الاقترانات وشـرطه، والاقتران المُركَّب.
- يحسـب قيم اقتران مُركَّب عند قيـم معلومة للمتغير المستقل.
- يجد قاعدة الاقتران المُركَّب.
- يجد مُركَّبتي اقتران مُركَّب.
- يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.

التعلم القبلي:

- حسـاب قيمة اقتران معطى عند قيـم معلومة للمتغير المستقل.
- ضرب مقادير جبرية وتبسيطها.
- تحديد مجال الاقتران كثير الحدود والاقتران النسبي.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 4 - 3x$, $h(x) = \dfrac{x}{2x-6}$، ثم اطلب إلى الطلبة تحديد مجال كلٍّ من هذه الاقترانات، وإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) $f(1)$ 2 **2)** $f(-2)$ 17

3) $g(3)$ -5 **4)** $h(2)$ -1

مجال f, g هو مجموعــة الأعداد الحقيقية، ومجال h هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 3

- اطلب إلى الطلبة تبسيط المقدارين الآتيين:

a) $3(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 4$

$12x^2+2x+2$

b) $2x(x^2 + 5x) - 3(x^3 - 5x^2 + 4)$

$-x^3 + 25x^2 - 12$

الدرس 3

تركيبُ الاقتراناتِ
Composition of Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ مفهومِ الاقترانِ المُركَّبِ، وشـرطِ تركيبِ اقترانيْنِ، وإيجادُ قيمتِهِ لعددٍ مُعطى، وإيجادُ قاعدةِ اقترانٍ مُركَّبٍ إذا عُلِمَتْ قاعدتا مُركَّبتيْهِ.

المصطلحاتُ تركيبُ الاقتراناتِ، الاقترانُ المُركَّبُ، المُركِّبتانِ.

مسألةُ اليومِ عندما تسقطُ قطرةُ ماءِ المطرِ على بحيرةٍ تتكوَّنُ موجةٌ دائريةٌ يتزايدُ طولُ نصفِ قُطْرِها بالنسـبةِ إلى الزمنِ وَفقَ الاقترانِ: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$ ، حيثُ r نصفُ القُطْرِ بالسـنتيمتراتِ، وَ t الزمنُ بالدقائقِ. أَجِدُ مِساحةَ الموجةِ عندما $t = 2$.

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّهُ يُمكِنُ اسـتعمالُ أيِّ اقترانيْنِ، مثـلِ $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 1$، لتكوينِ اقتراناتٍ جديدةٍ، وذلكَ بإجراءِ عملياتِ جمعٍ، أوْ طرحٍ، أوْ ضربٍ، أوْ قسـمةٍ عليْهِما كما في الأمثلةِ الآتيةِ:

$(f+g)(x) = x^2 + 2x - 1$ $(f-g)(x) = x^2 - 2x + 1$

$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1)$ $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

واليومَ سأتعلَّمُ طريقةً جديدةً لتكوينِ اقترانٍ جديدٍ منَ الاقترانيْنِ f، وَ g عنْ طريقِ دمجِهِما، بحيثُ تكونُ مخرجةُ أحدِهِما مدخلةً للآخرِ. وتُسمّى عمليةُ الدمجِ هذهِ **تركيبَ الاقتراناتِ** (function composition)، ويُسمّى الاقترانُ الناتجُ **الاقترانَ المُركَّبَ** (composite function).

يُمكِنُ تركيبُ الاقترانيْنِ بطريقتيْنِ، هما: تطبيقُ f أولًا، ثمَّ g على نتيجةِ f، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(g \circ f)$، ويُقرَأُ: g بعدَ f. وتطبيقُ g أولًا، ثمَّ f على نتيجةِ g، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(f \circ g)$.

مفهومٌ أساسيٌّ

تركيبُ الاقتراناتِ

إذا كانَ $f(x)$، وَ $g(x)$ اقترانيْـنِ، فـإنَّ الاقتـرانَ الناتـجَ مـنْ تركيـبِ f, g هـوَ: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. ويُقـرَأُ: f بعـدَ g، ويكونُ مجالُ الاقتـرانِ المُركَّبِ $(f \circ g)$ هوَ مجموعةُ قيمِ x منْ مجالِ g التي تكونُ مخرجاتُها $g(x)$ في مجالِ f.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما طول نصف قطر الموجة بعد 7 دقائق من سقوط قطرة المطر على البحيرة؟ 75 cm
  » كيف تحسب مساحة الموجة؟ باستعمال صيغة مساحة الدائرة: $A = \pi r^2$
  » كيف تحسب مساحة الموجة بعد عِدَّة دقائق من سقوط قطرة الماء على البحيرة؟ إيجاد طول نصف قطرها r أولًا، ثم تعويضه في صيغة المساحة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- اكتب الاقترانين: $f(x) = x-2$, $g(x) = 4 + 2x$، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة f للأعداد: 9 ,5 ,3 ,2، ثم كتابة النتائج في عمودين كما يأتي:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 2 & \rightarrow & 0 \\ 3 & \rightarrow & 1 \\ 5 & \rightarrow & 3 \\ 9 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة g للأعداد الناتجة من f، ثم كتابة النتائج كما في المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ 2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 6 \\ 5 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 10 \\ 9 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 18 \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

- بيِّن للطلبة أن النتيجة النهائية الأولى 4 تُمثِّل قيمة g لِـ $f(2)$، وأنها تكتب بصورة $g(f(2)) = 4$، أو $(g \circ f)(2) = 4$، وهكذا الحال لبقية النتائج.
- وضِّح للطلبة أن عملية تعويض قيمة اقتران في اقتران آخر تسمى تركيب الاقترانات، وأنه عند تعويض $f(x)$ مكان x في معادلة $g(x)$ ينتج الاقتران المُركَّب $(g \circ f)(x)$ الذي هو $g(f(x))$، وأنه عند تعويض قيمة $g(x)$ في معادلة $f(x)$ ينتج $(f \circ g)(x)$، وأن هذين الاقترانين المُركَّبين يكونان غالبًا مختلفين.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في تعريف تركيب اقترانين، وطريقتي التركيب، وشروطه، مُبيِّنًا أنه إذا كانت الاقترانات كثيرات حدود فإن مجالها ومداها الأعداد الحقيقية؛ فيمكن تركيبها بالطريقتين. بعد ذلك شارِك الطلبة في حل المثال، مُوضِّحًا خطوتي الحل في كل فقرة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المعلم

أخطاء مفاهيمية:

قد يجد بعض الطلبة قيمة $(g \circ f)(x)$ ببدء التعويض في $g(x)$ أولًا، ثم تعويض النتيجة في $f(x)$؛ لذا نبِّههم إلى البدء من أقصى اليمين، بتعويض x في معادلة $f(x)$، ثم تعويض الناتج في معادلة $g(x)$.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1,\ g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$، فجد ما يأتي:

a) $(f \circ g)(2)$ 49

b) $(g \circ f)(2)$ $\dfrac{13}{6}$

c) $(f \circ g)(5)$ 19.75

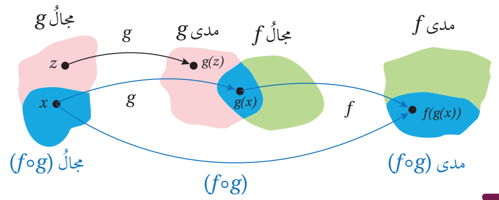
تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: تركيب الاقترانات composition of functions، والاقتران المُركَّب composite function، والمُركِّبة component

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

يُوضِّحُ المُخطَّطُ الآتي أنَّ مجالَ $(f \circ g)$ هوَ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجالِ g، وأنَّ مدى $(f \circ g)$ هوَ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مدى f. وإذا كانَتْ إحدى القيمِ مثلُ $g(z)$ (حيثُ z أحدُ عناصرِ مجالِ g) غيرَ موجودةٍ في مجالِ f، فلا يُمكِنُ إيجادُ $(f \circ g)(z)$ في هذهِ الحالةِ:



مثال 1

إذا كانَ $f(x) = x^2,\ g(x) = x + 4$، فأَجِدُ:

1 $(g \circ f)(3)$

$(g \circ f)(3) = g(f(3))$ — $(g \circ f)(3)$ تعني g لِـ $f(3)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g(3^2)$ — بتعويضِ $x = 3$ في معادلةِ f

$= g(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9 + 4 = 13$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

2 $(g \circ f)(-2)$

$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$ — $(g \circ f)(-2)$ تعني g لِـ $f(-2)$؛ أيْ f، ثمَّ g

$= g((-2)^2)$ — بتعويضِ $x = -2$ في معادلةِ f

$= g(4)$ — بالتبسيطِ

$= 4 + 4 = 8$ — بتعويضِ $x = 4$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

3 $(f \circ g)(5)$

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$ — $(f \circ g)(5)$ تعني f لِـ $g(5)$؛ أيْ g، ثمَّ f

$= f(5+4)$ — بتعويضِ $x = 5$ في معادلةِ g

$= f(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9^2 = 81$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ f، والتبسيطِ

أُفكِّرُ

هلْ توجدُ أيُّ قيمٍ للمُتغيِّرِ x لا يُمكِنُ حسابُ $(h \circ j)(x)$ عندها؟

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $j(x) = 2x + 1$، $h(x) = \sqrt{x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $(h \circ j)(4)$ **b)** $(j \circ h)(4)$ **c)** $(h \circ h)(16)$ **d)** $(j \circ j)(-8)$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) 3 **b)** 5 **c)** 2 **d)** -29

يُمكِنُ إيجادُ قاعدةِ الاقترانِ المُركَّبِ بدلالةِ المُتغيِّرِ x، ثمَّ حســابِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ عندَ أيِّ قيمةٍ عدديةٍ معطاةٍ.

مثال 2

إذا كانَ $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x^2 - 6$، فأَجِدْ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f\circ g)(x)$، وَ $(g\circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدْ $(f\circ g)(-2)$، وَ $(g\circ f)(0)$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$	تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ
$= f(2x^2 - 6)$	بتعويضِ $g(x) = 2x^2 - 6$
$= 3(2x^2 - 6) + 5$	بتعويضِ $(2x^2 - 6)$ مكانَ x في معادلةِ f
$(f\circ g)(x) = 6x^2 - 13$	بالتبسيطِ
$(f\circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11$	بتعويضِ $x = -2$، والتبسيطِ
$(g\circ f)(x) = g(f(x))$	تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ
$= g(3x+5)$	بتعويضِ $f(x) = 3x + 5$
$= 2(3x+5)^2 - 6$	بتعويضِ $(3x + 5)$ مكانَ x في معادلةِ g
$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6$	بتربيعِ $(3x + 5)$
$(g\circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44$	بالتبسيطِ
$(g\circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44$	بتعويضِ $x = 0$، والتبسيطِ

رموزٌ رياضيةٌ

يُقرَأُ الرمــزُ $(f\circ g)(x)$: f بعدَ $g(x)$، ويُقرَأُ الرمزُ $f(g(x))$: f لِـ $g(x)$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = 2 - 3x$، فأَجِدْ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f\circ g)(x)$، وَ $(g\circ f)(x)$، ثمَّ أَجِدْ $(f\circ g)(3)$، وَ $(g\circ f)(-1)$. انظر الهامش

أُفكِّرُ

هلْ تُحقِّقُ عمليةُ تركيبِ الاقترانــاتِ الخاصيــةَ التبديليةَ؟

يُمكِنُ النظرُ إلى كثيرٍ منَ الاقتراناتِ بوصفِها اقتراناتٍ مُركَّبةً، وإيجادُ اقترانيْنِ بســيطيْنِ يُكافِئُ تركيبُهُمــا الاقترانَ المُركَّــبَ، عندئذٍ يكونُ الاقترانانِ البســيطانِ **مُركِّبَتَي الاقتــرانِ المُركَّبِ** (components of the composite function).

فمثــلًا، يُمكِــنُ اعتبــارُ الاقتــرانِ $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقترانــًا مُركَّبــًا، ومُركِّبَتــاهُ همــا: $h(x) = \sqrt{x}, g(x) = 4x^2 + 9$، ويكونُ $f(x) = (h\circ g)(x)$.

مثال 2

- ناقِــش الطلبة في كيفيــة تعويض مقــدار جبري من اقتران في معادلــة اقتران آخر للتعبير عــن تركيبهما جبريًّا، مُوضِّحًا الخطوات المتبعة في المثال، وتبسيط المقدار الناتج لأبسط صورة.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = \sqrt{2x + 10}, g(x) = 4x + 1$، فجد $(f\circ g)(x)$، ثم جد $(f\circ g)(3)$ بطريقتين.

$(f\circ g)(x) = \sqrt{8x + 12}, (f\circ g)(3) = \sqrt{8(3) + 12}$

$= \sqrt{36} = 6$

$(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(13) = \sqrt{2(13) + 10}$

$= \sqrt{36} = 6$

إرشــاد: وجِّــه الطلبــة إلــى التحقُّــق مــن صحــة الإجابــة عنــد إيجــاد قاعــدة الاقتــران المُركَّــب، بحســاب قيمــة الاقتــران المُركَّــب لعــدد مــا بالتعويــض فــي القاعــدة، واســتعمال تعريــف الاقتــران المُركَّــب، ومقارنــة النتيجتيــن، فــإذا تســاوتا كانــت القاعــدة صحيحــة.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

$(f\circ g)(x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x) = 9x^2 - 24x + 12$

$(f\circ g)(3) = 21$

$(g\circ f)(x) = 2 - 3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(g\circ f)(-1) = 11$

تنويع التعليم

- وزِّع الطلبة إلى مجموعــات ثنائية، ثم اطلب إلى كل ثنائي أن يكتبا اقترانيــن؛ كل على حدة، ثم العمل معًا لإيجاد ناتج تركيبهما، والتحقق من صحته.

مثال 3

- وضِّح للطلبة كيفية تفكيك اقتران معطى إلى اقترانين بسيطين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى، ثم أخبرهم أنه يوجد في حالات عِدَّة أكثر من طريقة لكتابة اقترانين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى. بعد ذلك ناقِش الطلبة في حلِّ المثال، ثم اطلب إليهم البحث عن إجابة أُخرى.

مثال إضافي

- جد الاقترانين $f(x), g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن $h(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 9}$ بصورة $h(x) = f(g(x))$.

إجابة محتملة:

$g(x) = x^2 + 9, f(x) = 2 + \sqrt{x}$

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 4 الذي يُبيِّن توظيف تركيب الاقترانات في موقف حياتي، ثم اطلب إليهم تفسير الاقترانين المعطيين في المسألة، ومدلول الاقتران الناتج من تركيبهما. بعد ذلك اسألهما عن حساب التكلفة من دون كتابة اقتران مُركَّب.

مثال 3

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$

إرشادٌ

قدْ لا تكونُ القيودُ على مجالِ الاقتراناتِ واضحةً بعدَ إجراءِ عمليةِ تركيبِ الاقتراناتِ وتبسيطِها؛ لذا منَ المُهِمِّ الانتباهُ إلى مجالِ الاقترانيْنِ قبلَ تركيبِهِما.

1 $h(x) = \frac{1}{x+3}$

أفترضُ أنَّ $g(x) = x + 3, f(x) = \frac{1}{x}$. وبذلكَ، فإنَّ:

$f(g(x)) = f(x + 3)$ بتعويضِ $g(x) = x + 3$

$= \frac{1}{x+3} = h(x)$ بتعويضِ $x+3$ مكانَ x في معادلةِ f

2 $h(x) = (2 + x^2)^{10}$

أفترضُ أنَّ $g(x) = 2 + x^2, f(x) = x^{10}$. وبذلكَ، فإنَّ:

$f(g(x)) = f(2 + x^2)$ بتعويضِ $g(x) = 2 + x^2$

$= (2 + x^2)^{10} = h(x)$ بتعويضِ $2 + x^2$ في معادلةِ f

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$ انظر الهامش

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكِنُ استعمالُ فكرةِ الاقتراناتِ المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلِ: التجارةِ، والصناعةِ، وغيرِهِما.

مثال 4: من الحياة

صناعةٌ: وجدَ مديرُ مصنعٍ للأثاثِ أنَّ تكلفةَ إنتاجِ q منْ خزاناتِ الكتبِ في فترةِ العملِ الصباحيةِ بالدينارِ هيَ: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كانَ عددُ خزاناتِ الكتبِ التي يُمكِنُ إنتاجُها في t ساعةً في الفترةِ الصباحيةِ هيَ: $q(t) = 20t, 0 \le t \le 5$، فما تكلفةُ الإنتاجِ بدلالةِ t؟ كمْ دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

28

إجابة أتحقق من فهمي 3:

من الإجابات المحتملة:

a) $f(x) = x^2 - 1 , g(x) = 2x$, أو $f(x) = 4x - 1, g(x) = x^2$

من الإجابات المحتملة:

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 5 , g(x) = (x+2)^2$ ، أو $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5 , g(x) = x+2$

لإيجادِ تكلفةِ الإنتاجِ بدلالةِ t، أُعوِّضُ قيمةَ $q(t)$ في معادلةِ التكلفةِ، فأُكوِّنُ اقترانًا مُركَّبًا هوَ $(C\circ q)(t)$:

$$(C\circ q)(t) = C(20t) \quad \text{تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ}$$

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800 \quad \text{بتعويضِ } 20t \text{ مكانَ } q \text{ في معادلةِ التكلفةِ}$$

$$(C\circ q)(t) = 400t^2 + 40t + 800 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: $(C\circ q)(4)$

$$(C\circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذنْ، تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: 7360 دينارًا.

معلومةٌ

الكلفن وحدةٌ لقياسِ درجةِ الحرارةِ، اعتُمِدَتْ في النظامِ الدوليِّ، ورُمِزَ إليْها بالرمزِ (K)، وقدْ سُمِّيَتْ بهذا الاسمِ نسبةً إلى الفيزيائيِّ اللوردِ كلفن.

أتحقق من فهمي

قياسٌ: يُحوِّلُ الاقترانُ $C(F) = \frac{5}{9}(F-32)$ درجاتِ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ F إلى مقياسِ سيلسيوس C. ويُحوِّلُ الاقترانُ $K(C) = C + 273$ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس إلى مقياسِ كلفن K. أكتبُ الاقترانَ الذي يُحوِّلُ درجةَ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ إلى مقياسِ كلفن، ثمَّ أجِدُ درجةَ الحرارةِ على مقياسِ كلفن التي تُقابِلُ 86 درجةً فهرنهايتيةً. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَ $f(x) = x + 7, g(x) = \frac{x}{2}$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $(f\circ g)(4)$ 9

2) $(g\circ f)(4)$ 5.5

3) $(g\circ g)(-2)$ $-\frac{1}{2}$

4) $(f\circ f)(3)$ 17

إذا كانَ $c(x) = x^3, d(x) = 2x-3$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

5) $(c\circ d)(3)$ 27

6) $(d\circ c)(5)$ 247

7) $(c\circ d)(x)$ $(c\circ d)(x) = (2x-3)^3$

8) $(d\circ c)(x)$ $(d\circ c)(x) = 2x^3 - 3$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$$(K\circ C)(F) = K(\frac{5}{9}(F-32)) = \frac{5}{9}(F-32) + 273$$

$$(K\circ C)(86) = \frac{5}{9}(86-32) + 273 = 303K$$

مثال إضافي

تجارة: أعلن محل لبيع الأجهزة الكهربائية عن خصم قيمته 15% على جميع الأجهزة. يريد خليل أن يشتري ثلاجة من هذا المحل، ولديه قسيمة من المصنع تُخوِّله الحصول على خصم 25 دينارًا من ثمن الثلاجة:

a) اكتب اقترانين f, g يُمثِّل أحدهما ما سيدفعه خليل لشراء ثلاجة ثمنها x دينارًا مستفيدًا من الخصم المعلن، ويُمثِّل الآخر ما سيدفعه مستفيدًا من القسيمة.

$f(x) = x - 25\ ,\ \ g(x) = x - 0.15x = 0.85x$

b) اكتب قاعدة كلٍّ من $(g\circ f)(x), (f\circ g)(x)$، مُفسِّرًا دلالاتهما، ومُحدِّدًا أيهما أفضل لخليل.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من القسيمة أولًا، ثم الخصم المعلن: $(g\circ f)(x) = 0.85x - 21.25$

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من الخصم المعلن أولًا، ثم القسيمة: $(f\circ g)(x) = 0.85x - 25$

الأفضل لخليل هو $(f\circ g)(x)$؛ لأنه سيدفع أقل بمقدار 3.75 دنانير.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (1–10)، وتابعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم ناقِشهم فيها.

تعليمات المشروع

وجِّه الطلبة إلى البدء بتنفيذ الخطوة 3 من المشروع، بتمثيل البيانات التي جمعوها باستعمال برمجية Excel، وإيجاد قاعدة الاقتران المناسب للبيانات.

9 إذا كانَ $a(x) = x + 4,\ b(x) = x - 7$، فأُثبِتُ أنَّ $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$. انظر ملحق الإجابات

10 إذا كانَ $f(x) = 2^x,\ g(x) = 3x + 4$، فأَجِدُ $(f \circ g)(x)$، ثمَّ أَجِدُ قيمةَ $(f \circ g)(-3)$. انظر ملحق الإجابات

11 إذا كانَ $f(x) = \frac{1}{x-4},\ g(x) = 2x - 10$، فأَجِدُ $(g \circ f)(x)$ بصورةِ كسرٍ واحدٍ، ثمَّ أُعيِّنُ مجالَهُ. انظر ملحق الإجابات

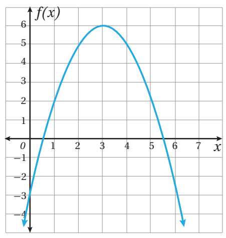
إذا كانَ $f(x) = x + 1,\ g(x) = x^2 - 7$، فأُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي بصورةِ اقترانٍ مُركَّبٍ، مُعتمِدًا الاقترانيْنِ f, g:

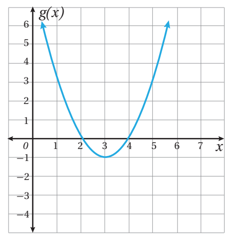
12 $x^2 - 6$ $\quad (f \circ g)(x)$

13 $x + 2$ $\quad (f \circ f)(x)$

14 $x^2 + 2x - 6$ $\quad (g \circ f)(x)$

أستعملُ التمثيليْنِ البيانييْنِ للاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ لإيجادِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ في الأسئلةِ (18 – 15):





15 $(f \circ g)(2)$ $\quad (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = -3$

16 $(g \circ f)(4)$ $\quad (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 3$

17 $(g \circ g)(5)$ $\quad (g \circ g)(5) = g(g(5)) = g(3) = -1$

18 $(f \circ f)(3)$ $\quad (f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(6) = -3$

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$

19 $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$ انظر ملحق الإجابات

20 $h(x) = \left(\frac{1}{2x - 3}\right)^3$ انظر ملحق الإجابات

21 إذا كانَ $f(x) = \sqrt{x - 2}\ ,\ x \geq 2,\ g(x) = \frac{2}{3 - x}\ ,\ x > 3$، فهلْ يُمكِنُ تكوينُ $(f \circ g)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر ملحق الإجابات

22 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

تنبيه: في الأسئلة (18–15)، وجِّه الطلبة إلى اختيار التمثيل البياني للاقتران الأيمن في صيغة الاقتران المُركَّب، ورسم عمود من القيمة x المحددة في السؤال بحيث يلاقي المنحنى، ثم رسم مستقيم أفقي إلى المحور y، وتحديد قيمة y، ثم تعيين تلك القيمة على المحور x في التمثيل البياني الثاني، ثم رسم عمود يلاقي المنحنى، ثم رسم خط أفقي إلى المحور y ، وتحديد قيمة y، فتكون تلك القيمة هي قيمة الاقتران المُركَّب.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأسئلة ذوات الأرقام الفردية في الصفحة العاشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشهم أيضًا في الأسئلة الباقية من الدرس.

الوحدةُ 5

يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثلّاجةِ بالاقترانِ: $N(T) = 23T^2 - 56T + 1,\ 3 < T < 33$، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ منَ الثلّاجةِ تُعطى درجةُ حرارتِهِ بالاقترانِ: $T(t) = 5t + 1.5$، حيثُ t الزمنُ بالساعاتِ:

23 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$. 23–26) انظر ملحق الإجابات

24 أَجِدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلتيْنِ عشريتيْنِ.

25 إذا كانَ $f(x) = ax + b,\ a > 0$، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a، وَ b.

26 أَجِدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{x}\ ,\ h(x) = x + 3$.

مهارات التفكير العليا 27–30) انظر ملحق الإجابات

27 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَتْ كلٌّ منْ هدى ووفاءَ ناتجَ $(f \circ g)(x)$، حيثُ: $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = x^2 + 5$. أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

وفاءُ

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (x^2+5)^2 - 6x^2 - 5 \\ &= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5 \\ &= x^4 + 4x^2 + 20\end{aligned}$$

هدى

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (x^2+5)^2 - 6(x^2+5) - 5 \\ &= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5 \\ &= x^4 + 4x^2 - 10\end{aligned}$$

28 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ اقترانيْنِ f، وَ g بحيثُ يكونُ $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

29 **تحدٍّ:** إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}\ ;\ f(x) = \frac{1}{x-3}$، فما قاعدةُ $(f \circ g)(x)$؟ ما مجالُهُ؟

30 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$، فأَحُلُّ المعادلةَ $(f \circ g)(x) = -4$.

31

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند **(مهارات التفكير العليا)**، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- أرشد الطلبة إلى إكمال المربع في الاقتران الوارد في السؤال 28

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » إذا كان $f(x) = 3x - 7$، وكان $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 11$، فما قاعدة $g(x)$؟
    $g(x) = \frac{4}{3}x^2 + 6$
  - » إذا كان $f(x) = \sqrt{3x}$، وكان $(g \circ f)(x) = 18x + 7$، فما قاعدة $g(x)$؟
    $g(x) = 6x^2 + 7$
  - » إذا كان $f(x) = \frac{2+3x}{2x-6}\ ,\ g(x) = \frac{1}{x}$، فما مجال كل من $(f \circ g)(x)$، و $(g \circ f)(x)$؟

مجال $(f \circ g)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و $\frac{1}{3}$

مجال $(g \circ f)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 و $\frac{-2}{3}$

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة البحث في مكتبة المدرسة أو شبكة الإنترنت عن أمثلة تطبيقية على تركيب الاقترانات، ثم كتابة مثال واقعي عن تركيب الاقترانات.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 4

نتاجات الدرس

- يتعرف العلاقة العكسية، والاقتران العكسي.
- يجد الاقتران العكسي، ويحدد مجاله ومداه.
- يتعرف الاقتران الجذري، ويحدد مجاله ومداه.
- يمثل الاقتران واحد لواحد واقترانه العكسي في المستوى الإحداثي نفسه، ويتعرف العلاقة بينهما.

التعلم القبلي:

- تمييز العلاقة والاقتران.
- تغيير موضوع القانون.

1 التهيئة

- اسأل الطلبة عن العلاقة والاقتران والفرق بينهما.
- اكتب العلاقتين الآتيتين، ثم اسأل الطلبة عن المجال والمدى لكلٍّ منهما، وأيهما اقتران:

1) $\{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

2) $\{(-2, 4), (-1, 1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 2x - 5$ $\qquad x = \dfrac{y+5}{2}$

2) $y = \dfrac{3y+4}{5}$ $\qquad x = \dfrac{5y-4}{3}$

الدرس 4

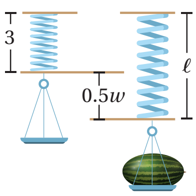
الاقترانُ العكسيُّ

Inverse Function

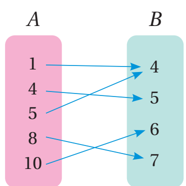
فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقترانِ العكسيِّ، وإيجادُهُ، وتحديدُ مجالِهِ ومداهُ.

المصطلحاتُ العلاقةُ العكسيةُ، الاقترانُ العكسيُّ، اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ، اختبارُ الخطِّ الأفقيِّ، الاقترانُ المحايدُ، الاقترانُ الجذريُّ.

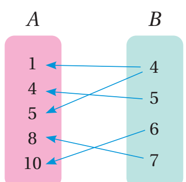
مسألةُ اليومِ يُستعمَلُ الاقترانُ $l = 0.5w + 3$ لإيجادِ طولِ الزنبركِ l بالسنتيمتراتِ في الميزانِ الزنبركيِّ عندَ قياسِ كتلةِ جسمٍ w بالكيلوغرامِ. هلْ يُمكِنُ إيجادُ اقترانٍ آخرَ يُستعمَلُ لإيجادِ كتلةِ الجسمِ إذا عُلِمَ طولُ الزنبركِ؟



تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ العلاقةَ تربطُ بينَ مجموعتيْنِ منَ العناصرِ، وأنَّ إحداهُما تُسمّى المجالَ، والأُخرى تُسمّى المدى. وبالنظرِ إلى العلاقةِ المُمثَّلةِ في المُخطَّطِ السهميِّ المجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ المجالَ هوَ: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$، والمدى هوَ: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.



عندَ عكسِ اتجاهِ الأسهمِ لترتبطَ عناصرُ B بعناصرِ A تنتجُ **علاقةٌ عكسيةٌ** (inverse relation)، مجالُها B، ومداها A.

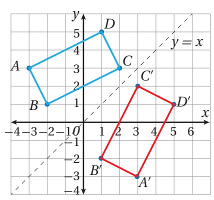


مثال 1

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(1, 5), (2, 3), (-2, 1), (-3, 3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المستطيلِ $ABCD$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

لإيجادِ العلاقةِ العكسيةِ، أُبدِّلُ إحداثياتِ الأزواجِ المُرتَّبةِ، فتكونُ العلاقةُ العكسيةُ هيَ: $\{(5, 1), (3, 2), (1, -2), (3, -3)\}$.

عندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا تنتجُ إحداثياتُ رؤوسِ المستطيلِ $A'B'C'D'$ الذي يُمثِّلُ انعكاسًا للمستطيلِ $ABCD$ حولَ المستقيمِ $y = x$



منهاجي
متعة التعليم الهادف

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) واسألهم:
  » لماذا يســـتطيل الزنبرك عندما تُعلَّق به كتلة؟ لأن قوة الجاذبية تشد الكتلة إلى الأسفل، فيزداد طول الزنبرك.
  » إذا عُلِّق بالميزان مادة كتلتها 4 k، فما طول الزنبرك؟ 5 cm
  » كيف تُحسَــب كتلة جســم عُلِّق بهذا الميــزان فأصبح طــول الزنبرك 7 cm؟ مــا كتلته؟ بتعويض 7 بدل l في المعادلة وحلها لإيجاد w. كتلته 8 kg
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم العلاقة العكســية التي تنتج بعكس اتجاه الأســهم في المخطط السهمي، أو بتبديل الإحداثيين في الأزواج المرتبة التي تُمثِّل العلاقة. فإذا كان (a, b) موجودًا في العلاقة R، فإن (b, a) يكون موجودًا في العلاقة العكسية للعلاقة R.

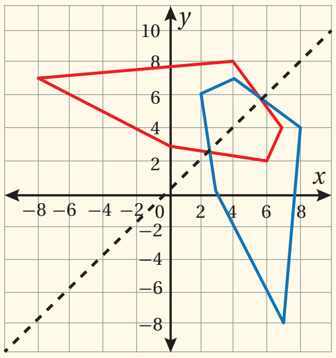
مثال 1

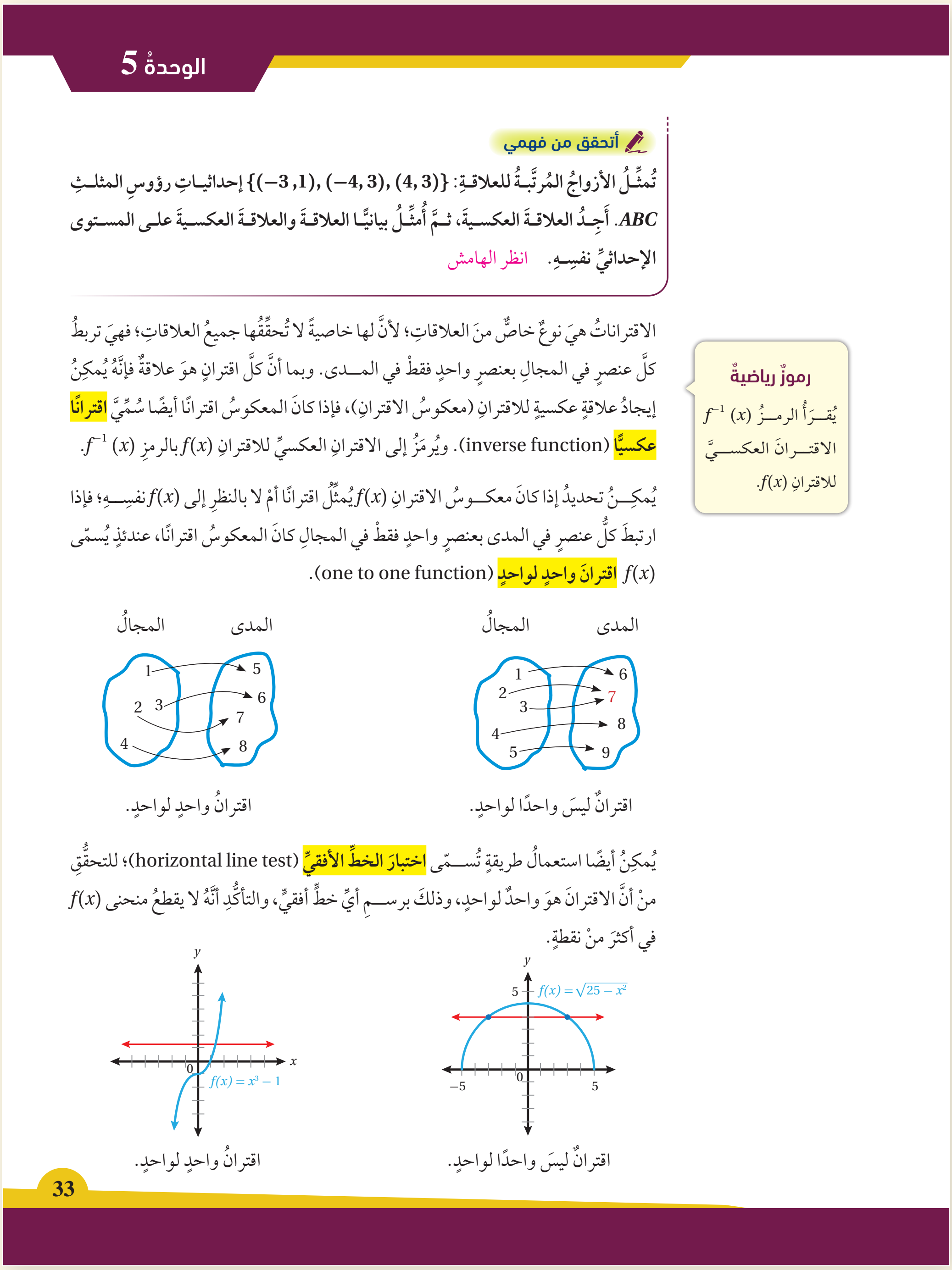
- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة مكتوبة بصورة أزواج مرتبة، وتمثيل العلاقة ومعكوسها في المســتوى البياني نفسه، ومقارنة التمثيلين البيانين، مُذكِّرًا إيّاهم بالانعكاس حول مستقيم.

مثال إضافي

- تُمثِّل العلاقة $\{(2, 6), (3, 0), (4, 7), (7, -8), (8, 4)\}$ رؤوس مضلع خماســي. جد العلاقة العكسية، ومثِّل العلاقتين في المستوى الإحداثي نفسه.

العلاقة العكسية هي:
$\{(-8, 7), (0, 3), (4, 8), (6, 2), (7, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المضلع حول المستقيم $y = x$





أتحقق من فهمي

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(-3, 1), (-4, 3), (4, 3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ ABC. أجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. انظر الهامش

الاقتراناتُ هيَ نوعٌ خاصٌّ منَ العلاقاتِ؛ لأنَّ لها خاصيةً لا تُحقِّقُها جميعُ العلاقاتِ؛ فهيَ تربطُ كُلَّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المـدى. وبما أنَّ كُلَّ اقترانٍ هوَ علاقةٌ فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ علاقةٍ عكسيةٍ للاقترانِ (معكوسُ الاقترانِ)، فإذا كانَ المعكوسُ اقترانًا أيضًا سُمِّيَ **اقترانًا عكسيًّا** (inverse function). ويُرمَزُ إلى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$.

رموزٌ رياضيةٌ

يُقـرَأُ الرمـزُ $f^{-1}(x)$ الاقتـرانَ العكسـيَّ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِـنُ تحديدُ إذا كانَ معكـوسُ الاقترانِ $f(x)$ يُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا بالنظرِ إلى $f(x)$ نفسِـهِ؛ فإذا ارتبطَ كُلُّ عنصرٍ في المدى بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المجالِ كانَ المعكوسُ اقترانًا، عندئذٍ يُسمّى $f(x)$ **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ** (one to one function).

المدى المجالُ

1 → 6, 2, 3 → 7, 4 → 8, 5 → 9

اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

المدى المجالُ

1 → 5, 2, 3 → 6, 7, 4 → 8

اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ طريقةٍ تُسـمّى **اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ** (horizontal line test)؛ للتحقُّقِ منْ أنَّ الاقترانَ هوَ واحدٌ لواحدٍ، وذلكَ برسـمِ أيِّ خطٍّ أفقيٍّ، والتأكُّدِ أنَّهُ لا يقطعُ منحنى $f(x)$ في أكثرَ منْ نقطةٍ.

$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

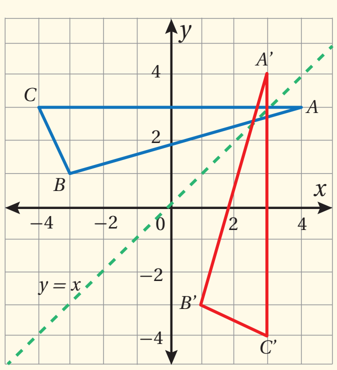
$f(x) = x^3 - 1$

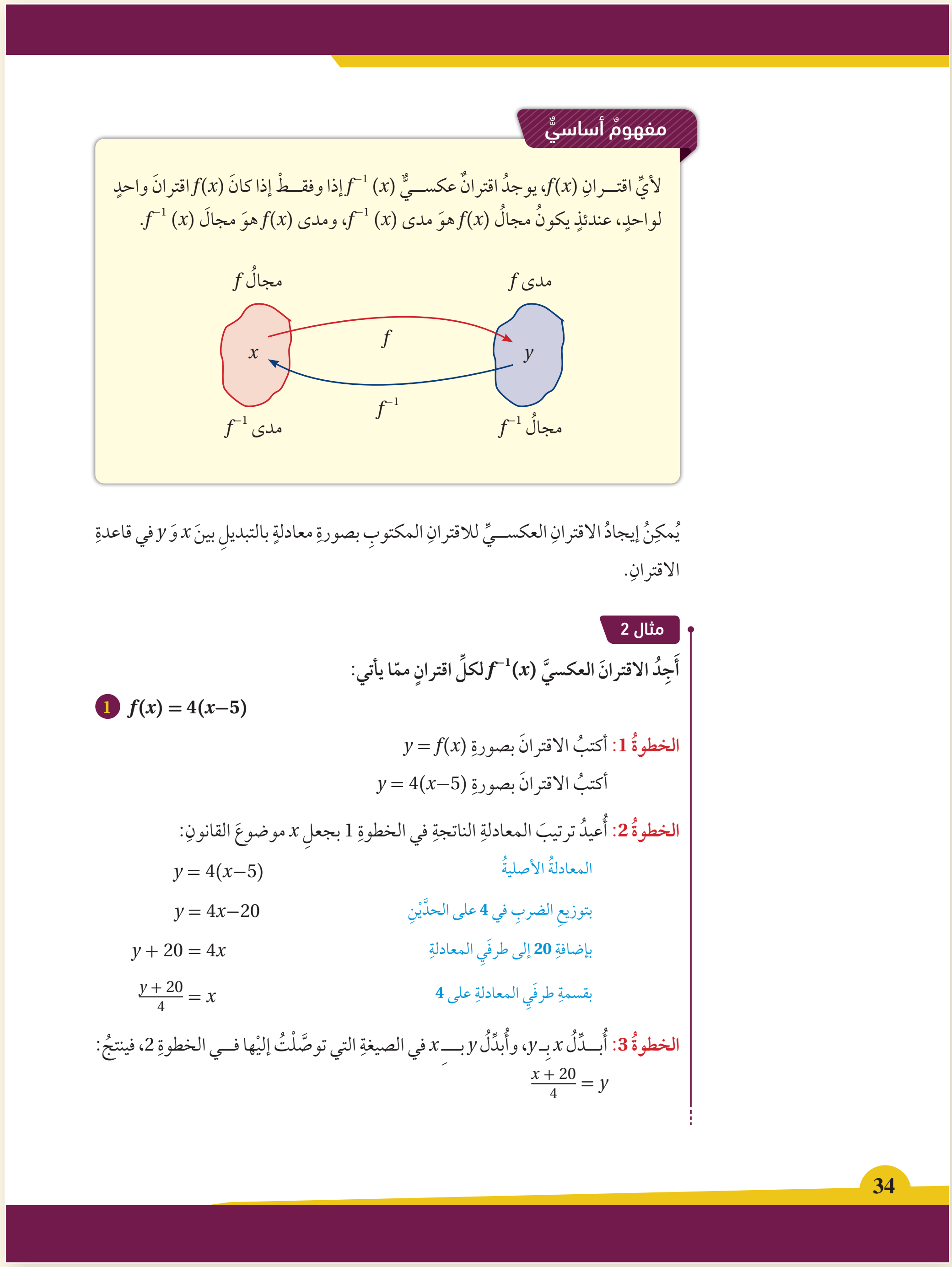
اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.

- وضِّح للطلبة أنه يمكننا إيجاد معكوس للاقتران مثلما نجد معكوسًا للعلاقة. غير أن معكوس الاقتران $f(x)$ لا يكون اقترانًا إلا إذا كان كل عنصر في مدى الاقتران f مرتبطًا بعنصر واحد فقـط من مجاله؛ فلا يمكن أن يرتبط عنصـران من المجال بعنصر واحد من المدى. ويسـمى الاقتران الذي يُحقِّق هذه الخصيصة اقتران واحد لواحد، ويكون معكوسـه هو الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.
- وجِّـه الطلبـة إلى تأمُّـل المخططين السـهميين في الصفحة 33، ثم رسم معكوس كلٍّ منهما، ثم اسألهم:
  - » أي المعكوسين هو اقتران؟
- وضِّح للطلبة اختبـار الخط الأفقي؛ لكي يتمكّنوا من تمييز اقتران واحد لواحد.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

العلاقة العكسية هي: $\{(1, -3), (3, -4), (3, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$





مفهومٌ أساسيٌّ

لأيِّ اقترانِ $f(x)$، يوجدُ اقترانٌ عكسيٌّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقطْ إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، عندئذٍ يكونُ مجالُ $f(x)$ هوَ مدى $f^{-1}(x)$، ومدى $f(x)$ هوَ مجالَ $f^{-1}(x)$.

يُمكِنُ إيجادُ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ المكتوبِ بصورةِ معادلةٍ بالتبديلِ بينَ x وَ y في قاعدةِ الاقترانِ.

مثال 2

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 4(x-5)$

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = f(x)$

أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 4(x-5)$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 4(x-5)$	المعادلةُ الأصليةُ
$y = 4x-20$	بتوزيعِ الضربِ في 4 على الحدَّيْنِ
$y + 20 = 4x$	بإضافةِ 20 إلى طرفَيِ المعادلةِ
$\frac{y+20}{4} = x$	بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4

الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بـ y، وأُبدِّلُ y بـ x في الصيغةِ التي توصَّلْتُ إليْها في الخطوةِ 2، فينتجُ:

$$\frac{x+20}{4} = y$$

34

مثال 2

- وضِّح للطلبة خطوات إيجاد الاقتران العكسي لاقتران عُلِمت معادلته كما في المثال.
- اكتب على اللوح بعض الأعداد، ثم اطلب إلى الطلبة تعويضها في $f(x)$، وتعويض الأعداد الناتجة في الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$، وملاحظة العلاقة بين الاقتران ومعكوسه.

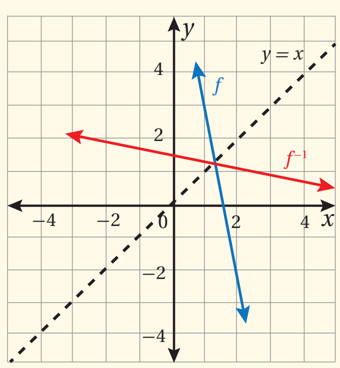
إذا كان $f(a) = b$، فإن $f^{-1}(b) = a$

- وضِّح لهم أيضًا أنه لرسم الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران، يجب اختيار بعض النقاط، وتبديل ترتيب إحداثي كلٍّ منها، وتعيين النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ورسم المنحنى (أو المستقيم) المار بها.

مثال إضافي

- جد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 7 - 5x$، ثم مثِّل $f(x), f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.

$$f^{-1}(x) = \frac{7-x}{5}$$



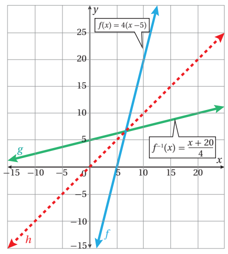
التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فيكونُ الناتجُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$.

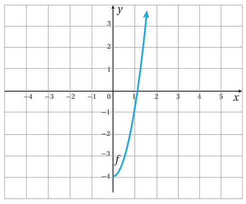
أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمالِ اختبارِ الخطِّ الأفقيِّ، أَجِدُ أنَّ $f(x)$ هوَ اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ عندما $x \geq 0$؛ لذا فإنَّ لهُ اقترانًا عكسيًّا.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 3x^2 - 4$

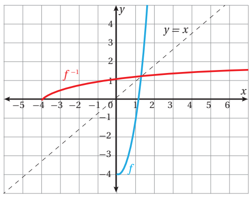
الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 3x^2 - 4$	المعادلةُ الأصليةُ
$y + 4 = 3x^2$	بإضافةِ 4 إلى طرفَيِ المعادلةِ
$\frac{y+4}{3} = x^2$	بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3
$\sqrt{\frac{y+4}{3}} = x$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ؛ لأنَّ مجالَ f الذي يُمثِّلُ مدى f^{-1} هوَ الأعدادُ غيرُ السالبةِ.

الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بـِ y، وأُبدِّلُ y بـِ x، فينتجُ: $y = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y،

فينتجُ: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y = x$

معلومةٌ

بوجهٍ عامٍّ، لا يوجدُ للاقترانِ التربيعيِّ اقترانٌ عكسيٌّ؛ لأنَّهُ ليسَ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ. ولكنْ إذا اختُزِلَ مجالُهُ بالفترةِ التي يكونُ فيها اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، كانَ لهُ عندئذٍ اقترانٌ عكسيٌّ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $f^{-1}(x)$ على الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f، أمّا الرمزُ $\frac{1}{f(x)}$ فيدلُّ على مقلوبِ الاقترانِ f.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: علاقة عكسية inverse relation، واقتران عكسي invers function، واقتران واحد لواحد one to one function، واقتران جذري radical function، واقتران محايد identity function.

أتحقق من فهمي

أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: انظر الهامش

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

منْ خصائصِ أيِّ اقترانيْنِ مُتعاكِسيْنَ أنَّ كلًّا منْهُما يَعكسُ أثرَ الآخرِ؛ لذا ينتجُ منْ تركيبِهِما الاقترانُ الذي يُبْقي كلَّ عنصرٍ في مجالِهِما على حالِهِ، وهوَ **الاقترانُ المحايدُ** (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسِهِ، وقاعدتُهُ هيَ: $f(x) = x$

نتيجة

يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$، إذا وفقطْ إذا كانَ:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f^{-1}(x)$ وَ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f(x)$.

إرشادٌ

تعني جملةُ (إذا وفقط إذا) أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهيْنِ.

تُستعمَلُ النتيجةُ السابقةُ لإثباتِ أنَّ كلًّا منَ اقترانيْنِ معلوميْنِ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ، وللتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحلِّ عندَ إيجادِ الاقترانِ العكسيِّ.

مثال 3

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x - 5$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ بإيجادِ $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(3x - 5)$ بتعويضِ $g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x-5)+5}{3}$ بتعويضِ $3x - 5$ مكانَ x في معادلةِ $f(x)$

$= \frac{3x+(-5+5)}{3}$ بالتجميعِ

$(f \circ g)(x) = x$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= g(\frac{x+5}{3})$ بتعويضِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$

$= 3(\frac{x+5}{3}) - 5$ بتعويضِ $\frac{x+5}{3}$ مكانَ x في معادلةِ $g(x)$

$= x + 5 - 5$ باختصارِ العاملِ 3 منَ البسطِ والمقامِ

$(g \circ f)(x) = x$ بالتبسيطِ

إذنْ، كلٌّ منَ الاقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ؛ لأنَّ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

36

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{7}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$

مثال 3

- ناقِش الطلبة في النتيجة الخاصة بتركيب اقتران مع الاقتران العكسي له، وكيفية توظيفها لتحديد إذا كان كلٌّ من اقترانين معطيين يُمثِّل اقترانًا عكسيًّا للآخر أم لا، بناءً على المثال 3.

مثال إضافي

- أثبت أن كلًّا من الاقترانين $f(x) = 4x^2 - 1, x \geq 0$ و $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}, x \geq -1$ هو اقتران عكسي للآخر.

$(f \circ g)(x) = 4(\frac{1}{2}\sqrt{x+1})^2 - 1$

$= 4(\frac{1}{4})(x+1) - 1 = x$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2-1)+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2}$

$= \frac{1}{2}(2x) = x$

إذن، كل من $f(x), g(x)$ اقتران عكسي للآخر؛ لأن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$

مثال 4

- وضِّح للطلبة مفهوم الاقتران الجذري ومجاله ومداه، ثم ناقِشهم في المثال 4، مُذكِّرًا إيّاهم بخصائص علاقة التباين ($\leq$ ،$\geq$ ،$>$ ،$<$).
- وضِّح لهم أيضًا كيفية حل المعادلة التي تحوي جذورًا عند إيجاد الاقتران العكسي لاقتران جذري.

مثال إضافي

- جد المجال والمدى والاقتران العكسي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $g(x) = 2 + \sqrt{9 - 3x}$

b) $h(x) = \sqrt[3]{4x - 15}$

a) المجال: $x \leq 3$ أو الفترة $(-\infty, 3]$، والمدى $y \geq 2$ أو الفترة $[2, \infty)$, $x \geq 2$, $g^{-1} =$

$$g^{-1}(x) = \frac{9-(x-2)^2}{3}, x \geq 2$$

b) المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: جميع الأعداد الحقيقية

$$h^{-1}(x) = \frac{x^3 + 15}{4}$$

إرشادات للمعلم

وضِّح للطلبة كيف يُوظَّف الاقتران العكسي في مسائل عملية بحيث يصبح المتغير المستقل تابعًا، والمتغير التابع مستقلًّا. فالاقتران الذي يربط محيط مربع بطول ضلعه هو $p(s) = 4s$، والاقتران العكسي له هو $s(p) = \frac{p}{4}$، فينتج طول الضلع بدلالة المحيط.

وضِّح للطلبة أيضًا اختلاف خطوات إيجاد الاقتران العكسي في المسائل العملية عنها في الطريقة السابقة؛ إذ لا يُبدَّل المتغيران لأنهما مسميان لكميات معينة خاصة، ولا يستعمل رمز الاقتران العكسي.

أتحقق من فهمي

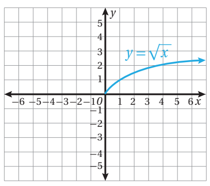
انظر الهامش

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = 4x - 8$ وَ $g(x) = \frac{x}{4} + 2$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

نتجَ في المثالِ الثاني الاقترانُ العكسيُّ $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعيًّا لمقدارٍ جبريٍّ، وهوَ نوعٌ خاصٌّ منَ الاقتراناتِ يُسمّى **الاقترانَ الجذريَّ** (radical function)، مثلَ:

$$f(x) = \sqrt{5 + x^2} \qquad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 12}{8}} \qquad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x - x^3}}{\sqrt[3]{1 - x}}$$

إذا كانَ دليلُ الجذرِ فرديًّا مثلَ: $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ كانَ مجالُ الاقترانِ الجذريِّ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ، ومداهُ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. أمّا إذا كانَ دليلُهُ زوجيًّا مثلَ: $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt{\ }$ ، فإنَّ مجالَهُ يكونُ مجموعةَ الأعدادِ التي تجعلُ المقدارَ تحتَ رمزِ الجذرِ عددًا غيرَ سالبٍ؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ للأعدادِ السالبةِ ليسَتْ حقيقيةً، ويكونُ مداهُ مجموعةً منَ الأعدادِ الحقيقيةِ غيرِ السالبةِ. فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x}$ مجالُهُ $x \geq 0$ ، ومداهُ $y \geq 0$، وتمثيلُهُ البيانيُّ كما في الشكلِ الآتي:



مثال 4

أَجِدُ مجالَ الاقترانِ $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ قيمُ x التي تجعلُ $2x - 6 \geq 0$:

أكتبُ المتباينةَ	$2x - 6 \geq 0$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$2x - 6 + 6 \geq 0 + 6$
بالتبسيطِ	$2x \geq 6$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x \geq 3$

إذنْ، مجالُ $f(x)$ هوَ $x \geq 3$، أوِ الفترةُ $[3, \infty)$، ومداهُ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ منْ قيمتِهِ عندَ 3 فصاعدًا؛ لأنَّ المقصودَ بالجذرِ هنا هوَ الجذرُ الموجبُ. فالمدى هوَ $y \geq 0$، أوِ الفترةُ $[0, \infty)$.

أتذكَّرُ

عملياتُ الجمعِ والطرحِ والضربِ في عددٍ موجبٍ لا تُغيِّرُ رمزَ التباينِ.
أمّا الضربُ في عددٍ سالبٍ فيعكسُ رمزَ التباينِ.

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ، أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = \sqrt{2x-6}$ ، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ لإيجادِ x بدلالةِ y:

المعادلةُ الأصليةُ	$y = \sqrt{2x-6}$
بتربيعِ الطرفيْنِ	$y^2 = 2x - 6$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$y^2 + 6 = 2x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$\frac{y^2+6}{2} = x$

بإبدالِ y بـ x ، وَ x بـ y في المعادلةِ الناتجةِ، فإنَّهُ ينتجُ: $y = \frac{x^2+6}{2}$

أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{2}$

يكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى $f(x)$؛ أيْ مجالُهُ الفترةُ $[0, \infty)$، ومداهُ هوَ مجالُ $f(x)$؛ أيِ الفترةُ $[3, \infty)$.

أتذكَّرُ
مجالُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى الاقترانِ f.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

أَجِدُ مجالَ $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

تتطلَّبُ بعضُ المسائلِ الحياتيةِ استعمالَ مفهومِ الاقترانِ العكسيِّ لحلِّها. فإذا عُلِمَ طولُ نصفِ قُطْرِ كرةٍ أمكنَ إيجادُ حجمِها بالتعويضِ المباشرِ في قانونِ حسابِ حجمِ الكرةِ: $V(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$. ولكنْ إذا عُلِمَ الحجمُ، وطُلِبَ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ، فيجبُ تغييرُ الصيغةِ الخاصةِ بإيجادِ الحجمِ V إلى صيغةٍ أُخرى لإيجادِ r، وهنا يبرزُ مفهومُ الاقترانِ العكسيِّ.

إرشادٌ
لا يُستعمَلُ رمزُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ في المسائلِ العمليةِ، وإنَّما يُستعمَلُ رمزٌ مثلُ $r = r(V)$ الذي يُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ بدلالةِ الحجمِ.

مثال 5: من الحياة

فيزياءُ: سقطَ جسمٌ ساكنٌ منَ ارتفاعِ 200 m عنْ سطحِ الأرضِ، فكانَ ارتفاعُهُ h عنِ الأرضِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً منْ سقوطِهِ $h(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبِّرُ عنْ t بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ الارتفاعِ h، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ الذي يكونُ فيهِ ارتفاعُ الجسمِ 50 m فقطْ.

إنَّ التعبيرَ عنْ t بدلالةِ h يعني إيجادَ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $h(t)$. ولأنَّ الزمنَ t لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ $h(t)$ هوَ $t \geq 0$، وفيهِ يكونُ $h(t)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

38

مثال 5: من الحياة

- ناقِش الطلبة في خطوات حل المثال 5 الذي يشير إلى استعمال مفهوم الاقتران العكسي في موقف عملي حياتي.

مثال إضافي

- دفع مصطفى مبلغ 1385 دينارًا تكلفة لبضاعة اشتراها شاملة ضريبة مبيعات بنسبة 12%، ودفع مبلغ 13 دينارًا أجرة شحن:

a) اكتب اقترانًا يُعبِّر عن التكلفة C بدلالة ثمن البضاعة الأصلي p. $C(p) = 1.12p + 13$

b) اكتب اقترانًا يُعبِّر عن الثمن الأصلي بدلالة التكلفة. $p(C) = \frac{C - 13}{1.12}$

c) ما الثمن الأصلي للبضاعة التي اشتراها مصطفى؟ 1225 دينارًا.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

مجال $g(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -4؛ أي $\{x | x \geq -4\}$ ، أو الفترة $[-4, \infty)$.

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -2 ؛ أي $\{y | y \geq -2\}$، أو الفترة $[-2, \infty)$.

$$g^{-1}(x) = \frac{(x+2)^2 - 12}{3}, x \geq -2$$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (12–1)،
- وتابِعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم ناقِشهم فيها.

إرشاد: تحقق من إجابة السؤالين 7 و8 من دون إيجاد قاعدة الاقتران العكسي؛ إذ يجب أن يفهم الطلبة العلاقة بين الاقتران والاقتران العكسي له، فإذا كان $f(a) = b$ فإن $f^{-1}(b) = a$ تلقائيًّا.

ملحوظة: هذان السؤالان مرتبطان بالسؤالين 5 و6 على التوالي.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $h = 200 - 4.9t^2$

الخطوةُ 2: أجعلُ t موضوعَ القانونِ.

$h = 200 - 4.9t^2$	المعادلةُ الأصليةُ
$h - 200 = -4.9t^2$	بطرحِ 200 منْ طرفَيِ المعادلةِ
$\frac{h-200}{-4.9} = t^2$	بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على -4.9
$\frac{200-h}{4.9} = t^2$	بضربِ البسطِ والمقامِ في -1
$\sqrt{\frac{200-h}{4.9}} = t$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفَيْنِ

إذنْ، الاقترانُ الذي يُعبِّرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الارتفاعِ هوَ: $t(h) = \sqrt{\frac{200-h}{4.9}}$

$t(50) = \sqrt{\frac{200-50}{4.9}}$	بتعويضِ $h = 50$
≈ 5.53	باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، يكونُ الجسمُ على ارتفاعِ 50 m بعدَ مُضِيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِهِ.

كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِهِ تقريبًا.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

يرتبطُ محيطُ الرأسِ C للطفلِ بطولِهِ H (كلا القياسيْنِ بالسنتيمترِ) عنْ طريقِ الاقترانِ: $H(C) = 2.15C - 26.75$

a) أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ محيطِ الرأسِ C بدلالةِ طولِ الطفلِ H.

b) أجِدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُهُ 66 cm

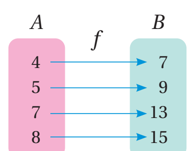
أتدرب وأحل المسائل 4–1) انظر ملحق الإجابات

أُحدِّدُ الاقترانَ الذي لهُ اقترانٌ عكسيٌّ في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ):

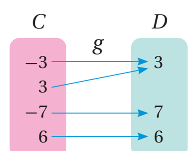
1) $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2) $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

3)



4)



الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الحادية عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إجابة أتحقق من فهمي 5:

a) $C(H) = \frac{H + 26.75}{2.15}$

b) $C \approx 43.1$ cm

تنويع التعليم

بعد حل السؤال 18، اطلب إلى الطلبة البحث عن اقترانات أُخرى تكون عكسية لنفسها.

من الإجابات المحتملة:

$f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{a}{x}$ ، حيث a عدد حقيقي.

$f(x) = a - x$، حيث a عدد حقيقي، وغيره.

إذا كانَ $f(x) = 3(\frac{x}{2} + 4)$، فأَجِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

5) $f(-2)$ 9

6) $f(4)$ 18

7) $f^{-1}(9)$ -2

8) $f^{-1}(18)$ 4

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

9) $f(x) = x + 7$ $f^{-1}(x) = x - 7$

10) $f(x) = 8x$ $f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$

11) $f(x) = \frac{x}{2} + 6$ $f^{-1}(x) = 2(x-6)$

12) $f(x) = \frac{3x-6}{5}$ $f^{-1}(x) = \frac{5x+6}{3}$

13) $f(x) = 4x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

14) $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$ $g^{-1}(x) = \frac{6-(x-4)^2}{3}, x \geq 4$

15) $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$ $g^{-1}(x) = \frac{8}{5x+3}, x \neq -\frac{3}{5}$

16) $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$ $j^{-1}(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$

17) أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ:

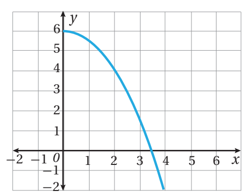
$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x-2}, x \geq 2$ انظر ملحق الإجابات

18) أُثبِتُ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ لنفسِهِ. انظر ملحق الإجابات

19) **صناعةٌ:** إذا كانَ $C(x)$ يُمثِّلُ التكلفةَ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً منْ مصابيحِ الإنارةِ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $C^{-1}(23000)$؟

عدد المصابيح التي يمكن إنتاجها بمبلغ مقداره 23000 دينار.

20) أرسمُ منحنى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f المجاورِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، مُعيِّنًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ f وَ f^{-1}. انظر ملحق الإجابات



إرشادات:

- في معرض مناقشة الطلبة في السؤال 20، اسألهم:
  - » كيف يمكن رسم منحنى الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران؟
- استمع لإجابات الطلبة. وفي حال لم يتوصَّلوا إلى إجابة صحيحة، فذكِّرهم بالعلاقة بين منحنى الاقتران والاقتران العكسي، وربط ذلك بالمثال 1، وتمثيل العلاقة والعلاقة العكسية.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- في السؤال 28، يتعيَّن على الطلبة إيجاد الاقتران المُركَّب والاقتران العكسي للاقتران $g(x)$، ثم القيمة $g^{-1}(34)$، ثم مساواتهما، وحل المعادلة التربيعية الناتجة، والانتباه أن x موجبة. اسألهم:
  » كيف يمكن إيجاد $g^{-1}(34)$ من دون إيجاد الاقتران العكسي؟

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  » إذا كان $f(x) = 5 - 3x$ و $g(x) = \dfrac{2x-3}{7}$، فجد كلًّا ممّا يأتي، مُدوِّنًا استنتاجك:

$$(f \circ g)(x),\ (f \circ g)^{-1}(x),\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x),\ (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب أن يكتب على ورقة اقترانًا والاقتران العكسي له، واقترانًا ليس له اقتران عكسي، واقترانًا عكسيًّا لنفسه، ثم يُسلِّمك الورقة عند الخروج من الصف.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوتين 4 و5 من المشروع.
- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ:

$f(x) = x^2 - 2x + 5\ ,\ -3 \le x \le 1$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

(إرشادٌ: أكتبُ $f(x)$ بصورةِ $(x+b)^2 + c$ باستعمالِ إكمالِ المربعِ). انظر ملحق الإجابات

22 **كيمياءُ:** في دورقٍ 100 mL مِنْ أحدِ المحاليلِ، منْها 25 mL مِنْ حامضِ الهيدروكلوريكِ. إذا أُضيفَ إلى الدورقِ n mL منْ محلولٍ مُشابِهٍ، تركيزُ الحامضِ فيهِ 60%، فإنَّ تركيزَ الحامضِ في الدورقِ يُعطى بالاقترانِ: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبِّرُ عنْ n بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ التركيزِ C، ثمَّ أَجِدُ عددَ المِلّيلتراتِ n التي يجبُ إضافتُها ليصبحَ تركيزُ الحامضِ في الدورقِ 50% انظر ملحق الإجابات

23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

24 تُعطى مِساحةُ السطحِ الكليةُ A للأسطوانةِ التي نصفُ قُطْرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها 40 cm بالاقترانِ:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\,\pi r$. أُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ r بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ قاعدةِ أسطوانةٍ مِساحةُ سطحِها الكليةُ $2000\ cm^2$ انظر ملحق الإجابات

25 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt[3]{x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f^{-1}(x)\ ,\ f(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.
انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** إذا كانَ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ لهُ صفرٌ عندما $x = 4$، فما الذي يُمكِنُ استنتاجُهُ عنْ منحنى $f^{-1}(x)$؟ انظر ملحق الإجابات

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ لهُ، ثمَّ أُثبِتُ أنَّ كلًّا منْهُما اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.
انظر ملحق الإجابات

28 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = x^2 + 3$، وَ $g(x) = 5x - 1$، وَ $x > 0$، فأَحُلُّ المعادلةَ: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$.
انظر ملحق الإجابات

تنبيه:

عند حل السؤال 24، وجِّه الطلبة إلى إكمال المربع؛ لكتابة المساحة بصورة مشابهة لتلك التي وردت في السؤال 21

الدرس 5

نتاجات الدرس

- يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.
- يكتب حدود متتالية إذا عُلِم حدها العام.
- يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية.
- يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.

التعلم القبلي:

- إكمال متتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية معطاة بعض حدودها.
- التعبير عن الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية بمقدار جبري.
- تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح المتتاليات الآتية:

1) 1, 5, 9, 13, ...

2) 1, 4, 9, 16, ...

3) 2, 9, 28, 65, ...

- اطلب إلى الطلبة كتابة الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة كتابة الحد العام لكل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية بحسب حدها العام.

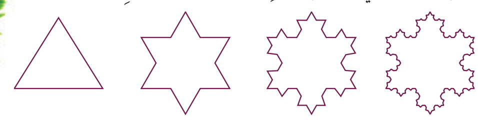
الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ.

المصطلحاتُ المتتاليةُ، الحدُّ، الحدُّ العامُّ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ النمطُ الآتي مراحلَ تطوُّرِ ورقةِ نباتِ السرخسِ:



المرحلةُ (1). المرحلةُ (2). المرحلةُ (3). المرحلةُ (4).

أستعملُ النمطَ لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ:

المرحلةُ	1	2	3	4	5	6
عددُ الأضلاعِ	3	12	48	192		

تُعَدُّ **المتتاليةُ** (sequence) اقترانًا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها، ومداهُ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

مراجعةُ مفهومٍ

المتتاليةُ: هيَ مجموعةٌ منَ الأعدادِ تَتْبَعُ ترتيبًا مُعيَّنًا، ويُسمّى كُلُّ عددٍ فيها **الحدَّ** (term).

مثال 1

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 2 , 5 , 8 , 11 , ...

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ السابقِ بمقدارِ 3، إذنْ تتزايدُ المتتاليةُ بمقدارِ 3، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$2 \underbrace{,}_{+3} 5 \underbrace{,}_{+3} 8 \underbrace{,}_{+3} 11 \underbrace{,}_{+3} 14 \underbrace{,}_{+3} 17 \underbrace{,}_{+3} 20 , \ldots$$

أتذكَّرُ

قدْ تنتجُ المتتاليةُ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها، أوْ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، أوْ منْ كلتا العمليتَيْنِ معًا.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند **(مسألة اليوم)** ثم اسألهم:
  - » كيف يمكن رؤية تطور الأشكال الهندسية لورقة السرخس؟ باستخدام المجهر.
  - » هل يُمثِّل تطور ورقة السرخس متتالية؟ لماذا؟ نعم، لأنها تتبع ترتيب ما.
  - » أيكم يُكمِل الجدول الذي يُمثِّل تطور ورقة السرخس؟ 768, 3072
  - » أيكم يستطيع كتابة الحد العام؟ $3(4)^{n-1}$
  - » هل هذه المتتالية خطية، أم تربيعية، أم تكعيبية أو غير ذلك؟ أسية
- قد لا يتمكَّن الطلبة من إيجاد الحد العام؛ فهذه المتتالية أسية لم يسبق لهم أن تعلموها، ولكن سؤالهم عنها سيثير فضولهم عن موضوع الدرس.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم كل مرة:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أخبرهم أنهم سيتعرفون هذا النوع من المتتاليات في الدرس، ثم اكتب العنوان على اللوح.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة أن المتتالية تتكوَّن من حدود، لكلٍّ منها رتبة تُمثِّل ترتيب الحد في المتتالية.
- أخبر الطلبة أن المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

- وضِّح للطلبة أنه يمكن وصف المتتالية، وكتابة الحدود التالية عن طريق الحدود الأولى للمتتالية.
- ذكِّر الطلبة بأن المتتاليات الثلاث الأولى قد درسوها سابقًا.
- اكتب حدود المتتالية في الفرع الرابع على اللوح، ثم حلِّلها إلى عواملها الأولية.
- اطلب إلى أحد الطلبة أن يكتب كل حد من حدود المتتالية بصورة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- اكتب صيغة الاقتران الأسي $y = a(b)^n$ الذي درسه الطلبة في الفصل الدراسي الأول، ثم قارنه بحدود المتتالية؛ ليستنتجوا أن $a = 1$ و $b = \frac{1}{3}$
- بيِّن للطلبة أن هذه المتتالية أسية لأن حدها العام بصورة اقتران أسي.

✓ إرشاد:

قد يؤدي تنظيم حدود المتتالية في جدول إلى فهم الطلبة الموضوع بصورة أفضل، وبخاصة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط.

ملاحظات المعلم

2 $3 \; , \; 6 \; , \; 12 \; , \; 24 \; , \ldots$

بقســمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليينِ، أَجِدُ أنَّ الحصولَ على أيِّ حدٍّ يكونُ بضربِ الحدِّ السابقِ لهُ في 2، إذنْ تتضاعفُ المتتاليةُ بمقدارِ 2، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$3 \; , \; 6 \; , \; 12 \; , \; 24 \; , \; 48 \; , \; 96 \; , \; 192 \; , \ldots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

3 $80 \; , \; 73 \; , \; 66 \; , \; 59 \; , \ldots$

بطــرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليْينِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ ينقصُ عنِ الحدِّ الســابقِ بمقــدارِ 7، إذنْ تتناقصُ المتتاليةُ بمقدارِ 7، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$80 \; , \; 73 \; , \; 66 \; , \; 59 \; , \; 52 \; , \; 45 \; , \; 38 \; , \ldots$$

$-7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7$

4 $\frac{1}{3} \; , \; \frac{1}{9} \; , \; \frac{1}{27} \; , \; \frac{1}{81} \; , \ldots$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليْينِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروبًا في الحدِّ السابقِ لهُ، إذنْ تتضاءلُ المتتاليةُ بمقدارِ $\frac{1}{3}$ ، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$\frac{1}{3} \; , \; \frac{1}{9} \; , \; \frac{1}{27} \; , \; \frac{1}{81} \; , \; \frac{1}{243} \; , \; \frac{1}{729} \; , \; \frac{1}{2187} \; , \ldots$$

$\times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3}$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التعبيرُ عنِ المتتاليةِ:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

في صورةِ:

$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$

$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$

$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$

$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$

b) $5 , 10 , 20 , 40 , \ldots$

c) $150 , 141 , 132 , 123 , \ldots$

d) $400, 200, 100, 50, \ldots$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) $\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \ldots$

b) $80 , 160 , 320 , \ldots$

c) $114 , 105 , 96 , \ldots$

d) $25 , 12.5 , 6.25 , \ldots$

مثال إضافي

- جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

2) $0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 \ldots$

الحل:

1) $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots$

2) $0.00001 , 0.000001 , 0.0000001 , \ldots$

التقويم التكويني:

- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِــدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعــض الطلبة في حل الفرع الأول من بند (**أتحقق من فهمي**)، وذلك بإضافة العدد 2 إلى البسط فقط؛ أي اعتبار الحد العام لمتتالية $T(n) = \frac{n+2}{2}$؛ لذا صحِّح لهم ذلك بتعويض $n = 1$ في الحد العام؛ للتأكُّــد أن الناتج ليــس الحــد الأول، وذكِّرهم بأن المتتاليــة تنتج من إضافة العــدد $\frac{3}{2}$ كل مرَّة؛ أي إن الحد العام هو: $T(n) = n + \frac{3}{2}$

مثال 2

- أخبر الطلبة أنه يمكن إكمال حدود المتتالية إذا عُلِم حدها العام الذي يربط كل حد برتبته.
- وضِّح للطلبة كيف يمكن إيجاد الحد من رتبته إذا عُلِمت قاعدة الحد العام للمتتالية، مُقدِّمًا مزيدًا من الأمثلة؛ للتأكُّد أن الطلبة يمتلكون المهارة المطلوبة.
- أخبر الطلبة بأهمية وجود علاقة تربط بين الحد ورتبته؛ وذلك لإيجاد أي حد من دون حاجة إلى إيجاد الحدود جميعها، وصولًا إلى الحد المطلوب.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط في التعويض بالحد العام للمتتالية بدءًا بالصفر؛ لذا أخبرهم أن المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها.

إرشاد:

- ذكِّر الطلبة بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تُمثِّل الأعداد الصحيحة الموجبة.

تعلَّمْتُ في صفوفٍ سابقةٍ **الحدَّ العامَّ** (nth term) لمتتاليةٍ، الذي يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ أيِّ حدٍّ ورُتبتِهِ (n)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $T(n)$. يُسهِّلُ الحدُّ العامُّ إيجادَ أيِّ حدٍّ في المتتاليةِ باستعمالِ رُتبتِهِ، مثلِ الحدِّ الذي رُتبتُهُ خمسونَ مثلًا. ويُمكِنُ تصنيفُ المتتاليةِ اعتمادًا على حدِّها العامِّ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ، وغيرِ ذلكَ.

مثال 2

أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، أوْ أُسِّيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:

أتذكَّرُ

رُتبُ الحدودِ هيَ أعدادٌ صحيحةٌ موجبةٌ أُعوِّضُها في الحدِّ العامِّ للمتتاليةِ لتنتجَ حدودُها.

1 $4, 7, 10, 13, \ldots, 3n+1$

أُعوِّضُ رُتبَ بعضِ الحدودِ في المقدارِ الجبريِّ المُعطى للتأكُّدِ أنَّها تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$\times 3$	3	$+1$	4
$n=2$	$\times 3$	6	$+1$	7
$n=3$	$\times 3$	9	$+1$	10
$n=4$	$\times 3$	12	$+1$	13

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ خطِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ خطِّيٌّ.

لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ، أُعوِّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدِّ العامِّ:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \ldots, n^2+3$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ الحدودَ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^2$	1	$+3$	4
$n=2$	$(2)^2$	4	$+3$	7
$n=3$	$(3)^2$	9	$+3$	12
$n=4$	$(4)^2$	16	$+3$	19

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تربيعيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تربيعيٌّ.

أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

3 $2 , 9 , 28 , 65 , \dots , n^3 + 1$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n = 1$	$(1)^3$	1	$+1$	2
$n = 2$	$(2)^3$	8	$+1$	9
$n = 3$	$(3)^3$	27	$+1$	28
$n = 4$	$(4)^3$	64	$+1$	65

إذنْ، المقــدارُ الجبــريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العــامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تكعيبيــةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تكعيبيٌّ. أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

4 $2 , 4 , 8 , 16 , \dots , 2^n$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ		الحدُّ
$n = 1$	$(2)^1$	2
$n = 2$	$(2)^2$	4
$n = 3$	$(2)^3$	8
$n = 4$	$(2)^4$	16

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ أُسّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ أُسّيٌّ.

أُعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$$(2)^{75} = 3.777893186 \times 10^{22}$$

أتذكَّرُ

الصورةُ العلميةُ لعددٍ ما هيَ كتابتُهُ في صورةِ: $A\times10^n$، حيثُ: $1\le A<10$، n : عددٌ صحيحٌ، علمًا بأنَّ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ كُتِبَ بالصورةِ العلميةِ.

- بسِّــط للطلبة الفرع الرابــع باســتعمال التحليل إلى العوامل.
- عند التعويض $n = 75$ في الحد العام للمتتالية الأسية باستعمال الآلة الحاسبة، ينتج عدد بالصورة العلمية؛ لذا ذكِّر الطلبة أنهم درسوها سابقًا.

إرشادات للمعلم

أرشــد الطلبة إلى اســتخدام الآلة الحاسبة في حل الفرع الرابع من المثال 2.

مثال إضافي

- بيِّــن إذا كان المقــدار الجبري المعطــى بجانب كل متتاليــة ممّا يأتي يُمثِّل حدًّا عامًّــا لها أم لا، ثم صنِّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أسية، ثم جد الحد الخامس والأربعين في كلٍّ منها:

1) $5 , 5 , 5 , 5 , \dots \ T(n) = 5$

2) $-1 , 1 , -1 , 1 \dots \ T(n) = (-1)^n$

الحل:

1) $T(45) = 5$ الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي خطية.

2) $T(45) = -1$ الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي أسية.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المســتوى دون المتوسط أحيانًا عند إيجاد الحد العاشر – مثلًا– بمضاعفة الحد الخامس؛ لذا صحِّح لهم ذلك.

مثال 3

- ذكِّر الطلبة أن قاعـدة الحد العام للمتتالية مذكورة في المثـال 2، وأن هذا المثال يشـرح كيفية إيجاد قاعدة الحد العام لمتتاليـات خطية، وتربيعيـة، وتكعيبية، وأسية.
- ناقِش الطلبة فـي حلِّ المثـال 3، مُوضِّحًا لهم كيفية إيجاد الحد العام باسـتخدام المقادير الجبرية، وذلك باسـتخدام المتغير n للدلالة على رتبة الحد، والرمز $T(n)$ للدلالة على الحد نفسه.

مثال إضافي

- جد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $5 , 9 , 13 , 17 , \dots$

2) $3 , 8 , 15 , 24 \dots$

3) $0 , 6 , 24 , 60 \dots$

4) $0 , 42 , 336 , 2394 \dots$

الحل:

1) $7n + 1$

2) $n^2 + 2n$

3) $n^3 - n$

4) $7^n - 7$

إرشاد:

- قد يتمكَّن بعض الطلبة من التعبير عن الحد العام لفظيًّا، من دون القدرة على التعبير عنه بالرموز؛ لذا سـاعد هؤلاء الطلبة على إتقان مهارة التعبير عن المقادير الجبرية باسـتعمال الرموز. فمثلًا، ثلاثة أضعاف عدد مضاف إليه 5 هي $3x+5$

أتحقق من فهمي

أُبيِّـنُ إذا كانَ المقـدارُ الجبـريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليـةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حـدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثـمَّ أُصنِّـفُ المتتاليـاتِ إلى خطِّيـةٍ، أوْ تربيعيـةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، أوْ أُسِّـيةٍ، ثـمَّ أَجِدُ الحـدَّ الخامسَ والسـبعينَ في كلٍّ منْها: انظر الهامش

a) $1 , 3 , 5 , 7, \dots , 2n-1$

b) $0 , 3 , 8 , 15 , \dots , n^2 - 1$

c) $1.5 , 8.5 , 27.5 , 64.5 , \dots , n^3 + 0.5$

d) $\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \dots, 2^{-n}$

يُمكِنُ إيجادُ الحدِّ العامِّ للمتتالياتِ التربيعيةِ والتكعيبيةِ والأُسِّيةِ بملاحظةِ العلاقةِ بينَ الحدودِ ورُتبِها.

مثال 3

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 $5 , 12 , 19 , 26 , 33 , \dots$

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتزايدُ بمقدارِ 7:

$$5 \underbrace{,}_{+7} 12 \underbrace{,}_{+7} 19 \underbrace{,}_{+7} 26 \underbrace{,}_{+7} 33 , \dots$$

يُمكِنُ مبدئيًّـا التعبيرُ عنِ المتتاليةِ بالحدِّ $7n$؛ لأنَّ تزايدَ حـدودِ المتتاليةِ بمقدارِ 7 في كلِّ مرّةٍ يُذكِّرُنـي بحقائقِ ضربِ العددِ 7، ولكنْ عندَ تعويضِ $n = 1$ ينتجُ العددُ 7، وهوَ أكبرُ منَ الحدِّ الأولِ بـ 2؛ لذا أطرحُ العددَ 2 منْ $7n$ ، وبذلكَ يصبحُ الحدُّ العامُّ: $T(n) = 7n - 2$.

2 $5 , 8 , 13 , 20 , 29 , \dots$

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ. إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها. أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

1	4	9	16	25 … n^2
5	8	13	20	29 … ?

بالنظـرِ إلى ناتجِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ، أُلاحِظُ أنَّهُ إذا أُضيفَ 4 إلى مُربَّعِ رُتبةِ الحدِّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ. وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n)= n^2 + 4$

إرشادٌ

يُمكِـنُ فهـمُ المتتاليةِ بصورةٍ أفضـلَ بتحليلِ حدودِها إلـى العواملِ الأوليةِ.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية خطية.

b) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تربيعية.

c) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تكعيبية.

d) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية أسية.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

- اكتب على اللوح قاعدة الحد العام لكل فروع المثال 3، ثم اطلب إلى أحد الطلبة إيجاد أول أربعة حدود للمتتالية الأولى، بتعويض الأعداد 1,2,3,4، ثم اطلب إلى ثلاثة طلبة آخرين إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليات الثانية، والثالثة، والرابعة؛ للتأكُّد أن كل حد عام يُمثِّل متتاليته.
- ناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ حتى يتقنوا كتابة الحد العام للمتتالية باستخدام المقادير الجبرية، وإيجاد الحدود المطلوبة بالتعويض في القاعدة.
- وجِّه الطلبة في هذه الأثناء، مُقدِّمًا لهم التغذية الراجعة المناسبة.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتتالية Sequence، والحد term، والحد العام n^{th} term .

إرشادات:

- يُعَدُّ إيجاد الحد العام من أصعب التحديات التي يواجهها الطلبة؛ لذا اكتب خطوات الحل على نحوٍ مرتب ومتسلسل ومفهوم.
- اجعل الطلبة يعتادون على تحليل حدود المتتاليات إلى العوامل الأولية بوصف ذلك خطوة أُولى لإيجاد الحد العام.

3 $0, 7, 26, 63, 124, \ldots$

ألاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ غيرُ ثابتٍ.

إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعٍ (أوْ طرحٍ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها.

ألاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، وأنَّها غيرُ ناتجةٍ منْ تربيعِ كلِّ حدٍّ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تكعيبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ n^3:

1	8	27	64	125 … n^3
0	7	26	63	124 … ?

ألاحِظُ أنَّهُ عندَ طرحِ 1 منْ مكعبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^3 - 1$

4 $11, 12.1, 13.31, 14.641, \ldots$

ألاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتضاعفُ بنسبةٍ ثابتةٍ؛ لأنَّ:

$$\frac{12.1}{11} = 1.1 \qquad \frac{13.31}{12.1} = 1.1 \qquad \frac{14.641}{13.31} = 1.1$$

منْ هذا التناسبِ بينَ الحدودِ المتتاليةِ، أستنتجُ أنَّهُ عندَ ضربِ كلِّ حدٍّ في 1.1 ينتجُ الحدُّ التالي.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $a \times (1.1)^n$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ (لماذا؟).

لحسابِ a، أُعوِّضُ بالحدِّ العامِّ $n = 1$، وبمساواتِهِ معَ الحدِّ الأولِ في المتتاليةِ ينتجُ:

$$a(1.1)^1 = 11$$

$$a = \frac{11}{1.1} = 10$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = 10 \times (1.1)^n$

> **أتذكَّرُ**
> الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسّيِّ: $y = a(b)^x$،
> حيثُ:
> a, b: عددانِ حقيقيانِ.
> $a \neq 0, b \neq 1, b > 0$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$
b) $4, 7, 12, 19, 28, \ldots$
c) $-1, 6, 25, 62, 123, \ldots$
d) $0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, \ldots$

تُستخدَمُ المتتالياتُ في العديدِ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ، مثلِ: التطبيقاتِ العلميةِ، والهندسيةِ، والتجاريةِ.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $7n + 1$
b) $n^2 + 3$
c) $n^3 - 2$
d) $2 \times (0.1)^n$

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 4 الذي يُمثِّل موقفًا حياتيًّا تظهر فيه المتتاليات.
- وضِّح للطلبة أنَّه يمكن استعمال أي حد من حدود المتتالية مع رتبته لإيجاد قيمة الثابت a

تنويع التعليم

قد يواجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في فهم المثال 4؛ لذا قدِّم لهم المثال الآتي بوصفه مراجعة للاقتران الأسي.

مثال إضافي

يزداد سعر مُنتَج ما سنويًّا بحسب المعادلة: $y = c(1.05)^n$ ، حيث تُمثِّل c السعر قبل أن تطرأ عليه أي زيادة. إذا كان سعر المُنتَج بعد 3 سنوات 111.132 دينارًا، فجد:

1) قيمة الثابت c

2) سعر المُنتَج بعد 7 سنوات.

الحل:

1) 96 2) 122.52303

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة عند تعويض $n = 5$ في الحد العام في المثال 4، وذلك بترك الناتج كما هو من دون تقريب إلى أقرب عدد صحيح؛ لذا نبِّههم إلى أن الناتج يُمثِّل عدد المنازل، وأنه لا يمكن أن يكون كسرًا.

مثال 4: من الحياة

طاقةٌ مُتجدِّدةٌ: يزدادُ عددُ المنازلِ التي تعتمدُ على الطاقةِ الشمسيةِ في توليدِ الكهرباءِ بإحدى المدنِ عامًا تلوَ الآخرِ كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

العامُ	1	2	3	4	5
عددُ المنازلِ	7000	9800	13720		

1 أَجِدُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ التي تُمثِّلُ عددَ المنازلِ.

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتضاعفُ بنسبةٍ ثابتةٍ؛ لأنَّ:

$$\frac{9800}{7000} = 1.4 \qquad \frac{13720}{9800} = 1.4$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = a \times (1.4)^n$ ، حيثُ a عددٌ ثابتٌ.

لحسابِ a ، أُعوِّضُ بالحدِّ العامِّ $n = 1$، وبمساواتِهِ معَ الحدِّ الأولِ في المتتاليةِ ينتجُ:

$$a(1.4)^1 = 7000$$

$$a = \frac{7000}{1.4} = 5000$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = 5000 \times (1.4)^n$.

2 أَجِدُ عددَ المنازلِ التي تعتمدُ على الطاقةِ الشمسيةِ في توليدِ الكهرباءِ في العامَيْنِ: الرابعِ، والخامسِ.

أُعوِّضُ القيمتيْنِ: $n = 4$، وَ $n = 5$ في الحدِّ العامِّ:

$T(4) = 5000 \times (1.4)^4 = 19208$ بتعويضِ $n = 4$ في الحدِّ العامِّ

$T(5) = 5000 \times (1.4)^5 = 26891.2$ بتعويضِ $n = 5$ في الحدِّ العامِّ

≈ 26891 بالتقريبِ إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ

أتحقق من فهمي انظر الهامش

يتزايدُ سعرُ مُنتَجٍ سنويًّا كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

عددُ السنواتِ	1	2	3	4	5
السعرُ	15	22.5	33.75		

a) أَجِدُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ التي تُمثِّلُ السعرَ السنويَّ للمُنتَجِ.

b) أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ.

الطاقةُ المُتجدِّدةُ

حقَّقَ الأردنُّ إنجازاتٍ كبيرةً في مجالِ الطاقةِ المُتجدِّدةِ؛ إذْ بلغَتْ نسبةُ مساهمةِ الطاقةِ المُتجدِّدةِ 13% منَ الطاقةِ الكهربائيةِ المُولَّدةِ في المملكةِ نهايةَ عامِ 2019م، مقارنةً بـ 1% عامَ 2014م.

تظهرُ المتتالياتُ أيضًا في كثيرٍ منَ الأنماطِ الهندسيةِ.

48

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) 50.625, 75.9375

b) $T(n) = 10 \times (1.5)^n$

مثال 5

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 5 على اللوح، وتدرَّج معهم في إيجاد قاعدة الحد العام للمتتالية التي يُشكِّلها عدد المربعات في النمط الهندسي الوارد في المثال؛ وذلك باتباع ما يأتي:
  - » تحليل الحدود إلى العوامل الأولية.
  - » ملاحظة ناتج ضرب رتبة الحد نفسه في رتبة الحد الذي يليه.

تنويع التعليم

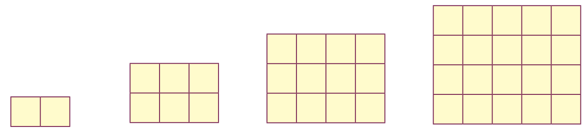
وضِّح للطلبة أنه يمكن حل المثال 5 بطريقة أُخرى، وذلك بتمثيل كل حد بأنه عدد أضلاع المربعات الأفقية مضروبًا في عدد أضلاع المربعات العمودية.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

مثال 5

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



بالنظرِ إلى النمطِ، أُلاحِظُ أنَّ عددَ المُربَّعاتِ يُشكِّلُ المتتاليةَ الآتيةَ: ... ,2, 6, 12, 20

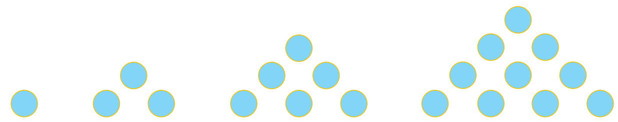
بالنظرِ إلى الحدودِ الأولى منَ المتتاليةِ، أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ فيها يساوي حاصلَ ضربِ رُتبتِهِ في رُتبةِ الحدِّ الذي يليهِ:

$$\underset{1\times2}{2}\ ,\ \underset{2\times3}{6}\ ,\ \underset{3\times4}{12}\ ,\ \underset{4\times5}{20}\ ,\ \ldots$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

أتحقق من فهمي انظر الهامش

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ الدوائرِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



أبحثُ

تُسمّى الأعدادُ 1, 3, 6, 10 أعدادًا مثلثيةً. لماذا؟

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $6, 11, 16, 21, \ldots$ — $26, 31, 36$

2) $-1, 6, 13, 20, \ldots$ — $27, 34, 41$

3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$ — $5.5, 6.5, 7.5$

4) $-8, -7, -6, -5, \ldots$ — $-4, -3, -2$

5) $-2, 1, 6, 13, \ldots$ — $22, 33, 46$

6) $4, 16, 36, 64, \ldots$ — $100, 144, 196$

7) $7, 14, 33, 70, \ldots$ — $131, 222, 349$

8) $-11, -4, 15, 52, \ldots$ — $113, 204, 331$

9) $5, 40, 135, 320, \ldots$ — $625, 1080, 1715$

10) $3, 9, 27, 81, \ldots$ — $243, 729, 2187$

11) $\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \frac{1}{1296}, \ldots$ — $\frac{1}{7776}, \frac{1}{46656}, \frac{1}{279936}$

12) $2.6, 3.38, 4.394, 5.7122, \ldots$ — $7.42586, 9.653618, 12.5497034$

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثانية عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، وإنَّما يتعيَّن عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**) ضمن مجموعات، ثم اطلب إلى افراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير حلولهم.

أَجِدُ أولَ خمسةِ حدودٍ لكلِّ متتاليةٍ مُعطى حدُّها العامُّ في ما يأتي، ثمَّ أُصنِّفُها إلى متتاليةٍ خطِّيةٍ، أَوْ تربيعيةٍ، أَوْ تكعيبيةٍ، أَوْ أُسِّيةٍ:

13) $n+3$
خطية : 4,5,6,7,8.

14) $3n-1$
خطية : 2,5,8,11,14.

15) $4n+5$
خطية : 9,13,17,21,25.

16) n^2-1
تربيعية : 0, 3, 8, 15, 24.

17) n^2+2
تربيعية : 3,6,11,18,27.

18) $200-n^2$
تربيعية 199,196,191,184,175.

19) n^3+1
تكعيبية : 2,9,28,65,126.

20) $\frac{n^3}{2}$
تكعيبية : 0.5,4,13.5,32,62.5.

21) $3n^3-1$
تكعيبية : 2,23,80,191,374.

22) 6^n
أسية : 6,36,216,1296,7776.

23) 8×2^n
أسية : 16,32,64,128,256.

24) 5×3^n
أسية : 15,45,135,405,1215.

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

25) $21, 24, 27, 30, 33, \dots$
$T(n)=3n+18$

26) $1, 9, 17, 25, 33, \dots$
$T(n)=8n-7$

27) $10, 13, 18, 25, 34, \dots$
$T(n)=n^2+9$

28) $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \dots$
$T(n)=0.5n^2-3$

29) $6, 13, 32, 69, 130, \dots$
$T(n)=n^3+5$

30) $1, 15, 53, 127, 249, \dots$
$T(n)=2n^3-1$

31) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$
$T(n)=1.5(2)^n$

32) $120, 60, 30, 15, \dots$
$T(n)=240(0.5)^n$

33) $80, 100, 125, \dots$
$T(n)=64(1.25)^n$

يُمثِّلُ الجدولُ الآتي نظامَ المعادلاتِ الذي تستعملُهُ إحدى الشركاتِ لإيجادِ تكلفةِ نقلِ n وحدةً بالدينارِ الأردنيِّ:

قيمةُ n	التكلفةُ بالدينارِ الأردنيِّ
$n\le 5$	$c=40n+50$
$6\le n\le 10$	$c=40n+25$
$n\ge 11$	$c=40n$

34) أَجِدُ تكلفةَ نقلِ 7 وحداتٍ. 305

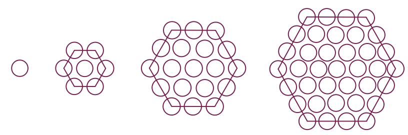
35) أَجِدُ تكلفةَ نقلِ 15 وحدةً. 600

36) أَجِدُ عددَ الوحداتِ التي نقلتْها الشركةُ لقاءَ مبلغِ 170 دينارًا. 3

37) تستعملُ شركةٌ منافسةٌ المعادلةَ: $c=50n$ لإيجادِ تكلفةِ نقلِ الوحداتِ بالدينارِ الأردنيِّ، بِغَضِّ النظرِ عنْ عددِها. أَجِدُ عددَ الوحداتِ التي تتساوى فيها التكلفةُ في الشركتيْنِ. $n=5$

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلٍّ منَ الأنماطِ الهندسيةِ الآتيةِ:

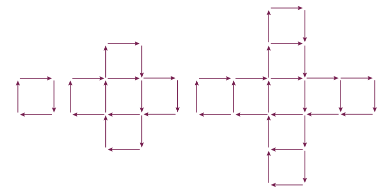
38



1 7 19 37

$T(n) = 3n^2 - 3n + 1$

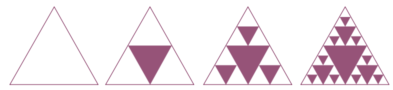
39



1 5 9

$T(n) = 4n - 3$

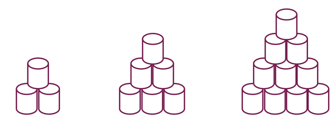
40



1 4 13 40

$T(n) = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

41



3 6 10

$T(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

مهارات التفكير العليا

42 **تحــدٍّ**: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتاليةِ: $6, 16, 30, 48, 70, \dots$ هوَ: $T(n) = an + bn^2$ ، حيثُ a, b عددانِ حقيقيانِ، فأَجِدُ قيمَ a, b. $a = 4, b = 2$

43 **تحدٍّ**: أَجِدُ أولَ ثلاثةِ حدودٍ لمتتاليةٍ خطِّيةٍ، مجموعُها 12، وحاصلُ ضربِها 28 $1, 4, 7$

44 **مسـألةٌ مفتوحةٌ**: أَجِدُ أربعَ متتالياتٍ تبدأُ بـ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطِّيـةً، والثانيةُ تربيعيةً، والثالثةُ تكعيبيةً، والرابعةُ أُسِّيةً.

$T(n) = 2n - 1$ خطية ، $T(n) = 2n^2 - 1$ تربيعية،
$T(n) = 2n^3 - 1$ تكعيبية، $T(n) = 2^n - 1$ أسية،
تُقبَل أي أربع متتاليات تبدأ بالعدد 1، وتكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية، والرابعة أسية.

45 **أيُّها لا ينتمي**: أُحدِّدُ المتتاليةَ المختلفةَ عنْ غيرِها في ما يأتي:

2 , 8 , 18 , ...	1 , 4 , 9 , ...
4 , 7 , 12 , ...	2 , 16 , 54 , ...

المتتالية تكعيبية، والمتتاليات الأُخريات كلها تربيعية.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شـــبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمتتاليات، مثل المثال الوارد في بند الاستكشاف بداية الدرس.
- وجِّة الطلبة إلى البحث عن أســماء بعض المتتاليات المشـــهورة، وذكر تطبيق حياتي عليهـــا، مثل متتالية فيبوناشـــي $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ إذ يُعَدُّ عـــدد الحلزونـــات الظاهرة في أثنـــاء نمو زهرة الكاميليا من أفضل التطبيقات على هذه المتتالية.
- نبِّه الطلبة على ضرورة توثيق المعلومة دائمًا.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مجال المتتاليات؟
  - » ما مداها؟
  - » ما العلاقة بين المتتاليات والاقترانات؟
  - » أيهما تُعَدُّ حالة خاصـــة من الأُخرى: الاقترانات من المتتاليـــات أم المتتاليات مـــن الاقترانات؟ لماذا؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 الحدُّ العامُّ (T_n) للمتتاليةِ: $2, 6, 18, 54, \ldots$ هوَ:

a) $T_n = 2 \times 3^n$ b) $T_n = 2 \times 3^{n-1}$

c) $T_n = 6 \times 3^n$ d) $T_n = 6 \times 3^{n-1}$

2 إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$، فإنَّ قيمةَ $f(-2)$ هيَ:

a) -22 b) -15

c) 9 d) 29

3 إذا كانَ $f(x)=2x^3-4x^2+6,\ g(x)=5x^2-7x+4$، فإنَّ ناتجَ $f(x) - g(x)$ هوَ:

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$

b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$

c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$

d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كانَ $g(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ السادسةِ، وَ $h(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، فإنَّ درجةَ ناتجِ قسمةِ $g(x)$ على $h(x)$ هيَ:

a) الأولى. b) الثالثةُ.

c) الرابعةُ. d) الثامنةُ.

5 إذا كانَ $f(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2 - 2$، فإنَّ قيمةَ $(g \circ f)(3)$ هيَ:

a) 4 b) 7

c) 14 d) 16

6 إذا كانَ $f(x) = 8 - 2x$، فإنَّ قيمةَ $f^{-1}(4)$ هيَ:

a) 0 b) -6 c) -2 d) 2

7 خطُّ التقاربِ الأفقيِّ للاقترانِ $r(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4} + 7$ هوَ:

a) $y = 0$ b) $y = 7$

c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتاليةِ $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ هوَ:

a) 90 b) 95

c) 97 d) 99

9 مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x - 10}$ هوَ:

a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$

b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$

c) $\{x \mid x \neq 5\}$

d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كانَ $f(x)=2x^2-4x+1,\ g(x)=6x^3-7x+3$، فأَجِدُ $x^2 f(x) + g(x)$ $2x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 3$

11 إذا كانَ $h(x) = 3x^2 - 4x,\ j(x) = 4x^3 + 2x + 5$، فأَجِدُ $h(x) \cdot j(x)$ $12x^5 - 16x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 20x$

12 أَقْسِمُ $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

$8x^3 + 12x - 5 = 4x^2 - 6x + 15 + \frac{-50}{2x+3}$

13 أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{4}{2-x}$، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ، ومداهُ.

انظر ملحق الإجابات

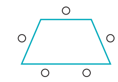
التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعــات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًــا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأســئلة (26–23) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

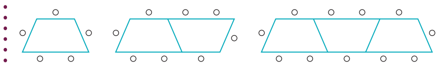
ملحوظــة: تُخصَّــص حصتان (90 دقيقــة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

يوجدُ في قاعةِ طعامِ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلِ شبهِ منحرفٍ. وكلُّ طاولةٍ تتَّسِعُ لخمسةِ طلبةٍ كما في الشكلِ الآتي:



لاحظَ مُشرِفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبةِ يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ المُلاصِقِ بعضُها لبعضٍ كما في الشكلِ الآتي:



1 2 3

14 أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

عددُ الطاولاتِ المُتلاصِقةِ	1	2	3	4	5
عددُ الطلبةِ	5	8	11	14	17

15 أَجِدُ الحدَّ العامَّ. $T(n) = 3n + 2$

16 ما عددُ الطلبةِ الذينَ يُمكِنُهُمُ الجلوسُ حولَ 13طاولةً مُتلاصِقةً؟ 41

17 تنوي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلٍ لـ 200 طالبٍ. كمْ طاولةً مُتلاصِقةً تَلزمُ لذلكَ؟ 66 طاولة

إذا كانَ $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = \frac{1}{x+1} + 2,\ x \neq -1$، فأَجِدُ: (18–21) انظر ملحق الإجابات

18 $g^{-1}(x)$

19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

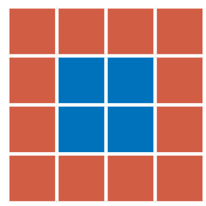
21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ: $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$.

22 يبيعُ محلُّ عصائرَ ما مُعدَّلُهُ 3500 علبةِ عصيرٍ أسبوعيًّا، سعرُ الواحدةِ منْها 0.75 قرشًا. وجدَ صاحبُ المحلِّ أنَّ مبيعاتِهِ ستقلُّ 100 علبةٍ مُقابِلَ كلِّ زيادةٍ مقدارُها 0.05 دينارٍ على سعرِ العلبةِ. أكتبُ اقترانًا يُمثِّلُ الدخْلَ الأسبوعيَّ للمحلِّ إذا طُبِّقَتِ الزيادةُ على السعرِ x مرَّةً، ثمَّ أَجِدُ السعرَ الذي يُحقِّقُ للمحلِّ أعلى دخْلٍ أسبوعيٍّ.
انظر ملحق الإجابات

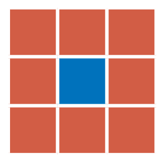
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

23 في بيتِ خضرٍ بركةُ سباحةٍ مستطيلةٌ، بُعْداها 13 m, 8 m، وقدْ أرادَ أنْ يُحيطَ بها ممرًّا منتظمًا بحيثُ تصبحُ المِساحةُ الإجماليةُ لسطحِ البركةِ والممرِّ معًا $176\ m^2$، ما عرضُ الممرِّ؟
عرض الممر هو: 1.5 m

رتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكليْنِ الآتيينِ:



الشكلُ (2).



الشكلُ (1).

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراءِ في الشكلِ n؟ عدد البطاقات الحمراء في الشكل رقم n هو: $4n+4$

25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيهِ؟ عدد البطاقات الزرقاء في الشكل نفسه هو: n^2

26 استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحدِ أشكالِ هذا النمطِ. كمْ عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراءِ والزرقاءِ المُستعمَلةِ؟ عدد البطاقات الزرقاء هو: 36
عدد البطاقات الحمراء هو: 28

53

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدُّم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية – وفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّن عليك – عزيزي المعلِّم– تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

كتاب التمارين

الدرسُ 1
اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ: 1–8) انظر ملحق الإجابات

1. $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$
2. $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$
3. $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$
4. $j(x) = \sqrt{x^2+16} - 4x$

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$
6. $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$
7. $g(x) = 12 - 4x - x^2$
8. $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$، وَ $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ $h(x) = 2x - 4$، فأَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9. $f(x) + g(x)$ $-3x^3+7x^2+5x-8$
10. $f(x) - g(x)$ $-5x^3-3x^2+5x+6$
11. $g(x) - x(h(x))$ x^3+3x^2+4x-7
12. $h(x) \cdot f(x)$ $-8x^4+20x^3+2x^2-22x+4$
13. $(h(x))^2 + f(x)$ $-4x^3+6x^2-11x+15$
14. $f(x) \cdot g(x)$ $-4x^6-18x^5+15x^4+52x^3-19x^2-35x+7$
15. هلِ العددُ -2 صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم، لأن $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$
16. أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$
$(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$
17. لدى مُزارِعٍ 24 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً لدواجنِهِ؛ على أنْ يجعلَ جدارَ مخزنٍ في مزرعتِهِ أحدَ جوانبِ الحظيرةِ منْ دونِ سياجٍ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ التي يُمكِنُ تسييجُها بهذا السياجِ؟ انظر ملحق الإجابات
18. يزيدُ ارتفاعُ أسطوانةٍ 3 وحداتٍ على طولِ نصفِ قُطْرِ قاعدتِها. أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ حجمِ الأسطوانةِ بدلالةِ x إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ قاعدتِها $(2x + 1)$ وحدةً.
(حجمُ الأسطوانةِ التي نصفُ قُطْرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها h، هوَ $V = \pi r^2 h$).
$V(x) = \pi(2x+1)^2(2x+4) = \pi(8x^3+24x^2+18x+4)$

الدرسُ 2
قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ

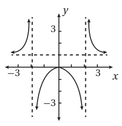
أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5;\ h(x) = x + 4$ الناتج $2x^2-12x+36$، والباقي -139
2. $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12;\ h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ الناتج $2x^2+2x+3$، والباقي $2x+6$
3. أَجِدُ قيمةَ k بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8
4. أَجِدُ قيمةَ c بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ 3–6) انظر ملحق الإجابات

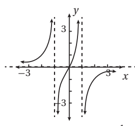
أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أَجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$
6. $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أَجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ المُمثَّليْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7.


7–10) انظر ملحق الإجابات

8.


أَجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9. $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$
10. $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

يُعطى تركيزُ مضادٍّ حيويٍّ (بالميليغرامِ لكلِّ ديسيلترٍ) في دمِ مريضٍ بعدَ t ساعةً منْ تناولِهِ بالاقترانِ: $C(t) = \frac{50t}{t^2+25}$:

11. أَجِدُ تركيزَ هذا المضادِّ بعدَ 5 ساعاتٍ منْ تناولِهِ.
12. متى يكونُ تركيزُ هذا المضادِّ 4 mg/dL؟

11–15) انظر ملحق الإجابات

نُقِلَتْ فصيلةٌ نادرةٌ منَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ t شهرًا منْ نقلِها $P(t) = \frac{72(1+0.6t)}{3+0.02t}$:

13. كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟
14. كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا منْ نقلِها؟
15. بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟

الدرسُ 3
تركيبُ الاقتراناتِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدوليْنِ الآتيينِ:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−7	−5	−3	−1	3	5	7

1. $(f \circ g)(1)$ -1
2. $(f \circ g)(-2)$ 7
3. $(g \circ f)(1)$ 8
4. $(g \circ f)(0)$ 0
5. $(g \circ g)(-1)$ -1
6. $(f \circ f)(-1)$ -7

إذا كانَ $f(x) = 2x + 1$، وَ $g(x) = 3x - 4$، فأَجِدُ:

7. $(f \circ g)(2)$ 5
8. $(f \circ g)(0)$ -7
9. $(f \circ g)(8)$ 41
10. $(g \circ f)(1)$ 5
11. $(f \circ g)(x)$ $6x-7$
12. $(g \circ f)(x)$ $6x-1$

إذا كانَ $k(x) = \frac{1}{x+1}$، وَ $h(x) = \frac{2}{x}$، فأَجِدُ:

13. $(h \circ k)(3)$ 8
14. $(k \circ h)(3)$ $\frac{3}{5}$
15. $(h \circ h)(6)$ 6
16. $(k \circ k)(-3)$ 2
17. $(k \circ h)(x)$
18. $(h \circ k)(x)$

17–23) انظر ملحق الإجابات

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x) = (g \circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19. $h(x) = x^6 + 1$
20. $h(x) = 4(x+1)^2$
21. $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$
22. $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$
23. يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ منْها بالعلاقةِ $0 \le x \le 400$ ، $p = 100 - \frac{x}{4}$، حيثُ p السعرُ بالدينارِ، وَ x عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً هيَ $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$، فأَجِدُ التكلفةَ C في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ p، ثمَّ أَجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

كتاب التمارين

الدرسُ 4
الاقترانُ العكسيُّ

إذا كانَ $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$ 70
2. $g(4)$ 60
3. $g^{-1}(70)$ 9
4. $g^{-1}(60)$ 4

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3) = 8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟
يمكن استنتاج أن $f^{-1}(8) = 3$

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في x ساعةَ عملٍ لمُنتَجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: (7–16) انظر ملحق الإجابات

7. $f(x) = 3x - 5$
8. $f(x) = 4 - 7x$
9. $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$
10. $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$
11. $f(x) = \frac{x}{2x+6}$
12. $f(x) = \frac{x}{8-4x}$
13. $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$
14. $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$
15. $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$، وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$
18. $f(x) = \frac{2x}{3x+5}, \quad h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

(17–21) انظر ملحق الإجابات

19. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. **هندسةٌ:** تُعطى مِساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r) = \pi r^2$، حيثُ A المِساحةُ، وَ r نصفُ القُطْرِ. أُعبِّرُ عنْ r في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ دائرةٍ مِساحتُها 250 cm^2

21. **فيزياءُ:** يُعطى زمنُ الدورةِ T ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ ℓ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ ℓ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ T، ثمَّ أَجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s

الدرسُ 5
المتتالياتُ

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. $4, 6, 8, 10, \ldots$ 12,14,16
2. $3, 30, 300, 3000, \ldots$ 30000,300000,3000000
3. $1, 4, 9, 16, \ldots$ 25,36,49
4. $2, 4, 8, 16, \ldots$ 32,64,128
5. $3, 10, 17, 24, \ldots$ 31,38,45
6. $0, 4, 18, 48, \ldots$ 100,180,294

أُصنِّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $T(n) = 3n + 1$
خطية. $4, 7, 10$ $T(20) = 61$
8. $T(n) = 2n^2 + 1$
تربيعية. $3, 9, 19$ $T(20) = 801$
9. $T(n) = 3(2)^n - 5$
أسية. $1, 7, 19$ $T(20) = 3145723$
10. $T(n) = n(n^2 + 1)$
تكعيبية. $2, 10, 30$ $T(20) = 8020$

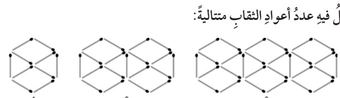
أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. $6, 11, 16, 21, 26, \ldots$ $T(n) = 5n+1$
12. $-4, 3, 22, 59, 120, \ldots$ $T(n) = n^3 - 5$
13. $5, 15, 45, 135, \ldots$ $T(n) = 5(3)^{n-1}$
14. $5, 11, 21, 35, 53, \ldots$ $T(n) = 2n^2 + 3$

استثمرَ خالدٌ **20000** دينارٍ في مشروعٍ تجاريٍّ، وتوقَّعَ أنْ تبلغَ نسبةُ الربحِ منْهُ **15%** سنويًّا:

15. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يُمثِّلُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ n منَ السنواتِ. $T(n) = 20000(1.15)^n$
16. أَجِدُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ 12 سنةً. 107005.0021

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ فيهِ عددُ أعوادِ الثقابِ متتاليةً:



17. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ. انظر ملحق الإجابات
18. أَجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ. 181
19. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ الأشكالِ السداسيةِ يُمكِنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟ 11

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 1 ، إجابة أتحقق من فهمي 6:

افترض أن سـعر البطاقة x دينارًا ، حيـث $x < 11$، فيكون مقدار التخفيض $(11-x)$ دينارًا، وسـيزيد عدد البطاقات المبيعة بمقدار $4000(11-x)$، وبذلك يصبح عددها:

$(28000 + 4000(11-x))$، ويساوي الدخل $R(x)$ سعر البطاقة مضروبًا في عدد البطاقات:

$$R(x) = x(28000 + 4000(11-x))$$

$$= -4000x^2 + 72000x$$

الإحداثي x لرأس هذا القطع المكافئ هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-72000}{-8000} = 9$$

إذن، يكون الدخل أعلى ما يمكن إذا أصبح ثمن بطاقة الدخول 9 دنانير.

وأعلى دخل هو قيمة $R(x)$ عندما $x = 9$:

$$R(9) = -4000\,(9)^2 + 72000(9) = 324000$$

الدرس 1:

1) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -x + 4$، درجته 1، معامله الرئيس: -1، حده الثابت: 4

2) ليس كثيـر حدود؛ لأن فيه عاملًا أسـه سـالب (x الموجودة في المقام).

3) كثير حـدود، صورتـه القياسـية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: 12، وحده الثابت: -12

4) كثيـر حدود، صورتـه القياسـية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$، ودرجته 3، ومعامله الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

5) كثير حدود، صورته القياسـية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: -16، وحده الثابت: 0

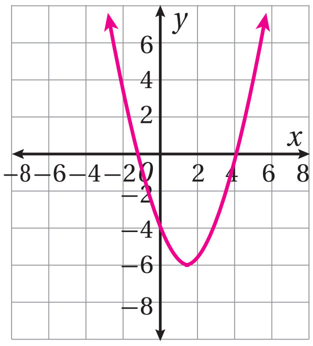
6) ليس كثير حدود؛ لأن فيه أسًا كسريًا.

7) ليس كثير حدود؛ لأن الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

8) كثيـر حـدود، صورتـه القياسـية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$، ودرجته 7، ومعامله الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

9)

x	-2	0	1.5	3	5
$y = f(x)$	6	-4	-6.25	-4	6

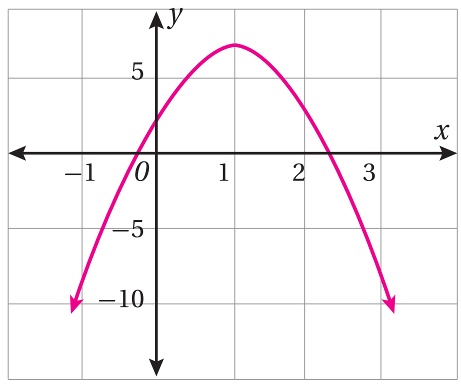


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq 6.25$، أو الفترة $[6.25, \infty)$.

10)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	3	7	3	-9

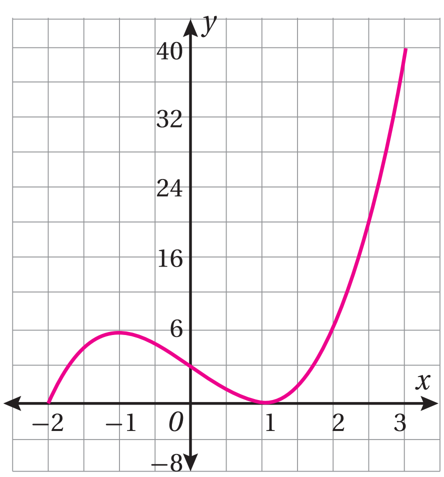


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \leq 7$، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

11)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40



المجال: $-2 \le x \le 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$

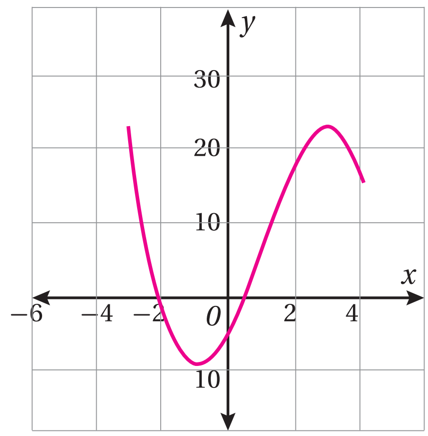
المدى: $0 \le y \le 40$، أو الفترة $[0, 40]$.

12)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23	-2	-9	-4	7	18	23	16

المجال: $-3 \le x \le 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$

المدى: $-9 \le y \le 23$، أو الفترة $[-9, 23]$.



13) $h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

14) $g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$

15) $f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$

16) $x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

17) $(f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

18) $h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$

19) أقصى ارتفاع للصاروخ هو ارتفاعه عندما

$t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-229}{2(-4.9)} \approx 23.4$ ، وهو يساوي

$h(23.4) \approx 2910 \text{ m}$

20) ليكن عدد الأشـــجار x (حيث $x > 75$)، فيكون ما يجنيه من كل شجرة: $21 + 3(75 - x)$

المحصول الكلي:

$P(x) = x(21 + 3(75 - x))$

$= 21x + 3x(75) - 3x^2$

$P(x) = -3x^2 + 246x$

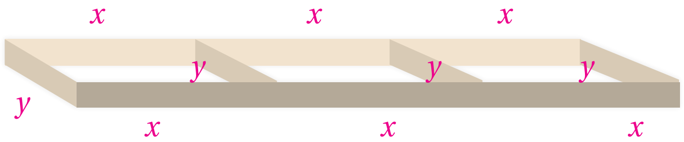
لهذا القطع المكافئ قيمة عظمى عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{2(-3)} = 41$$

إذن، عدد الأشـــجار الذي يحقق أعلى محصول هو 41 شجرة في البستان.

أعلى محصول هو: $P(41) = 5043$

21) ليكن طول كل حظيرة x، وعرضها y، فيكون طول الســياج الكلي للحظائر الثلاث:



$6x + 4y = 120$، ومنه ينتج أن:

$$y = \frac{120 - 6x}{4}$$

المساحة الكلية للحظائر الثلاث:

$$A = 3xy = 3x\left(\frac{120 - 6x}{4}\right)$$

$$A(x) = 90x - 4.5x^2$$

تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-9} = 10$$

إذن، أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر هي: $A(10) = 450 \text{ m}^2$

22) حجم ما تبقــى من المكعب يســاوي حجــم المكعب الأصلي مطروحًا منه حجم التجويف.

حجم المكعــب الأصلي هــو $(2x + 1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x+1)$

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$، فإن:

$R(x) = (2x + 1)^3 - x^2(2x + 1)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

23) $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

24) كلتــا الإجابتين غيــر صحيحة. لــم يُغيِّر طه إشــارات المطروح عندما حوَّل الطرح إلى جمع. وبالرغم من أن قاســمًا غيَّر إشارات المطروح، فإنه أخطأ في نتيجة جمع بعض الحدود المتشابهة. النتيجة الصحيحة لهذه العملية هي: $-2x^3 - 13x^2 - 9x + 3$

25) إجابة محتملة:

$f(x) = 2x - 1, h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) \cdot h(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$

26) لإيجاد الأصفار، تُحَل المعادلة: $f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$
$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 4) = 0$$
$$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 1, x = 2, x = -2$$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: -2، 2، 1

27) إذا كانت درجة f أكبر من درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة f؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة f تساوي درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأن ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين f, g

الدرس 2:

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{x | x \neq 0\}$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أي $\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1\}$

11) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

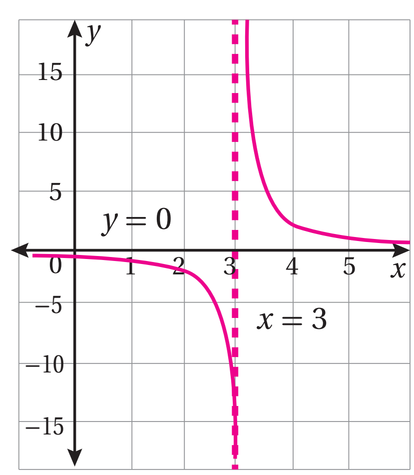
12)

x	-1	0	1	2	2.8	3.2	3.5	4	6
$y = f(x)$	-0.5	-0.67	-1	-2	-10	10	4	2	0.67

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x | x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 أي $\{y | y \neq 0\}$



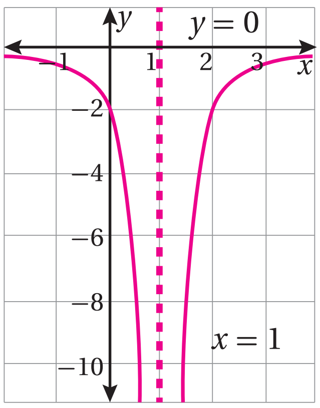
13)

x	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
$y = h(x)$	-0.22	-0.5	-2	-8	8	-2	-0.5	-0.22

له خط تقارب رأسي هو $x = 1$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أي $\{x | x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أي $\{y | y < 0\}$



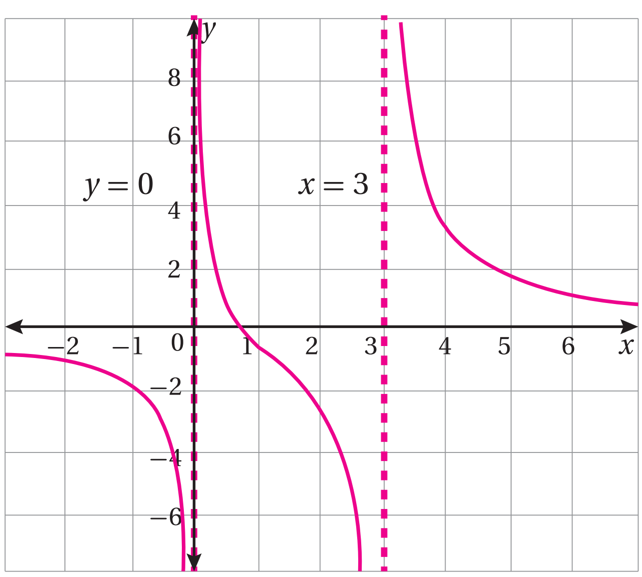
14)

x	-2	-1	-0.5	0.5	0.75	1	2.5	3.5	5
$y = w(x)$	-1.1	-1.75	2.9	0.8	0	-0.5	-5.6	6.3	1.7

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = 0$,$x = 3$ ، وله خط تقارب أفقي هو: $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $0, 3$ ؛ أي $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.



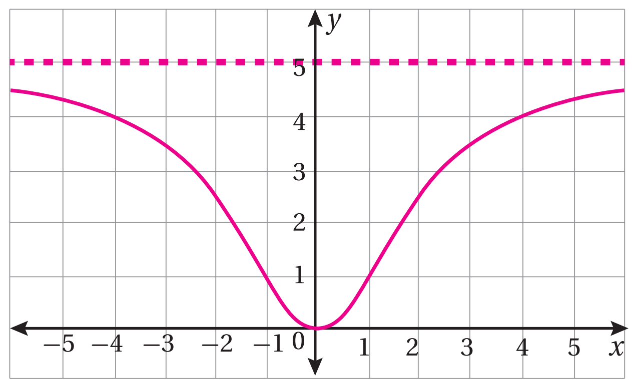
15) بقسمة البسط على المقام، يمكن كتابة الاقتران بالصورة:

$$g(x) = 5 + \frac{-20}{x^2+4}$$

إذن، لــه خط تقــارب أفقي هو $y = 5$، وليس لــه خطوط تقارب رأسية لعدم وجود أصفار حقيقية للمقام.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $0 \le y < 5$، أو الفترة $[0, 5)$.



x	-5	-2	-1	0	1	2	5
$y = g(x)$	4.3	2.5	1	0	1	2.5	4.3

17) عرض هذه الورقــة $(x + 2)^2$، وهو أحد عاملي مســاحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x + 2)^2$، كان الباقي صفرًا.

باقــي قســمة المســاحة علــى $(x + 2)^2$، أو (x^2+4x+4) هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، ينتج أن $a = 20$

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x^2+4x+4\,\overline{)\,3x^3+14x^2+ax+8} \\ (-)\ 3x^3+12x^2+12x \\ \hline 2x^2+(a-12)x+8 \\ (-)\ 2x^2+\ \ 8x\ \ \ \ +8 \\ \hline (a-20)x \end{array}$$

18) حجم البركة يساوي مساحة قاعدتها ضرب ارتفاعها.

ويمكــن حســاب الارتفــاع h بقســمة الحجــم V علــى مســاحة القاعــدة A:

$$h = V \div A$$

$$h = (3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x) \div (3x^2 - 6x) = x^2 + x - 9 + 0$$

إذن، ارتفاع البركة هو: $(x^2 + x - 9)$

19) الاقتران المختلف هــو $h(x) = \frac{9}{x^2+1}$ ؛ إذ ليس لمقامه أصفار وليس له خطوط تقارب رأســية. أمّا مقامات الاقترانات الأُخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أي إن لها خط تقارب رأســي واحدًا على الأقل.

20) إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{1}{x^2+5x-14} + 3$، أو $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+5x-14} + 3$،

حيث a و b عددان حقيقيان؛ شرط أن يكون صفر المقدار $ax + b$ لا يساوي 7 أو -2

21) العامل المعطى $(x-1)^2$ هــو اقتران تربيعي، والاقتران المطلوب من الدرجــة الثالثة، فيكون العامــل الثاني اقترانًــا خطيًّا بصورة $(ax + b)$.

وعليه، فإن:

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$$

من تقســيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$ على $(x+2)$، ثم مساواة الباقي بـ 9، فتنتج المعادلة: $-18a + 9b = 9$

ومــن ثــم تقســيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$ على $(x-3)$، ثم مساواة الباقي بـ 44، فتنتج المعادلة: $12a + 4b = 44$

وبقســمة طرفي المعادلة الأولى على 9، وطرفــي المعادلة الثانية على 4، وحل نظام المعادلتين:

$-2a + b = 1,\ 3a + b = 11$، فإن: $a = 2,\ b = 5$

إذن، الاقتران المطلوب هو: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$

الدرس 3:

9) $(a \circ b)(x) = a(x-7) = x - 7 + 4 = x - 3$

$(b \circ a)(x) = b(x+4) = x + 4 - 7 = x - 3$

$(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x) = x - 3$

10) $(f \circ g)(x) = f(3x + 4) = 2^{3x+4}$

$(f \circ g)(-3) = 2^{3(-3)+4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

11) $(g\circ f)(x) = 2(\frac{1}{x-4}) - 10 = \frac{2}{x-4} - 10\,(\frac{x-4}{x-4})$

$$= \frac{2-10x+40}{x-4}$$

$$= \frac{42-10x}{x-4}$$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{x | x \neq 4\}$

19) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{4}{3-\sqrt{x}}$ ، $g(x) = 4 + x^2$

أو $f(x) = \frac{4}{3-x}$ ، $g(x) = \sqrt{4+x^2}$، وغيرها.

20) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^3$ ، $g(x) = \frac{1}{2x-3}$

أو $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ، $g(x) = 2x - 3$، وغيرها.

21) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$؛ لأن مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $f\circ g(x)$.

22) عندما $t = 2$ يكون طول نصف قطر الموجة:

$$r(2) = 25\sqrt{2+2}$$

$$= 50 \text{ cm}$$

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$، أو 7854 cm^2 تقريبًا.

23)

$$(N\circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t+1.5)^2 - 56(5t+1.5) + 1$$

$$= 575t^2 + 65t - 31.25$$

24) الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$$

$$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$$

$$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$$

$$t = 3.38,\ t = -3.49$$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

25) $a = 4, b = -3$

26) $(f\circ g\circ h)(x) = f(g(x+3))$

$$= f(\frac{1}{x+3}) = (\frac{1}{x+3})^2 + 1 = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$$

27) إجابة هدى صحيحة. عوضت وفاء x^2 مكان x في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$، ونسيت 5

28) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$f(x) = x^2 + 3\ ,\ g(x) = x-2$$

29) $(f\circ g)(x) = f(\frac{1}{x+2}) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div (\frac{1}{x+2} - 3)$

$$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1\times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أي $x = -\frac{5}{3}$، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 و $-\frac{5}{3}$؛ أي

$$\{x \mid x \neq -2, x \neq = -\frac{5}{3}\}$$

30)

$$(f\circ g)(x) = f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{3}\right)-2}{\frac{2x-1}{3}-1}$$

$$= \frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}} = \frac{4x-8}{2x-13}$$

$$(f\circ g)(x) = \frac{4x-8}{2x-13} = -4 \Rightarrow 4x-8 = -8x+52 \Rightarrow x = 5$$

الدرس 4:

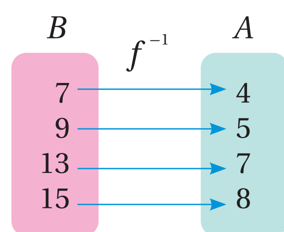
1) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

2) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.

$h^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$

3) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.



4) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران -3 و 3 لهما الصورة نفسها 3

17) $(f\circ g)(x) = (-3+\sqrt{x-2}+3 + 2 = x-2+2 = x$

$(g\circ f)(x) = -3+\sqrt{(x+3)^2+2-2} = -3+(x+3) = x$

إذن، كل من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

18) $y = \frac{x}{x-1}$

$xy - y = x \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y$

$x = \frac{y}{y-1}$

$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} = f(x)$

يمكن إثبات أن $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه ببيان أن:

$(f\circ f)(x) = x$

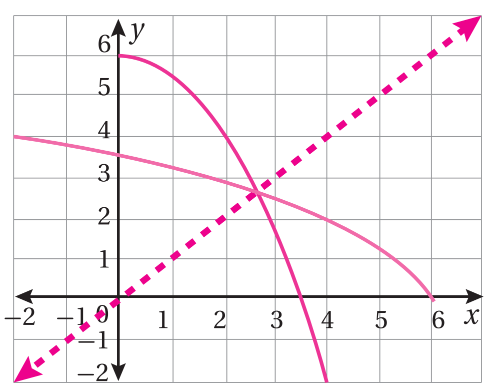
$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-1} \div \left(\frac{x}{x-1}-1\right) =$$

$$= \frac{x}{x-1} \div \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x$$

20) رسم المستقيم $y = x$، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، مثل: $(0, 6)$ وانعكاسها $(6, 0)$، والنقطة $(4, -2)$ وانعكاسها $(-2, 4)$، والنقطة $(2, 4)$ وانعكاسها $(4, 2)$، ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل المجاور.

مجال $f(x)$: $0 \le x \le 4$، ومداه: $-2 \le x \le 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2 \le x \le 6$، ومداه: $0 \le y \le 4$



21)

$$f(x) = x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4\ ,\ -3 \le x \le 1$$

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y-4 = (x-1)^2$$

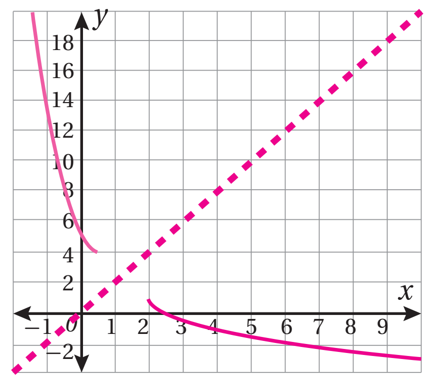
$$-\sqrt{y-4} = x-1$$

(أُخِذ الجذر السالب لأننا نتعامل هنا مع الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$$1-\sqrt{y-4} = x$$

$$y = 1-\sqrt{x-4}$$

مجال $f^{-1}(x)$: $4 \le x \le 20$، ومداه: $-3 \le y \le 1$



22)

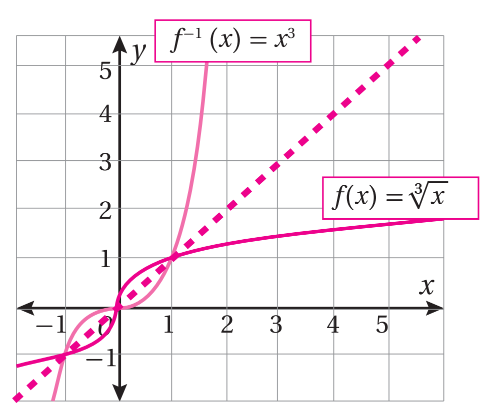
$$n(C) = \frac{100C-25}{0.6-C}\ ;\ n(0.5) = \frac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \frac{25}{0.1} = 250 \text{ mL}$$

23) نعم؛ فالاقتران العكسي يُبيِّن كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك، وهو: $w = 2(l-3)$

24) $r(A) = -20 + \sqrt{\dfrac{A+800\pi}{2\pi}}$;

$$r(2000) = -20 + \sqrt{\frac{2000+800\pi}{2\pi}} \approx 6.8 \text{ cm}$$

25) $f^{-1}(x) = x^3$



26) بما أن للاقتران $f(x)$ صفرًا عندما $x = 3$، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

27) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x+7\ ,\ g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g\circ g^{-1})(x) = g(\frac{x-7}{9}) = 9(\frac{x-7}{9})+7 = x-7+7 = x$$

$$(g^{-1}\circ g)(x) = g^{-1}(9x+7) = \frac{9x+7-7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

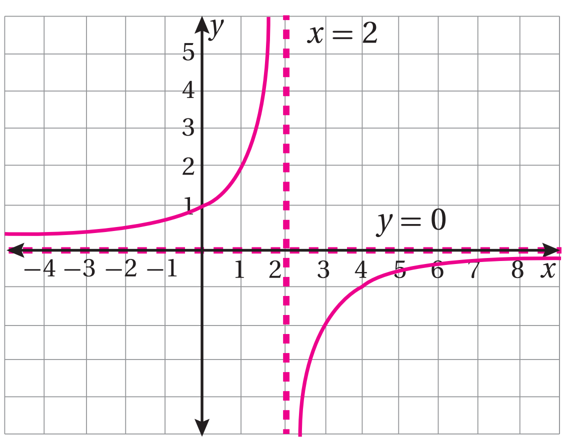
إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ وَ $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

28) $x = 0.6$

اختبار نهاية الوحدة:

13) لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

x	-1	0	1	1.5	2.5	3	4	5
$y = f(x)$	1.33	2	4	8	-8	-4	-2	-1.33



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أي $\{x | x \ne 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{y | y \ne 0\}$.

18) $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1\ ,\ x \ne 2$

19) $(f\circ f)(x) = 16x - 15$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

20) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{4x-2} + 2$

21) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$

مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$

22) عند تنفيذ الزيادة x مرَّة ستقل مبيعات المحل بمقدار $100x$، وتصبح كمية المبيعات $3500 - 100x$، وسعر العلبة الواحدة $0.75 + 0.05x$، ويكون الدخل:

$$R(x) = (0.75 + 0.05x)(3500 - 100x)$$

$$R(x) = 2625 + 100x - 5x^2$$

وهذا قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

الإحداثي x للرأس هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

إذن، سعر العلبة الذي يحقق أعلى دخل أسبوعي هو:

$$0.75 + 10(0.05) = 1.25$$

إجابات كتاب التمارين–الدرس 1:

1) ليس كثير حدود لأن أس المتغير x في الحد الثاني سالب.

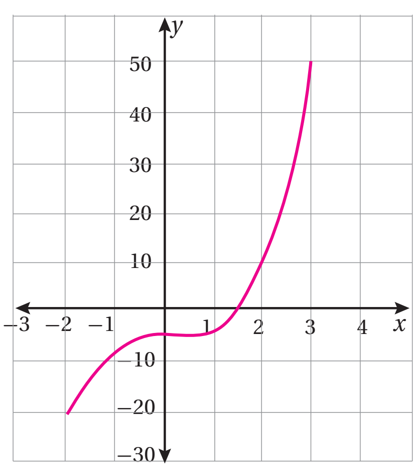
2) كثير حدود، درجته 3، معامله الرئيس -5، الحد الثابت -1، صورته القياسية هي: $f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$

3) كثير حدود، درجته 1، معامله الرئيس $-\frac{16}{5}$، الحد الثابت $\frac{24}{5}$، صورته القياسية هي: $f(x) = -\frac{16}{5}x + \frac{24}{5}$

4) ليس كثير حدود لأنه يحتوي مقدار جذري.

5) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$

المدى: $\{y | -21 \leq y \leq 49\}$

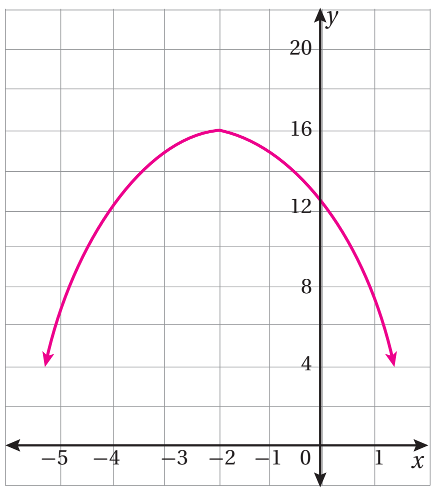


6) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

المدى: $\{y | -3 \leq y \leq 19\}$

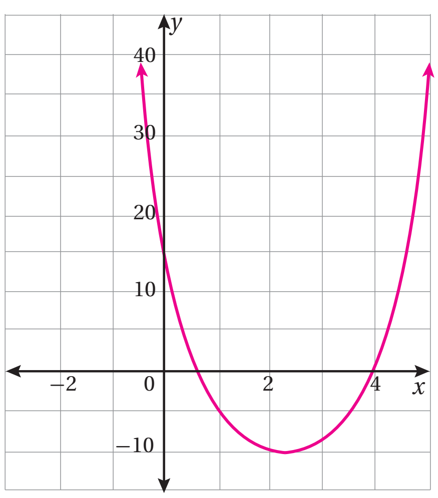
7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y \mid y \leq 16\}$ أو $(-\infty, 16]$

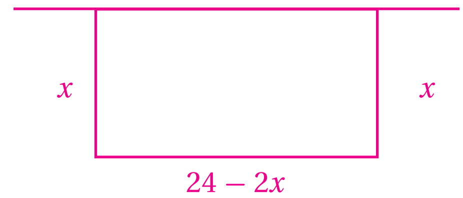


8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y \mid y \geq -10\}$ أو $[-10, \infty)$



17)



$A(x) = x(24-2x) = 24x - 2x^2$

الإحداثي x للرأس هو $\frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2(-2)} = 6$

أكبر مساحة ممكنة هي:

$A(6) = 24(6) - 2(6)^2 = 72\ m^2$

إجابات كتاب التمارين–الدرس 2:

3) باقي القسمة هو $(k-6)$

$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$

4) باقي القسمة هو $3 + 18- \ (c+9)$، ويجب أن يكون الباقي صفرًا

$(c+9) = 0 - 18 + 3$

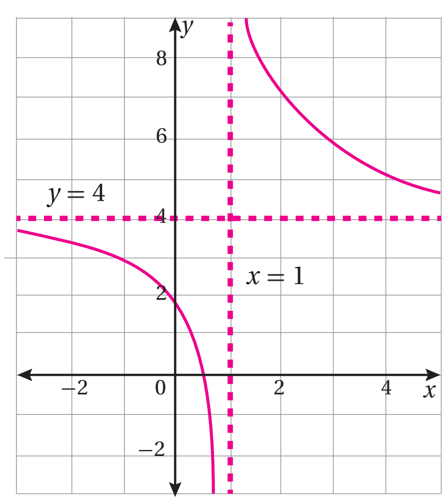
$-6 + (c+9) = 0 \Rightarrow c = -3$

5) له خط تقارب رأسي هو $x = 1$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 4$

المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4 أي $\{y|y \neq 4\}$

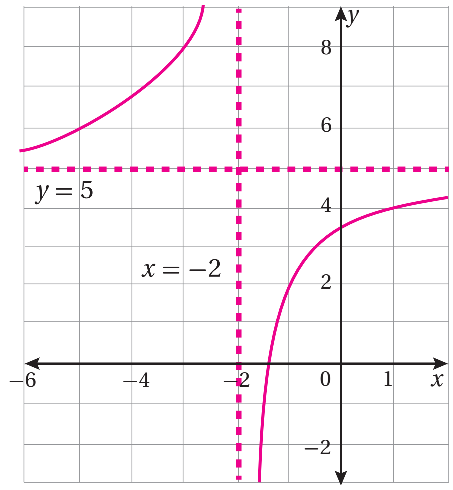


6) له خط تقارب رأسي هو $x = -2$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 5$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي $\{y|y \neq 5\}$



7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2, 2$

أي: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $[0, 1]$

أي: $(-\infty, 0]$ أو $(1, \infty)$

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -2, x = 2$

له خط تقارب أفقي هو $y = 1$

له خط تقارب هو $y = 0$

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-1, 1$
أي: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -1, x = 1$

9) المجال : جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x|x \neq 3\}$

المـــدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 أي $\{y|y > 5\}$
أو الفترة $(5, \infty)$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 أي $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3 أي $\{y|y > 3\}$ أو
الفترة $(3, \infty)$

11) $C(5) = \dfrac{50(5)}{5^2 + 25} = 5\text{mg/dL}$

11) $C(t) = 4 \Rightarrow \dfrac{50t}{t^2 + 25} = 4 \Rightarrow 4t^2 - 50t + 100 = 0$

$t = 2.5, t = 10$

إذن، يكون تركيز المضاد الحيوي في دم المريض 4 mg/dL بعد 2.5 ساعة من تناوله، وبعد 10 ساعات من تناوله.

13) a)

$P(0) = \dfrac{72(l + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$

13) b)

$P(30) = \dfrac{72(l + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$

13) c) $\dfrac{72(l + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3+0.02t) = 72(1+0.6t)$

$1674 + 11.16t = 72 + 43.2t$

$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهر من نقلها إلى المحمية.

إجابات كتاب التمارين-الدرس 3:

17) $k \circ h(x) = k(\dfrac{2}{x}) = \dfrac{1}{\dfrac{2}{x} + 1}$

$\dfrac{1}{\dfrac{2+x}{x}} = \dfrac{x}{2+x}$

18) $h \circ k(x) = h(\dfrac{1}{x+1})$

$= \dfrac{2}{\dfrac{1}{x+1}} = 2 \times \dfrac{x+1}{1} = 2x + 2$

19) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x^6 ; g(x) = x + 1$ أو $f(x) = x^3 ; g(x) = x^2 + 1$ وغيرها.

20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x + 1 ; g(x) = 4x^2$

أو $f(x) = 2x + 2 ;\ g(x) = x^2$ وغيرها.

21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x - 5 ; g(x) = 2x^2$

أو $f(x) = (x-5)^2 ;\ g(x) = 2x$

22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$f(x) = 2x^2 - 4 ;\ g(x) = \sqrt{x} + 7$

أو $f(x) = 2x^2 ; g(x) = \sqrt{x - 4} + 7$

23) $x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p) = \dfrac{8\sqrt{(100 - p)}}{0.5} + 600$

$C(19) = 744$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 4:

7) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{3}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

8) $f^{-1}(x) = \dfrac{4 + x}{7}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

9) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$

مجاله: $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

10) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{5 - x}}{3}$

مجاله: $(-\infty, 5]$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

11) $f^{-1}(x) = \dfrac{6x}{1 - 2x}$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء -3 أو $\{y | y \neq -3\}$

12) $f^{-1}(x) = \dfrac{8x}{1 + 4x}$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء 2 أو $\{y \mid y \neq 2\}$

13) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{2}$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 3 أي $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$ أي $[\frac{1}{2}, \infty)$

14) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{3}$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -5 أي $[-5, \infty)$،

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$ أي $[\frac{-2}{3}, \infty)$

15) $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)^3 + 2}{3}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

16) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^3}{4}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

17) $(f \circ h)(x) = 2(5x+2)-5 = 10x-1 \neq x$

لا يكون أي منهما اقترانًا عكسيًا للآخر

18) $(f \circ h)(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right)}{3\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right) + 5}$

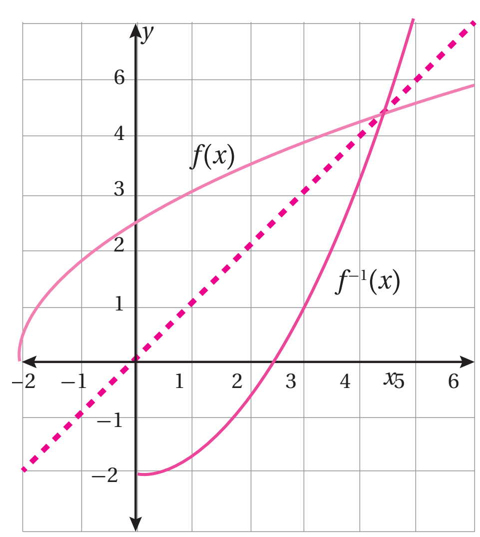
$= \dfrac{10x}{2-3x} \div \dfrac{15x + 10 - 15x}{2-3x}$

$= \dfrac{10x}{2-3x} \div \dfrac{2-3x}{10} = x$

وأيضًا يمكن أن نبين أن $(h \circ f)(x) = x$

إذن، كل من $f(x), h(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

19) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3}$



20) $r(A) = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

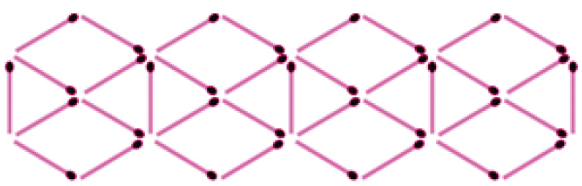
$r(250) = \sqrt{\dfrac{250}{\pi}} \approx 8.92 \text{ cm}$

21) $l(T) = \dfrac{9.8\, T^2}{4\pi^2}$

$l(3) = \dfrac{9.8\,(3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23 \text{ m}$

إجابات كتاب التمارين–الدرس 5:

17)



مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
معمل برمجية جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى.	• يصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير الحدود.		• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا.	1
الدرس 1: تقدير ميل المنحنى.	• يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران. • يرسم مماسًّا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران. • يكتب معادلة المماس. • يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة – الزمن.	القاطع، المماس، نقطة التماس، الميل، معادلة المماس، السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: الاشتقاق.	• يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود. • يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين. • يجد الميل باستعمال المشتقة. • يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.	المشتقة، كثير الحدود، الميل.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: القيم العظمى والقيم الصغرى.	• يتعرف النقاط الحرجة. • يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.	النقطة الحرجة، القيمة العظمى، القيمة الصغرى، الميل، المشتقة.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج المشروع				1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				14

الوحدةُ 6

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، وكيفية تمثيله بيانيًّا وإيجاد مجاله ومـداه وأصفاره. وكذلـك تعرفوا مفهوم القاطع وإيجاد ميل المســتقيم ومعادلته. وسيتعلمون في هذه الوحدة إيجاد ميل منحنى اقتران عند نقطة التماس مع مستقيم مرسوم، وتقدير ميل منحنى اقتران عن طريق رسم المماس، وتقدير الســرعه اللحظية. وكذلك إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق، وحساب السرعة والتسارع اللحظي، فضلًا عن تعرف مفهوم النقاط الحرجة، والقيم الصغرى، والقيم العظمى، وإيجادها، وحل مسائل حياتية عنها.

الوحدةُ 6

المشتقاتُ

Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشــتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُســهِّلُ الحســاباتِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقــاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باســتعمالِ الاقتراناتِ. ومِنْ ذلكَ، حســابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحســابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

تعلّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المســافةِ – الزمنِ، ومنحنى الســرعةِ – الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ المشتقةِ الأولى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجــادَ القيــمِ العظمــى والصغــرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

54

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- تمثيل بعض الاقترانات بيانيًّا.
- تفسير منحنى المسافة– الزمن.
- تفسير منحنى السرعة– الزمن.
- إيجاد ميل المستقيم ومعادلته.
- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.

الصف العاشر

- إيجاد ميل منحنى مماسه مرسوم.
- تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- اشتقاق كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال الاشتقاق.
- إيجاد السرعة والتسارع اللحظي.
- إيجـاد النقـاط الحرجـة والقيـم الصغـرى والقيـم العظمـى.
- حل مسائل حياتية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- تعرف النهايات.
- إيجاد مشتقة x^n (لأي عدد نسبي n).
- إيجاد مشتقة عِدَّة أنواع من الاقترانات.
- اسـتعمال قاعـدة السلسـلة لإيجاد مشـتقة تركيـب اقترانين.
- إيجـاد النقاط الحرجة واسـتعمالها لرسـم منحنـى الاقتران.
- تعرف القيم القصوى المحلية والمطلقة.

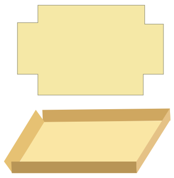
مشروعُ الوحدةِ

عملُ صندوقٍ حجمُهُ أكبرُ ما يُمكِنُ

فكرةُ المشروعِ حسابُ أكبرِ حجمٍ ممكنٍ لصندوقٍ باستعمالِ المشتقةِ.

الموادُّ والأدواتُ ورقتانِ منَ الكرتونِ المُقوّى مستطيلتا الشكلِ منَ المقاسِ نفسِهِ، مسطرةٌ، مقصٌّ، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1. أقصُّ أربعةَ مُربَّعاتٍ متساويةٍ.
2. أُطبِقُ الأطرافَ بعضَها على بعضٍ، فينتجُ صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مفتوحٌ منَ الأعلى.
3. أحسبُ حجمَ الصندوقِ، بقياسِ كلٍّ منَ الطولِ، والعرضِ، والارتفاعِ باستعمالِ المسطرةِ. هلْ يُمكِنُ عملُ صندوقٍ أكبرَ حجمًا باستعمالِ ورقةٍ منَ المقاسِ نفسِهِ؟
4. أُعيدُ الخطواتِ السابقةَ، ولكنْ بطريقةٍ جبريةٍ، وافتراضِ أنَّ طولَ ضلعِ المُربَّعِ المقصوصِ منْ كلِّ زاويةٍ يساوي x، وأكتبُ ثلاثةَ مقاديرَ جبريةٍ تُمثِّلُ الطولَ والعرضَ والارتفاعَ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ حجمِ الصندوقِ بدلالةِ x.
5. أكتبُ اقترانًا يمثلُ حجمَ الصندوقِ $V(x)$.
6. أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ.
7. أُمثِّلُ اقترانَ الحجمِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
8. أتحقَّقُ منَ النقطةِ التي يكونُ عندَها الحجمُ أكبرَ ما يُمكِنُ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، وذلكَ بالضغطِ على أيقونةِ Extremum منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا أُبيِّنُ فيهِ:

1. النتائجَ التي توصَّلَ إليْها كلُّ فردٍ في المجموعةِ.
2. بعضَ الصعوباتِ التي واجهَتْها المجموعةُ في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، وكيفَ تجاوزَتْها.
3. مقترحًا لتطبيقٍ حياتيٍّ أوْ علميٍّ تُستعمَلُ فيهِ فكرةُ المشروعِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	تعبير أفراد المجموعة عن حجم الصندوق جبريًّا.			
3	إيجاد أفراد المجموعة أكبر حجم للصندوق، وتحققهم من صحة الحل.			
4	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
5	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن.

هدف المشروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، بإيجاد أكبر حجم ممكن لصندوق مصنوع من قطعة ورقية مستطيلة الشكل.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات، يتكوَّن كلٌّ منها من (5–7) طلبة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اذكر للطلبة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشروع، مثل: جهاز الحاسوب، وبرمجية جيوجبرا، والورق المقوى، والمقص، والمسطرة، فضلًا عن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشروع باستمرار، وتعزيزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسوب؛ لتوثيق خطوات التنفيذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- بيِّن للطلبة الأوقات التي يمكن فيها تنفيذ خطوات المشروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطوات (1-4) بعد الانتهاء من الدرس الأول، والخطوة (5) بعد الدرس الثاني، والخطوات (6-8) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة استعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشروع، وإعداد عرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاوره.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: حل المعادلات الخطية والتربيعية، وإيجاد ميل مستقيم باستعمال نقطتين واقعتين عليه، وضرب المقادير الجبرية، وحساب محيط الدائرة ومساحتها التي عُلِم نصف قطرها.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حله، ثم اكتب على اللوح إحدى إجابات الطلبة غير الصحيحة – من دون ذكر اسم الطالب–، وأدِرْ نقاشًا حوله.

إرشادات للمعلم

لتحديد عدد حلول المعادلة التربيعية، ذكِّر الطلبة بمميز المعادلة وحالاته الثلاث:

- المميز > 0، إذن، يوجد حلان حقيقيان.
- المميز = 0، إذن، يوجد حلان متماثلان (حل واحد حقيقي).
- المميز < 0، إذن، لا توجد حلول حقيقية.

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ ميلِ المستقيمِ.

أَجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(4, 2), (5, 6)$ 4

2) $(3, 6), (-2, 6)$ 0

مثالٌ: أَجِدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ: **(1, 2)**، وَ**(3, 4)**.

صيغةُ ميلِ المستقيمِ m: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (3, 4)$: $m = \frac{4-2}{3-1} = 1$

حَلُّ المعادلاتِ الخطِّيةِ.

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ الخطِّيةِ الآتيةِ:

1) $5x + 5 = 4 - 7x$ $x = -\frac{1}{12}$

2) $2(1 - 2x) = 8x - 3$ $x = \frac{5}{12}$

3) $3(4x - 2) = 8(x + 6)$ $x = 13.5$

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ الخطِّيةَ $3x + 5 = x - 3$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x + 5 = x - 3$
بطرحِ x منَ الطرفيْنِ	$2x + 5 = -3$
بطرحِ 5 منَ الطرفيْنِ	$2x = -8$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x = -4$

حَلُّ المعادلاتِ التربيعيةِ.

أَحُلُّ كلًّا منَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 2, x = 1$

2) $x^2 + 6x + 9 = 0$ $x = -3$

3) $x^2 - 4x + 7 = 0$ لا توجد إجابات حقيقية.

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلةَ التربيعيةَ $x^2 + x - 6 = 0$

أَحُلُّ هذهِ المعادلةَ باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ:

	$x^2 + x - 6 = 0$
بالتحليلِ إلى العواملِ	$(x + 3)(x - 2) = 0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x + 3 = 0, x - 2 = 0$
بحَلِّ المعادلتيْنِ الناتجتيْنِ	$x = -3, \quad x = 2$

13

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

يُمكِنُ أيضًا حَلُّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أَجِدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = 1, c = -6$

القانونُ العامُّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بالتعويضِ، والتبسيطِ	$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$
	$x_1 = \frac{-1-5}{2}, x_2 = \frac{-1+5}{2}$

إذنْ، حَلُّ المعادلةِ هوَ: $x_1 = -3, x_2 = 2$

إيجادُ ناتجِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $8x(3x - 2)$ $24x^2 - 16x$

2) $(x - 6)(x + 4)$ $x^2 - 2x - 24$

3) $(x - 7)(x + 7)$ $x^2 - 49$

مثالٌ: أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $(x - 3)(x + 4)$

بتوزيعِ الضربِ	$(x - 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4x - 12$
بالتبسيطِ	$= x^2 + x - 12$

2) $(x + 1)(x - 1)$

بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ	$(x + 1)(x - 1) = x(x - 1) + 1 \times (x - 1)$
بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ	$= x^2 - x + x - 1$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= x^2 - 1$

حسابُ محيطِ الدائرةِ ومِساحتِها.

أَجِدُ المحيطَ والمِساحةَ للدائرةِ المُعطى نصفُ قُطْرِها في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $r = 5\,\text{cm}$ $C = 10\pi\ \text{cm}$, $A = 25\pi\ \text{cm}^2$

2) $r = 7\,\text{cm}$ $C = 14\pi\ \text{cm}$, $A = 49\pi\ \text{cm}^2$

3) $r = 8\,\text{cm}$ $C = 16\pi\ \text{cm}$, $A = 64\pi\ \text{cm}^2$

مثالٌ: أَجِدُ المحيطَ والمِساحةَ للدائرةِ التي نصفُ قُطْرِها **3 cm**:

صيغةُ محيطِ الدائرةِ	$C = 2\pi r$
بتعويضِ طولِ نصفِ القُطْرِ، والتبسيطِ	$= 2\pi(3) = 6\pi\ \text{cm}$
صيغةُ مِساحةِ الدائرةِ	$A = \pi r^2$
بتعويضِ طولِ نصفِ القُطْرِ، والتبسيطِ	$= \pi(3)^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

14

منهاجي
متعة التعليم الهادف

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

التعلم القبلي:

- تمثيل كثيرات الحدود بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا.
- تعيين نقطة متحركة على التمثيل البياني لكثير الحدود.

إرشادات للمعلم

يمكنك تحميل برمجية جيوجبرا المجانية وتثبيتها على أجهزة الحاسوب في مختبر مدرستك، وتحديثها باستمرار، مُستعمِلًا الرابط الإلكتروني:
https://www.geogebra.org/download

1 التهيئة

- توجَّه مع الطلبة إلى مختبر الحاسوب في مدرستك.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، بحيث يكون أحد الطالبين في كل مجموعة محيطًا بمهارات الحاسوب.
- اطلب إلى الطلبة تشغيل أجهزة الحاسوب، وفتح برمجية جيوجبرا.
- عرِّف الطلبة بمزايا برمجية جيوجبرا الجبرية والهندسية. فمثلًا، يمكن استعمال هذه البرمجية في حل المعادلات، ورسم التمثيل البياني للاقترانات، ورسم المماس عند نقطة على اقتران، وقياس الزوايا.

2 التدريس

- وضِّح للطلبة كيفية تنفيذ النشاط، ودعهم يُنفِّذوه بأنفسهم.
- اطلب إلى أفراد المجموعات تطبيق الخطوات على التوالي، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا ومُساعِدًا ومُوجِّهًا، وتأكَّد أن كل فرد في المجموعة قد تمكَّن من تنفيذ النشاط.
- ناقِش الطلبة في النقاط التي يكون عندها ميل الاقتران موجبًا، أو سالبًا، أو صفرًا، ثم اطرح عليهم السؤالين الآتيين:
  » هل يُؤثِّر اتجاه المماس في إشارة الميل؟
  » هل يمكن إيجاد علاقة بين المماس والمحور x الموجب؟

معملُ برمجيةِ جيوجبرا

استكشافُ ميلِ مماسِّ المنحنى
Exploring The Slope of The Tangent

يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا لوصفِ التغيُّرِ في قيمةِ ميلِ المماسِّ منْ نقطةٍ إلى أُخرى على منحنى كثيرِ حدودٍ.

نشاطٌ

أُمثِّلُ الاقترانَ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ على منحناهُ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ.

الخطوةُ 1: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ بيانيًّا باتباعِ الآتي:

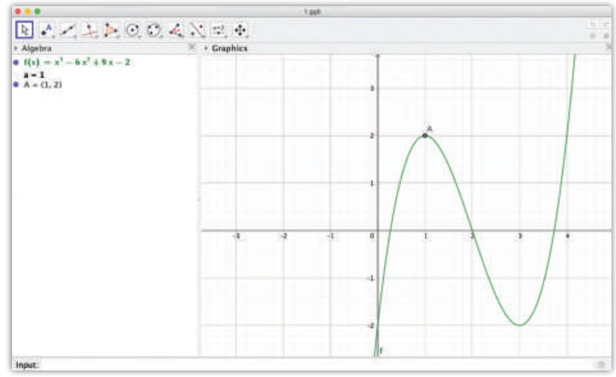
- أكتبُ $f(x)=$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ بنقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

x | □^□ | 3 | - | 6 | x | □² | + | 9 | x | - | 2 | ↵

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطةً مُتحرِّكةً A على منحنى الاقترانِ باتباعِ الآتي:

- أكتبُ $a = 1$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أكتبُ $A = (a, f(a))$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .

يُمكِنُني تغييرُ موقعِ النقطةِ A على منحنى الاقترانِ بنقرِها باستمرارٍ، ثمَّ تحريكِها.



إرشادات للمعلم

- توفيرًا للوقت، ولكيلا يضطر الطلبة إلى استعمال كتبهم في أثناء تنفيذ النشاط؛ استعمل جهاز العرض (إن توافر) في المختبر لعرض صور من كتاب الطالب لمعمل برمجية جيوجبرا، ويمكنك وضع الصور في ملف العرض التقديمي (powerpoint).
- ذكِّر الطلبة أنه يمكنهم تنزيل برمجية جيوجبرا على هواتفهم الذكية من متجر الهاتف، فضلًا عن وجود العديد من البرمجيات والآلات الحاسبة البيانية التي يمكنهم استعمالها.

تنويع التعليم:

- اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط تمثيل معادلة خطية أو تربيعية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمَّ تدرَّج معهم في الخطوات حتى يتمكنوا من تنفيذ النشاط.
- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن الاستعمالات الممكنة لبرمجية جيوجبرا، وحفِّزهم على تبادل الخبرات المتعلقة بالمهارات التي تعلموها؛ تعزيزًا لمهارتي البحث والتواصل لديهم.

3 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى حل أسئلة بند (أتدرب) الوارد ذكرها في معمل برمجية جيوجبرا، بعد الانتهاء من تنفيذ النشاط مباشرةً؛ بتطبيق ما تعلموه من مهارات باستعمال البرمجية.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة – من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم–، ثم ناقِش طلبة الصف فيها.

الواجب المنزلي:

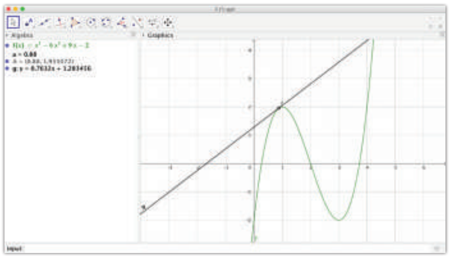
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة التي لم يتمكنوا من حلها في غرفة الصف.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

4 الإثراء

- اطلب إلى الطلبة تمثيل عِدَّة اقترانات بيانيًّا، وإيجاد النقاط التي يكون عندها الميل صفرًا، ومحاولة تفسير ذلك.
- اطلب إلى الطلبة مقارنة إجاباتهم بعضها ببعض، وحفِّز الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط على مساعدة بقية زملائهم.
- وضِّح للطلبة أنه يمكنهم توثيق المهام المنوطة بهم باستعمال برمجية جيوجبرا عن طريق التقاط صور لشاشة الحاسوب باستعمال مفتاح (PrtScr)، أو من تبويب (Edit) في برمجية جيوجبرا باختيار (Graphics view to clipboard)، أو من لوحة المفاتيح بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+C) معًا، ثم عمل لصق (paste) بالضغط على أزرار (Ctrl+shift+V) في الموضع المطلوب من الملف المراد توثيق المهمة فيه.

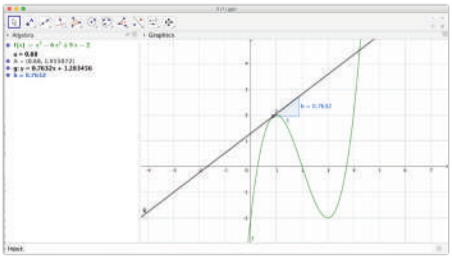
الخطوةُ 3: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ $\text{Tangent}(A, f)$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .
- أُلاحِظُ أنَّ برمجيةَ جيوجبرا تُسمّي المماسَّ g بصورةٍ تلقائيةٍ.



الخطوةُ 4: أجِدُ ميلَ المماسِّ عندَ النقطةِ A.

- أكتبُ Slope(g) في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أنقرُ زرَّ ↵ .



الخطوةُ 5: أُحرِّكُ النقطةَ A، مُلاحِظًا التغيُّرَ في قيمةِ الميلِ، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- متى يكونُ ميلُ المماسِّ موجبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ سالبًا؟
- متى يكونُ ميلُ المماسِّ صفرًا؟

أتدرب

أُمثِّلُ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا، ثمَّ أرسمُ مماسًّا لكلٍّ منها عندَ نقطةٍ مُتحرِّكةٍ، واصفًا التغيُّرَ في قيمةِ ميلِ المماسِّ: (1–4) انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2) $h(x) = 3 - 2x - x^2$

3) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4) $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

إرشادات للمعلم

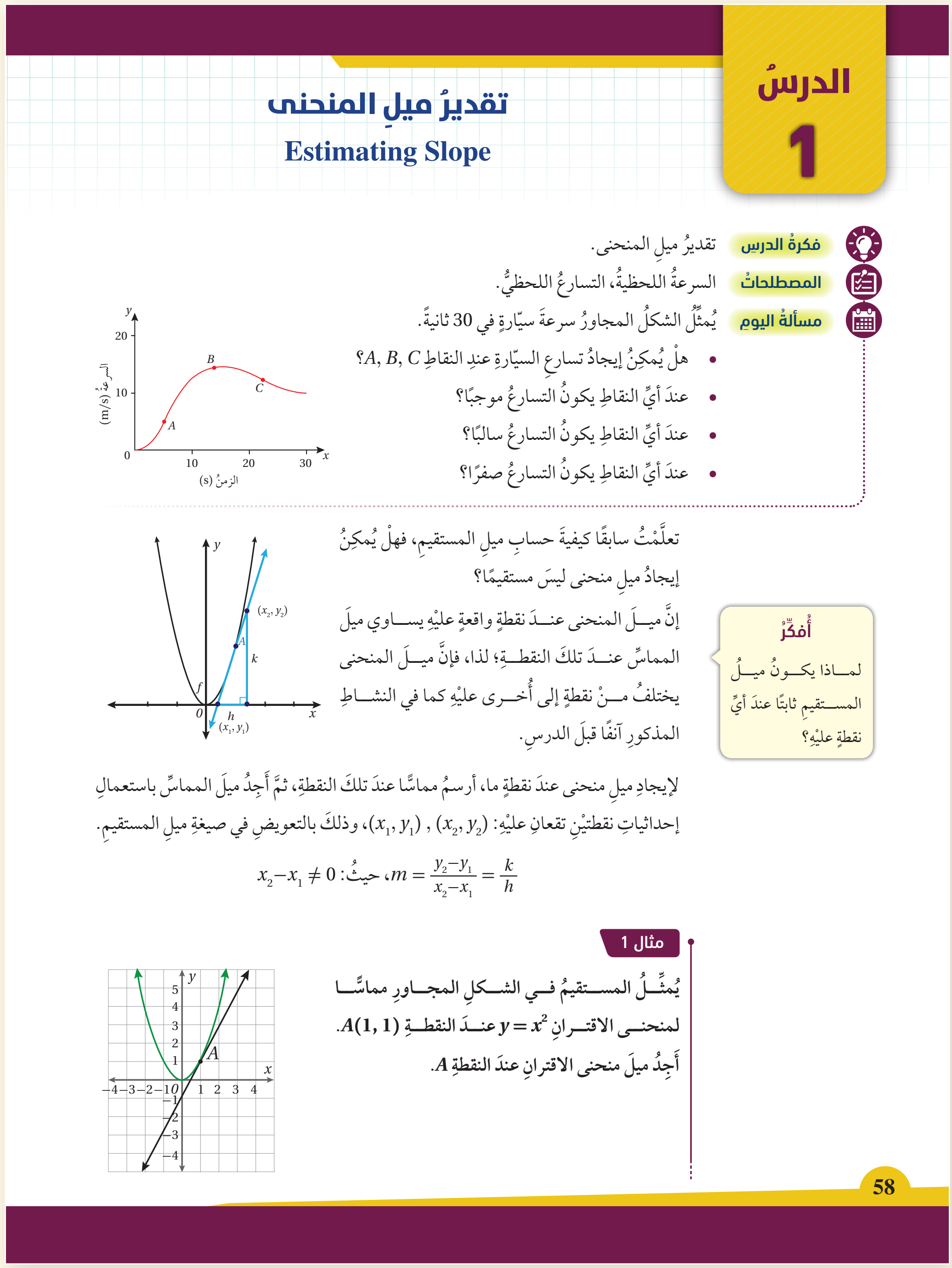
يمكن إعادة توزيع الطلبة في المجموعات قبل البدء بحل أسئلة بند (أتدرب)؛ لكي يتبادلوا الخبرات فيما بينهم.

تعليمات المشروع:

- أخبر الطلبة أنه يمكنهم الاستفادة من برمجية جيوجبرا لتنفيذ الخطوتين 7 و8 في المشروع.

5 الختام

- وجِّه الطلبة إلى كتابة كثير حدود من الدرجة الثانية أو أكثر، ثم إمراره إلى زميله في المجموعة؛ لتمثيله بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، وإيجاد ثلاث نقاط يكون عندها الميل موجبًا، وسالبًا، وصفرًا.
- اطلب إلى كل طالب أن يتحقق من حل زميله.



الدرس 1

تقديرُ ميلِ المنحنى
Estimating Slope

فكرةُ الدرسِ تقديرُ ميلِ المنحنى.

المصطلحاتُ السرعةُ اللحظيةُ، التسارعُ اللحظيُّ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سرعةَ سيّارةٍ في 30 ثانيةً.

- هلْ يُمكِنُ إيجادُ تسارعِ السيّارةِ عندِ النقاطِ A, B, C؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ موجبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ سالبًا؟
- عندَ أيِّ النقاطِ يكونُ التسارعُ صفرًا؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ ميلِ المستقيمِ، فهلْ يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى ليسَ مستقيمًا؟

إنَّ ميلَ المنحنى عندَ نقطةٍ واقعةٍ عليْهِ يساوي ميلَ المماسِّ عندَ تلكَ النقطةِ؛ لذا، فإنَّ ميلَ المنحنى يختلفُ منْ نقطةٍ إلى أُخرى عليْهِ كما في النشاطِ المذكورِ آنفًا قبلَ الدرسِ.

أُفكِّرُ
لماذا يكونُ ميلُ المستقيمِ ثابتًا عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ؟

لإيجادِ ميلِ منحنى عندَ نقطةٍ ما، أرسمُ مماسًّا عندَ تلكَ النقطةِ، ثمَّ أَجِدُ ميلَ المماسِّ باستعمالِ إحداثياتِ نقطتيْنِ تقعانِ عليْهِ: (x_2, y_2) , (x_1, y_1)، وذلكَ بالتعويضِ في صيغةِ ميلِ المستقيمِ.

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{k}{h}$$ ، حيثُ: $x_2-x_1 \neq 0$

مثال 1

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.
أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.

58

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يجد ميل مماس مرسومًا عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يرسم مماسًّا، ويقدر ميله عند نقطة على منحنى الاقتران.
- يكتب معادلة المماس.
- يقدر السرعة اللحظية عند نقطة على منحنى المسافة–الزمن.

التعلم القبلي:

- تعرف القاطع، والمماس، ونقطة التماس.
- إيجاد ميل مستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم.
- تفسير منحنى المسافة – الزمن، ومنحنى السرعة – الزمن.

1 التهيئة

- مهِّد للموضوع بسؤال الطلبة عن تعريف القاطع والمماس ونقطة التماس، ثم اطلب إليهم رسم أمثلة توضيحية لكلٍّ منها على اللوح. اسألهم أيضًا عن قانون ميل المستقيم الذي درسوه سابقا، ثم اكتبه على اللوح.
- اكتب على اللوح المثالين الآتيين، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد الميل بين النقطتين في كلٍّ منهما:

a) $A(6, 2), B(8, 10)$

b) $C(5, 4), D(9, -10)$

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:

» لماذا ظهرت إشارة الميل موجبة في الفرع a، وسالبة في الفرع b؟

- اطلب إلى الطلبة إيجاد معادلة المستقيم في المثال السابق.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » ماذا يسمى هذا المنحنى؟ منحنى السرعة – الزمن.
  » ما التسارع؟ التغير في السرعة.
  » هل يمكن حساب التسارع المتوسط بين نقطتين على المنحنى؟ نعم.
  » كيف يمكن حساب ذلك؟ بقسمة فرق السرعة على فرق الزمن بين النقطتين.
  » هل يختلف التسارع من نقطة إلى أخرى على هذا المنحنى؟ نعم.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والـرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سـيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسـألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المسـتخدمة في الـدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشـجِّع الطلبة على اسـتعمالها، مثل: الميل (Slope)، والمماس (Tangent)، والسـرعة (velocity)، والتسارع (acceleration).

3 التدريس

اشـرح على اللوح كيفية إيجاد الميل لمماس مرسوم عند نقطة على منحنى الاقتران، مستعينًا بالتمثيل البياني الوارد في كتاب الطالب بداية الدرس.

مثال 1

- ارسم التمثيل البياني الوارد في هذا المثال على اللوح، مُحدِّدًا عليه المماس بصورة دقيقة.
- أخبر الطلبة أنه يمكن إيجاد ميل المماس بتطبيق قانون ميل المسـتقيم لأي نقطتين واقعتين على المماس.
- أَعِدْ حسـاب ميل المماس، ولكن باستعمال نقطتين أخريين لإثبات أن قيمة الميل لا تتغيَّر بغض النظر عن النقطتين المُحدَّدتين على المماس.
- اسأل الطلبة عن سبب ظهور إشارة الميل موجبة، وأرشدهم إلى أن الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور x الموجب حادة.

أخطاء مفاهيمية:

- في أثناء شـرح المثال الأول، قد لا يُميِّز الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة؛ لذا وضِّح لهم مفهوم كلٍّ منهما.

ملاحظات المعلم

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المفاهيم العابرة:

عزِّز وعي الطلبة بالقضايا الإنسانية (تقدير العلم والعلماء) عـن طريق حوار تديره مـع الطلبة، وتخبرهم فيه أنهم يدرسون الآن فرعًا من فروع الرياضيات يسـمى التفاضل، وأن هذا الفرع قد طُوِّر في القرن السـابع عشـر الميلادي على يد نيوتن في إنجلترا، ثم لييبنز في ألمانيا؛ للمساعدة على وصف حركة الكواكب للأغراض الفلكية.

وجِّـه الطلبة إلـى البحث في مصـادر المعرفة المناسبة عن ثلاثة علماء مشهورين بإسهاماتهم فـي علم التفاضـل، ثم كتابة مقـال من صفحة واحدة عنهم؟

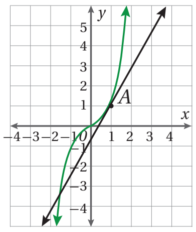
أُحدِّدُ نقطتَيْنِ على المماسِّ منَ الرسمِ: $B(0, -1)$ وَ $C(2, 3)$، ثمَّ أحسبُ الميلَ:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{3-(-1)}{2-0}$ بالتعويضِ

$= 2$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 2



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. انظر الهامش

إذا لمْ يكنِ المماسُّ مرسومًا عندَ النقطةِ التي يُرادُ إيجادُ ميلِ المنحنى عندَها، فإنَّهُ يُرسَمُ باستعمالِ المسطرةِ. وبما أنَّ الرسمَ اليدويَّ ليسَ دقيقًا، فإنَّ ميلَ المماسِّ المرسومِ قدْ يختلفُ قليلًا عنِ القيمةِ الدقيقةِ لميلِ المنحنى، عندئذٍ يكونُ الناتجُ قيمةً تقريبيةً لميلِ المنحنى.

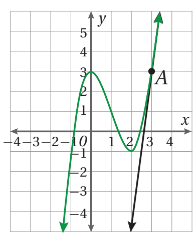
إرشادٌ

أستعملُ شبكةَ المُربَّعاتِ لتمثيلِ المنحنياتِ بيانيًّا بدقةٍ.

مثال 2

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x^2 + 3$ عندَ كلِّ نقطةٍ ممّا يأتي:

1 **النقطةُ $A(3, 3)$.**



الخطوةُ 1: أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ $A(3, 3)$ باستعمالِ المسطرةِ.

الخطوةُ 2: أُحدِّدُ نقطتَيْنِ على المماسِّ $A(3, 3)$، $C(2, -5)$، ثمَّ أجِدُ الميلَ.

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{-5-3}{2-3}$ بالتعويضِ

$= 8$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A هوَ 8 تقريبًا.

أتعلّمُ

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليهِ موجبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً حادةً معَ محورِ x الموجبِ.

59

إجابة أتحقق من فهمي 1:

$m = 3$

إرشادات للمعلم

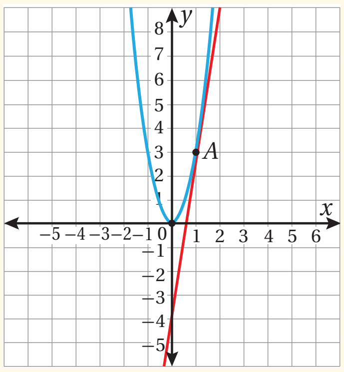
- وجِّه الطلبة إلى استعمال الورق البياني لرسم التمثيل البياني للاقتران.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال برمجية جيوجبرا في المثال الثاني لعمل تمثيل بياني ومماس دقيق.

تنبيه: رُسِم المماس بصورة تقريبية في المثال الثاني؛ لذا اقبل من الطلبة الإجابات التقريبية للميل.

تنبيه: في أثناء شرح المثال الأول، لا تقبل من الطلبة إجابات تقريبية للميل؛ لأن المماس مرسوم بصورة دقيقة.

مثال إضافي

- يُمثِّل المستقيم في الشكل المجاور مماسًّا لمنحنى الاقتران $y = 3x^2$ عند النقطة $A(1, 3)$، جد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A.



ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو: 6

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 2

- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران، وارسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 3)$.
- حدِّد أي نقطتين على المماس، ثم جد الميل.
- أخبر الطلبة أن المماس غير مرسوم بدقة؛ ما يعني أن قيمة الميل غير دقيقة.

مثال 2

- في الفرع الثاني من المثال الثاني، اسأل الطلبة:
  » ما سبب ظهور إشارة الميل سالبة؟
- استمع لإجابات الطلبة، ثم ناقِشهم فيها، مُبيِّنًا أن المماس كوّن زاوية منفرجة مع المحور x الموجب.
- أخبر الطلبة أنه يمكن استعمال قيمة الميل للنقطة $B(1, 1)$ وأي نقطة واقعة على المماس لكتابة معادلة المماس.
- ذكِّر الطلبة أن الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي: $y = ax + b$، حيث تُمثِّل a الميل، و b المقطع y للخط المستقيم.

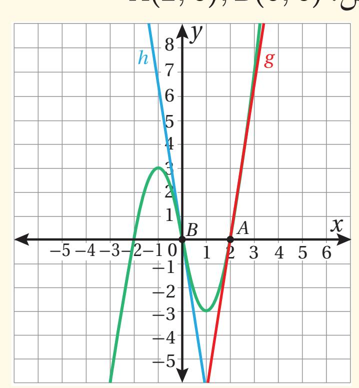
إرشادات للمعلم

قيمة الميل في الفرع الأول من المثال الثاني هي 9، وقيمة الميل في الفرع الثاني هي -3، ولكن اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك.

تنبيه: وضِّح للطلبة أن الميل لا يكون معرفًا إذا كان المماس موازيًا لمحور الصادات؛ لأن فرق الصادات بين أي نقطتين واقعتين على المماس يساوي صفرًا.

مثال إضافي

- قدِّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 - 4x$ عند كلٍّ من النقطتين: $A(2, 0), B(0, 0)$



الميل عند A هو 8 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

الميل عند B هو -4 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

أتعلَّم

يكونُ ميلُ المنحنى عندَ نقطةٍ عليْهِ سالبًا إذا صنعَ مماسُّ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ زاويةً منفرجةً معَ محورِ x الموجبِ.

أفكِّر

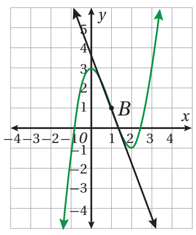
متى يكونُ ميلُ المنحنى صفرًا؟

أتذكَّر

معادلةُ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ (a, b) هيَ:
$y - b = m(x-a)$

2 النقطةُ $B(1, 1)$.

أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندَ النقطةِ B، ثمَّ أُحدِّدُ نقطتيْنِ عليْهِ $B(1, 1), E(0, 3.8)$، ثمَّ أَجِدُ الميلَ:



$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{1-3.8}{1-0}$ بالتعويضِ

$= -2.8$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ B هوَ -2.8

3 أكتبُ معادلةَ المماسِّ المارِّ بالنقطةِ $B(1, 1)$

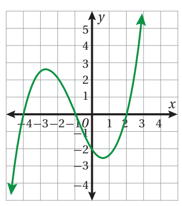
$y - b = m(x-a)$ معادلةُ المماسِّ

$y - 1 = -2.8(x-1)$ بتعويضِ النقطةِ $B(1, 1)$ وَ $m = -1$

$y = 3.8 - 2.8x$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0,-2)$.

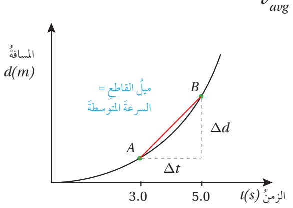


انظر الهامش

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ منحنى المسافةِ – الزمنِ يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ ثابتةٍ، وأنَّهُ لا يكونُ مستقيمًا عندَ الحركةِ بسرعةٍ مُتغيِّرةٍ. تعرَّفْتُ أيضًا كيفيةَ حسابِ السرعةِ المتوسطةِ $\overline{v}$ لجسمٍ مُتحرِّكٍ في فترةٍ زمنيةٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في المسافةِ Δd على التغيُّرِ في الزمنِ Δt:

$$v_{avg} = \overline{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

بالنظرِ إلى منحنى المسافةِ – الزمنِ المجاورِ، يتبيَّنُ أنَّ السرعةَ المتوسطةَ للسيّارةِ منَ الثانيةِ الثالثةِ إلى الثانيةِ الخامسةِ تساوي ميلَ القاطعِ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ A وَ B على المنحنى.



رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى التغيُّرِ في قيمةِ x بالرمزِ Δx

60

أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يعتقد الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أن الميل هو الفرق بين قيمتي y؛ لذا أرشدهم إلى أن الميل هو ظل الزاوية التي يُكوِّنها المستقيم مع محور x الموجب، وأنّه يساوي الفرق بين قيمتي y مقسومًا على الفرق بين قيمتي x .

إجابة أتحقق من فهمي 2:

الميل عند النقطة $A(-4, 0)$ هو 4.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

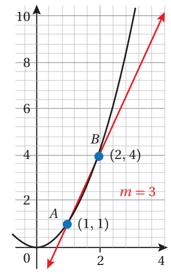
الميل عند النقطة $B(0, -2)$ هو -1.5 (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

مثال 3

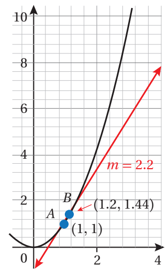
- وضِّح للطلبة الفرق بين منحنى المسافة– الزمن الذي يستعمل لحساب السرعة المتوسطة (ميل القاطع) والسرعة اللحظية (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى)، ومنحنى السرعة– الزمن الذي يستعمل لحساب التسارع المتوسط (ميل القاطع) والتسارع اللحظي (الميل عند نقطة واقعة على المنحنى).
- استعمل التمثيلات البيانية الواردة في الصفحة 61 من كتاب الطالب لتوضيح كيفية تقليص الفترة الزمنية للوصول إلى نقطة تكون عندها السرعة لحظية.
- مثِّل بيانيًّا الاقتران المعطى في المثال 3، ثم ارسم مماسًّا تقريبيًّا عند النقطة $A(3, 44.1)$، مُوضِّحًا للطلبة أن السرعة اللحظية عند نقطة هي ميل المماس لمنحنى المسافة– الزمن عند تلك النقطة.
- أخبر الطلبة أنه ليس سهلًا رسم المماس في المثال 3
- أَثِرْ فضول الطلبة للبحث عن طريقة أخرى لإيجاد الميل على نحوٍ أسهل وأدق.

! تنبيه: الفت انتباه الطلبة إلى أن منحنى المسافة – الزمن الوارد في المثال الثالث قد درسوه في الفيزياء.

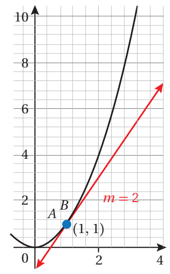
لكنَّ السرعةَ المتوسطةَ لا تُقدِّمُ معلوماتٍ كافيةً في كثيرٍ منَ المواقفِ، مثلِ تحديدِ سرعةِ سيّارةٍ لحظةَ مرورِها أمامَ الرادارِ؛ فتَلزَمُ عندئذٍ **السرعةُ اللحظيةُ** (velocity) التي يُمكِنُ إيجادُها بتقليصِ الفترةِ الزمنيةِ للسرعةِ المتوسطةِ حتى تصبحَ نقطةً (لحظةً) كما في الأشكالِ التاليةِ، فيصبحُ القاطعُ الذي يمرُّ بنقطتيْنِ على المنحنى مماسًّا لهُ عندَ نقطةٍ واحدةٍ.



الشكلُ (1).



الشكلُ (2).



الشكلُ (3).

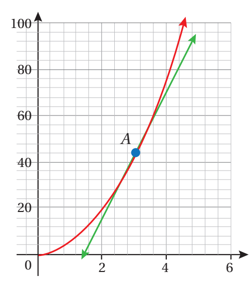
بما أنَّ ميلَ المماسِّ يساوي ميلَ المنحنى عندَ نقطةِ التماسِّ، فإنَّ السرعةَ اللحظيةَ عندَ لحظةٍ ما تساوي ميلَ منحنى المسافةِ– الزمنِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

مثال 3

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 4.9t^2$ العلاقةَ بينَ المسافةِ المقطوعةِ d بالمترِ والزمنِ t بالثانيةِ (منحنى المسافةِ– الزمنِ) لكرةٍ تسقطُ سقوطًا حُرًّا منْ وضعِ السكونِ. أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ سقوطِها.

الخطوةُ 1: أُعوِّضُ $t = 3$ بالاقترانِ لتحديدِ المسافةِ المقطوعةِ بعدَ 3 ثوانٍ، فتنتجُ النقطةُ $A(3, 44.1)$ التي تُمثِّلُ نقطةَ التماسِّ.

الخطوةُ 2: أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $d(t) = 4.9t^2$ بيانيًّا، ثمَّ أرسمُ المماسَّ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$.



فائدةٌ
تُسمّى المعادلةُ $d(t) = 4.9t^2$ قانونَ غاليليو نسبةً إلى مُكتشِفِها غاليليو غاليلي (1564– 1642م). وهيَ تصفُ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ في أثناءِ سقوطِهِ بصورةٍ حُرَّةٍ منْ وضعِ السكونِ نحوَ سطحِ الأرضِ.

! أخطاء مفاهيمية:
قد يخلط الطلبة ذو المستوى دون المتوسط بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية؛ لذا وضِّح لهم الفرق بينهما.

مثال إضافي

- يُمثِّل الاقتران $d(t) = 2t^2 - 1$ المسافة التي يقطعها جسم ما، حيث d المسافة المقطوعة بالمتر، و t الزمن بالثانية. قدِّر السرعة اللحظية بعد ثانيتين.

اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من الإجابة الصحيحة 8 m/s

منهاجي
متعة التعليم الهادف

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند **(أتدرب وأحل المسائل)**، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة في الصفحة الخامسـة عشـرة مـن كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التـي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسـب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

الخطوةُ 3: أحدِّدُ نقطتيْنِ على المماسِّ $A(3, 44.1)$ وَ $B(2, 16)$، ثمَّ أسـتعملُهُما لحسـابِ الميلِ.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغةُ الميلِ

$= \frac{44.1 - 16}{3 - 2}$ بالتعويضِ

$= 28.1$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنـى الاقترانِ عندَ النقطةِ $A(3, 44.1)$ هوَ 28.1 تقريبًا. ومنهُ، فإنَّ سـرعةَ الكرةِ اللحظيةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ 28.1 m/s

أفكّرُ

إنَّ حسابَ السرعةِ اللحظيةِ برسمِ المماسِّ وتحديدِ نقطتيْنِ عليْهِ أمرٌ صعبٌ، فهلْ توجدُ طريقةٌ أسهلُ وأدقُّ لحسابِ الميلِ؟

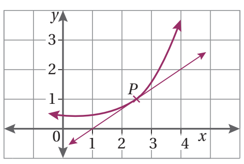
أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^2 + t$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ ما، حيثُ d المسافةُ المقطوعةُ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ، وَ 11 ثانيةً. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

1) يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P. $m = \frac{2}{3}$

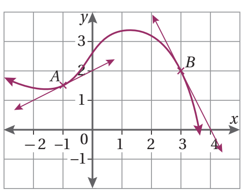


2) في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ A وَ B.

الميل عند A هو: $\frac{1}{2}$

الميل عند B هو: -2



إجابة أتحقق من فهمي 3:

السرعة بعد 5 ثوانٍ هي 11 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

السرعة بعد 11 ثانية هي 23 m/s (اقبل من الطلبة الإجابات القريبة من ذلك).

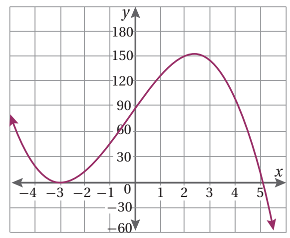
مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (مهارات التفكير العليا)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$، والنقطةِ $(4.5, 60)$.

الميل عند $(2, 150)$ هو: 15

الميل عند $(4.5, 60)$ هو: -75



أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 – 4):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \le x \le 4$ انظر ملحق الإجابات

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. انظر ملحق الإجابات

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$. 1.9 تقريبًا

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 1.5)$

أنسخُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلَ (10–8):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$	0	0.01	0.1	0.3375	0.8	1.5625	2.7

8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \le x \le 3$ انظر ملحق الإجابات

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. انظر ملحق الإجابات

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 0.8)$. 1.2 تقريبًا

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$. أي إجابة قريبة من 8

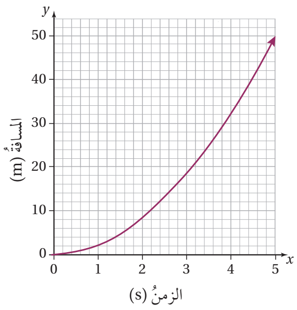
12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$. أي إجابة قريبة من -4

13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$. أي إجابة قريبة من 2

14 $y = 5x^4 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$. 0

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$. أي إجابة قريبة من -4

16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$. -2



درّاجاتٌ ناريةٌ: بدأَتْ درّاجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ المسافةَ التي قطعَتْها الدرّاجةُ في 5 ثوانٍ:

17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعينًا بالجدولِ الآتي: انظر ملحق الإجابات

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $x=2$. انظر ملحق الإجابات

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتيْنِ. أي إجابة قريبة من 8 m/s

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ. انظر ملحق الإجابات

سيّاراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ تسارعَ سيّارةٍ، فسجَّلَ المسافةَ المقطوعةَ كلَّ 3 ثوانٍ كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ المعادلةَ $x = at^2 + bt^4$ لتمثيلِ العلاقةِ بينَ قيمِ المسافةِ والزمنِ، حيثُ a وَ b عددانِ ثابتانِ:

الزمنُ t (ثانيةٌ)	0	3	6	9	12
المسافةُ x (مترٌ)	0	26.19	95.04	177.39	224.64

21 أرسمُ منحنى المسافةِ – الزمنِ. 21–24) انظر ملحق الإجابات

22 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 9$.

23 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a وَ b.

24 **فيزياءُ:** تُمثِّلُ المعادلةُ $s(t) = 3t - t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ بالمترِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

25 **تبريرٌ:** أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y.

انظر ملحق الإجابات

26 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكِستيْنِ عليْهِ: $(a,b), (-a, b)$. انظر ملحق الإجابات

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للميل عند نقطة على المنحنى، مثل الرادار الذي يرصد سرعة السيارة لحظة مرورها أمامه.
- أكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (4–1) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة للشاشة في كل خطوة (print screen).

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  » ما الفرق بين القاطع والمماس؟
  » ما تعريف نقطة التماس؟
  » هل يمكن رسم المماس بدقة؟
  » متى تكون قيمة الميل موجبةً أو سالبةً أو صفرًا؟

إرشاد: في السؤال 26:

- أخبر الطلبة أن المقصود بالنقطتين المتعاكستين اللتين ورد ذكرهما في السؤال هو النقطتان المتقابلتان على جانبي محور التماثل.
- اكتب على اللوح بعض الأمثلة على ذلك، مثل: $(1, 2)$, $(-1, 2)$ على منحنى $y = x^2$

الدرسُ 2

الاشتقاقُ
Differentiation

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مشتقةِ كثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ المشتقةُ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ الاقترانُ $f(t) = 80t - 5t^2$ ارتفاعَ منطادٍ بالمترِ عنْ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ. ما سرعةُ المنطادِ بعدَ 10 ثوانٍ منْ إطلاقِهِ؟

تعرَّفْتُ في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ الميلِ أوْ تقديرِهِ، وهيَ طريقةٌ ليسَتْ سهلةً، وتحتاجُ إلى دقةٍ عندَ رسمِ المماسِّ. سأتعرَّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جبريةً أسهلَ لإيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ نقطةٍ عليهِ منْ دونِ حاجةٍ إلى رسمِ المماسِّ.

عندَ إيجادِ ميلِ منحنى الاقترانِ $y = x^2$ عندَ نقاطٍ مختلفةٍ عليْهِ باستعمالِ طريقةِ ميلِ المماسِّ التي تعرَّفْتُها سابقًا، وتنظيمِ القيمِ في الجدولِ الآتي، سألاحِظُ أنَّ ميلَ المنحنى عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) يساوي قيمةَ x مضروبةً في العددِ 2؛ أيْ إنَّ الميلَ m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4=-2\times2$	$-2=-1\times2$	$0=0\times2$	$2=1\times2$	$6=3\times2$	$8=4\times2$	$10=5\times2$

وبالمثلِ، سأجدُ أنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) على منحناهُ هوَ $m = 3x^2$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^n$ عندَ أيِّ نقطةٍ (x, y) عليْهِ هوَ $m = nx^{n-1}$.

مشتقةُ (derivative) الاقترانِ $f(x)$ عندَ نقطةٍ واقعةٍ على منحناهُ هيَ ميلُ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $f'(x)$.

رموزٌ رياضيةٌ

تُستعمَلُ الرموزُ $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$ للتعبيرِ عنِ المشتقةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ اقترانِ القوةِ

- **بالكلماتِ:** عندَ اشتقاقِ الاقترانِ $f(x)=x^n$، فإنَّ قوةَ x في المشتقةِ تكونُ أقلَّ بواحدٍ منْ قوةِ x في الاقترانِ الأصليِّ، وإنَّ معاملَ x في المشتقةِ يساوي قوةَ x في الاقترانِ الأصليِّ.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = x^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = nx^{n-1}$.

65

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يتعرف مفهوم مشتقة كثير الحدود.
- يجد مشتقة كثيرات الحدود باستعمال القوانين.
- يجد الميل باستعمال المشتقة.
- يجد السرعة اللحظية والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة.

التعلم القبلي:

- تقدير ميل المنحنى على نقطة واقعة عليه.
- تقدير السرعة اللحظية والتسارع اللحظي.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بما تعلموه في الدرس السابق، ثم اكتب على اللوح السؤال الآتي:

» يتحرك جسم وفق المعادلة: $d = 16t - 2t^2$، حيث d المسافة بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما سرعة هذا الجسم بعد ثانيتين من بدء حركته؟

- أدِرْ حوارًا بين الطلبة عن طريقة إيجاد هذه السرعة وفق الطريقة المتبعة في الدرس السابق.
- دع الطلبة يحلوا السؤال ضمن مجموعات، وتابِعهم في أثناء ذلك.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما ارتفاع المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ 300 m
  » كيف يمكن إيجاد سرعة المنطاد بعد مرور 10 ثوانٍ على إطلاقه؟ رسم منحنى المسافة–الزمن، ورسم مماس عندما $t = 10$، وحساب ميله.
  » هل توجد طريقة أخرى أسهل وأكثر دقة لإيجاد السرعة؟ نعم.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس طريقة سهلة لحساب الميل والسرعة والتسارع، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: كثير الحدود (polynomial)، والمشتقة (derivative)، والميل (slope).

3 التدريس

- وظِّف الشرح الوارد بداية الدرس من كتاب الطالب في إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليه، واستنتاج قاعدة مشتقة اقتران القوة.

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة بوجود عِدَّة رموز للمشتقة يمكن العثور عليها في الكتب المرجعية، أو المواقع الإلكترونية المتخصصة، ومن هذه الرموز: y', $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{dy}{dx}$

تنبيه: قد لا يُميِّز بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط اقتران كثير الحدود من غيره؛ لذا وضِّح لهم ذلك.

أخطاء مفاهيمية: قد يعتقد بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط أن المماس يُرسَم للدائرة فقط؛ لذا الفت انتباههم إلى ذلك بتعريف المماس والقاطع ونقطة التماس.

ملاحظات المعلم

المفاهيم العابرة:

أكِّد للطلبة أهمية المفاهيم العابرة للمواد حيثما ورد ذكرها في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشطة العملية. ففي بند (**مسألة اليوم**)، عزِّز الوعي بالقضايا الإنسانية (الهواية) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهمية الهواية، وتأثيرها في الطاقة الإيجابية وزيادة درجة السعادة لديهم، ثم اسألهم:

» ما هواياتك المفضلة؟
» بماذا تشعر عند ممارسة هواياتك؟
» أيكم لديه هوايات أخرى؟
» اذكرها (إن وُجِدت).

مثال 1

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^8$

$f'(x) = 8x^{8-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 8x^7$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = x^5$

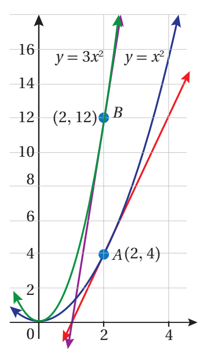
$f'(x) = 5x^{5-1}$ قانونُ مشتقةِ القوةِ

$f'(x) = 5x^4$ بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = x^7$ b) $f(x) = x^{11}$



منَ المعلومِ أنَّ قيمَ y للاقترانِ $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثالِ قيمِ y التي تُناظِرُها للاقترانِ $g(x) = x^2$. وعليهِ، فإنَّ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 12)$ يساوي 3 أمثالِ ميلِ منحنى الاقترانِ $g(x) = x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 4)$.

وهذا يعني أنَّ مشتقةَ $(3x^2)$ تساوي 3 أمثالِ مشتقةِ (x^2)؛ أيْ $(3 \times 2x)$.

بوجهٍ عامٍّ، فإنَّ مشتقةَ الاقترانِ $f(x) = ax^n$، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ، هيَ $f'(x) = a \times nx^{n-1}$.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ استنتاجُ قاعدةٍ لمشتقةِ الاقترانِ الخطيِّ؟

مفهومٌ أساسيٌّ

قواعدُ أُخرى للمشتقةِ:

- **مشتقةُ مضاعفاتِ القوةِ:** إذا كانَ $f(x) = ax^n$، حيثُ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فإنَّ $f'(x) = anx^{n-1}$
- **مشتقةُ الثابتِ:** إذا كانَ $f(x) = c$، حيثُ c عددٌ حقيقيٌّ، فإنَّ $f'(x) = 0$؛ أيْ إنَّ مشتقةَ الاقترانِ الثابتِ تساوي صفرًا.

تنبيه:

لا تطلب إلى الطلبة اشتقاق اقتران فيه أس سالب أو أس كسري؛ لأن المطلوب منهم فقط في هذه المرحلة تعرُّف اشتقاق كثير الحدود.

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) $f'(x) = 7x^6$ b) $f'(x) = 11x^{10}$

مثال 1

- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة اشتقاق اقتران القوة.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^{25}$ $f'(x) = 25x^{24}$

2) $f(x) = x^{77}$ $f'(x) = 77x^{76}$

إرشادات للمعلم

- في المثال الأول، قد ينسى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط طرح واحد من الأس؛ لذا ذكِّرهم دائمًا بذلك.
- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط عند شرح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة بين المنحنين؛ لأنهما رُسِما معًا؛ لذا ارسم كلًّا منهما وحده، ثم ادمجهما على المستوى الإحداثي نفسه.

مثال 2

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^4$

$f'(x) = 2(4x^{4-1})$ — قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = 8x^3$ — بالتبسيطِ

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$ — قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ — بالتبسيطِ

3 $f(x) = -2x$

$f'(x) = -2(x^{1-1})$ — قانونُ مشتقةِ مضاعفِ القوةِ

$f'(x) = -2$ — بالتبسيطِ

4 $f(x) = 4$

$f'(x) = 0$ — قانونُ مشتقةِ الثابتِ

أتذكَّرُ

ميلُ الاقترانِ الثابتِ يساوي صفرًا.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

مفهومٌ أساسيٌّ

مشتقةُ المجموعِ ومشتقةُ الفرقِ

- **بالكلماتِ:** مشتقةُ مجموعِ كثيرَيِ الحدودِ تساوي مجموعَ مشتقتَيْهِما، ومشتقةُ الفرقِ بينَ كثيرَيِ الحدودِ تساوي الفرقَ بينَ مشتقتَيْهِما.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $f(x) = g(x) \pm h(x)$، حيثُ $g(x)$ وَ $h(x)$ كثيرا الحدودِ، فإنَّ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

مثال 2

- وظِّف الشرح الوارد في كتاب الطالب، والمقارنة بين ميل منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ وميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند عِدَّة نقاط واقعة عليهما لها الإحداثي x نفسه؛ في استنتاج قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، مُبيِّنًا أن ميل المماس عند A هو 2، وأن ميل المماس عند B هو 6
- يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.
- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة مضاعفات القوة، وقاعدة مشتقة الثابت.

! أخطاء مفاهيمية: في المثال الثاني، قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في الاشتقاق؛ بنسيان الضرب في المعامل (في حال وجود معامل غير 1)؛ لذا الفت انتباههم إلى ذلك.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = -2x^8 \quad f'(x) = -16x^7$

2 $f(x) = 9x \quad f'(x) = 9$

3 $f(x) = -1 \quad f'(x) = 0$

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f'(x) = 60x^{11}$ **b)** $f'(x) = -56x^7$

c) $f'(x) = 3x^5$ **d)** $f'(x) = 0$

مثال 3

- استعمل صندوق (مفهوم أساسي) لشرح قاعدة اشتقاق مجموع كثيري حدود، ومشتقة الفرق.
- استعمل هذا المثال لتوضيح قاعدة مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق.
- اكتب على اللوح أمثلة أخرى لترسيخ فهم الطلبة للقاعدة.

مثال إضافي

- جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3 - 4x^2$ $\quad f'(x) = -8x$

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

مثال 4 فرع 1

- ذكّر الطلبة أن ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، مستعينًا بالشرح الوارد في بداية الدرس.
- جد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقة.
- قدِّر الميل برسم المماس إنْ توافر وقت لذلك.
- قارِن بين طريقة تقدير الميل وإيجاد الميل باستعمال المشتقة من حيث دقة الناتج، وصعوبة الحل، والوقت المُستغرَق في ذلك.

> **تنبيه:** لا تقبل إجابات الطلبة التقريبية عند إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

مثال 3

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 2x - 6$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$ قانونُ مشتقةِ مضاعفاتِ القوى

$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$ بالتبسيطِ

> **إرشادٌ**
> أستعملُ قواعدَ الاشتقاقِ المناسبةَ لإيجادِ المشتقةِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: انظر الهامش

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$ b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

أُلاحِظُ منَ الأمثلةِ السابقةِ أنَّ مشتقةَ الاقترانِ هيَ اقترانٌ جديدٌ يُمثِّلُ قيمةَ ميلِ منحنى الاقترانِ الأصليِّ عندَ قيمٍ مختلفةٍ؛ لذا يُمكِنُ إيجادُ ميلِ منحنى الاقترانِ عندَ أيِّ نقطةٍ عليْهِ، بتعويضِ الإحداثيِّ x لتلكَ النقطةِ في اقترانِ المشتقةِ.

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميلُ منحنى $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$.

$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ الاقترانُ الأصليُّ

$f'(x) = 6x - 18$ باشتقاقِ الاقترانِ

$f'(1) = 6(1) - 18$ بتعويضِ قيمةِ $x = 1$

$= -12$ بالتبسيطِ

إذنْ، ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ $(1, -10)$ هوَ -12

> **أتعلَّمُ**
> يُستعمَلُ الرمزُ $f'(a)$ للتعبيرِ عنْ مشتقةِ $f(x)$ عندما $x = a$.

إرشادات للمعلم

أثبِت للطلبة بعد شرح المثال الثالث أن مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفرًا، وذلك برسم التمثيل البياني لاقتران ثابت، وإيجاد الميل عند عِدَّة نقاط واقعة عليه.

> **تنبيه:** قد يواجه بعض الطلبة صعوبة في فهم المثال الثالث؛ لذا اطلب إليهم اشتقاق كل حد وحده، ثم جمع المشتقات لكتابة مشتقة الاقتران كاملة.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $f'(x) = x + 4$

b) $g'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$

2 قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ	$f'(x) = 0$
بتعويضِ قيمةِ المشتقةِ	$6x - 18 = 0$
بجمعِ 18 للطرفيْنِ	$6x = 18$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 6	$x = 3$

إذنْ، قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا هيَ $x = 3$.

أتحققُ من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ ، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

معلومةٌ

السرعةُ اللحظيةُ تساوي مشتقةَ اقترانِ المسافةِ عندَ لحظةٍ ما.

التسارعُ اللحظيُّ يساوي مشتقةَ اقترانِ السرعةِ عندَ لحظةٍ ما.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ ميلَ منحنى المسافةِ– الزمنِ في لحظةٍ ما (عندَ نقطةٍ مُحدَّدةٍ) يساوي السرعةَ اللحظيةَ عندَ تلكَ النقطةِ، وبصورةٍ مشابهةٍ فإنَّ ميلَ منحنى السرعةِ– الزمنِ في لحظةٍ ما يساوي التسارعَ اللحظيَّ.

أستطيعُ الآنَ إيجادَ كلٍّ منَ السرعةِ اللحظيةِ، والتسارعِ اللحظيِّ باستعمالِ المشتقةِ بسهولةٍ منْ دونِ حاجةٍ إلى تقديرِ ميلِ المنحنى باستعمالِ المماسِّ كما في الدرسِ السابقِ.

مثال 5: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ:

1 أجِدُ سرعةَ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

السرعةُ هيَ مشتقةُ اقترانِ المسافةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ السرعةِ هوَ $v(t)$.

إذنْ، $v(t) = d'(t)$.

المطلوبُ هوَ $v(3) = d'(3)$، التي تُمثِّلُ السرعةَ اللحظيةَ عندما $t = 3$.

مشتقةُ اقترانِ المسافةِ	$d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
تعريفُ اقترانِ السرعةِ	$v(t) = d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
بتعويضِ $t = 3$	$v(3) = d'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$
بالتبسيطِ	$= 14.7\ \text{m/s}$

إذنْ، سرعةُ الجسمِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هيَ 14.7 m/s

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) $m = 5$ b) $x = -2.5$

مثال 4 فرع 2

- ارسم التمثيل البياني للاقتران الوارد في هذا المثال.
- وضِّح للطلبة النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، مستعينًا بالنشاط الوارد في بداية الوحدة.
- ذكِّر الطلبة أن الميل يساوي صفرًا عندما يكون المماس موازيًا للمحور x.
- اشرح للطلبة الطريقة الجبرية لإيجاد النقاط التي يساوي عندها الميل صفرًا، ثم قارن ذلك بالإجابة الناتجة من التمثيل البياني للاقتران.

مثال إضافي

إذا كانَ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 6$، فجد كلًّا ممّا يأتي باستعمال المشتقة:

1 ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $A(-2, 20)$

2 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

3 قيم x التي يساوي عندها ميل منحنى الاقتران 5

1) $m = 5$

2) $x = 3, x = -\frac{5}{3}$

3) $x = -2, x = \frac{10}{3}$

مثال 5: من الحياة

- ذكِّر الطلبة أنه يمكن إيجاد السرعة باستعمال منحنى المسافة– الزمن.
- نبِّه الطلبة إلى أن القيمة تُمثِّل السرعة اللحظية، لا السرعة المتوسطة.
- أخبر الطلبة أن اقتران التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.
- وضِّح للطلبة أن قيمة التسارع موجبة لأن السرعة تزداد.

2 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ.

التسارعُ هوَ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ. أفترضُ أنَّ اقترانَ التسارعِ هوَ $a(t)$.

إذنْ، $a(t) = v'(t)$.

المطلوبُ هوَ $a(5) = v'(5)$، التي تُمثِّلُ التسارعَ عندما $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = 3.6t$ مشتقةُ اقترانِ السرعةِ

$a(5) = 3.6(5)$ بتعويضِ $t = 5$

$a(5) = 18$ بالتبسيطِ

إذنْ، تسارعُ الجسمِ بعدَ 5 ثوانٍ منْ بَدءِ حركتِهِ هوَ $18\ m/s^2$

أتعلَّمُ

تكونُ قيمةُ التسارعِ صفرًا إذا كانَتِ السرعةُ ثابتةً.

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1 $f(x) = -7$ $f'(x) = 0$

2 $g(x) = 3x^9$ $g'(x) = 27x^8$

3 $r(x) = -5x^2$ $r'(x) = -10x$

4 $i(x) = x^4 - 3x$ $i'(x) = 4x^3 - 3$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$ $v'(x) = 2x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$ $t'(x) = -2 + 2x$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$ -26.8

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}\,x$ $3.137435236 \times 10^{31}$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$ 0

10 أَجِدُ النقطةَ التي يكونَ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12 $x = 3$

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^3 - 6t + 3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ:

11 أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً). $v(t) = 3t^2 - 6$

12 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$. $21\ m/s$

13 أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ $6\ m/s$ $t = 2$

14 أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. $a(t) = 6t$

15 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$. $30\ m/s^2$

70

إجابة أتحقق من فهمي 5:

السرعة: $15.1\ m/s$

التسارع: $5\ m/s^2$

تنبيه: في أثناء شرح المثال الخامس، لا تذكر للطلبة أن التسارع هو المشتقة الثانية لاقتران المسافة؛ لأنهم لا يعرفون ذلك في هذه المرحلة.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة السادسة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة -ضمن مجموعات- حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- نبِّه الطلبة عند حل السؤال 30 إلى أن النقطة المعطاة تُحقِّق معادلة المنحنى، وأن المشتقة عندئذٍ تساوي صفرًا، وأنه يمكنهم تكوين معادلتين بالمتغيرين a,b وحلهما.
- وجِّه الطلبة عند حل السؤال 31 إلى إيجاد الزمن الذي تكون عنده السرعة 98 m/s، ثم حساب ارتفاع القذيفة في تلك اللحظة.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شـبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمشتقات.
- أكِّد للطلبة وجوب توثيق المعلومة دائمًا.

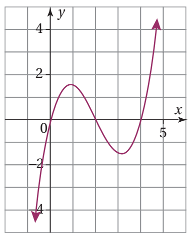
تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة 5 من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما الفرق بين تقدير الميل برسـم المماس وإيجاد الميل باستعمال المشتقة؟
  - » أيهما أدق؟
  - » هل يستحيل أحيانًا رسم المماس؟

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:



16 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$

17 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

17) $f'(0) = 4$, $f'(2) = -2$, $f'(4) = 4$,

18 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 1 $x = 2+\sqrt{2}$, $x = 2-\sqrt{2}$

19 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ 2 $x = \frac{6+2\sqrt{6}}{3}$, $x = \frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

20 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x^3+2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ x لها 1 $y - 5 = 9(x-1)$

تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

21 أَجِدُ قيمةَ b. $b = -10$

22 أَجِدُ قيمةَ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا. $x = 1$, $x = -\frac{7}{9}$

إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$ ، حيثُ a عددٌ ثابتٌ، هيَ -12

23 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ a. $a = 12$

24 أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$. 24

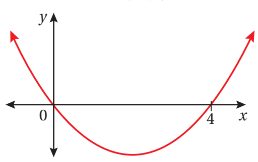
أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = (x+3)(x-3)$ $f'(x) = 2x$

26 $f(x) = (x+2)(x+5)$ $f'(x) = 2x + 7$

25 $f(x) = 2x(x+1)$ $f'(x) = 4x + 2$

28 يُبيِّـنُ الشـكلُ المجـاورُ التمثيـلَ البيانـيَّ للاقتـرانِ $f(x) = kx(x-4)$، حيـثُ k عـددٌ حقيقـيٌّ. أَجِـدُ قيمـةَ k إذا كانَ ميـلُ المنحنـى عنـدَ النقطـةِ (4, 0) هـوَ 2 $k = 0.5$



مهارات التفكير العليا

29 **تبريرٌ:** أُثبِتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

30 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمَ a, b إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا. انظر ملحق الإجابات

31 **تحـدٍّ:** أُطلِقَتْ قذيفةٌ رأسـيًّا إلـى الأعلى، فـكانَ ارتفاعُها عنْ سـطحِ الأرضِ h بالمتـرِ بعدَ t ثانيةً مـنْ إطلاقِها $h(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما ارتفاعُ القذيفةِ عنِ الأرضِ عندما تكونُ سرعتُها 98 m/s؟ انظر ملحق الإجابات

تنبيه على سـؤال: وجِّه الطلبـة إلى فك الأقواس أولًا في الأسئلة (25 –28)، ثم اشتقاق الاقترانات الناتجة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الدرس 3

القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى
Maximum and Minimum Values

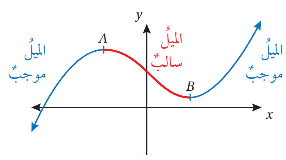
فكرةُ الدرسِ إيجادُ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى المحليةِ لكثيراتِ الحدودِ.

المصطلحاتُ نقطةٌ حرجةٌ، قيمةٌ عظمى، قيمةٌ صغرى.

مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلــةُ $d = -16t^2 + 75t + 2.5$ المســافةَ (بالقدمِ) التي قطعَتْها كرةٌ بعدَ ركلِها، حيثُ t الزمــنُ بالثانيةِ. ما أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ؟

لغةُ الرياضياتِ
يشيرُ مصطلحُ (النقطةُ الحرجةُ) إلى النقطةِ (x, y)، ويشــيرُ مصطلــحُ (القيمةُ الحرجةُ) إلــى الإحداثــيِّ y للنقطةِ الحرجةِ.

تُســمّى النقطةُ التي يكونُ عندها ميلُ منحنى كثيرِ الحدودِ صفرًا **النقطةَ الحرجةَ** (critical point).



في الشكلِ المجاورِ، A وَ B نقطتانِ حرجتانِ؛ لأنَّ ميلَ المنحنى عندَ كلٍّ منْهُما صفرٌ.

تُســمّى القيمةُ d في النقطةِ $A(c, d)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها موجبةٌ، وعنْ يمينِها ســالبةٌ، **القيمةَ العظمى المحليةَ** (local maximum)؛ لأنَّها أكبرُ مــنَ القيمِ المجاورةِ لها. وتُســمّى القيمةُ h في النقطةِ $B(e, h)$ التي إشارةُ ميلِ المنحنى عنْ يسارِها سالبةٌ، وعنْ يمينِها موجبةٌ، **القيمةَ الصغرى المحليةَ** (local minimum)؛ لأنَّها أصغرُ منَ القيمِ المجاورةِ لها.

أتعلَّمُ
يمكنُ اســتعمالُ برمجيةِ جيوجــبرا لإيجــادِ القيــمِ العظمــى والقيمِ الصغــرى، وذلكَ باختيارِ Extremum منْ شــريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ المنحنى، فتظهــرُ إحداثيــاتُ نقاطِ القيمِ القصوى على يسارِ الشاشةِ.

مثال 1

أســتعملُ المشــتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى للاقتــرانِ $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إنْ وُجِدَتْ).

الخطوةُ 1: أَجِدُ القيمَ الحرجةَ؛ أيْ قيمَ x التي ميلُ المنحنى عندها صفرٌ.

$f'(x) = 3x^2 - 12$	مشتقةُ الاقترانِ
$3x^2 - 12 = 0$	بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ
$3x^2 = 12$	بجمعِ 12 للطرفيْنِ
$x^2 = 4$	بقسمةِ الطرفيْنِ على 3
$x = \pm 2$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، توجــدُ نقطتانِ حرجتانِ لمنحنى الاقترانِ عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأنَّ مشــتقةَ الاقترانِ تساوي صفرًا عندَ هاتيْنِ النقطتيْنِ.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يجد القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية عن القيم العظمى والقيم الصغرى لكثيرات الحدود.

التعلم القبلي:

- تعرف القطع المكافئ، وإيجاد رأس القطع المكافئ.
- إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.
- إيجاد الميل باستعمال المشتقة.

1 التهيئة

- اكتــب علــى اللــوح أي اقتــران تربيعــي، مثــل: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
- اســأل الطلبة عن أقل قيمة ممكنة لـ $f(x)$ قد تنتج عند التعويض في الاقتران.
- اسأل الطلبة عن إحداثيات رأس القطع المكافئ.
- ارسم على اللوح التمثيل البياني للاقتران التربيعي، ثم اسألهم:
  » ما أقل قيمة للاقتران؟
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » هل توجد طريقــة جبرية لمعرفة أقل قيمة وأكبرها لـ $f(x)$؟

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما شكل المسار الذي تسلكه الكرة؟ قطع مكافئ.
  » ماذا يحدث لسرعة الكرة بعد ركلها؟ تتناقص سرعتها حتى تصل إلى الصفر، ثم تهبط الكرة إلى الأرض.
  » كيف يمكن معرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة هندسيًّا؟ رسم منحنى المسافة-الزمن، وملاحظة أقصى ارتفاع من الرسم.
  » هل توجد طريقة جبرية لمعرفة أقصى ارتفاع تصله الكرة؟ نعم.
  » كيف يمكن الاستفادة من درس الاشتقاق في معرفة أقصى ارتفاع؟ إيجاد سرعة الكرة بالاشتقاق، ثم جعل السرعة صفرًا لإيجاد الزمن وتعويضه بمعادلة المسافة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المشتقة (derivative)، والميل (slope)، والنقطة الحرجة (critical point)، والقيمة الصغرى (minimum)، والقيمة العظمى (maximum).

3 التدريس

- وظِّف الشرح الوارد قبل المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح معنى النقاط الحرجة، وكيفية إيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى.

مثال 1

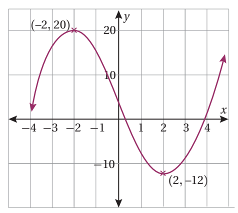
- استعمل المشتقة لإيجاد النقطتين اللتين يساوي عندهما الميل صفرًا، مُبيِّنًا للطلبة أنهما نقطتان حرجتان.
- اختبر إشارة الميل (المشتقة) حول كل نقطة، ثم صنِّفها إلى عظمى وصغرى باستعمال جدول الإشارات.
- استعمل التمثيل البياني لتصنيف النقاط الحرجة إلى عظمى وصغرى، بوصف ذلك طريقةً بديلةً عن الإشارات.

الخطوةُ 2: لتحديدِ أيُّ النقــاطِ الحرجةِ يوجدُ عندها قيمةٌ عظمـى أوْ قيمةٌ صغرى للاقترانِ، أختبرُ إشارةَ ميلِ المنحنى حولَ كلٍّ منْهُما، وذلكَ بتعويضِ بعضِ القيمِ القريبةِ منْها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

تتغيَّرُ إشــارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = -2$ منْ موجبةٍ إلى ســالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = -2$، هيَ $f(-2) = 20$، وتتغيَّرُ إشــارةُ ميلِ المنحنى حولَ $x = 2$ منْ سالبةٍ إلى موجبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ صغرى عندما $x = 2$، هيَ $f(2) = -12$.



طريقةٌ بديلةٌ: يُمكِنُ أيضًا تحديدُ إذا كانَ يوجدُ عندَ النقطةِ الحرجةِ قيمةٌ عظمـى أوْ قيمةٌ صغرى للاقتــرانِ بتمثيلِ منحنى الاقترانِ بيانيًّــا. فعندَ تمثيلِ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الشــكلِ المجاورِ، فــإنَّ النقطةَ $(-2, 20)$ تبدو أعلى مــنَ النقاطِ المجاورةِ لها علــى المنحنى، وبذلكَ تســاوي القيمةُ العظمى 20، وتبدو النقطــةُ $(2, -12)$ أخفضَ منَ النقاطِ المجاورةِ لها ، وبذلكَ تساوي القيمةُ الصغرى -12

أتحقق من فهمي انظر الهامش

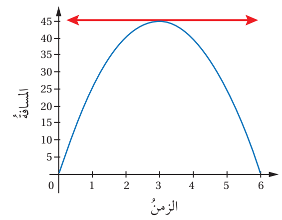
أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).

أفكِّر

لمــاذا لا توجــدُ قيــمٌ عظمــى وقيــمٌ صغرى للاقترانِ الثابتِ؟

لمــاذا لا توجــدُ قيــمٌ عظمــى وقيــمٌ صغرى للاقتــرانِ الخطِّيِّ الذي مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ؟

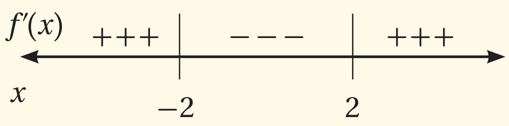
يُمثِّلُ الإحداثــيُّ الصاديُّ y للنقطــةِ التي يتغيَّرُ عندهــا اتجاهُ حركةِ الجســمِ مــنَ الصعودِ إلى الهبوطِ قيمةً عظمى لمنحنى المســافةِ – الزمنِ؛ لأنَّ مشــتقةَ المنحنى عندَ تلكَ النقطةِ تســاوي صفــرًا (المماسُّ أفقــيٌّ)؛ لذا يُمكِنُ اســتعمالُ المشــتقةِ لتحديدِ النقطةِ التي يبلغُ عندها الجسمُ أقصى ارتفاعٍ.



تنويع التعليم

يمكن اختبار إشــارة المشــتقة حول النقــاط الحرجة في المثال الأول باستعمال خط الأعداد وحساب المشتقة عند عدد واحد في كل قســم من الأقســام التي قُسِّم إليها خط الأعداد لتحديد إشارتها:

$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15,$
$f'(0) = 3(0)^2 - 12 = 0 - 12 = -12,$
$f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15$



تنبيه:

- في هذا الدرس، يتعيَّــن على الطلبة معرفة القيم العظمى والقيم الصغــرى من دون تصنيفها إلى محلية ومطلقة؛ فلا تذكر لهم ذلك.
- لا تذكر للطلبة النقطة التي لا تكون عندها مشتقة الاقتران موجــودة بوصفها نقطــةً حرجةً؛ لأن المطلوب منهم فقط في هــذه المرحلة هو كثير الحدود.

إرشادات للمعلم

بعد شــرح المثال الأول، أثبِــت للطلبة أنه لا توجد قيم عظمى وقيم صغــرى للاقتران الثابت والاقتران الخطي، وذلك بحل مثال على كلٍّ منهما على اللوح، مستعينًا برسم التمثيل البياني لكل اقتران.

التقويم التكويني:

- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِــدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخلط الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط بين مفهوم النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؛ لذا بيِّن لهم الفرق بينها، مُذكِّرًا إيّاهم أن كل نقــاط القيم القصوى هي نقاط حرجة، وأن كل نقطة حرجة ليســت نقطة قيمــة قصوى؛ إذ يجب أن تتغيَّر إشــارة المشتقة (الميل) حول النقطة الحرجة لتكون نقطة قيمة قصوى.
- قد يخطئ بعض الطلبة في اختبار الإشارة حول النقطة الحرجة عند تصنيفهــا إلى عظمى وصغرى بالتعويض فــي الاقتران؛ لذا صحِّح لهم ذلك، مُبيِّنًا أنه يجب التعويض في المشتقة التي تُمثِّل الميل.

إجابة أتحقق من فهمي 1 :

له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = 11$

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$

مثال إضافي

- جد القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران $f(x) = 3x^2 - x$ (إن وُجِدت) باستعمال المشتقة.

القيمة الصغرى للاقتران عندما $x = 0$ هي $f(0) = 0$، والقيمة العظمى له عندما $x = 2$ هي $f(2) = 4$

مثال 2: من الحياة

- وظِّف التمثيل البياني الوارد بعد المثال الأول من كتاب الطالب في توضيح أقصى ارتفاع قد يصل إليه الجسم قبل البدء بشرح المثال الثاني.
- ناقِش الطلبة في المثال الثاني؛ باشتقاق الاقتران، ومساواة المشتقة بالصفر، وإيجاد النقطة الحرجة، واختبار إشارة المشتقة حولها للتأكُّد أنها عظمى، ثم التعويض في الاقتران لإيجاد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

تنويع التعليم:

يمكن شرح المثال الثاني عن طريق رسم التمثيل البياني للاقتران، وإيجاد أكبر قيمة تُمثِّل أقصى ارتفاع تصله الكرة.

إرشادات للمعلم

استعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى بنقر أيقونة Extremum ، ونقر المنحنى بعد رسم منحنى الاقتران.

مثال 2: من الحياة

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاعَ كرةٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ ركلِها:

1 أَجِدُ سرعةَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ منْ ركلِها.

يُمثِّلُ الاقترانُ المُعطى $h(t)$ ارتفاعَ الكرةِ (المسافةُ الرأسيةُ). ومنَ المعلومِ أنَّ مشتقةَ اقترانِ المسافةِ تساوي اقترانَ السرعةِ. لإيجادِ سرعةِ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ، أُعوِّضُ $t = 3$ في $h'(t)$:

$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ اقترانُ الارتفاعِ

$h'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الارتفاعِ

$h'(3) = 25 - 10(3)$ بتعويضِ $t = 3$ في $h'(t)$

$= -5$ بالتبسيطِ

إذنْ، سرعةُ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ هيَ $-5\ \text{m/s}$

2 أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ.

يُمثِّلُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليْهِ الكرةُ قيمةً عظمى لاقترانِ الارتفاعِ $h(t)$.

لإيجادِ القيمةِ العظمى، أُحدِّدُ القيمَ التي تُحقِّقُ المعادلةَ $h'(t) = 0$:

$h'(t) = 25 - 10t$ مشتقةُ اقترانِ الارتفاعِ

$25 - 10t = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$25 = 10t$ بجمعِ $10t$ للطرفيْنِ

$t = 2.5$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 10

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $t = 2.5$

t	2.5
إشارةُ الميلِ	+ + + 0 − − −

إذنْ، تصلُ الكرةُ أقصى ارتفاعٍ عندما $t = 2.5\ \text{s}$ ، وقيمةُ هذا الارتفاعِ هيَ $h(2.5)$:

$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$ بتعويضِ $t = 2.5$ في $h(t)$

$= 32.25$ بالتبسيطِ

إذنْ، أقصى ارتفاعٍ تصلُهُ الكرةُ هوَ $32.25\ \text{m}$

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاعَ حجرٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ إلى الأعلى: انظر الهامش

a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ.

b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.

أتعلَّمُ

سرعةُ الكرةِ هيَ $5\ \text{m/s}$، والإشارةُ السالبةُ تدلُّ على أنَّ الكرةَ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها، وأخذَتْ تهبطُ نحوَ الأرضِ، وأنَّ ارتفاعَها عنِ الأرضِ في تناقصٍ.

أتعلَّمُ

بما أنَّ مشتقةَ اقترانِ المسافةِ هيَ اقترانُ السرعةِ، فإنَّ القيمَ التي تساوي عندها مشتقةُ اقترانِ المسافةِ صفرًا هيَ القيمُ التي تنعدمُ عندها السرعةُ.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $0\ \text{m/s}$ b) $20\ \text{m}$

مثال إضافي

يُمثِّل الاقتران $h(t) = 6 + 4t - t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتر بعد t ثانية من ركلها:

1 جد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من ركلها.

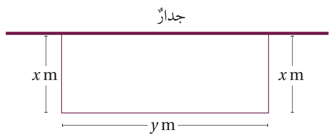
$2\ \text{m/s}$

2 جد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

$10\ \text{m}$

إذا مثَّلَ الاقترانُ $f(x)$ مِســاحةَ منطقةٍ ما، فإنَّ القيمةَ الكبرى للمِســاحةِ تساوي القيمةَ العظمى للاقترانِ، والقيمةَ الصغرى للمِساحةِ تساوي القيمةَ الصغرى للاقترانِ.

مثال 3: من الحياة



جدارٌ: لدى مُزارِعٍ 32 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً، طولُها y مترًا، وعرضُها x متــرًا، بجانبِ جدارٍ يكونُ أحدَ أضلاعِ هذهِ الحظيرةِ:

1 **أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = x(32-2x)$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.**

طولُ السياجِ 32 m؛ لذا، فإنَّ $x + y + x = 32$

إذنْ، طولُ الحظيرةِ $y = 32-2x$، ومِساحتُها $x(32-2x)$ مترًا مُربَّعًا.

2 **أَجِدُ $A'(x)$.**

$A(x) = x(32-2x)$ اقترانُ المِساحةِ

$A(x) = 32x-2x^2$ بتوزيعِ الضربِ على الطرحِ

$A'(x) = 32-4x$ مشتقةُ اقترانِ المِساحةِ

3 **أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحظيرةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.**

لإيجادِ قيمةِ x، أَحُلُّ المعادلةَ $A'(x) = 0$:

$32 - 4x = 0$ بمساواةِ المشتقةِ بالصفرِ

$32 = 4x$ بجمعِ $4x$ للطرفيْنِ

$x = 8$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 4

أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ.

أُعوِّضُ قيمةَ $x = 8$ بالاقترانِ الذي يُمثِّلُ مِساحةَ الحظيرةِ.

$A(8) = 8(32-2(8))$ بتعويضِ $x = 8$ في $A(x)$

$= 128$ بالتبسيطِ

إذنْ، أكبرُ مِساحةٍ للحظيرةِ $128\ m^2$، وهيَ تنتجُ عندما يكونُ عرضُ الحظيرةِ 8 m، وطولُها 16 m

أتذكَّرُ

تُسمّى قيمُ x التي تُحقِّقُ المعادلةَ $f'(x) = 0$ قيمًا حرجةً لمنحنى الاقترانِ $f(x)$.

تنبيهٌ

تتغيَّرُ إشارةُ ميلِ المنحنى منْ موجبةٍ إلى سالبةٍ منْ يسارِ إلى يمينِ $x = 8$؛ لذا توجدُ قيمةٌ عظمى عندما $x = 8$

x	8
إشارةُ الميلِ	+ + 0 − −

مثال 3: من الحياة

- أخبر الطلبة أنه توجد عِدَّة تطبيقات للقيم العظمى والقيم الصغرى، غير السرعة والتسارع، مثل إيجاد أكبر مساحة.
- بيِّن للطلبة أن الاقتران المعطى يُمثِّل المساحة عن طريق إيجاد العلاقة بين الأبعاد والمحيط.
- وضِّح للطلبة أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عند نقطة القيمة العظمى لاقتران المساحة.
- أكِّد للطلبة أنه يجب اختبار إشارة المشتقة حول النقطة الحرجة؛ لتصنيفها إلى عظمى وصغرى.

الإثراء

وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت عن أمثلة حياتية مشابهة للمثال الثالث.

مثال إضافي

لدى مُزارِع 36 m من السياج، أراد أن يُسيِّج به حظيرة مستطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا:

1 بيِّن أن الاقتران $A(x) = x(18-x)$ يُمثِّل مساحة الحظيرة.

$2x + 2y = 36 \Rightarrow y = 18-x$

$A(x) = x(18-x)$

2 جد $A'(x)$

$A(x) = 18x - x^2$

$A'(x) = 18 - 2x$

3 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

$x = 9\ m$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة السابعة عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

بنى عزُّ الدينِ أسامةُ قلعةَ عجلونَ أحدُ قادةِ صلاحِ الدينِ الأيوبـيِّ، وذلكَ عامَ 1184م/ 580هـ. تمتـازُ هـذهِ القلعـةُ بمتانةِ بنائِهـا، وموقعِها الاستراتيجيِّ المُطِلِّ.

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ، محيطُها 72 cm، ومِساحتُها $A\ cm^2$: انظر الهامش

a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x-x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الصورةِ.

b) أَجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للصورةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): (1–10) انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5) $f(x) = 18x^2 - x^4$

6) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7) $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8) $f(x) = 3x^2$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11) أَجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ. -9.8 m/s

12) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ السهمُ. 20.8 m

13) يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50-x)$ مِساحةَ مستطيلٍ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟
625 m^2

76

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $2x + 2y = 72 \Rightarrow y = 36-x$

$A(x) = x(36-x) = 36x-x^2$

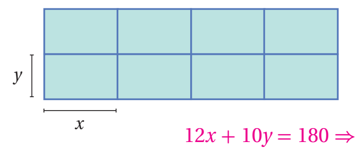
b) $A'(x) = 36 - 2x$

c) 18

d) 324 cm^2

14 للاقترانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاثُ نقاطٍ حرجةٍ. أَجِدُ إحداثياتِ هذهِ النقاطِ، مُصنِّفًا إيّاها إلى عظمى، وصغرى. $(0, 3)$: صغرى، $(0.5, 3.4375)$: عظمى، $(2, -5)$: صغرى.

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$. $k = -\frac{1}{6}$



لدى مُزارعٍ 180 m منَ الشِّباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها x مترًا، وعرضُها y مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:

16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ x وَ y هيَ $y = 18 - 1.2x$ $12x + 10y = 180 \Rightarrow y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.
$A(x) = 2(18 - 1.2x)(4x)$
$= 144x - 9.6x^2$

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 7.5$

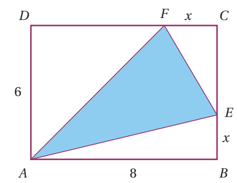
19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ. $540\ m^2$

20 **برهانٌ:** أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ. $f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$
لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة؛ لأن مميزها سالب.

مهارات التفكير العليا

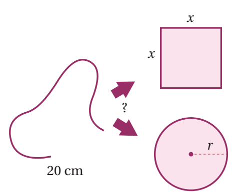
21 **تبريرٌ:** أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:



22 اعتمادًا على القياساتِ المعطاةِ في الشكلِ، أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ AFE. انظر ملحق الإجابات

23 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ AFE أصغرَ ما يُمكِنُ. $x = 4$



24 **تحدٍّ:** سلكٌ طولُهُ 20 cm، يُرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَيِ المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ.
انظر ملحق الإجابات

77

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر أصغر منه يساوي 45، جد العددين بحيث يكون ناتج ضرب مربع العدد الصغير في العدد الكبير أكبر ما يمكن.
  10,15

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (8–6) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة (print screen) للشاشة في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

6 الختام

- اطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
  » ما الفرق بين النقطة الحرجة والقيمة العظمى والقيمة الصغرى؟
  » ما الخطوات الواجب اتباعها لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لاقتران؟
- اطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (**مسألة اليوم**).

منهاجي
متعة التعليم الهادف

التقويم الختامي:

- راجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعــات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًــا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأســئلة (35–31) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 3x - 1$ عندَ النقطةِ $x = 5$ هوَ:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -1 d) 0

2 إذا كانَ $f(x) = x(2x + 1)$، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x + 1$

c) $2x^2 + x$ d) $4x + 1$

3 قيمــةُ x التــي عندهــا قيمــةٌ عظمــى للاقتــرانِ $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هيَ:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$

c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثَّلَ الاقترانُ $d(t) = t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ، فإنَّ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 1$ هيَ:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

5 أكبرُ قيمةٍ لسـرعةِ جســمٍ مُتحرِّكٍ يســيرُ بسرعةٍ تُعطى بالاقترانِ $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ، هيَ:

a) 3 b) 4

c) 8 d) 9

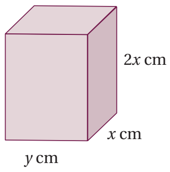
6 إذا كانَ $h(x) = 2x^2 + x$، فأجِـدُ $h'(x)$، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ $x(1 + h'(x)) = 2h(x)$. انظر ملحق الإجابات

7 إذا وقعَــتِ النقطــةُ $P(-1, c)$ على منحنــى الاقترانِ $f(x)= 5x^2 + 2$، فأجِدُ قيمةَ c، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أو سالبًا عندَ النقطةِ P. $c = 7$

الميل سالب.

8 أجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 4x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ x لها -1 انظر ملحق الإجابات

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِـنِ البناءِ، وتبلغُ مِسـاحةُ سطحِهِ الكليةُ $600\ cm^2$:



9 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x)= 200x- \frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ. انظرِ ملحق الإجابات

10 أسـتعملُ المشـتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = \sqrt{50}$

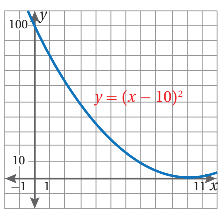
11 أجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ. $942.8\ cm^3$

12 يُمثِّلُ الاقتــرانُ $d(t) = t^2 + 1$ المســافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتيْنِ، ثمَّ أجِدُ الزمنَ t عندما تبلغُ السرعةُ $6\ m/s$

$4\ m/s$ $t = 3\ s$

أطلقَتْ سيّارةُ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتوجَّهَتْ إلى محطةِ الوَقودِ.

يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجـاورِ العلاقـةَ بينَ الزمنِ والمســافةِ المُتبقِّيةِ حتى وصلَتْ سُـمَيَّةُ إلى المحطةِ:



13 أجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ. $-16\ m/s$

14 أجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ. $0\ m/s$

78

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

15) $f(x) = 2\pi^3$ 16) $f(x) = x^8$ (15–20) انظر ملحق الإجابات

17) $f(x) = -3x^4$ 18) $f(x) = x$

19) $f(x) = 1-2x$ 20) $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

(21–24) انظر ملحق الإجابات

21) $f(x) = 17$ 22) $f(x) = 5x + 4$

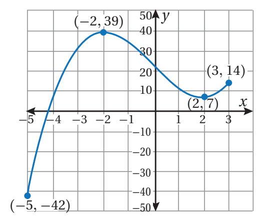
23) $f(x) = x^2-5x + 6$ 24) $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

25) تُمثِّلُ العلاقةُ $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟

$t = 3$ s

26) أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$ $k = 3$

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:

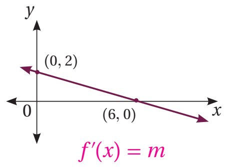


27) أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا. الفترتان: $(-\infty, -2)$، و $(2, \infty)$

28) أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا. $(-2, 2)$

29) أُحدِّدُ النقطةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا. النقطتان: $(-2, 39)$ ، و $(2, 7)$

30) إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأَجِدُ $f'(x)$.



$f'(x) = m$

ميل هذا المستقيم هو: $m = \frac{2-0}{0-6} = \frac{-1}{3}$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

31) جميعُ قيمِ x التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

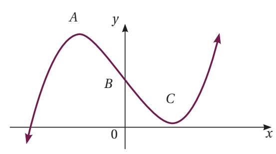
a) $-1, 0, 1$ b) $-1, 0$

c) $0, 1$ d) $-1, 1$

32) عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^9$ هوَ:

a) 1 b) 2 c) 8 d) 9

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3-12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ A، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ C، ويقطعُ محورَ y عندَ النقطةِ B:



33) أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 12$

34) أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ B. -12

35) أَجِدُ إحداثيَّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ A وَ C.

$A = (-2, 33)$

$B = (2, 1)$

79

تنبيه للسؤال 32 :

ورد خطيء مطبعي في كتابة اقتران هذا السؤال والاقتران الصحيح هو $f(x) = (x-3)^2$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفيــن: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبــار (TIMSS): كل أربع ســنوات. ويهدف هذا الاختبــار إلى قياس مســتوى تقدُّم الطلبة فــي التحصيل الدراســي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييــم جودة التعليم فــي الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رســم السياسة التربوية على المســتوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: فــي مجــالات القــراءة، والرياضيات، والعلــوم. وفــي ما يخــص الرياضيــات، فــإن المعرفة الرياضيــة – وفق هــذا البرنامج– يُعبَّر عنهــا بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفســيرها في أوضاع مختلفــة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واســتعمال المفاهيم والإجــراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقيــة وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعِينهــم على تقييم النجاحــات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

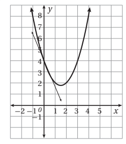
يتعيَّــن عليــك – عزيزي المعلِّــم– تشــجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأســئلة، والمشــاركة في الدراسات وبرامــج التقييم الدولية بكل جديــة، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

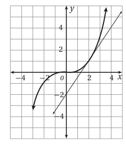
كتاب التمارين

الدرسُ 1
تقديرُ ميلِ المنحنى

الوحدةُ 6: المشتقاتُ



1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^2 - 3x + 4$ عندَ النقطةِ $A(0, 4)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A. -2.6، أو إجابة قريبة منها.



2 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = \frac{1}{8}x^3$ عندَ النقطةِ $A(2, 1)$. أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.
$m = \frac{3}{2}$

3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = x^3 - 3x + 1$ عندَ النقطةِ $(2, 3)$.
انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من 9

4 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $y = 4x - 3x^2$ عندَ النقطةِ $(2, -4)$.
انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من -8

5 يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 40t - 16t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ d المسافةُ المقطوعةُ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثواني. أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ اللحظيةَ بعدَ ثانيتيْنِ. انظر رسوم الطلبة، واقبل الإجابات القريبة من -24

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-2 \le x \le 2$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-7	-2	1	2	1

6 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

7 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. -2 (اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

8 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 2)$

أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ في الفترةِ $-1 \le x \le 3$ باستعمالِ جدولِ القيمِ المجاورِ:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. انظر ملحق الإجابات

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(2, 1)$. 2 (اقبل إجابات الطلبة القريبة من ذلك).

11 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟ $(1, 0)$

الدرسُ 2
الاشتقاقُ

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = -\frac{7}{3}$ $f'(x) = 0$

2 $f(x) = \frac{8}{5}$ $f'(x) = 0$

3 $f(x) = -6x$ $f'(x) = -6$

4 $f(x) = 3.2x$ $f'(x) = 3.2$

5 $f(x) = 3x^{41}$ $f'(x) = 123x^{40}$

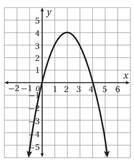
6 $f(x) = -x^{64}$ $f'(x) = -64x^{63}$

7 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$

8 $f(x) = 7x^3 + 6x^2 - x$ $f'(x) = 21x^2 + 12x - 1$

9 $f(x) = (x + 4)(x - 2)$ $f'(x) = 2x + 2$

10 $f(x) = (x - 5)^2$ $f'(x) = 2x - 10$



أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = 4x - x^2$ في الشكلِ المجاورِ للإجابةِ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

11 أَجِدُ $f'(x)$. $f'(x) = 4 - 2x$

12 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقطتَيْ تقاطعِهِ معَ محورِ x الميل عند $(0, 0)$ هو: 4، وعند $(4, 0)$ هو: -4

13 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ 1 $(1.5, 3.75)$

14 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يكونُ عندَها الميلُ -2 $(3, 3)$

أَجِدُ قيمةَ $f'(-1)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

15 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $f'(-1) = -5$

16 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ $f'(-1) = 5$

17 أَجِدُ النقطةَ التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x) = x^2 - 5x + 6$ يساوي -9 $(-2, 20)$

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 5x + 7$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

18 ميلُ المنحنى $f(x)$ عندَما $x = 2$ 9

19 قيمةُ x التي يكونُ عندَها ميلُ منحنى $f(x)$ يساوي 0 -2.5

20 تُمثِّلُ العلاقةُ $d(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثواني.
أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندَما $t = 2$ 7 m/s

21 إذا كانَ $f(x) = ax^n + b$، حيثُ a، وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ n عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ، فأَجِدُ $f'(x)$ $f'(x) = nax^{n-1}$

الدرسُ 3
القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى

الوحدةُ 6: المشتقاتُ

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ): (1–10) انظر ملحق الإجابات

1 $f(x) = 2$

2 $f(x) = -3$

3 $f(x) = 2x - 1$

4 $f(x) = 5x + 3$

5 $f(x) = x^2 + 2x + 1$

6 $f(x) = x^2 - 8x + 7$

7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

8 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

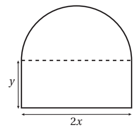
9 $f(x) = x^3(4 - x)$

10 $f(x) = (x + 1)(x - 2)$

11 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k، علمًا بأنَّ للاقترانِ $f(x) = kx^2 + x$ قيمةً حرجةً عندَما $x = 1$ $k = -0.5$

12 أَجِدُ العدديْنِ الموجبيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 150، وحاصلُ ضربِهِما أكبرُ ما يُمكِنُ. $x = 75, y = 75$

13 يُمثِّلُ الاقترانُ $A(x) = x(9 - x)$ مِساحةَ غرفةٍ مستطيلةٍ في مُخطَّطٍ أَعدَّتْهُ المهندسةُ شفاءُ، حيثُ x الطولُ بالمترِ.
أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للغرفةِ. $20.25\ m^2$



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ حديقةً محيطُها 80 m، وهيَ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ $2x$ مترًا، وعرضُهُ y مترًا، وبجانبِهِ نصفُ دائرةٍ:

انظر ملحق الإجابات

14 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 80x - (2 + \frac{\pi}{2})x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الحديقةِ.

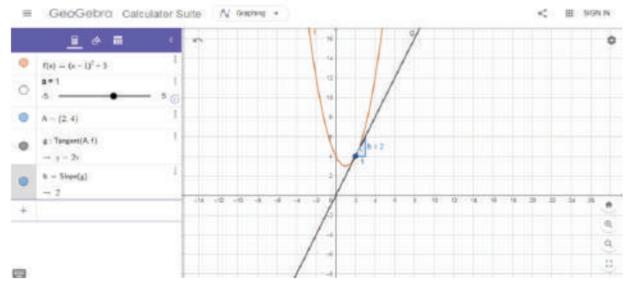
15 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الحديقةِ أكبرَ ما يُمكِنُ. $x = 11.202$

16 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للحديقةِ. $448.08\ m^2$

17 أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(-4, -3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

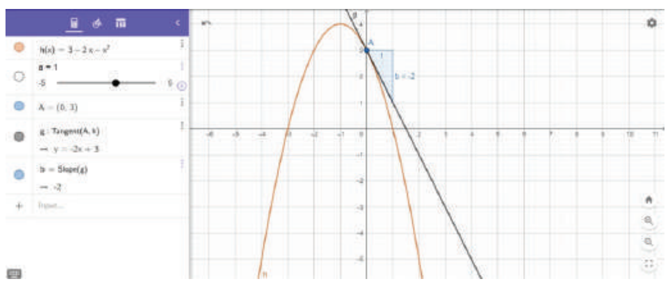
معمل برمجية جيوجبرا:

(1



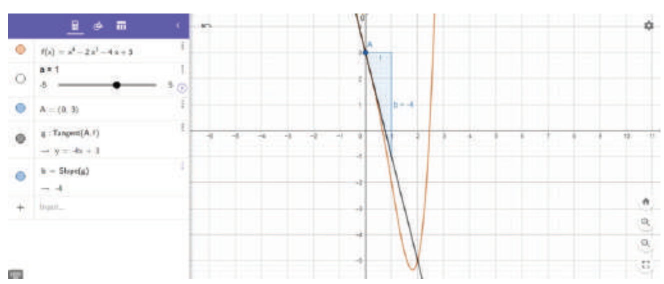
يكون الميل سالبًا لكل $x < 1$، وصفرًا عندما $x = 1$، وموجبًا لكل $x > 1$

(2



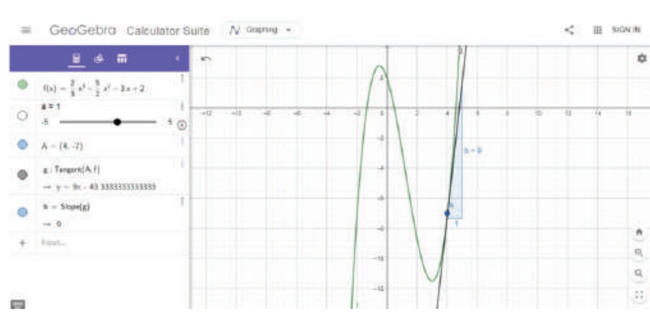
يكون الميل موجبًا لكل $x < -1$، وصفرًا عندما $x = -1$، وسالبًا لكل $x > -1$

(3



يكون الميل سالبًا لكل $x < 1.81$، وصفرًا عندما $x = 1.81$، وموجبًا لكل $x > 1.81$

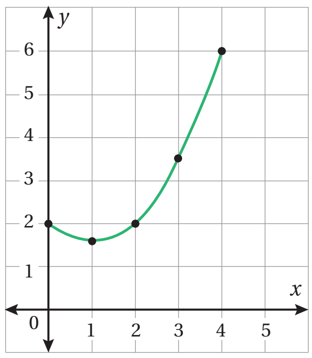
(4



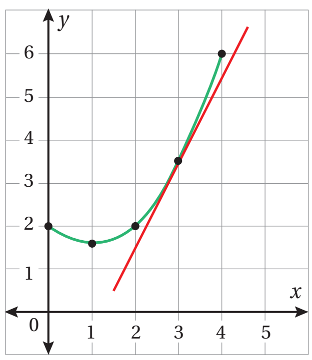
يكون الميل سالبًا لكل $-0.5 < x < 3$، وصفرًا عندما $x = -0.5$، و $x = 3$، وموجبًا لكل $x > 3$، ولكل $x < -0.5$

الدرس 1:

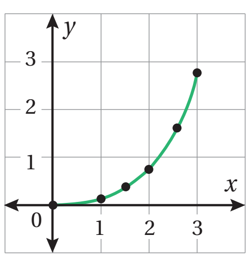
(4



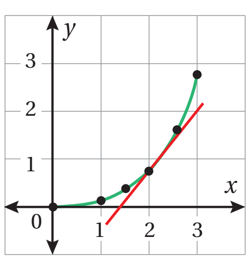
(5



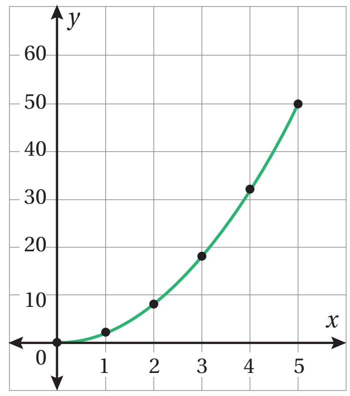
(8



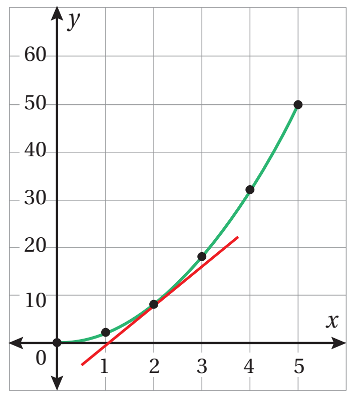
(9



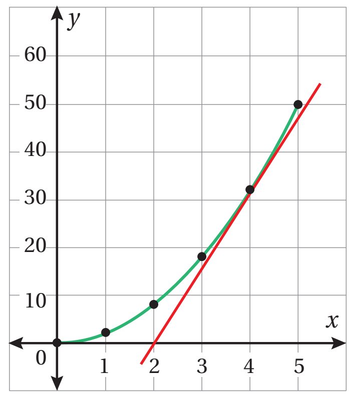
(17



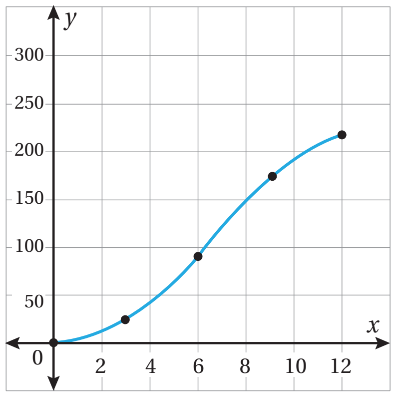
(18



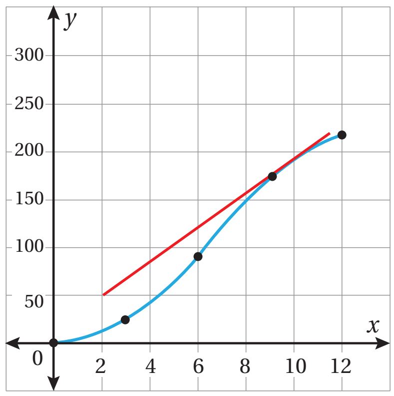
(20



(21



(22 أي إجابة قريبة من 18.75 m/s



(23 بتعويض $(3, 26.19)$ في المعادلة ينتج: $9a+ 81b = 26.19$

وبتعويض $(6, 95.04)$ في المعادلة ينتج: $36a+ 1296b=95.04$

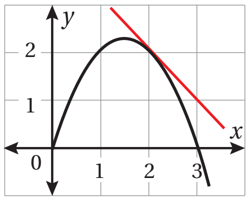
وبضرب المعادلة الأولى في (-4) وجمعها مع الثانية ينتج:

$972b = -9.72$ ، إذن: $b = -0.01$

وبتعويض قيمة b في المعادلة الأولى نجد أن: $a = 2.82$

(24 ارسم المنحنى ومماسًّا عند $(2, 2)$، مُقدِّرًا ميله.

(اقبل من الطلبة أي إجابة قريبة من -1).



25) انظر رسوم الطلبة.

يتقاطع المنحنى مع المحور x عند $(8, 0)$ و $(-2, 0)$، وميله عند $(8, 0)$ هو 10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية حادة مع المحور x، وميله عند $(-2, 0)$ هو -10 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x يتقاطع المنحنى مع المحور y عند $(0, -16)$، وميله عندها هو -6 (اقبل إجابات الطلبة القريبة)، حيث يصنع المماس عندها زاوية منفرجة مع المحور x

26) انظر رسوم الطلبة.

اقبل إجابات الطلبة التي تُمثِّل اقترانًا من الدرجة الثانية ومماسين عند نقطتين متقابلتين متعاكستين حول محور تماثل المنحنى.

سيختار معظم الطلبة الاقتران $f(x) = x^2$ لسهولته؛ لذا حفِّزهم إلى ذكر أمثلة غيره.

الدرس 2:

29) $f'(x) = x^2 - 5$

$x^2 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

وبتعويض قيم x في الاقتران، نجد الإحداثي y

$f(-3)= 10, f(3) = -2$

إذن، النقطتان، هما: $(-3, 10), (3, -2)$

30) $y' = 3ax^2 + 2bx$

النقطة $(2, -3)$ واقعة على المنحنى، فتُحقِّق معادلته، إذن:

$8a + 4b + 5 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -8$

والميل عندئذٍ هو صفر؛ أي إن:

$8a(2)^2 + 4b(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0$

بحل هاتين المعادلتين، نجد أن:

$a = 2$ و $b = -6$

31) السرعة هي: $h'(t) = -9.8t + 147$

وعندما تكون السرعة $98\ \text{m/s}$، فإن:

$-9.8t + 147 = 98 \Rightarrow t = 5$

ارتفاع القذيفة عن الأرض عندما $t = 5$ هو: $h(5)$

$h(5) = -4.9(5)^2 + 147(5) = 612.5\ \text{m}$

الدرس 3:

1) $(2, -1)$: صغرى

2) $(-3, -12)$: صغرى

3) $(2.5, 7.25)$: عظمى

4) $(-3, 40.5)$: عظمى

$(2, -22)$: صغرى

5) $(0, 0)$: صغرى

$(-3, 81)$: عظمى

$(3, 81)$: عظمى

6) $(-1, 8)$: عظمى

$(1, 0)$: صغرى

7) $(-2, 12)$: عظمى

$(2, -20)$: صغرى

8) $(0, 0)$: صغرى

9) $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 5.09)$: عظمى

$(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2.9)$: صغرى

10) $(-2, 66)$: عظمى

$(\frac{4}{3}, 47.48)$: صغرى

21) $f'(x) = 2x + a$

$f'(1) = 2x + a = 0 \Rightarrow a = -2$

$f'(1) = 1 + -2 + b = 3 \Rightarrow b = 4$

عند النقطة $(1, 3)$ قيمة صغرى؛ لأن إشارة المشتقة تتغيَّر من سالبة إلى موجبة من يسار $x = 1$ إلى يمينه، حيث إن $f'(0) = -2, f'(1) = 2$

22) $H(x)=48-\left[\left(\frac{1}{2}(x)(6-x)\right)+\left(\frac{1}{2}(8)(x)\right)+\left(\frac{1}{2}(6)(8-x)\right)\right]$

24) $A_1 = x^2$ مساحة المربع.

$d_1 = 4x$ محيط المربع.

$A_2 = \pi r^2$ مساحة الدائرة.

$d_2 = 2\pi r$ محيط الدائرة.

$$4x + 2\pi r = 20 \Rightarrow x = \frac{20-2\pi r}{4}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{20-2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\right) r^2 - 5\pi r + 25$$

$$A' = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi$$

$$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi = 0 \Rightarrow r \approx 1.4$$

$$\Rightarrow x \approx 2.8$$

موقع القص يكون تقريبًا على بُعْد 11.2 cm من طرف السلك. يُكوِّن هذا الجزء مربعًا، ويُكوِّن الجزء الآخر دائرة محيطها 8.8 cm

اختبار نهاية الوحدة:

6) $h'(x) = 4x + 1$

$x(1+ 4x + 1) = 4x^2 + 2x = 2h(x)$

8) $f'(x) = 12x^2 \Rightarrow f'(-1) = 12$

$m = 12 \qquad f(-1) = -2$

معادلة المماس هي:

$y + 2 = 12(x + 1) \Rightarrow y = 12x + 10$

9) $2(xy) + 2(2xy) + 2(2x^2) = 600 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - \frac{2}{3}x$

$$V(x) = \left(\frac{100}{x} - \frac{2}{3}x\right)(x)(2x)$$

$$= 200x - \frac{4}{3}x^3$$

15) $f'(x) = 0$

16) $f'(x) = 8x^7$

17) $f'(x) = -12x^3$

18) $f'(x) = 1$

19) $f'(x) = -2$

20) $f'(x) = -10x + 3x^2$

21) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

22) لا توجد قيم عظمى وقيم صغرى.

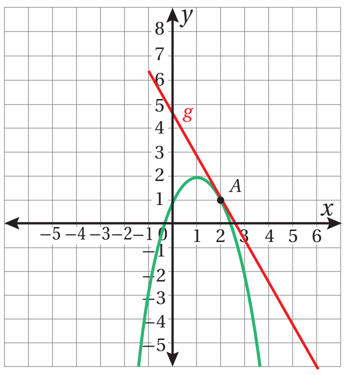
23) $(2.5, -0.25)$: صغرى

24) $(\frac{1}{3}, 1.296)$: عظمى

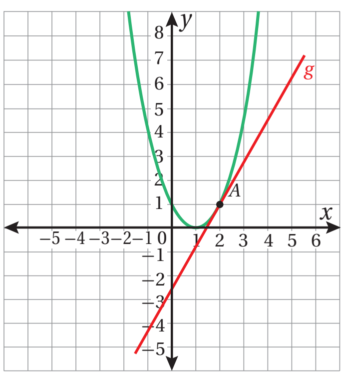
$(1, 1)$: صغرى

كتاب التمارين – الدرس 1:

6)



9)



كتاب التمارين – الدرس 3:

1) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

2) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

3) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

4) لا توجد قيم صغرى وقيم عظمى.

5) له قيمة صغرى عندما $x = -1$، هي: 0

6) له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -9

7) له قيمة عظمى عندما $x = 0$، هي: 5

له قيمة صغرى عندما $x = 4$، هي: -27

8) له قيمة عظمى عندما $x = -5$، هي: 100

له قيمة صغرى عندما $x = 1$، هي: -8

9) له قيمة عظمى عندما $x = 3$، هي: 27

10) له قيمة صغرى عندما $x = 0.5$، هي: -2.25

14) $x + 2y + \pi x = 80 \Rightarrow y = 40 - \frac{\pi}{2}x - x$

$A(x) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 2x\,(40 - \frac{\pi}{2}x - x) + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 80x - \pi x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 80x - \frac{\pi}{2}x^2 - 2x^2 = 80x - (\frac{\pi}{2} + 2)\,x^2$

17) $a = 2, b = 1$

صغرى؛ لأن إشـــارة المشتقة تتغيَّر من ســـالبة قبل -4 إلى موجبة بعدها، حيث:

$f'(-5) = -0.2, f'(-2) = 1$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: المتجهات في المستوى الإحداثي.	• يتعرف المتجه، ويكتبه بالصورة الإحداثية، ويمثله على المستوى الإحداثي. • يجد مقدار المتجه، ويحدد اتجاهه. • يجد السرعة المتجهة.	المتجه، المركبة الأفقية، المركبة الرأسية، الصورة الإحداثية، الوضع القياسي، السرعة المتجهة.	• برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: جمع المتجهات وطرحها	• يميز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، ويعبر عنها بالرموز. • يحل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا. • يتعرف المتجه الصفري. • يجد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.	المتجهان المتساويان، المتجهان المتوازيان، معكوس المتجه، المحصلة.	• برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: الضرب القياسي.	• يجد ناتج الضرب القياسي لمتجهين. • يتعرف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه. • يجد قياس الزاوية بين متجهين. • يحسب مقدار الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.	الضرب القياسي، الشغل.	• برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • لوح المستوى الإحداثي، أو ورق رسم بياني.	3
عرض نتائج المشروع				1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				13

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الوحدةُ 7

نظرة عامة على الوحدة:

تعلم الطلبة المتجهات في الفيزياء، ومثلوها بصورة هندسية. وسيتعلمون في هذه الوحدة كيفية كتابة المتجه بالصورة الإحداثية، وتمثيله على المستوى الإحداثي، وإيجاد مقداره واتجاهه، وسيتعلمون أيضًا جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي، ويفسرون دلالة ذلك في مسائل حياتية. وكذلك سيتعلمون الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد الزاوية بين متجهين، وحساب الشغل، وحل مسائل حياتية عنها.

الوحدةُ 7

المتجهاتُ

Vectors

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

لفهمِ تأثيرِ قوةٍ ما في جسمٍ، يجبُ تحديدُ كلٍّ منْ مقدارِ هذهِ القوةِ، واتجاهِها، في ما يُعرَفُ بالمتجهِ. في هذهِ الوحدةِ، سأتعلَّمُ كثيرًا عنِ المتجهاتِ وتطبيقاتِها الحياتيةِ، منْ مثلِ تحديدِ تأثيرِ الرياحِ في حركةِ السفنِ الشراعيةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلَّ المعادلاتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَيْنِ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.
- ✓ إيجادَ إحداثيَّيْ نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
- ✓ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ضمنَ الدورةِ الكاملةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ المتجهاتِ، وكيفيةَ تمثيلِها على المستوى الإحداثيِّ.
- ◄ جمعَ المتجهاتِ، وطرحَها، وضربَها القياسيَّ.
- ◄ التفسيرَ الهندسيَّ للمتجهاتِ، وبعضَ التطبيقاتِ الحياتيةِ عليْها.
- ◄ إيجادَ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

80

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- حل معادلات خطية بمتغيرين.
- حل معادلات تربيعية بمتغير واحد.
- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- إيجاد إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة.

الصف العاشر

- إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.
- تعرف المتجهات، وتمثيلها على المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- إيجاد محصلة متجهين أو أكثر.
- حل مسائل حياتية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- استعمال الصورة القياسية للمتجهات $(xi + yj, xi + yj + zk)$ لجمع متجهين، أو طرحهما، أو ضرب متجه في ثابت، وتفسير هذه العمليات هندسيًّا.
- استعمال متجه الوحدة، ومتجه الموقع، ومتجه الإزاحة.
- كتابة معادلة مستقيم عُلِم فيها متجه الموقع لنقطة عليه، واتجاه المتجه، أو عُلِم فيها متجها الموقع لنقطتين على المستقيم.
- تحديد إذا كان المستقيمان متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، وإيجاد نقاط التقاطع بينهما (إن وجدت).
- استعمال الضرب القياسي في مسائل تحوي مستقيمات ونقاطًا.

مشروعُ الوحدةِ

المتجهاتُ في الجغرافيا

فكرةُ المشروعِ أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ باكتشافِ استعمالاتٍ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما سنتعلَّمُهُ في هذهِ الوحدةِ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ إنترنت، برمجيةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ في شبكةِ الإنترنتْ عنْ صورةٍ لخريطةِ الوطنِ العربيِّ أوِ الشرقِ الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ بجهازِ الحاسوبِ.
2. أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:
   - أنقرُ أيقونةَ Image منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظْتُها.
   - أُظهِرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاسوبِ، ثمَّ اختيارِ (الإعداداتُ) Settings، ومنْها أختارُ Background Image
   - أجِدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ منْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ نقرِ موقعِ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ.
3. أرسمُ متجهًا بينَ أيِّ عاصمتيْنِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ منْ شريطِ الأدواتِ.
4. أجِدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمّانَ وأربعِ عواصمَ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أُقارِنُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّمًا النتائجَ في جدولٍ.
5. أجِدُ اتجاهَ أربعِ عواصمَ عربيةٍ بالنسبةِ إلى مدينةِ عمّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجريْتُها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفْتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، ومقترحٌ لتوسعةِ المشروعِ.

81

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	توثيق أفراد المجموعة مصادر المعلومات التي تعرَّفوها.			
2	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
3	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
4	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			
5	عرض معلومة جديدة تعلَّمها أفراد المجموعة في أثناء البحث والعمل في المشروع.			
6	وجود مقترح مناسب لتوسعة المشروع.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا.

هدف المشـروع: ربط الرياضيات بالحياة، وتنمية مهارات التفكير والتجربة العلمية في أذهان الطلبة، باكتشاف استعمالات المتجهات في الخرائط الجغرافية.

خطوات تنفيذ المشروع

- عـرِّف الطلبة بالمشـروع وأهميته في تعلـم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعـات، يتكوَّن كلٌّ منها من (7–5) طلبـة، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اذكر للطلبـة المواد والأدوات اللازمة لتنفيذ المشـروع، مثل: جهـاز الحاسـوب، وبرمجية جيوجبـرا، والورق المقوى، والمقص، والمسـطرة، فضلًا عـن بيان عناصر المُنتَج النهائي المطلوب منهم، مُؤكِّـدًا لهم أهمية توثيق خطوات تنفيذ المشـروع باسـتمرار، وتعزيـزه بالصور المناسبة. وكذلك ذكِّرهم بإمكانية استعمال خاصية طباعة الشاشة (print screen) الموجودة على لوحة المفاتيح في جهاز الحاسـوب؛ لتوثيق خطوات التنفيـذ المُتعلِّقة بجهاز الحاسوب وبرمجية جيوجبرا.
- وضِّح للطلبة معايير تقييم أعمالهم، مستعينًا بسُلَّم التقدير.
- بيِّـن للطلبة الأوقـات التي يمكـن فيها تنفيـذ خطوات المشــروع. فمثلًا، تُنفَّذ الخطـوات (3–1) بعد الانتهاء من الـدرس الأول، والخطـوة (4) بعد الـدرس الثاني، والخطوة (5) بعد الدرس الثالث.
- عند انتهاء الوحدة، حدِّد وقتًا مناسـبًا لعرض النتائج التي توصَّل إليها الطلبة، وناقِشهم فيها.

عرض النتائج

- اطلـب إلى أفراد كل مجموعة المشـاركة في عرض جزء من نتائج المشــروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهـارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهـم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- الفت انتباه الطلبة إلى ضرورة اسـتعمال التكنولوجيا في عرض نتائج المشـروع، وإعداد عـرض تقديمي يحوي صورًا لمراحل التنفيذ.
- وضِّح للطلبة أهمية اشـتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليهـا، والمعلومات الجديدة التـي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشــروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم التالية.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة، مثل: ايجاد المسافة بين نقطتين، واستعمال النسب المثلثية ونظرية فيثاغورس في إيجاد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا في مثلث قائم الزاوية.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- اختر سؤالًا واجه الطلبة صعوبة في حلـه، ثم اكتب على اللوح إحـدى إجابـات الطلبة غيـر الصحيحة – من دون ذكر اسم الطالب–، وأدِرْ نقاشًا حوله.

إجابات (أستعد لدراسة الوحدة):

6) $x \approx 13.95$

$AB \approx 11.43$

$\cos 55^\circ = \dfrac{8}{13.95} \approx 0.573$

$\tan 55^\circ = \dfrac{11.43}{8} \approx 1.429$

7) $x \approx 37^\circ$

$AB = 8$

$\cos 53^\circ = \dfrac{6}{10} = 0.6$

$\tan 53^\circ = \dfrac{8}{6} = 1.33$

8) $x \approx 1.81$

$AB = 6.76$

$\cos 75^\circ = \dfrac{1.81}{7} \approx 0.259$

$\tan 75^\circ = \dfrac{6.76}{1.81} \approx 3.734$

9) $x \approx 19^\circ$

$AB = 8.98$

$\cos 71^\circ = \dfrac{3.1}{9.5} \approx 0.326$

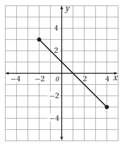
$\tan 71^\circ = \dfrac{8.98}{3.1} \approx 2.897$

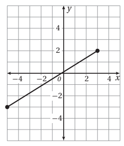
الوحدةُ 7: المتجهاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ.

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1  $6\sqrt{2}$

2  $\sqrt{89}$

3 $(-5, -7), (2, -3)$ $\sqrt{65}$

4 $(8, 0), (-4, -5)$ 13

5 $(-4, 7), (-3, 6)$ $\sqrt{2}$

مثالٌ: أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتيْنِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$.

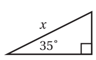
قانونُ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
بتعويضِ إحداثياتِ النقطتيْنِ	$= \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (-5 - (-8))^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

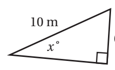
إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتيْنِ: $(-2, -8)$، وَ $(-6, -5)$ هيَ 5 وحداتِ طولٍ.

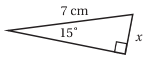
استعمالُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعٍ في مثلثٍ.

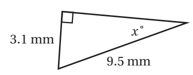
أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ قيمةِ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ الحادةِ الكبرى:

6–9) انظر الهامش

6 

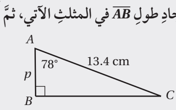
7 

8 

9 

الوحدةُ 7: المتجهاتُ — أستعدُّ لدراسةِ الوحدةِ

مثالٌ: أستعملُ النسبةَ المثلثيةَ المناسبةَ لإيجادِ طولِ $\overline{AB}$ في المثلثِ الآتي، ثمَّ أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ A:



الضلعُ المجهولُ $\overline{AB}$ مجاورٌ للزاويةِ A؛ لذا أستعملُ نسبةَ جيبِ التمامِ للزاويةِ A:

تعريفُ نسبةِ جيبِ التمامِ	$\cos A = \dfrac{\text{المجاورَ}}{\text{الوترِ}}$
بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ	$\cos 78^\circ = \dfrac{p}{13.4}$
بتعويضِ قيمةِ $\cos 78^\circ$	$0.21 = \dfrac{p}{13.4}$
بالضربِ التبادليِّ	$p = (0.21)\,(13.4)$
بالتبسيطِ	$p = 2.81$

لحسابِ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A، يجبُ معرفةُ طولِ الضلعِ المقابلِ لها. وبما أنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ، فإنَّني أستعملُ نظريةَ فيثاغورس:

نظريةُ فيثاغورس	$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$
بالتعويضِ	$(13.4)^2 = (BC)^2 + (2.81)^2$
بالتبسيطِ	$179.56 = (BC)^2 + 7.90$
بطرحِ 7.90	$179.56 - 7.90 = BC^2$
بالتبسيطِ	$171.66 = BC^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$13.10 = BC$

أستطيعُ الآنَ حسابَ نسبتَي الجيبِ والظلِّ للزاويةِ A:

تعريفُ نسبةِ الجيبِ	$\sin A = \dfrac{\text{المقابلَ}}{\text{الوترِ}}$
بالتعويضِ	$\sin 78^\circ = \dfrac{13.10}{13.4}$
بالتبسيطِ	$\sin 78^\circ \approx 0.98$
تعريفُ نسبةِ الظلِّ	$\tan A = \dfrac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}}$
بتعويضِ القياساتِ المعلومةِ	$\tan 78^\circ = \dfrac{13.10}{2.79}$
بالتبسيطِ	$\tan 78^\circ \approx 4.7$

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يتعرف المتجه، ويكتبه بالصورة الإحداثية، ويمثله على المستوى الإحداثي.
- يجد مقدار المتجه، ويحدد اتجاهه.
- يجد السرعة المتجهة.

التعلم القبلي:

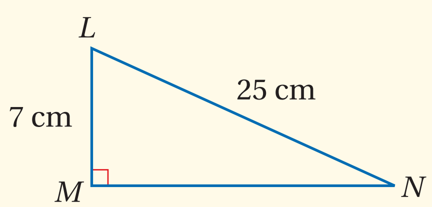
- إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي.
- حل مثلث قائم الزاوية، وإيجاد النسب المثلثية لزواياه.

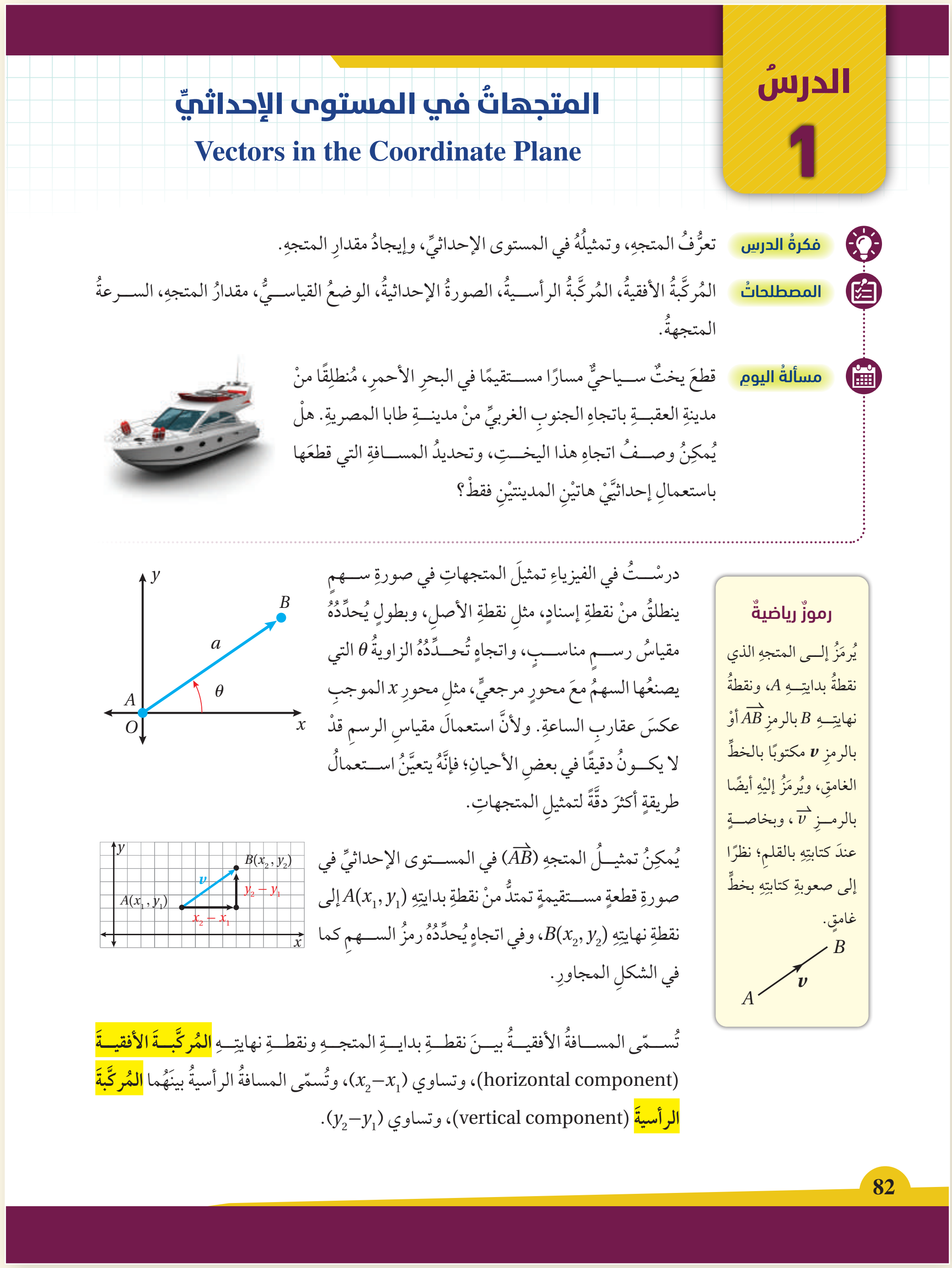
1 التهيئة

- راجع الطلبة في نظرية فيثاغورس، وقانون المسافة بين نقطتين، عن طريق حل السؤالين الآتيين:

» عيّن النقاط $A(1, -2), B(4, 2), C(-2, 1)$ على المستوى الإحداثي، ثم جد طول كلٍّ من $\overline{AB}$ ، و $\overline{AC}$.

» أجد MN في المثلث القائم LMN المجاور، وقياس كلٍّ من الزاويتين MNL، و MLN .





الدرسُ 1

المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ
Vectors in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ المتجهِ، وتمثيلُهُ في المستوى الإحداثيِّ، وإيجادُ مقدارِ المتجهِ.

المصطلحاتُ المُركَّبةُ الأفقيةُ، المُركَّبةُ الرأسيةُ، الصورةُ الإحداثيةُ، الوضعُ القياسيُّ، مقدارُ المتجهِ، السرعةُ المتجهةُ.

مسألةُ اليومِ قطعَ يختٌ سياحيٌّ مسارًا مستقيمًا في البحرِ الأحمرِ، مُنطلِقًا منْ مدينةِ العقبةِ باتجاهِ الجنوبِ الغربيِّ منْ مدينةِ طابا المصريةِ. هلْ يُمكِنُ وصفُ اتجاهِ هذا اليختِ، وتحديدُ المسافةِ التي قطعَها باستعمالِ إحداثيَّيْ هاتيْنِ المدينتيْنِ فقطْ؟

رموزٌ رياضيةٌ

يُرمَزُ إلى المتجهِ الذي نقطةُ بدايتِهِ A، ونقطةُ نهايتِهِ B بالرمزِ $\overrightarrow{AB}$ أوْ بالرمزِ $\boldsymbol{v}$ مكتوبًا بالخطِّ الغامقِ، ويُرمَزُ إليْهِ أيضًا بالرمزِ $\overrightarrow{v}$ ، وبخاصةٍ عندَ كتابتِهِ بالقلمِ؛ نظرًا إلى صعوبةِ كتابتِهِ بخطٍّ غامقٍ.

درسْتُ في الفيزياءِ تمثيلَ المتجهاتِ في صورةِ سهمٍ ينطلقُ منْ نقطةِ إسنادٍ، مثلِ نقطةِ الأصلِ، وبطولٍ يُحدِّدُهُ مقياسُ رسمٍ مناسبٍ، واتجاهٍ تُحدِّدُهُ الزاويةُ θ التي يصنعُها السهمُ معَ محورٍ مرجعيٍّ، مثلِ محورِ x الموجبِ عكسَ عقاربِ الساعةِ. ولأنَّ استعمالَ مقياسِ الرسمِ قدْ لا يكونُ دقيقًا في بعضِ الأحيانِ؛ فإنَّهُ يتعيَّنُ استعمالُ طريقةٍ أكثرَ دقَّةً لتمثيلِ المتجهاتِ.

يُمكِنُ تمثيلُ المتجهِ $(\overrightarrow{AB})$ في المستوى الإحداثيِّ في صورةِ قطعةٍ مستقيمةٍ تمتدُّ منْ نقطةِ بدايتِهِ $A(x_1, y_1)$ إلى نقطةِ نهايتِهِ $B(x_2, y_2)$، وفي اتجاهٍ يُحدِّدُهُ رمزُ السهمِ كما في الشكلِ المجاورِ.

تُسمّى المسافةُ الأفقيةُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ ونقطةِ نهايتِهِ **المُركَّبةَ الأفقيةَ** (horizontal component)، وتساوي (x_2-x_1)، وتُسمّى المسافةُ الرأسيةُ بينَهُما **المُركَّبةَ الرأسيةَ** (vertical component)، وتساوي (y_2-y_1).

82

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة الى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » مـا الفرق بين القارب واليخت؟ اليخت مثل القارب، لكنه أكبر حجمًا، ومُزوَّد بمحرك لدفعه إلى الأمام، وفيه كثير من وسائل الراحة والاستجمام.
  » كيف يمكن حسـاب المسـافة بين مدينتي العقبة وطابا؟ إذا عُرِفت إحداثيات المدينتين فإنه يمكن إيجاد المسـافة باسـتعمال نظرية فيثاغورس، أو قانون المسـافة بين نقطتين، وكذلك يمكن إيجادها بقياس المسافة بينهما على خريطة باستعمال مقياس الرسم.
  » كيف يمكن تمثيل مسـار اليخت على الخريطة؟ برسم قطعة مستقيمة من العقبة إلى طابا، ثم وضع إشارة تدل على بدء الرحلة من العقبة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلـك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخـر لديهم. بعد ذلك وضِّح لهم أنهم سـيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسـألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المسـتخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على اسـتعمالها، مثل: المتجه (vector)، والمركبة الأفقيـة (horizontal component)، والمركبة الرأسية (vertical component)، والصورة الإحداثية (coordinate form)، والوضع القياسي (standard position)، والسرعة المتجهة (velocity).

3 التدريس

مثال 1

- وضِّح الفرق بين الكميات القياسية (العددية) التي تُحدَّد بعدد، مثل: الطول، والمساحة، والحجم، والكميات المتجهة التي تُحدَّد بعدد واتجاه، مثل: القوة، والسرعة.
- اسـتعمل فقرة الشـرح الوارد ذكرها في بداية الدرس لتوضيح الفرق بين تمثيل المتجه هندسيًّا والتعبير عنه جبريًّا بالصورة الإحداثية.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيف يُكتَب المتجه بالصورة الإحداثية إذا عُلِمت نقطتا بدايته ونهايته.

إرشـاد: حفِّز الطلبة على إحضار دفاتر الرسم البياني، أو دفاتر ورق المربعات عند البدء بدراسة هذه الوحدة.

ملاحظات المعلم

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المفاهيم العابرة:

أكِّـد للطلبة أهميـة المفاهيم العابـرة للمواد حيثما ورد ذكرهـا في كتاب الطالب، أو كتاب التمارين والأنشـطة العملية. ففي بند (مسألة اليوم)، عزِّز الوعـي بالقضايـا البيئية)أهمية البحار والمحيطات) عن طريق حوار تديره مع الطلبة عن أهميـة البحار والمحيطات للطقس والمخزون الغذائي والمائي، وتأثيرها في حياة الإنسان والكائنات الحية، ثم اسألهم:

» ما فائدة البحار والمحيطات؟
» ما البحار التي يقع عليها وطننا الأردن؟
» كيف نحافظ على البحار والمحيطات؟

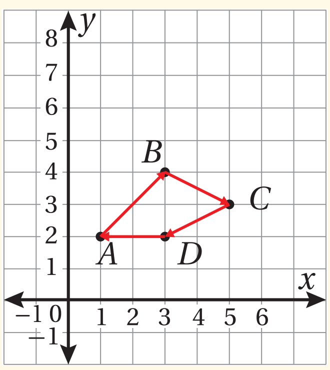
أخطاء مفاهيمية:

- قد لا يُميِّز بعض الطلبة بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ عند كتابة المتجه بالصورة الإحداثية؛ لذا الفت انتباههم إلى طرح إحداثي نقطة البداية من الإحداثي المناظر له في نقطة النهاية.
- قد يُبدِّل بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط موقعي المركبتين الأفقية والرأسية؛ لذا وضِّح لهم الطريقة الصحيحة لكتابة الصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- اعتمادًا على الشكل المجاور، اكتب كلًّا من المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:

1) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 2\rangle$
2) $\overrightarrow{BC}$ $\langle 2, -1\rangle$
3) $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, 1\rangle$
4) $\overrightarrow{DA}$ $\langle -2, 0\rangle$



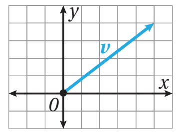
يُمكِنُ كتابةُ المتجهِ **بالصورةِ الإحداثيةِ** (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبتيهِ الأفقيةِ والرأسيةِ (العموديةِ) كما يأتي:

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1\rangle = \langle a, b\rangle$$

رموزٌ رياضيةٌ

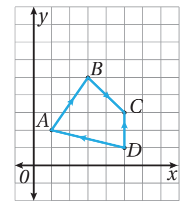
يُستعمَلُ الرمزُ $\langle a, b\rangle$ أوْ $\binom{a}{b}$ لكتابةِ المتجهِ بصورتِهِ الإحداثيةِ.

إذا كانَتْ نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ نقطةَ الأصلِ 0، كما في الشكلِ المجاورِ، فإنَّهُ يكونُ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position).



مثال 1

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



1) $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $A(1, 2) = (x_1, y_1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

$$x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$
$$y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$$

إذنْ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3\rangle$

طريقةٌ بديلةٌ

للانتقالِ منَ النقطةِ A إلى النقطةِ B، أتحرَّكُ وحدتيْنِ إلى اليمينِ، وثلاثَ وحداتٍ إلى الأعلى.

2) $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $B(3, 5)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$
$$y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$$

إذنْ، $\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2\rangle$

أتعلَّمُ

يُعبَّرُ عنِ الانتقالِ إلى اتجاهِ اليسارِ أوِ اتجاهِ الأسفلِ باستعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

3) $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هيَ $D(5, 1)$، ونقطةُ نهايتِهِ هيَ $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$$
$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

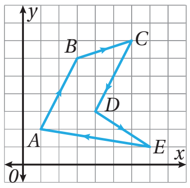
إذنْ، $\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2\rangle$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورةِ الإحداثيةِ:



a) $\overrightarrow{EA}$ $\langle -6, 1\rangle$ b) $\overrightarrow{CD}$ $\langle -2, -4\rangle$

c) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 2, 4\rangle$ d) $\overrightarrow{DE}$ $\langle 3, -2\rangle$

e) $\overrightarrow{BC}$ $\langle 3 ,1\rangle$ f) $\overrightarrow{CB}$ $\langle -3,- 1\rangle$

مقدارُ المتجهِ (magnitude) هوَ كميةٌ قياسيةٌ تُمثِّلُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ نقطتَيْ بدايةِ المتجهِ ونهايتِهِ.

فإذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ $\boldsymbol{v}$، وَ $P_2(x_2, y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ استعمالُ نظريةِ فيثاغورس لإيجادِ الصيغةِ الآتيةِ لمقدارِ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

أتعلَّمُ

يُرمَزُ إلى مقدارِ المتجهِ $\boldsymbol{v}$ بالرمزِ $|\boldsymbol{v}|$

مفهومٌ أساسيٌّ

مقدارُ المتجهِ:

إذا كانَتْ $P_1(x_1, y_1)$ هيَ نقطةَ بدايةِ المتجهِ $\boldsymbol{v}$، وَ $P_2(x_2,y_2)$ هيَ نقطةَ نهايتِهِ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

وإذا كانَ المتجهُ v مكتوبًا بالصورةِ الإحداثيةِ $\boldsymbol{v} = \langle a, b\rangle$ ، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ مقدارِهِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

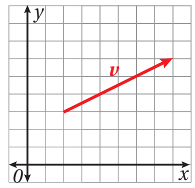
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2+b^2}$$

إرشادات للمعلم

وجِّه الطلبة إلى استعمال ورق المربعات أو ورق الرسم البياني لتمثيل المتجهات، إضافةً إلى المسطرة والمنقلة؛ فذلك يُكسِبهم مهارة التمثيل بسرعة ودقة، واطلب إليهم استعمال الأقلام الملونة لتمييز المتجهات المختلفة بعضها من بعض.

مثال 2

1 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ v في الشكلِ المجاورِ.



الخطوةُ 1: أُحدِّدُ إحداثياتِ كلٍّ منْ نقطةِ بدايةِ المتجهِ، ونقطةِ نهايتِهِ.

إحداثيا نقطةِ بدايةِ المتجهِ $(2, 3)$، وإحداثيا نقطةِ نهايتِهِ $(8, 6)$.

الخطوةُ 2: أُعوِّضُ الإحداثياتِ بصيغةِ مقدارِ المتجهِ.

صيغةُ مقدارِ المتجهِ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

بالتعويضِ $= \sqrt{(8-2)^2 + (6-3)^2}$

بالتبسيطِ $= \sqrt{36 + 9}$

بالتبسيطِ $= 3\sqrt{5}$

2 أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\overrightarrow{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

المتجهُ مكتوبٌ بالصورةِ الإحداثيةِ، إذنْ:

صيغةُ مقدارِ المتجهِ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

بالتعويضِ $= \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

بالتبسيطِ $= 5$

أتحقق من فهمي

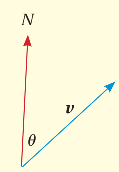
أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 4 \rangle$ $\sqrt{17}$

b) $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -7 \rangle$ $\sqrt{74}$

أتعلّم

يُمكِنُ أيضًا التعبيرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ بدلالةِ اتجاهِهِ منَ الشمالِ.



يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لإيجادِ اتجاهِ المتجهِ، وذلكَ باستعمالِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ المتجهُ وترًا فيهِ.

مثال 2

- وضِّح للطلبة مفهوم مقدار المتجه (طوله)، وكيفية حسابه إذا عُلِمت إحداثيات بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد مقدار المتجه المُمثَّل على المستوى الإحداثي، أو المعطى بالصورة الإحداثية.

مثال إضافي

- جد مقدار كل متجه ممّا يأتي:

1 $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3, -7)$ و $B(0, -5)$ $\sqrt{13}$

2 $\overrightarrow{CD} = \langle 5, -10 \rangle$ $5\sqrt{5}$

مثال 3

- بيِّن للطلبــة أنَّ اتجاه أيِّ متجه يُحــدَّد بقياس الزاوية التي تصنعها القطعة المســتقيمة التي تُمثِّله مع محور مرجعي، مثل محور x الموجب عكس حركة عقارب الساعة، أو اتجاه الشمال مع حركة عقارب الساعة.
- ناقِــش الطلبة في حل هــذا المثال الــذي يُبيِّن كيفية تحديد اتجاه متجه مرســوم في الوضع القياسي، مُبيِّنًا أن هذه الطريقة تُستعمَل إذا عُلِمت نقطتا بداية المتجه ونهايته، أو صورته الإحداثية، ثم اذكر أمثلة على ذلك.
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:

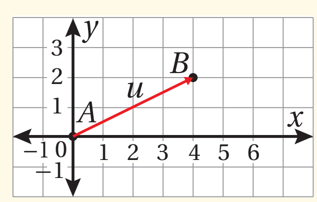
» هل يمكن استعمال نسبة أُخرى غير ظل الزاوية؟
نعم، ولكن يجب إيجاد طول المتجه أولًا.

إرشــاد: أرشِــد الطلبة إلى اســتعمال الآلة الحاسبة بصورة صحيحة لإيجاد قياس زاوية عُلِمت إحدى نسبها المثلثية.

أخطــاء مفاهيمية: قد يخطئ الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط في كتابة معادلة النسبة المثلثية؛ لــذا الفت انتباههم إلــى الصيغ الصحيحة للنسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية.

مثال إضافي

1 جد اتجاه $\overrightarrow{AB}$ في الشكل الآتي.



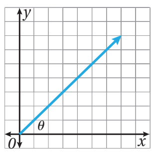
$26.6°$ مع محور x الموجب.

2 جد اتجاه $\overrightarrow{LM} = \langle 4, -3 \rangle$

$323.1°$ مع محور x الموجب.

مثال 3

أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



الخطوةُ 1: أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$

أستعملُ نسبةَ الظلِّ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي يُمثِّلُ $\overrightarrow{AB}$ وترًا فيهِ:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ استعمالُ نسبةِ الظلِّ لإيجادِ الزاويةِ

$= \frac{7}{7} = 1$ بالتعويضِ

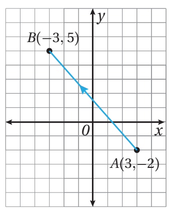
$\theta = \tan^{-1}(1) = 45°$ باستعمالِ معكوسِ الظلِّ

إذنْ، اتجاهُ $\overrightarrow{AB}$ هوَ $45°$ معَ الأفقيِّ.

إرشادٌ
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ العلميةَ لأجدَ $\tan^{-1}(1)$ كما يأتي:
SHIFT Tan 1

أتحقق من فهمي

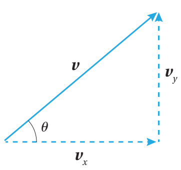
أَجِدُ اتجاهَ $\overrightarrow{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



$130.6°$ مع محور x الموجب.

السرعةُ المتجهةُ (velocity) هيَ سرعةٌ في اتجاهٍ مُحدَّدٍ يُمكِنُ تمثيلُها بمتجهٍ. في الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ المتجهُ $\boldsymbol{v}$ السرعةَ المتجهةَ لجسمٍ تحرَّكَ في مسارٍ مستقيمٍ، فصنعَ زاويةً قياسُها θ معَ محورِ x الموجبِ، وقدْ مثَّلَ مقدارُ المتجهِ $|\boldsymbol{v}|$ سرعةَ هذا الجسمِ.

تُمثِّلُ $\boldsymbol{v}_x$ المُركَّبةَ الأفقيةَ للسرعةِ المتجهةِ، وتُمثِّلُ $\boldsymbol{v}_y$ المُركَّبةَ الرأسيةَ لهذهِ السرعةِ، حيثُ: $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y \rangle$



منهاجي
متعة التعليم الهادف

يُمكِنُ استعمالُ النسبِ المثلثيةِ لكتابةِ المُركَّبتيْنِ الأفقيةِ والرأسيةِ للسرعةِ المتجهةِ بدلالةِ الزاويةِ θ التي تصنعُها السرعةُ المتجهةُ معَ محورِ x الموجبِ كما يأتي:

$$v_x = |v| \cos\theta$$

$$v_y = |v| \sin\theta$$

عندئذٍ، يُمكِنُ كتابةُ السرعةِ المتجهةِ بالصورةِ الإحداثيةِ كما يأتي:

$$v = \langle |v| \cos\theta, |v| \sin\theta \rangle$$

أتعلَّمُ

قدْ يُمثِّلُ المتجهُ أيضًا مسافةً متجهةً، أوْ قوةً متجهةً.

مثال 4: من الحياة

كرةُ قدمٍ: ركلَ ريّانُ كرةً بسرعةِ 25m/s، كما في الشكلِ المجاورِ، وبزاويةٍ مقدارُها °40 معَ الأفقيِّ. أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للكرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.

25 m/s

أرسمُ شكلًا مُبسَّطًا يُعبِّرُ عنِ المسألةِ، بحيثُ يكونُ فيهِ $|v| = 25$، وَ $\theta = 40°$:

$v = \langle |v|\cos\theta, |v|\sin\theta \rangle$ $v_x = |v| \cos\theta$، و $v_y = |v| \sin\theta$

$= \langle 25 \cos 40°, 25 \sin 40° \rangle$ بالتعويضِ

$= \langle 25\times0.7660, 25\times0.6428 \rangle$ بتعويضِ قيمِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ °40

$= \langle 19.15, 16.07 \rangle$ بالتبسيطِ

إذنْ، $v = \langle 19.15, 16.07 \rangle$

هوَ المتجهُ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الكرةِ.

v_y v 40° v_x

أتحقق من فهمي

ألعابٌ: أقلعَتْ طائرةٌ تتحكَّمُ فيها ميساءُ عنْ بُعْدٍ، بزاويةٍ قياسُها °35 عنْ سطحِ الأرضِ، وبسرعةِ 6 m/s كما في الشكلِ المجاورِ.

أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.

$\langle 4.91, 3.44 \rangle$

6 m/s 35°

ازدادَ الاعتمادُ على الطائراتِ المُسيَّرةِ عنْ بُعْدٍ في كثيرٍ منَ المجالاتِ، مثلِ: رصدِ الازدحاماتِ المروريةِ، ومراقبةِ انتشارِ حرائقِ الغاباتِ.

مثال 4: من الحياة

- وضِّح للطلبة كيفية تحليل المتجه إلى مركبة أفقية وأُخرى رأسية باستعمال النسب المثلثية لزاوية الاتجاه.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية كتابة الصورة الإحداثية لسرعة متجهة باستعمال زاوية الاتجاه.

إرشاد: أكِّد باستمرار الفرق بين مفاهيم السرعة المتوسطة، والسرعة اللحظية، والسرعة المتجهة.

مثال إضافي

- انطلق صاروخ ألعاب نارية بسرعة 32 m/s، وبزاوية مقدارها °45 مع الأفقي. اكتب المتجه الذي يُمثِّل السرعة المتجهة للصاروخ بالصورة الإحداثية.

$\langle 16\sqrt{2}, 16\sqrt{2} \rangle$

تنويع التعليم

- استعمل برمجية جيوجبرا، واطلب إلى الطلبة استعمالها لاستكشاف المتجهات، وتعلُّم الكثير عنها.
- اطلب إلى الطلبة تصفُّح موقع برمجية جيوجبرا الإلكتروني الذي يحوي معلومات مفيدة لدراسة جميع دروس الوحدة:

https://www.geogebra.org/t/2d–vectors

منهاجي
متعة التعليم الهادف

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من (24–2).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجـه بعض الطلبـة صعوبة في حل أي مسـألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

تنبيه:
عند حل الأسئلة (1–6)، وجِّه الطلبة إلى افتراض أن النقطة الأولى من اليسار هي نقطة بداية المتجه، وأن النقطة الثانية هي نهايته.

أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ كلَّ متجهٍ عُلِمَتْ نقطتا بدايتِهِ ونهايتِهِ في ما يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:

1) $(2, 5)$, $(4, -1)$
$\langle 2, -6 \rangle \quad |u| = 2\sqrt{10}$

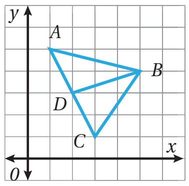
2) $(-4, 7)$, $(-3, 0)$
$\langle 1, -7 \rangle \quad |u| = 5\sqrt{2}$

3) $(6, -2), (8, 1)$
$\langle 2, 3 \rangle \quad |u| = \sqrt{13}$

4) $(4, -9), (3, -5)$
$\langle -1, 4 \rangle \quad |u| = \sqrt{17}$

5) $(-1.5, 3), (0.5, -4)$
$\langle 2, -7 \rangle \quad |u| = \sqrt{53}$

6) $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$
$\langle 4, \frac{1}{3} \rangle \quad |u| = \frac{\sqrt{145}}{3}$



اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ:

7) $\overrightarrow{AB}$ $\langle 4, -1 \rangle$

8) $\overrightarrow{DB}$ $\langle 3, 1 \rangle$

9) $\overrightarrow{CB}$ $\langle 2, 3 \rangle$

10) $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4 \rangle$

11) $\overrightarrow{AC}$ $\langle 2, -4 \rangle$

12) $\overrightarrow{DA}$ $\langle -1, 2 \rangle$

13) في السؤالِ السابقِ، أُبيِّنُ أنَّ $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}|$. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ النقطةِ D على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AC}$ ؟
$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{5}$ ، D نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$

أَجِدُ مقدارَ كلِّ متجهٍ ممّا يأتي:

14) $\langle 2,-6 \rangle$ $2\sqrt{10}$

15) $\langle 7,-8 \rangle$ $\sqrt{113}$

16) $\langle -1,-1 \rangle$ $\sqrt{2}$

17) $\langle 3,5 \rangle$ $\sqrt{34}$

18) $\langle 0,0 \rangle$ 0

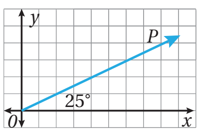
19) $\langle 2, 9 \rangle$ $\sqrt{85}$

إذا كانَـتْ M هيَ نقطةَ منتصفِ $\overline{FG}$ ، حيثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$، وكانَتْ O هيَ نقطةَ الأصلِ، فأكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ:

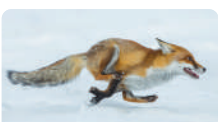
20) $\overrightarrow{FG}$ $\langle -2, 4 \rangle$

21) $\overrightarrow{GF}$ $\langle 2, -4 \rangle$

22) $\overrightarrow{OM}$ $\langle 3, 4 \rangle$



23) أُعبِّرُ عنِ اتجاهِ المتجهِ P في الشكلِ المجاورِ بطريقتيْنِ.
اتجاه P هو $25°$ مع الأفقي.
اتجاه P هو $065°$



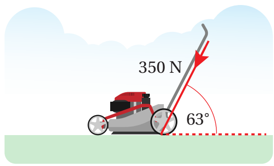
24) **حيواناتٌ:** أكتبُ السـرعةَ المتجهةَ لثعلبٍ يُطـارِدُ أرنبًا على منحدرٍ بالصـورةِ الإحداثيةِ إذا كانَتْ سـرعتُهُ الأفقيـةُ $v_x = 27$ km/h ، وسرعتُهُ الرأسيةُ $v_y = 25$ km/h
$\langle 27, 25 \rangle$

88

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة العشـرين من كتـاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

25 **فيزياءُ:** تدفعُ نورُ عربةً بقوةٍ مقدارُها 350N، وبزاويةٍ قياسُها °63 معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ.



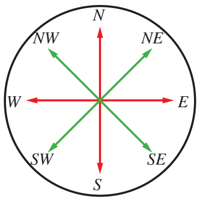
$\langle 158.90 , 311.85\rangle$

26 أكتبُ المتجهَ $\boldsymbol{v}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\boldsymbol{v}| = 27$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °90 معَ محورِ x. $\langle 0 , 27\rangle$

27 أكتبُ المتجهَ $\boldsymbol{v}$ بالصورةِ الإحداثيةِ إذا كانَ $|\boldsymbol{v}| = 10$، وصنعَ زاويةً مقدارُها °320 معَ محورِ x.

$\langle 7.66 , -6.43\rangle$

28 خرجَ عبدُ الرحمنِ منْ منزلِهِ، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ شرقًا إلى المسجدِ مسافةَ 248 m، ثمَّ خرجَ منْهُ مرَّةً أُخرى، وسارَ بخطٍّ مستقيمٍ جنوبًا نحوَ منزلِ صديقِهِ يحيى مسافةَ 562 m. أُعبِّرُ عنِ المسارِ بينَ منزلِ عبدِ الرحمنِ ومنزلِ صديقِهِ على شكلِ متجهٍ بالصورةِ الإحداثيةِ **(إرشادٌ: البُعْدُ بينَ نقطتيْنِ هوَ أقصرُ مسافةٍ بينَهُما).**



$\langle 248 , -562\rangle$

مهارات التفكير العليا

29 **تحدٍّ:** إذا كانَ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$ حيثُ $A(1, 2)$ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(3, y)$ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ B، مُبرِّرًا إجابتي. انظر الهامش

30 **تبريرٌ:** ما مجموعةُ قيمِ b التي يكونُ عندَها مقدارُ المتجهِ $\langle 4, b\rangle$ يساوي 5؟ أُبرِّرُ إجابتي. انظر الهامش

31 **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَ كلٌّ منْ ناصرٍ وليلى مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{v} = \langle 6, -1\rangle$، فكانَتْ إجابةُ كلٍّ منْهُما كما يأتي:

ناصرٌ	ليلى
$\lvert\boldsymbol{v}\rvert = 37$	$\lvert\boldsymbol{v}\rvert = \sqrt{35}$

أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ، مُبرِّرًا إجابتي؟ كلتــا الإجابتين غير صحيحة؛ لأن ناصرًا نســي الجذر التربيعي، وليلى طرحت مربعي المركبتين بدلًا من جمعهما.

32 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ متجهًا على المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ.

ستتنوع إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة صحيحة: $\overrightarrow{AB} = v = \langle 6,-4\rangle$

$|v| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

89

إجابات (أتدرب وأحل المسائل):

29) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{13}$

$4 + (y-2)^2 = 13$

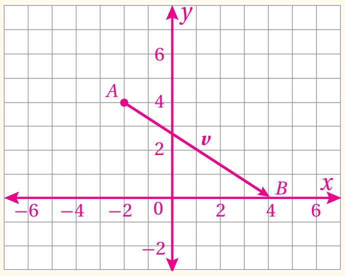
$(y-2)^2 = 9$

$y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5, y = -1$

إذن، إحداثيا B هما: $(3, 5)$، أو $(3, -1)$.

30) $|v| = \sqrt{16 + b^2} = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$



مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم، مُنبِّهًا إيّاهم إلى تصحيح أرقامها، بحيث تبدأ بـ 29، وتنتهي بـ 32 في كتبهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » إذا كانت $A(3, -2), B(7, 5), C(1, y)$، وكانت B تقسم القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ بنسبة 1:2، فما العلاقة بين $|\overrightarrow{BC}|$، وَ $|\overrightarrow{AB}|$؟ ما قيمة y؟

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوات (1–3) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة للشاشة في كل خطوة (print screen).
- تابع أفراد المجموعات في أثناء تنفيذ مشروع الوحدة، وزوِّدهم بتغذية راجعة وإرشادات لتحسينه.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية في ورقة، ثم تسليمها لك في نهاية الحصة:
  » ما الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة؟
  » اذكر 3 أمثلة على كلٍّ منهما.
  » بيِّن بمثالٍ كيفية إيجاد مقدار متجه عُلِمت بدايته ونهايته.

الدرس 2

نتاجات الدرس

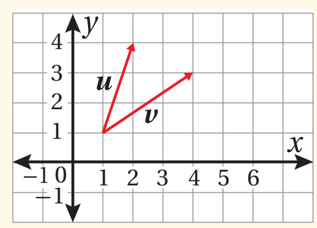
- يميز بين المتجهات المتساوية، والمتجهات المتوازية، ومعكوس المتجه، ويعبر عنها بالرموز.
- يحل مسائل عن جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي هندسيًّا وجبريًّا.
- يتعرف المتجه الصفري.
- يجد محصلة متجهين أو أكثر هندسيًّا وجبريًّا في مواقف رياضية وحياتية.

التعلم القبلي:

- كتابة المتجه بالصورة الإحداثية.
- إيجاد مقدار المتجه واتجاهه.
- كتابة المركبتين الأفقية والرأسية لمتجه معطى.
- حل المثلث باستعمال قانون الجيوب، وقانون جيوب التمام.

1 التهيئة

- ارسم على لوح المستوى الإحداثي المتجهين $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ كما في الشكل الآتي:



- اطلب إلى الطلبة التعبير عن هذين المتجهين بالصورة الإحداثية.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المقدار والاتجاه لكلٍّ من $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$.
- اطلب إلى الطلبة إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية لكلٍّ من $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$، ورسمهما.
- أكمل الشكل المرسوم إلى مثلث، مُذكِّرًا الطلبة بكيفية تطبيق قانوني الجيوب وجيوب التمام لحل المثلث.

الدرس 2

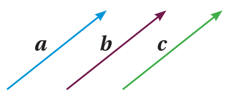
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها
Adding and Subtracting Vectors

فكرةُ الدرس إجراءُ العملياتِ على المتجهاتِ.

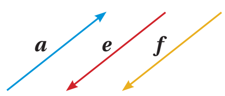
المصطلحات المتجهاتُ المتساويةُ، المتجهاتُ المتوازيةُ، معكوسُ المتجهِ، المحصلةُ.

مسألةُ اليوم بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشمالِ بسرعةٍ مقدارُها 450 km/h، لكنَّها واجهَتْ رياحًا شرقيةً سرعتُها 60 km/h، فأخذَتْ تنحرفُ نحوَ اليسارِ. كيفَ يُمكِنُ للطيارِ أنْ يُعدِّلَ اتجاهَها وسرعتَها ليصلَ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

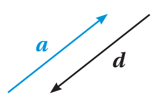
المتجهانِ المتساويانِ (equal vectors) هما متجهانِ لهُما نفسُ الاتجاهِ والمقدارِ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\boldsymbol{a, b, c}$ متساويةٌ، وبالرموزِ: $\boldsymbol{a = b = c}$



المتجهانِ المتوازيانِ (parallel vectors) هما متجهانِ لهُما الاتجاهُ نفسُهُ، أوْ عكسُهُ، وليسَ شرطًا أنْ يكونَ لهُما المقدارُ نفسُهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهاتُ $\boldsymbol{a, e, f}$ متوازيةٌ، وبالرموزِ: $\boldsymbol{a \parallel e \parallel f}$

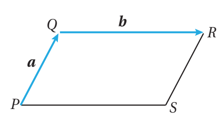


معكوسُ المتجهِ (opposite vectors) هوَ متجهٌ لهُ نفسُ مقدارِ متجهٍ آخرَ، لكنَّهُ في اتجاهٍ مُعاكِسٍ لهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، المتجهُ $\boldsymbol{d}$ معكوسُ المتجهِ $\boldsymbol{a}$، وبالرمزِ: $\boldsymbol{-a}$؛ أيْ إنَّ $\boldsymbol{d = -a}$



مثال 1

في الشكلِ المجاورِ، $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فيهِ $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}$، وَ $\overrightarrow{QR} = \boldsymbol{b}$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$:



1) $\overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{SR} = a$ متجهٌ موازٍ ومساوٍ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

2) $\overrightarrow{SP}$

$\overrightarrow{SP} = -b$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

90

منهاجي
متعة التعليم الهادف

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما قياس زاوية متجه سرعة الطائرة مع الأفقي؟ $90°$
  » ما قياس زاوية متجه سرعة الرياح مع الأفقي؟ $180°$
  » ما تأثير الرياح على الطائرة؟ ستدفع الطائرة إلى الغرب.
  » هل سيُعدِّل الطيّار اتجاه الطائرة نحو الشرق أم نحو الغرب للتغلُّب على أثر الرياح؟ سيُعدِّل اتجاه الطائرة نحو الشرق.
  » ماذا سيفعل الطيّار للتغلُّب على أثر الرياح، والمحافظة على اتجاه الطائرة شمالًا والسرعة نفسها؟ سيحرفها جهة اليمين، ويُقلِّل سرعتها، بحيث تحرفها الرياح إلى مسارها الصحيح، وتزيد سرعتها حتى تصل 450 km/h
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم:
  » من يؤيد الإجابة؟
  » من لديه إجابة أُخرى؟
  » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الاخر لديهم. بعد ذلك وضِّح لهم أنهم سيتعرفون في هذا الدرس ما يمكنهم من الإجابة عن هذه المسألة ومسائل مشابهة، ثم اكتب العنوان على اللوح.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة المقصود بالمتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors) ومعكوس المتجه (opposite vector)، وعبِّر عنها بالرموز، ثم ارسمها مُستعمِلًا المسطرة والمنقلة.

مثال 1

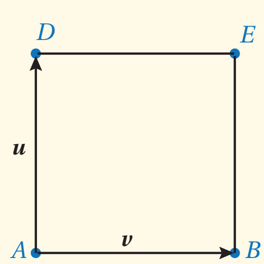
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، وارسم متوازي أضلاع على لوح المستوى الإحداثي مُشابِهٍ للمعطى في المثال، مُبرِّرًا كل خطوة من خطوات الحل (يمكن اختيار طالب من ذوي المستوى فوق المتوسط لذكر التبرير).
- ذكِّر الطلبة أن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع يكونان متطابقين ومتوازيين.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتجهين المتساويين (equal vectors)، والمتجهين المتوازيين (parallel vectors)، ومعكوس المتجه (opposite vector)، والمحصلة (resultant).

مثال إضافي

- في الشكل المجاور، $ABED$ مُربّع، فيه $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}$، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{u}$، أعبِّر عن كل من $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{DE}$ باستعمال المتجهين $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.



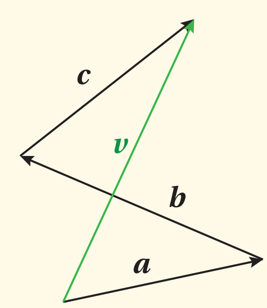
$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{EB}=-\boldsymbol{u}$

التقويم التكويني:

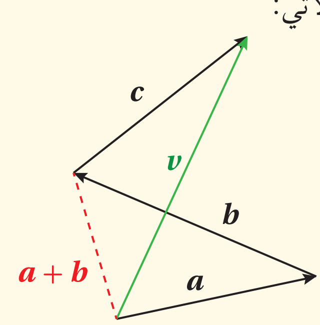
- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِــدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

التدريس

- وضِّح للطلبة خطوات إيجاد مجموع متجهين هندسيًّا باستعمال قاعدة المثلث.
- ارسم متجهين على لوح المستوى الإحداثي لتوضيح أن المتجه $\boldsymbol{b}$ يبقى كمــا هو من حيث الطول والاتجاه عند عمل انسحاب له، بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\boldsymbol{a}$.
- أخبر الطلبة أن $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ هو متجه يُسمّى متجه المحصلة (resultant)، وأن له التأثير نفسه الذي يُحدِثه كلٌّ من المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ الواحد تلو الآخر.
- ارسم على اللوح شكلًا يُشبِه الشكل الآتي، مُستعمِلًا أقلامًا ذات ألوان لتمييز متجه المحصلة:



- أخبــر الطلبة أن $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ هو متجه المحصلة، وأنه ناتــج جمع المتجهات $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$، ثم اشــرح لهم قاعــدة المثلث؛ لجمع المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ أولًا، ثم جمع المحصلة $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ مع المتجه $\boldsymbol{c}$ لينتج المتجه $\boldsymbol{v}$ كما في الشكل الآتي:



- أكِّد للطلبة أنه يمكــن تطبيق قاعدة المثلث عند إيجاد مجموع متجهين أو أكثر.

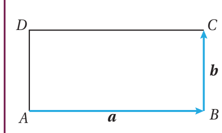
3) $\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{QP}=-a$ متجهٌ موازٍ ومعكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{PQ}$

4) $\overrightarrow{RQ}$

$\overrightarrow{RQ}=-b$ متجهٌ معكوسٌ للمتجهِ $\overrightarrow{QR}$

أتحقق من فهمي



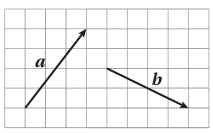
في الشكلِ المجاورِ، $ABCD$ مستطيلٌ، فيهِ $\overrightarrow{AB}=a$ ، وَ $\overrightarrow{BC}=b$. أُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ المتجهيْنِ a وَ b:

a) $\overrightarrow{AD}$ b b) $\overrightarrow{DC}$ a c) $\overrightarrow{CB}$ $-b$

جمعُ المتجهاتِ هندسيًّا

يُمكِــنُ إجراءُ عمليــاتٍ علــى المتجهاتِ، مثــلِ: الجمعِ، والطرحِ.

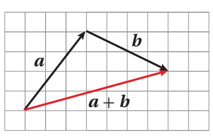
لإيجادِ $a+b$ هندسيًّا، أتَّبعُ الخطواتِ الآتيةَ:



الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ a.

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ b بحيثُ تكونُ نقطةُ بدايتِهِ هيَ نقطةَ نهايةِ المتجهِ a.

الخطوةُ 3: أَصِلُ بينَ نقطةِ بدايةِ المتجهِ a ونقطةِ نهايةِ المتجهِ b، فيكونُ المتجهُ الناتجُ هوَ المتجهَ $a+b$.

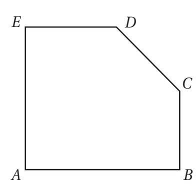


يُسمّى المتجهُ الناتجُ منْ جمعِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ **المحصلةَ** (resultant).

أتعلَّمُ

يُطلَقُ على هذهِ الطريقةِ فــي جمــعِ المتجهاتِ هندســيًّا اســمُ قاعــدةِ المثلثِ.

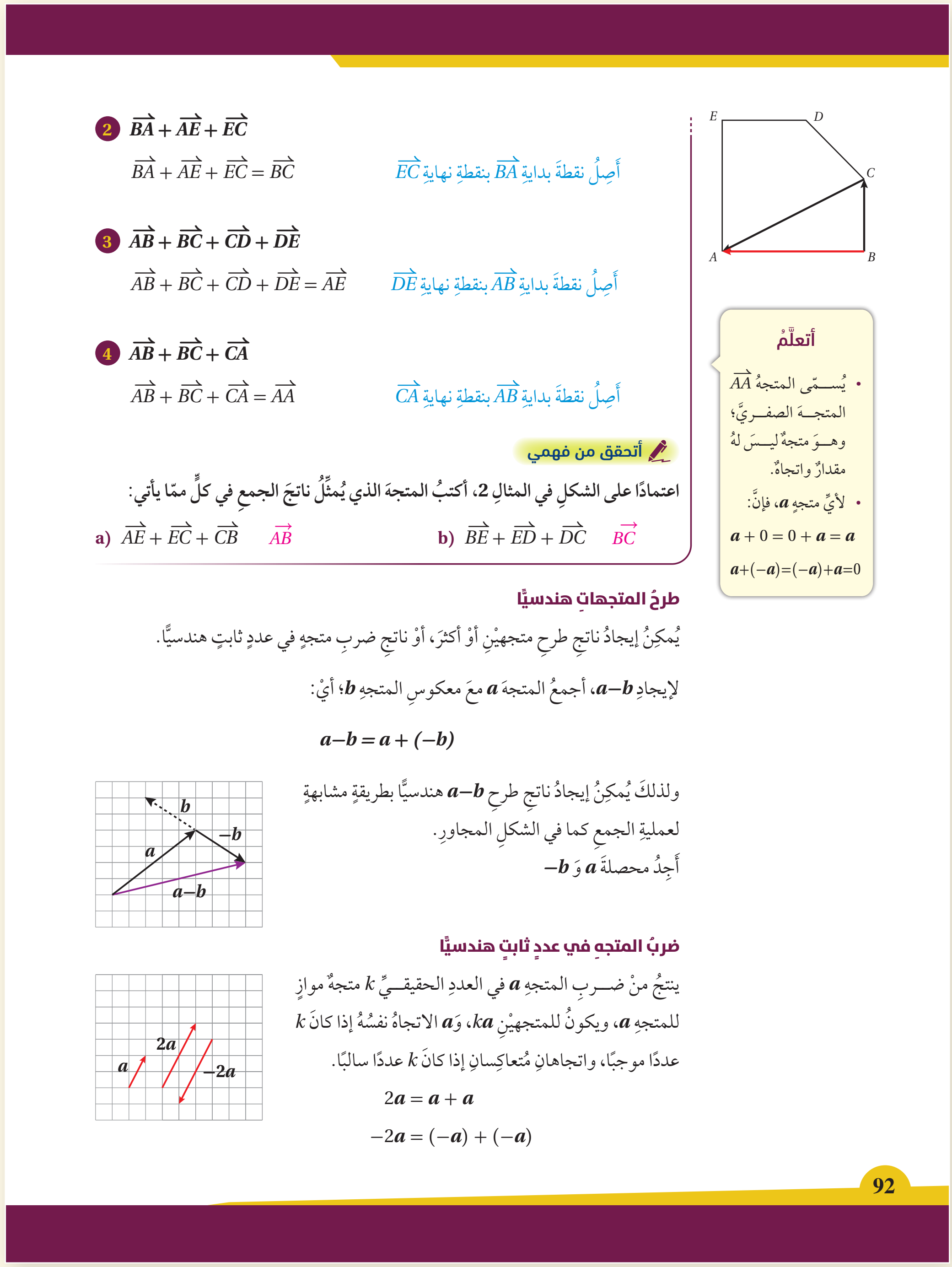
مثال 2



اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BC}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$، فينتجُ $\overrightarrow{BA}$



أتعلَّم

- يُسمّى المتجهُ $\overrightarrow{AA}$ المتجهَ الصفريَّ؛ وهوَ متجهٌ ليسَ لهُ مقدارٌ واتجاهٌ.
- لأيِّ متجهٍ $\boldsymbol{a}$، فإنَّ:

$\boldsymbol{a}+0=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=0$

2 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{BA}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{EC}$

3 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{DE}$

4 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}$ أَصِلُ نقطةَ بدايةِ $\overrightarrow{AB}$ بنقطةِ نهايةِ $\overrightarrow{CA}$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 2، أكتبُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ ناتجَ الجمعِ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC}$

طرحُ المتجهاتِ هندسيًا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ متجهيْنِ أوْ أكثرَ، أوْ ناتجِ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ هندسيًّا.

لإيجادِ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، أجمعُ المتجهَ $\boldsymbol{a}$ معَ معكوسِ المتجهِ $\boldsymbol{b}$؛ أيْ:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

ولذلكَ يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ طرحِ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ هندسيًّا بطريقةٍ مشابهةٍ لعمليةِ الجمعِ كما في الشكلِ المجاورِ.

أَجِدُ محصلةَ $\boldsymbol{a}$ وَ $-\boldsymbol{b}$

ضربُ المتجهِ في عددٍ ثابتٍ هندسيًا

ينتجُ منْ ضربِ المتجهِ $\boldsymbol{a}$ في العددِ الحقيقيِّ k متجهٌ موازٍ للمتجهِ $\boldsymbol{a}$، ويكونُ للمتجهيْنِ $k\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{a}$ الاتجاهُ نفسُهُ إذا كانَ k عددًا موجبًا، واتجاهانِ مُتعاكِسانِ إذا كانَ k عددًا سالبًا.

$$2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$$

$$-2\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$$

92

مثال 2

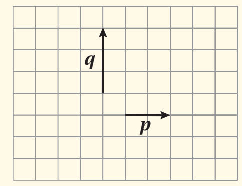
- قبل البدء بتقديم المثال 2، ارسم المضلع $ABCDE$ المعطى في المثال على اللوح.
- ناقِش الطلبة في حل فروع المثال، مُبرِّرًا الناتج في كل فرع.
- عند مناقشة الطلبة في حل الفرع 4، وضِّح لهم أن متجه المحصلة الناتج $\overrightarrow{AA}$ يُسمّى المتجه الصفري، ثم اسألهم: لماذا سُمِّي بهذا الاسم؟ لعدم وجود طول واتجاه له.
- وضِّح للطلبة كيفية طرح المتجهات برسم المتجهين $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ باستعمال لوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.
- وضِّح للطلبة كيفية تطبيق قاعدة المثلث لإيجاد ناتج طرح متجهين هندسيًّا، حيث $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$
- عند رسم معكوس المتجه $\boldsymbol{b}$، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه، مراعيًا أن تنطبق نقطة بدايته على نقطة نهاية المتجه $\boldsymbol{a}$.
- عند رسم متجه المحصلة: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، استعمل لونًا مختلفًا لتمييزه.
- وضِّح للطلبة كيفية تمثيل المتجه $\boldsymbol{a}$ بعد ضربه في عدد حقيقي، وابدأ بالمتجه $2\boldsymbol{a}$، و$3\boldsymbol{a}$، ثم $-2\boldsymbol{a}$، و$-3\boldsymbol{a}$، و$-0.5\boldsymbol{a}$
- في أثناء تمثيل المتجه $k\,\boldsymbol{a}$، حيث k عدد حقيقي، اعكس اتجاه المتجه الناتج عندما يكون k عددًا سالبًا.

مثال 3

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، مستعينًا بلوح المستوى الإحداثي والأقلام الملونة.

مثال إضافي

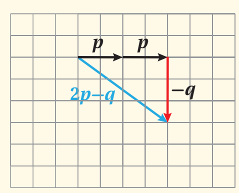
- اعتمادًا على الشكل المجاور، جد هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:

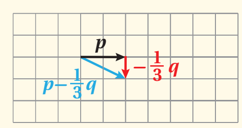


1 $2p-q$

2 $p-\frac{1}{3}q$

الحل:

1) 

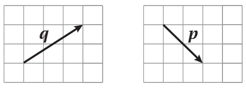
2) 

تنويع التعليم (استراتيجية التعلم بالأقران)

- قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى المتوسط ودون المتوسط صعوبة في تمثيل المتجهات، وبخاصة تلك التي تُضرَب في عدد حقيقي كسري، وحل مسائل عنها هندسيًّا؛ لذا اطلب إليهم حل المثال الإضافي ضمن مجموعات؛ ما يُسهِّل عليهم تمثيل المتجهات هندسيًّا عندما تكون أفقية أو رأسية.
- وزِّع الطلبة الذين أتقنوا مهارات تمثيل المتجهات على المجموعات؛ لمساعدة زملائهم في أثناء حل التمارين في بند (أتحقق من فهمي)، أو بند (أتدرب وأحل المسائل).
- اكتب النص الوارد في بند (مفهوم أساسي) على يمين اللوح بخط واضح، مُستعملًا الألوان المناسبة، ثم وضِّح للطلبة كيفية إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي عندما تكون المتجهات مكتوبة بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أنه يمكن التحقُّق ممّا ورد في البند السابق بتمثيل المتجهات هندسيًّا، ثم اذكر أمثلة عددية على ذلك.

مثال 3

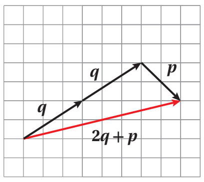
اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي:



1 $2q+p$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $2q$

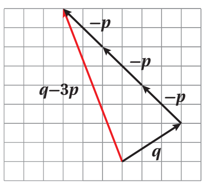
الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ $2q$ وَ p



2 $q-3p$

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهَ $-3p$ منْ رأسِ المتجهِ q

الخطوةُ 2: أَجِدُ محصلةَ المتجهيْنِ q وَ $-3p$



اكتُشِفَتِ المتجهاتُ قبلَ 200 عامٍ تقريبًا، وهيَ تُعَدُّ منَ الفروعِ الحديثةِ في علمِ الرياضياتِ مقارنةً بعلمِ الجبرِ. وقدْ أسهمَ اكتشافُها كثيرًا في الربطِ بينَ الهندسةِ والجبرِ؛ ما أدّى إلى تطوُّرِ علمِ الرياضياتِ.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكلِ في المثالِ 3، أَجِدُ هندسيًّا كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $p+3q$ b) $3q-2p$ c) $2q-\frac{1}{2}p$

جمعُ المتجهاتِ وطرحُها جبريًّا

يُمكِنُ إيجادُ ناتجِ الجمعِ والطرحِ للمتجهاتِ المكتوبةِ بالصورةِ الإحداثيةِ عنْ طريقِ جمعِ مُركَّباتِها الأفقيةِ والرأسيةِ، أوْ طرحِها.

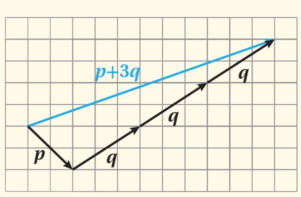
مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ $a=\langle x_1, y_1\rangle$، وَ $b=\langle x_2, y_2\rangle$، وكانَ k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

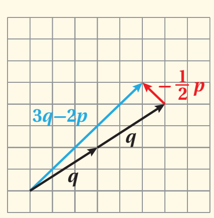
$a+b=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$ $a-b=\langle x_1-x_2, y_1-y_2\rangle$ $ka=\langle kx_1, ky_1\rangle$

إجابة أتحقق من فهمي 3:

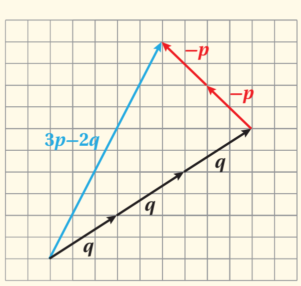
a) $p+3q$



c) $2q-0.5p$



b) $3q-2p$



منهاجي
متعة التعليم الهادف

مثال 4

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال، والفت انتباههم إلى أهمية استعمال الأقواس في كل فرع؛ لتمييز المتجهات بالصورة الإحداثية.
- أخبر الطلبة أن المتجهات المعطاة هي متجهات بالوضع القياسي (standard position)، وأن أيَّ متجه على المستوى الإحداثي يمكن كتابته بالوضع القياسي من دون أن يُؤثِّر ذلك في مقداره أو اتجاهه.
- يمكنك الاستفادة من برمجية جيوجبرا في توضيح حل المسائل المعطاة عن المتجهات، والتحقُّق هندسيًّا من صحة ناتج كلٍّ منها.

مثال 5: من الحياة

تنبيه: وجِّه الطلبة إلى تعديل رقم المثال ليصبح 5 بدلًا من 4 في كتبهم؛ فهذا خطأ مطبعي.

- قبل مناقشة الطلبة في حل هذا المثال، اطلب إليهم ذكر تطبيقات حياتية على جمع المتجهات وطرحها.
- ناقِش الطلبة في حل المثال، وارسم شكلًا تقريبيًّا للمعطيات على محورين متعامدين، وثبِّت عليهما رموز الاتجاهات الأربعة (الشمال N، والجنوب S، والشرق E، والغرب W).
- اكتب خطوات مُنظَّمة للحل كما في كتاب الطالب.

مثال 4

إذا كانَ $\boldsymbol{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\boldsymbol{b} = \langle -4, 6\rangle$، وَ $\boldsymbol{c} = \langle -3, -1\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \langle 3+(-4), 1+6\rangle$

$= \langle -1, 7\rangle$

2) $2\boldsymbol{a}$

$2\boldsymbol{a} = \langle 2\times 3, 2\times 1\rangle = \langle 6, 2\rangle$

3) $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b} = \langle -3-(-4), -1-6\rangle$

$= \langle 1, -7\rangle$

4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} = \langle 3+(-3), 1+(-1)\rangle$

$= \langle 0, 0\rangle$

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $\boldsymbol{a} = \langle 3, 1\rangle$، وَ $\boldsymbol{b} = \langle -2, 7\rangle$، وَ $\boldsymbol{c} = \langle 0, -5\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $-\boldsymbol{b}$ b) $4\boldsymbol{c}$ c) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ d) $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c}$

أفكِّرُ

ما العلاقةُ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$؟

أتعلَّمُ

في المثالِ 4، المتجهُ $\boldsymbol{a}$ هوَ معكوسُ المتجهِ $\boldsymbol{c}$؛ لأنَّ مجموعَهُما يساوي المتجهَ الصفريَّ؛ أيْ إنَّ: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

لجمعِ المتجهاتِ وطرحِها تطبيقاتٌ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والطيرانِ.

مثال 5: من الحياة

ملاحةٌ جويةٌ: بدأَتْ طائرةٌ رحلتَها نحوَ الشرقِ بسرعةٍ مقدارُها 400 km/h، لكنَّها واجهَتْ رياحًا تهبُّ منَ الشمالِ الشرقيِّ بسرعةٍ مقدارُها 50 km/h. كيفَ يُمكِنُ لِرُبّانِ الطائرةِ أنْ يُعدِّلَ مقدارَ سرعتِها واتجاهَها ليصلَ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟

الخطوةُ 1: أرسمُ المتجهيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ السرعةَ والاتجاهَ لكلٍّ منَ الطائرةِ، والرياحِ.

يُمثِّلُ المتجهُ $\boldsymbol{f}$ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ.

يُمثِّلُ المتجهُ $\boldsymbol{w}$ السرعةَ المتجهةَ للرياحِ. أُلاحِظُ منَ الشكلِ الآتي أنَّهُ يجبُ على الطائرةِ أنْ تنحرفَ عنْ مسارِها قليلًا بحيثُ تعيدُها الرياحُ إلى مسارِها الأصليِّ.

أتذكَّرُ

يُمثِّلُ مقدارُ (طولُ) كلٍّ منَ المتجهِ $\boldsymbol{f}$ والمتجهِ $\boldsymbol{w}$ سرعةً، لا مسافةً.

إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) $-\boldsymbol{b} = \langle 2, -7\rangle$ b) $4\boldsymbol{c} = \langle 0, -20\rangle$

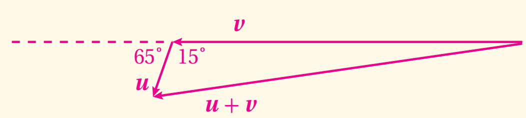
c) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c} = \langle -2, 12\rangle$ d) $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c} = \langle 12, -11\rangle$

مثال إضافي

تُحلِّق طائرة بسرعة 500 km/h في الاتجاه °070، وتُؤثِّر فيهــا رياح تهب مــن الاتجاه °130 بســرعة 90 km/h، ما محصلة ســرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى ســطح الأرض؟

محصلــة ســرعة الطائــرة: 461.63 km/h، واتجاهها: °060.21 (تقريبًا).

إجابة أتحقق من فهمي 5:



افتــرض أن $\boldsymbol{v}$ هو متجه ســرعة القــارب، وأن $\boldsymbol{u}$ هو متجه سرعة الرياح (انظر الشكل أعلاه). وبذلك، فإن:

$$|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}|^2 = 30^2 + 10^2 - 2(30)(10)\cos 115°$$
$$= 1252$$

$$|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}| = \sqrt{1252} \approx 35.38 \text{ km/h}$$

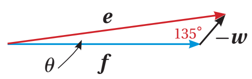
$$\frac{\sin\theta}{10} = \frac{\sin 115}{35.38}$$

$$\sin\theta \approx 0.26$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.26) = 15.07°$$

أي يجــب تعديل اتجاه القــارب بزاوية °15.07 شــمال غرب، وزيادة ســرعته لتصبح 35.38 km/h؛ لكي يصل إلى وجهته في الوقت المُحدَّد.

الخطوةُ 2: أرسمُ المتجهَ الذي يُمثِّلُ السرعةَ المتجهةَ للرياحِ بعدَ انحرافِها عنْ مسارِها.

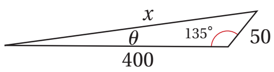


بمــا أنَّ الريــاحَ تهــبُّ مــنَ الشــمالِ الشــرقيِّ، فــإنَّ اتجــاهَ $\boldsymbol{w}$ هــوَ °45؛ لــذا، فــإنَّ الزاويــةَ بيــنَ $\boldsymbol{f}$ وَ $\boldsymbol{w}$ تســاوي °135 (زاويتــانِ متجاورتــانِ علــى مســتقيمٍ)، ويكــونُ المتجــهُ $\boldsymbol{e}$ هــوَ محصلــةَ المتجهيْــنِ $\boldsymbol{f}$ وَ $-\boldsymbol{w}$

أتعلَّمُ
لماذا وُضِعَ المتجهُ $-\boldsymbol{w}$ بدلًا منَ المتجهِ $\boldsymbol{w}$؟

الخطوةُ 3: أُحدِّدُ سرعةَ الطائرةِ بعدَ انحرافِها.

مقدارُ سرعةِ الطائرةِ بعدَ انحرافِها عنْ مسارِها يساوي مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{e}$، وليكنْ x.



أَجِدُ طولَ x باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ قانونُ جيوبِ التمامِ

$x^2 = 400^2 + 50^2 - 2\times400\times50\cos135°$ بالتعويضِ

$= 190784.3$ بالتبسيطِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$x \approx 436.8$

استطاعَ الأخوانِ رايت في العقدِ الأولِ منَ القرنِ العشرينَ أنْ يصنعا أولَ طائرةٍ تعملُ بمُحرِّكٍ، ويُمكِنُ التحكُّمُ فيها.

الخطوةُ 4: أَجِدُ قياسَ زاويةِ انحرافِ الطائرةِ θ باستعمالِ قانونِ الجيوبِ:

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$ قانونُ الجيوبِ

$\frac{\sin\theta}{50} = \frac{\sin 135°}{436.8}$ بالتعويضِ

$\theta = \sin^{-1}(0.0809)$ بالتبسيطِ

$\approx 4.64°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، يجبُ على الرُّبّانِ أنْ يحرفَ مسارَ الطائرةِ بزاويةِ °4.64 شمالَ الشرقِ، ويزيدَ مقدارَ سرعتِها إلى 436.8 km/h، عندئذٍ ستعملُ الرياحُ على تقليلِ مقدارِ سرعتِها إلى 400 km/h

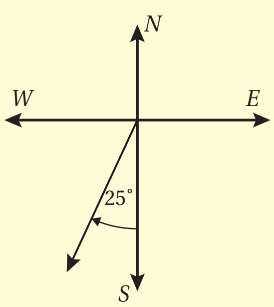
أتحقق من فهمي

ملاحةٌ بحريةٌ: انطلقَ قاربٌ شــراعيٌّ منْ ميناءٍ بســرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 30 km/h، مُتَّجِهًا إلى جزيــرةٍ تقعُ غربَهُ. وفي هذهِ الأثناءِ، هبَّتْ رياحٌ بلغَتْ ســرعتُها المتجهةُ 10 km/h بزاويةِ °25 جنوبَ الغربِ. كيفَ يُمكِنُ للبَحّارِ تعديلُ مقدارِ سرعةِ القاربِ واتجاهِهِ للوصولِ إلى وِجهتِهِ منْ دونِ تأخيرٍ؟ انظر الهامش

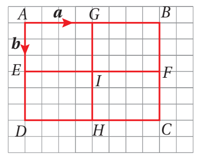
إرشادات للمعلم

نبِّه الطلبة عند حل المثال 5 والتدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) إلى ما يأتي:

- جملة (رياح تهب من الشــمال الشــرقي) تعني أن متجــه الرياح يصنع مع الأفقي زاوية قياســها °225، وأن قياس الزاويــة بين معكوس متجه الرياح والمحور الأفقي هو °45، أمّا لو كانت الرياح تهب باتجاه الشمال الشرقي، فذلك يعني أن متجه الرياح يصنع زاوية قياسها °45 مع المحور الأفقي.
- جملة (رياح تهب بزاويــة °25 جنوب غرب) تعني أن متجه الرياح يصنع مع محور y السالب (من S إلى W) زاوية قياســها °25 (يُعرَف هذا التعبير بقياس الزاويــة الربعية)، فيكون قياس الزاوية بينه وبين محور x الســالب °65 (انظر الشكل المجاور).



أتدرب وأحل المسائل



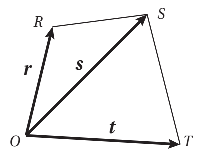
اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلَّ متجهٍ ممّا يأتي بدلالةِ $\mathbf{a}$ وَ $\mathbf{b}$:

1 $\overrightarrow{EI}$ $\mathbf{a}$ 2 $\overrightarrow{FC}$ $\mathbf{b}$ 3 $\overrightarrow{DE}$ $-\mathbf{b}$

4 $\overrightarrow{GE}$ $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 5 $4\overrightarrow{GD}$ $8\mathbf{b}-4\mathbf{a}$ 6 $\overrightarrow{CA}$ $-(2\mathbf{a}+2\mathbf{b})$

إذا كانَ $\mathbf{a}=\langle 34,-86\rangle$، وَ $\mathbf{b}=\langle -65, 17\rangle$، وَ $\mathbf{c}=\langle 9,-1\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

7 $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ $\langle 43,-87\rangle$ 8 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ $\langle -99, 103\rangle$ 9 $3\mathbf{c}+\mathbf{b}$ $\langle -38, 14\rangle$ 10 $\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$ $\langle -49,-67\rangle$



اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\mathbf{r}$ وَ $\mathbf{s}$ وَ $\mathbf{t}$:

11 $\overrightarrow{SR}$ $\mathbf{r}-\mathbf{s}$ 12 $\overrightarrow{ST}$ $\mathbf{t}-\mathbf{s}$ 13 $\overrightarrow{RS}$ $\mathbf{s}-\mathbf{r}$

14 إذا كانَ $\langle 3x-y, y-x^2\rangle = \langle 7, -5\rangle$، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

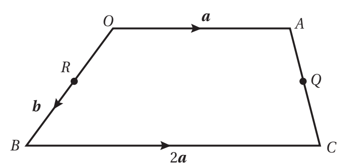
$x=1$ و $y=-4$، أو $x=2$ و $y=-1$

إذا كانَ $\mathbf{e}=\langle -3,-2\rangle$ ، وَ $\mathbf{f}=\langle 2, 4\rangle$ ، فأُمثِّلُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ على المستوى الإحداثيِّ: انظر ملحق الإجابات

15 $\mathbf{e}+\mathbf{f}$ 16 $3\mathbf{f}$ 17 $\mathbf{e}-\mathbf{f}$

18 $\mathbf{f}-\mathbf{e}$ 19 $4\mathbf{e}$ 20 $2\mathbf{f}+\mathbf{e}$

21 إذا كانَ $\mathbf{d}=\langle 5, 9\rangle$ ، وَ $\mathbf{e}=\langle 11,-8\rangle$ ، فأَجِدُ $|4\mathbf{d}-3\mathbf{e}|$ ، $|\frac{1}{3}\mathbf{e}|$ انظر ملحق الإجابات



في الشكلِ المجاورِ، $OACB$ شبهُ منحرفٍ، فيهِ R منتصفُ $\overline{OB}$، وَ Q منتصفُ $\overline{AC}$. إذا كانَ $\overrightarrow{BC}=2\mathbf{a}$ وَ $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ، فأكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ $\mathbf{a}$ وَ $\mathbf{b}$: انظر ملحق الإجابات

22 $\overrightarrow{QR}$ 23 $\overrightarrow{AQ}$ 24 $\overrightarrow{RQ}$

25 كيفَ يُمكِنُ تحديدُ إذا كانَ $\overline{OA}$ وَ $\overline{BC}$ متوازيَيْنِ في الشكلِ $OACB$؟

26 **رياضةٌ:** في سباقٍ للمشي، انطلقَتْ رندُ منْ نقطةِ البدايةِ، فقطعَتْ مسافةَ 15 km في اتجاهِ الشرقِ، ثمَّ اتجهَتْ شمالًا مسافةَ 17 km، كمْ كيلومترًا تبعدُ رندُ عنْ نقطةِ البدايةِ؟ 22.67 km تقريبًا.

27 **نزهةٌ بحريةٌ:** أبحرَ قاربٌ سياحيٌّ مسافةَ 40 km جنوبًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 70 km في اتجاهِ الشرقِ. أَجِدُ اتجاهَ القاربِ وبُعْدَهُ عنْ نقطةِ انطلاقِهِ. انظر ملحق الإجابات

96

أخطاء مفاهيمية:

عند حل الأسئلة: 11, 12, 13، قد يخطئ بعض الطلبة في التعبير عن طرح متجهين بكتابة عكس الحل الصحيح، مثل كتابة $\mathbf{s}-\mathbf{r}$ بدلًا من $\mathbf{r}-\mathbf{s}$؛ لذا الفت انتباه الطلبة إلى اتجاه السهم المرسوم على المتجه، وأن عكس الاتجاه الذي يشير إليه السهم عند الحركة يدل على معكوس المتجه؛ ما يعني أنه يجب كتابة المتجه بإشارة سالبة. وكذلك كتابة المتجه المطلوب في صورة محصلة (مجموع) متجهين.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة (1–13) في مجموعات، وتجوَّل بينهم مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- ناقِش الطلبة في حل الأسئلة (14–29)، ثم شارِكهم في حلها على اللوح.
- وجِّه الطلبة إلى تعديل وحدة قياس السرعة في السؤال 29 لتصبح km /h بدلًا من km في كتبهم.
- أخبر الطلبة أنه يمكنهم استعمال برمجية جيوجبرا للتحقُّق من حل أسئلة الدرس في البيت، أو عن طريق تطبيق الهاتف، أو في مختبر المدرسة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.
- اطلب إلى الطلبة حل بقية الأسئلة بعد الحصة، ثم عرضها عليك للتحقُّق من صحة الحل.

الواجب المنزلي:

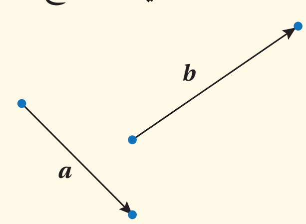
- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الحادية والعشرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

- أشرك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات – حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.
- عند حل السؤال 37، ذكِّر الطلبة بخصائص المثلث متطابق الأضلاع: ارتفاعاته منصفات لأضلاعه (أي إنها القطع المتوسطة للمثلث)، ومنصفات لزواياه، وهي تتقاطع في مركزه الذي يقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 2:1 من جهة الرأس.

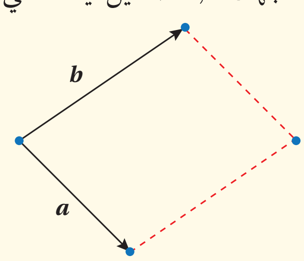
5 الإثراء

- وضِّح للطلبة كيفية إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة أُخرى تُسمّى قاعدة متوازي الأضلاع؛ إذ يمكن إيجاد محصلة المتجهين a, b في الشكل المجاور باتباع الخطوات الآتية:

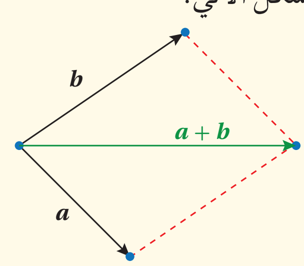


الخطوة 1: سحب المتجه b بحيث تنطبق نقطة بدايته على نقطة بداية المتجه a.

الخطوة 2: إكمال رسم متوازي الأضلاع، بحيث يكون المتجهان a, b ضلعين فيه كما في الشكل الآتي:



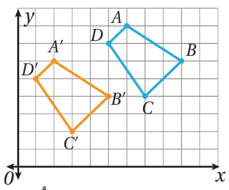
الخطوة 3: رسم قُطْر متوازي الأضلاع المار بتقاطع المتجهين لتمثيل المتجه $a + b$ كما في الشكل الآتي:



28 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

29 **سباقُ زعانفَ:** شاركَ سامي في سباقِ الزعانفِ الذي نظَّمَهُ اتحادُ الرياضاتِ البحريةِ على شاطئِ خليجِ العقبةِ. سبحَ سامي بسرعةٍ متجهةٍ مقدارُها 3 km في اتجاهِ الجنوبِ، لكنَّهُ واجهَ أمواجًا سرعتُها 1.8 km، وقدْ دفعَتْهُ إلى اتجاهِ الشرقِ، فغيَّرَ مقدارَ سرعتِهِ واتجاهَها ليقاومَ الأمواجَ، ويفوزَ بالسباقِ. أَجِدُ السرعةَ المتجهةَ التي يجبُ أنْ يسبحَ بها سامي. انظر ملحق الإجابات

تحويلاتٌ هندسيةٌ: أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $ABCD$ المجاورِ باستعمالِ المتجهِ $\langle a, b\rangle$، حيثُ a مقدارُ الانسحابِ على محورِ x، وَ b مقدارُ الانسحابِ على محورِ y:



30 أَجِدُ $\langle a, b\rangle$. $\langle a, b\rangle = \langle -4, -2\rangle$

31 إذا أُجرِيَ انسحابٌ للشكلِ $A'B'C'D'$ باستعمالِ المتجهِ $\langle 3, -4\rangle$، فأرسمُ الشكلَ الناتجَ منَ الانسحابِ، وأُسمّيهِ $A''B''C''D''$. انظر ملحق الإجابات

32 أُحدِّدُ المتجهَ $\langle f, e\rangle$ الذي يصفُ انسحابَ الشكلِ $ABCD$ إلى الشكلِ $A''B''C''D''$. $\langle f, e\rangle = \langle -1, -6\rangle$

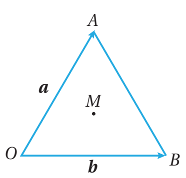
33 انطلقَتْ سيارةٌ منَ المدينةِ A إلى المدينةِ B، فقطعَتْ مسافةَ 200 km في اتجاهِ 040°، ثمَّ غيَّرَتِ اتجاهَ حركتِها إلى 050°، وقطعَتْ مسافةَ 150 km. أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ B وبُعْدَها عنِ النقطةِ A. انظر ملحق الإجابات

34 إذا كانَتْ $\langle 3, x\rangle + y^2\langle 3, 5\rangle - \langle 15, 7\rangle = 0$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منَ العددَيْنِ x وَ y. $x = -13, y = \pm 2$

مهارات التفكير العليا

35 **تبريرٌ:** انطلقَ يختٌ في رحلةٍ بحريةٍ منَ الميناءِ، فقطعَ مسافةَ 60 km شمالًا، ثمَّ تحرَّكَ مسافةَ 40 km شرقًا، ثمَّ مسافةَ 16 km جنوبًا، فوصلَ إلى جزيرةٍ. أَجِدُ بُعْدَ الجزيرةِ عنِ الميناءِ، ثمَّ أَجِدُ المسافةَ التي قطعَها اليختُ في رحلتِهِ البحريةِ حتى وصلَ الجزيرةَ، وأُقارِنُ بينَهُما. انظر ملحق الإجابات

تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ OAB مثلثًا مُتطابقَ الأضلاعِ، ويُمثِّلُ فيهِ M مركزَ المثلثِ؛ ما يعني أنَّ المستقيمَ الواصلَ بينَ رأسِ المثلثِ والنقطةِ M عموديٌّ على الضلعِ المقابلِ:



36 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. انظر ملحق الإجابات

37 أُثبِتُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(a + b)$ انظر ملحق الإجابات

97

- اطلب إلى الطلبة إيجاد محصلة متجهين هندسيًّا بطريقة قاعدة المثلث تارة، وبطريقة قاعدة متوازي الأضلاع تارة أُخرى، ثم تدوين مزايا كل طريقة.
- اطرح على الطلبة السؤال الآتي:
  » أيُّ الطريقتين تُفضِّلون؟

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة البدء بتنفيذ الخطوة (4) من المشروع.
- ذكِّر الطلبة بأن مقياس الرسم في الخريطة يُعبِّر عن النسبة بين البُعْد على الخريطة والبُعْد الحقيقي على الأرض.

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب اختيار فكرة فهمها من الدرس، وكتابة سؤال عنها في ورقة، أو اختيار فكرة لم يفهمها جيدًا، وكتابة سؤال عنها في ورقة.
- اطلب إلى كل طالب تسليمك ورقته.
- بعد الاطلاع على الأوراق جميعها، خطِّط لكيفية معالجة جوانب الضعف التي ترصدها.

الدرس 3

الضربُ القياسيُّ
Scalar Product

فكرةُ الدرس ضربُ المتجهاتِ، وإيجادُ قياسِ الزاويةِ بينَ متجهيْنِ.

المصطلحات الضربُ القياسيُّ.

مسألةُ اليوم دفعَ محمدٌ عربةَ طفلتِهِ بقوةٍ مقدارُها 70 N، وبزاويةٍ مقدارُها $54°$ مسافةَ 18 m. ما مقدارُ الشغلِ الذي بذلَهُ لدفعِ العربةِ بوحدةِ جول (J)، وبإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ؟

تعرَّفْتُ سابقًا العملياتِ على المتجهاتِ، مثلَ ضربِ متجهٍ في عددٍ ثابتٍ، وسأتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفيةَ إيجادِ ناتجِ ضربِ متجهيْنِ. **الضربُ القياسيُّ** (scalar product) هوَ عمليةٌ جبريةٌ بينَ متجهيْنِ، تنتجُ منْها كميةٌ قياسيةٌ، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$، وتُقرَأُ: $\boldsymbol{v}$ dot $\boldsymbol{w}$

مفهومٌ أساسيٌّ

الضربُ القياسيُّ:

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$، وَ $\boldsymbol{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$، فإنَّ: $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

مثال 1

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle 2, 8 \rangle$، وَ $\boldsymbol{w} = \langle -5, 4 \rangle$، فأجِدْ $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$:

صيغةُ الضربِ القياسيِّ: $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

بالتعويضِ: $= 2 \times -5 + 8 \times 4$

بالتبسيطِ: $= -10 + 32$

$= 22$

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle -3, 2 \rangle$، وَ $\boldsymbol{u} = \langle 6, 9 \rangle$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

a) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ 0 b) $\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u}$ 0 c) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}$ 117

أتعلّم
يُسمّى الضربُ القياسيُّ أيضًا الضربَ النقطيَّ Dot product

أتعلّم
لأيِّ متجهٍ $\boldsymbol{u}$، فإنَّ: $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$

98

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يجد ناتج الضرب القياسي لمتجهين.
- يتعرف العلاقة بين الضرب القياسي ومقدار المتجه.
- يجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يحسب الشغل الناتج من تأثير قوة في تحريك جسم ما مسافة محددة.

التعلم القبلي:

- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها في عدد حقيقي.
- حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بما تعلموه عن المتجهات في الدرسين السابقين، ثم اطرح عليهم السؤال الآتي:

» إذا كان $\boldsymbol{u} = \langle 3, -2 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle 4, 1 \rangle$ ، فجد كلًّا ممّا يأتي:

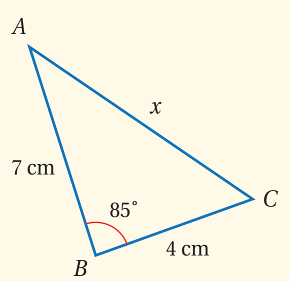
a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ $\langle 7, -1 \rangle$

b) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ $\langle 4, 3 \rangle$

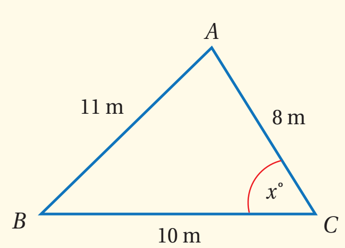
c) $2\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{u}$ $\langle 17, -4 \rangle$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x في المثلثين الآتيين:

1 7.8 cm



2 74.4°



ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  - » ما المقصود بالشغل؟ الطاقة المبذولة لتحريك جسم ما مسافة محددة.
  - » علامَ يعتمد مقدار الشغل؟ يعتمد على مقدار القوة المُؤثِّرة، واتجاهها، والمسافة التي تَحرَّكها الجسم.
  - » ما وحدة قياس الشغل؟ الجول؛ وهو مقدار الشغل المبذول عندما تُؤثِّر قوة مقدارها نيوتن واحد في جسم يتحرك مسافة متر واحد في اتجاه تلك القوة.
  - » هل تبذل شغلًا إذا حاولت دفع حائط غرفة الصف؟ لا؛ لأنه لن يتحرك.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.
- أخبر الطلبة أنهم سيتعلمون في هذا الدرس كيفية حساب الشغل.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الضرب القياسي (scalar product)، والشغل (work).

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم الضرب القياسي لمتجهين، وكيفية حسابه إذا أُعطِي متجهان بالصورة الإحداثية.

مثال 1

ناقِش الطلبة في حل هذا المثال الذي يُبيِّن كيفية إيجاد الضرب القياسي لمتجهين، مُوضِّحًا علاقة ناتج الضرب القياسي للمتجه في نفسه بمقدار المتجه (أو طوله) عندما يحل الطلبة التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**).

مثال إضافي

إذا كان $\boldsymbol{u} = \langle \frac{3}{2}, -4 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle -6, -3 \rangle$، فجد $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. 3

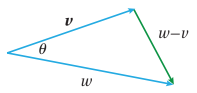
إرشادات للمعلم

وضِّح للطلبة خطوات استنتاج الصيغة الخاصة بإيجاد قياس الزاوية بين متجهين من قانون جيوب التمام، مُبيِّنًا أنه يمكن استعمال هذه الصيغة لإيجاد ناتج الضرب القياسي لمتجهين إذا عُلِم طول كلٍّ منهما، وقياس الزاوية بينهما.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وَ $\boldsymbol{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنَّ طولَ المتجهِ المرسومِ باللونِ الأخضرِ في الشكلِ المجاورِ هوَ $|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|$ ، حيثُ: $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v} = \langle w_1-v_1 , w_2-v_2 \rangle$



وباستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، فإنَّ:

$$|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2\,|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = |\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2\,|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta$$

$$= w_1^2 + w_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta$$

$$\cancel{w_1^2} - 2w_1 v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{w_2^2} - 2 w_2 v_2 + \cancel{v_2^2} = \cancel{w_1^2} + \cancel{w_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} - 2|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$$

$-2w_1v_1 - 2w_1v_1 = -2|\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta$ بالتبسيطِ

$w_1 v_1 + w_2 v_2 = |\boldsymbol{w}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta$ بالتبسيطِ

$v_1 w_1 + v_2 w_2 = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}| \cos\theta$ الخاصيةُ التبديليةُ

$$\boldsymbol{v} . \boldsymbol{w} = |\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}| \cos\theta$$

ولذلكَ، فإنَّ:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}$$

مفهومٌ أساسيٌّ

يُمكِنُ إيجادُ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ$\boldsymbol{b}$ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\;|\boldsymbol{b}|\;\cos\theta$، حيثُ $0° \leq \theta \leq 180°$ الزاويةُ المحصورةُ بينَ المتجهيْنِ.

مثال 2

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8 \rangle$، وَ $\boldsymbol{b} = \langle 3, 4 \rangle$

الخطوةُ 1: أَجِدُ مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{a}$.

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ صيغةُ مقدارِ المتجهِ

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$ بالتعويضِ

$= \sqrt{100} = 10$ بالتبسيطِ

مثال 2

- ناقِش الطلبة في حل هذا المثـال الذي يُبيِّن خطوات إيجـاد قيـاس الزاوية بيـن متجهين غيـر صفريين، واسألهم عن الحالات المختلفة للعلاقة بين متجهين، ثم اربطها بناتج الضرب القياسي.

مثال إضافي

- جد قياس الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{w} = \langle 1, -5 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle -4, 2 \rangle$ $127.9°$

أخطاء شائعة: قد يخطئ بعض الطلبة في حسـاب قياس الزاوية بين متجهين؛ لذا وجِّههم إلى رسـم المتجهين على المستوى الإحداثي، لملاحظة الزاوية بين المتجهين، ومقارنتها بإجاباتهم؛ للتحقُّق من معقولية الحل.

منهاجي
متعة التعليم الهادف

إرشادات للمعلم

أخبر الطلبة أنه توجد تسميات أُخرى للضرب القياسي، منها: الضرب النقطي (dot product)، والضرب الداخلي (inner product) .

مثال 3

- أخبر الطلبة أن الضرب القياسي لمتجهين متعامدين يساوي صفرًا، مُبيِّنًا سبب ذلك.
- وضِّح للطلبة أنه إذا كان الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين يساوي صفرًا فإن المتجهين متعامدان.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

مثال إضافي

- حدِّد إذا كان المتجهان في كلٍّ ممّا يأتي متعامدين، أو متوازيين، أو غير ذلك:

a) $\boldsymbol{u} = \langle 2, 4\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -8, 4\rangle$ متعامدان

b) $\boldsymbol{u} = \langle 1, -2\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -3, 6\rangle$ متوازيان

c) $\boldsymbol{u} = \langle -2, 4\rangle, \boldsymbol{v} = \langle -1, 5\rangle$ غير ذلك

d) $\boldsymbol{u} = \langle 4, 5\rangle, \boldsymbol{v} = \langle 10, -8\rangle$ متعامدان

الخطوةُ 2: أجِدُ مقدارَ المتجهِ $\boldsymbol{b}$.

صيغةُ مقدارِ المتجهِ $|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

بالتعويضِ $= \sqrt{3^2 + 4^2}$

بالتبسيطِ $= \sqrt{25} = 5$

الخطوةُ 3: أجِدُ الضربَ القياسيَّ بينَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 . b_1 + a_2 . b_2$

بالتعويضِ $= 6\times3 + 8\times4$

بالتبسيطِ $= 18 + 32$

$= 50$

الخطوةُ 4: أُعوِّضُ القيمةَ الناتجةَ منَ الخطوةِ السابقةِ في الصيغةِ الأُخرى لقانونِ الضربِ القياسيِّ.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$

بالتعويضِ $= \frac{50}{10 \times 5} = 1$

$\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

بما أنَّ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ صفرٌ، فهُما متوازيانِ.

تُستخدَمُ المتجهاتُ في إنتاجِ الألعابِ الإلكترونيةِ؛ فهيَ تساعدُ المبرمجينَ على ضبطِ المواقعِ والاتجاهاتِ لحركةِ الأجسامِ التي يتحكَّمُ فيها اللاعبونَ.

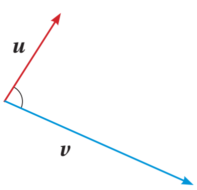
إرشادٌ

أرسمُ المتجهيْنِ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا وضعَ التوازي بينَهُما.

أتحقق من فهمي

أجِدُ قياسَ الزاويةِ θ المحصورةِ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{u} = \langle -1, 1\rangle$ وَ $\boldsymbol{v} = \langle 2, 7\rangle$ $61°$ تقريبًا.

إذا كانَ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$ متجهيْنِ غيرَ صفريينِ، وكانَتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَهُما قائمةً، فإنَّ المتجهيْنِ يكونانِ متعامدينِ، ويكونُ ناتجُ الضربِ القياسيِّ بينَهُما صفرًا؛ لأنَّ $\cos 90° = 0$



منهاجي متعة التعليم الهادف

مثال 3

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $u = \langle 2, 3 \rangle$ وَ $v = \langle -6, 4 \rangle$ متعامدَيْنِ أمْ لا.

صيغةُ الضربِ القياسيِّ $u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

بالتعويضِ $= 2 \times -6 + 3 \times 4$

بالتبسيطِ $= -12 + 12$

$= 0$

بما أنَّ $u \cdot v = 0$ ، فإنَّ المتجهيْنِ متعامدانِ.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $u = \langle 1, 0 \rangle$ وَ $v = \langle -5, 3 \rangle$ متعامدَيْنِ أمْ لا.

غير متعامديـــن؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا، وإنما يساوي 3

توجدُ تطبيقاتٌ عمليةٌ عِدَّةٌ على الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ، أهمُّها حسابُ الشغلِ W الناتجِ منْ تأثيرِ قوةٍ ثابتةٍ F بزاويةٍ مُحدَّدةٍ θ على جسمٍ ما؛ لتحريكِهِ منْ نقطةٍ إلى أُخرى مسافةً مقدارُها d وحدةً. فالشغلُ هوَ كميةٌ قياسيةٌ تساوي ناتجَ الضربِ القياسيِّ لمتجهِ القوةِ في متجهِ الإزاحةِ، ووحدةُ قياسِهِ هيَ جول (J). يُمكِنُ إيجادُ مقدارِ الشغلِ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$W = |F|\,|d|\cos\theta$$

أتعلّمُ

وَحدةُ قياسِ الشغلِ هيَ نيوتن - متر، وتُسمّى الجول، ويُرمَزُ إليْها بالرمزِ J

مثال 4: من الحياة

فيزياءُ: سحبَ عاملٌ صندوقًا بقوةٍ مقدارُها $F = 13$ N ، وبذلَ شغلًا مقدارُهُ $W = 20$ J لسحبِ الصندوقِ مسافةً أفقيةً مقدارُها $d = 18$ m . ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

قانونُ الشغلِ $W = |F|\,|d|\cos\theta$

بالتعويضِ $20 = 13 \times 18 \times \cos\theta$

بالتبسيطِ $20 = 234 \times \cos\theta$

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في مفهوم الشغل، وصيغة إيجاده، ثم اكتب على اللوح وحدتي القوة والشغل.
- ناقِش الطلبة في حل هذا المثال.

إرشادات للمعلم

القوة: مُؤثِّرٌ يؤدي إلى تغيير حالة الجسم الحركية. والقوة من الكميات المتجهة، وهي تقاس بوحدة نيوتن. أمّا الشغل فهو من الكميات المرتبطة بالقوة؛ إذ تبذل القوة شغلًا على جسم ما عندما تُحرِّكه في اتجاه ما بمقدار إزاحةٍ معين، ويقاس الشغل بوحدة جول.

مثال إضافي

تدفع سلوى مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 17 N، وتصنع ذراع المكنسة زاوية قياسها 65° مع أرضية الغرفة. ما الشغل (بالجول) الذي تبذله سلوى لتحريك المكنسة مسافة 4 m بإهمال قوة الاحتكاك؟ 28.7 J تقريبًا.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسـائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسـئلة (1–10) ضمن مجموعات.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِـدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الـواردة فـي الصفحة الثانيـة والعشـرين من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التـي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسـب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب المنزلي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

بالتبسيطِ $\frac{20}{234} = \cos\theta$

معكوسُ جيبِ التمامِ $\cos^{-1}(0.0855)$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $\theta = 85.1°$

أتحقق من فهمي

سـحبَ فارسٌ عربةَ، فبذلَ شغلًا مقدارُهُ **13 J**، بقوةٍ مقدارُها **50 N**، مسافةَ $d = 30$ m

ما قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ قوةِ السحبِ واتجاهِ المسافةِ المقطوعةِ (بإهمالِ قوةِ الاحتكاكِ) لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ؟

89.5° تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $a = \langle 6, 8\rangle$, $b = \langle 4, -3\rangle$ 0

2) $u = \langle -3, 11\rangle$, $v = \langle -9, 4\rangle$ 71

3) $c = \langle -12, 43\rangle$, $v = \langle 22, 14\rangle$ 338

4) $d = \langle 21, 32\rangle$, $e = \langle -21, 25\rangle$ 359

5) إذا كانَ $|b| = 6$، وَ $|a| = 9$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ a وَ b هوَ $42°$، فأَجِدُ ناتجَ $a \bullet b$ 40.13

6) إذا كانَ $|b| = 76$، وَ $|a| = 34$، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ a وَ b هوَ $120°$، فأَجِدُ ناتجَ $a \bullet b$ −1292

7) أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ $a = \langle 7, 10\rangle$ ، وَ $b = \langle 4, -10\rangle$ لأقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ. 123.2°

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

8) $c = \langle 2, 4\rangle$, $d = \langle -24, 12\rangle$
0, 90°

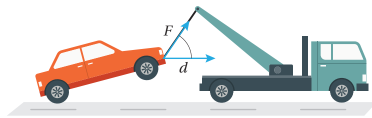
9) $a = \langle 4, 16\rangle$, $k = \langle 8, -2\rangle$
0, 90°

10) أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ $e = \langle 3, 4\rangle$ ، وَ $a = \langle 11, -8\rangle$ متعامديْنِ أمْ لا، مُبرِّرًا إجابتي.

$a . e = 1$ إذن، المتجهان غير متعامدين؛ لأن ناتج ضربهما القياسي لا يساوي صفرًا.

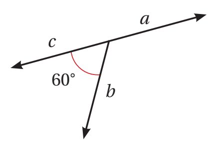
11) إذا كانَ $r = \langle 3, -4\rangle$ ، وَ $s = \langle b, b+2\rangle$ متجهيْنِ متعامديْنِ، فأَجِدُ قيمةَ b.

$3b - 4(b+2) = 0$
$3b - 4b - 8 = 0$
$-b = 8$, $b = -8$



12 **سيّاراتٌ:** تسحبُ شاحنةٌ سيّارةً كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَ مقدارُ قوةِ السحبِ $F = 34N$، والمسافةُ المقطوعةُ $d = 12$ km، وشغلُ الشاحنةِ المبذولُ $W = 46$ J، فأَجِدُ قياسَ زاويةِ السحبِ.

$\theta = \cos^{-1}(46 \div 408000) \approx 89.9935°$



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $|\boldsymbol{a}| = 2$، وَ $|\boldsymbol{b}| = 4$، وَ $|\boldsymbol{c}| = 5$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

13 $a \bullet b$ -4 **14** $b \bullet c$ 10 **15** $a \bullet c$ -10

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $w = 70 \times 18 \times \cos 54° \approx 74$ J

مهارات التفكير العليا (17–19) انظر ملحق الإجابات

برهانٌ: إذا كانَتْ $\boldsymbol{c, b, a}$ متجهاتٍ، وكانَ $\boldsymbol{0}$ المتجهَ الصفريَّ، فأُثبِتُ صحَّةَ كلٍّ ممّا يأتي:

17 $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$ **18** $\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$ **19** $\boldsymbol{0} \bullet \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** إذا كانَ $\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} = 30$، وَ $\boldsymbol{q} = \langle 6, 2 \rangle$، فأَجِدُ قيمةً مُحتمَلةً للمتجهِ $\boldsymbol{p}$. انظر ملحق الإجابات

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَجِدُ متجهًا يُعامِدُ المتجهَ $\boldsymbol{a} = \langle -8, -2 \rangle$ انظر ملحق الإجابات

22 **تبريرٌ:** أُبيِّنُ باستعمالِ المتجهاتِ أنَّ المثلثَ الذي رؤوسُهُ النقاطُ: $(-2, -4)$, $(1, 5)$, $(6, -2)$ مُتطابِقُ الضلعيْنِ، ثمَّ أَجِدُ قياساتِ جميعِ زواياهُ، مُبرِّرًا إجابتي. انظر ملحق الإجابات

23 **تبريرٌ:** إذا كانَ المتجهانِ $\boldsymbol{a} = \langle -1, r \rangle$، وَ $\boldsymbol{b} = \langle 2, -3 \rangle$ متوازييْنِ، فما قيمةُ r؟

انظر ملحق الإجابات

تنبيه: نبِّه الطلبة إلى تعديل النقطة $(-2, 4)$ في السؤال 22 لتصبح $(-2, -4)$.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، ولكن يجب عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة – ضمن مجموعات– حل المسائل في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إلى أفراد بعضها بيان كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح الآخرين فرصة نقد إجابات زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير إجاباتهم.

5 الإثراء

إذا كان للمتجهين $\boldsymbol{v}$ و $\boldsymbol{u}$ المقدار نفسه، فأثبِت أن $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ متعامدان.

تعليمات المشروع

- اطلب إلى الطلبة تنفيذ الخطوة (5) من المشروع.
- وجِّه الطلبة إلى تنظيم إجراءاتهم وتوثيقها بنسخ صورة للشاشة (print screen) في كل خطوة.
- أخبر الطلبة بموعد عرض مشروع الوحدة.

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة – كتابةً– بيان كيف يمكن تحديد إن كان متجهان معطيان متعامدين أم متوازيين، ثم تحديد المتجهين المتعامدين والمتجهين المتوازيين من بين المتجهات الآتية:

$\boldsymbol{u} = \langle 4, 6 \rangle, \boldsymbol{v} = \langle -3, -6 \rangle,$

$\boldsymbol{w} = \langle -8, 4 \rangle, \boldsymbol{z} = \langle 10, 15 \rangle$

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}$: متعامدان. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$: متعامدان

الوحدة 5

التقويم الختامي:

- راجِع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعـات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأسئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأسئلة ليحلها الطلبة واجبًا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتهم في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أن الأسئلة (26 –30) وردت ضمن أسئلة الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

ملحوظة: **تُخصَّص حصتان (90 دقيقة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.**

إرشادات للمعلم

وجِّه الطلبة إلى تعديل نص السؤالين 23 و24 في كتبهم كما وردا في هذا الدليل.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإنَّ $|\boldsymbol{v}|$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كانَ $A(2, 5), B(-1, 7)$ ، فإنَّ $\overrightarrow{BA}$ هوَ:

a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارةُ الصحيحةُ في ما يأتي هيَ:

a) مقدارُ المتجهِ $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدارُ المتجهِ $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدارُ المتجهِ $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدارُ المتجهِ $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانَتْ $B(3, y), A(0, 2)$ ، وكانَ $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإنَّ y تساوي:

a) 5 b) -1

c) $5, -1$ d) $7, -3$

إذا كانَ $\boldsymbol{v} = \langle 1, 5 \rangle$، وَ $\boldsymbol{u} = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأُجيبُ عنِ الأسئلةِ: 5, 6, 7:

5 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ تساوي:

a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كانَ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$، فإنَّ $|\boldsymbol{p}|$ تساوي:

a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوسُ المتجهِ $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ هوَ:

a) $\langle -2,4 \rangle$ b) $\langle 2,-4 \rangle$

c) $\langle 4,6 \rangle$ d) $\langle -4,-6 \rangle$

8 إذا كانَ $\boldsymbol{a} = \langle 2,-3 \rangle, \boldsymbol{b} = \langle 3,4 \rangle$، فإنَّ $\boldsymbol{a} \cdot 2\boldsymbol{b}$ تساوي:

a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانَتِ النقاطُ A, B, C, D نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، حيثُ $A(4, -1)$, $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأَجِدُ إحداثيَّيِ النقطةِ C إذا كانَ:

9 $\overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{AB}$ $C(8, 3)$

10 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DB}$ $C(\frac{16}{3}, \frac{-1}{3})$

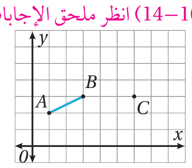
أُحدِّدُ في ما يأتي العباراتِ الصحيحةَ، مُصحِّحًا الخطأَ في غيرِ الصحيحِ منْها: (11–13) انظر ملحق الإجابات

11 المتجهانِ المتساويانِ لهُما نفسُ المقدارِ.

12 المتجهانِ المتوازيانِ لهُما نفسُ المقدارِ والاتجاهِ.

13 لأيِّ متجهيْنِ: $\boldsymbol{v}$ وَ $\boldsymbol{u}$ ، فإنَّ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$

أنسخُ الرسمَ البيانيَّ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لأُجيبَ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ: (14–16) انظر ملحق الإجابات



14 إذا كانَ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ E على المستوى الإحداثيِّ.

15 إذا كانَ $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$، فأُحدِّدُ النقطةَ D على المستوى الإحداثيِّ.

16 إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ ، فأُحدِّدُ النقطةَ M على المستوى الإحداثيِّ.

17 إذا كانَتْ $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$ ، فأَجِدُ قيمةَ الثابتِ k. $k = 4$

104

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفيــن: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبــار (TIMSS): كل أربع ســنوات. ويهدف هذا الاختبــار إلى قياس مســتوى تقدُّم الطلبة فــي التحصيل الدراســي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييــم جودة التعليم فــي الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رســم السياسة التربوية على المســتوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: فــي مجــالات القــراءة، والرياضيات، والعلــوم. وفــي ما يخــص الرياضيــات، فــإن المعرفة الرياضيــة - وفق هــذا البرنامج- يُعبِّر عنهــا بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفســيرها في أوضاع مختلفــة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واســتعمال المفاهيم والإجــراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقيــة وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعينهــم على تقييم النجاحــات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّــن عليــك - عزيزي المعلِّــم- تشــجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأســئلة، والمشــاركة في الدراسات وبرامــج التقييم الدولية بكل جديــة، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

إذا كانَ $\boldsymbol{u} = \langle -1, 5\rangle$، وَ $\boldsymbol{v} = \langle 2, -1\rangle$، وَ $\boldsymbol{w} = \langle 4, -2\rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

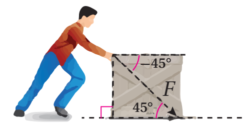
18 $-3(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$ $\langle 6,-3\rangle$

19 $\boldsymbol{v}\cdot 2\boldsymbol{u}$ 20

20 $\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w})$ -4

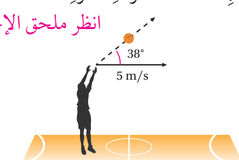
21 الزاويةُ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{v}$ وَ $\boldsymbol{w}$. $0°$

22 دفعَ عاملٌ صندوقًا بقوةِ 78 N، وبزاويةِ $-45°$ كما في الشكلِ التالي. أَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بذلَهُ العاملُ لتحريكِ الصندوقِ مسافةَ 12 m 661.9J

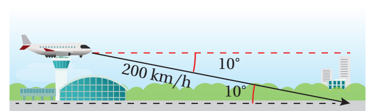


23 ركضَ حسامٌ في اتجاهِ السلَّةِ في أثناءِ مباراةِ دوري كرةِ السلَّةِ بسرعةٍ أفقيةٍ مقدارُها 5 m/s ، وقذفَ الكرةَ بسرعةٍ مقدارُها 20 m/s ، وبزاويةٍ قياسُها $38°$ معَ الأفقيِّ. أَجِدُ محصلةَ سرعةِ الكرةِ.

انظر ملحق الإجابات



24 هبطَتْ طائرةٌ بسرعةٍ مقدارُها 200 km/h، وبزاويةِ انخفاضٍ قياسُها $10°$. أكتبُ السرعةَ المتجهةَ للطائرةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. انظر ملحق الإجابات



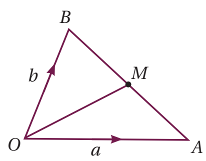
25 أقلعَتْ طائرتانِ معًا منَ المطارِ في الوقتِ نفسِهِ. وقدْ رصدَ برجُ المراقبةِ حركةَ الطائرتيْنِ، فوجدَ بعدَ ثوانٍ عِدَّةٍ أنَّ $\boldsymbol{a} = \langle 6, 8\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الأولى، وأنَّ $\boldsymbol{b} = \langle 4, -3\rangle$ يُمثِّلُ مسارَ الطائرةِ الثانيةِ . هلْ يتعامدُ مسارا الطائرتيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

نعم، يتعامدان؛ لأن $\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b} = 0$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

26 أَجِدُ الزاويةَ θ بينَ المتجهيْنِ $\boldsymbol{p}$ وَ $\boldsymbol{q}$ إذا كانَ $\boldsymbol{p} = \langle 5, -1\rangle, \boldsymbol{q} = \langle -2, 3\rangle$ $135°$

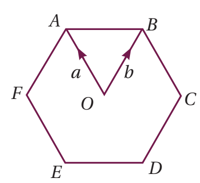
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهيْنِ $\overrightarrow{OA}$ وَ $\overrightarrow{OB}$ المرسومينِ في الوضعِ القياسي، حيثُ O نقطةُ الأصلِ، وَ M نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{AB}$:



27 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$. انظر ملحق الإجابات

28 أُبرهِنُ أنَّ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ انظر ملحق الإجابات

الشكلُ المجاورُ هوَ سداسيٌّ منتظمٌ، مركزُهُ O، وفيهِ $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$:



29 أكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{AB}$ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$.
انظر ملحق الإجابات

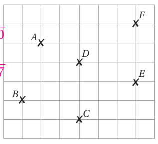
30 إذا مُدَّ $\overline{AB}$ على استقامتِهِ حتى النقطةِ K بحيثُ كانَتْ $AB : BK = 1 : 2$، فأكتبُ المتجهَ $\overrightarrow{CK}$ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$ وَ $\boldsymbol{b}$.
انظر ملحق الإجابات

كتاب التمارين

الدرسُ 1
المتجهاتُ في المستوى الإحداثيِّ

الوحدةُ 7: المتجهاتُ

إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 2, -1 \rangle$، فأكتبُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أَجِدُ مقدارَهُ:



1. $\overrightarrow{AF}$ $\langle 5,1 \rangle , \sqrt{26}$
2. $\overrightarrow{AB}$ $\langle -1, -3 \rangle , \sqrt{10}$
3. $\overrightarrow{CA}$ $\langle -2, 4 \rangle , 2\sqrt{5}$
4. $\overrightarrow{EB}$ $\langle -6, -1 \rangle , \sqrt{37}$
5. $\overrightarrow{EF}$ $\langle 0, 3 \rangle , 3$
6. $\overrightarrow{DC}$ $\langle 0, -3 \rangle , 3$

7. أكتبُ كلًّا منْ $\overrightarrow{BD}$، وَ $\overrightarrow{BF}$ بالصورةِ الإحداثيةِ. ماذا أستنتجُ منْ موقعِ B، وَD، وَ F؟
انظر ملحق الإجابات

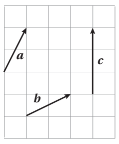
أستعملُ إحداثيَّي النقطةِ $A(6, 3)$ للإجابةِ عنِ المسائلِ الآتيةِ:

8. إذا كانَ $\overrightarrow{AB} = \langle 2, -5 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ B. $B(8, -2)$
9. إذا كانَ $\overrightarrow{AC} = \langle -3, 4 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ C. $C(3, 7)$
10. إذا كانَ $\overrightarrow{AD} = \langle 6, 0 \rangle$، فأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ D. $D(12, 3)$
11. **شاحناتٌ:** أكتبُ بالصورةِ الإحداثيةِ السرعةَ المتجهةَ لشاحنةٍ تسيرُ على طريقٍ مُنحدِرٍ، علمًا بأنَّ سرعتَها الأفقيةَ $v_x = 58 \text{ km/h}$، وسرعتَها الرأسيةَ $v_y = 37 \text{ km/h}$. $\langle 58, 37 \rangle$
12. يدفعُ صالحٌ مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارُها 272 N، وبزاويةٍ قياسُها $51°$ معَ المحورِ الأفقيِّ. أكتبُ متجهَ القوةِ بالصورةِ الإحداثيةِ. $\langle 171.18 , 211.38 \rangle$
13. إذا كانَ $|AB| = 7$، حيثُ $A(-1, 4)$ هيَ نقطةُ بدايتِهِ، والنقطةُ $B(x, 2)$ هيَ نقطةُ نهايتِهِ، فأَجِدُ قيمةَ x، مُبرِّرًا إجابتي.
انظر ملحق الإجابات

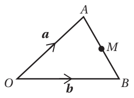
الدرسُ 2
جمعُ المتجهاتِ وطرحُها

الوحدةُ 7: المتجهاتُ

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ: (1–6) انظر ملحق الإجابات



1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
2. $-\boldsymbol{a}$
3. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$
4. $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$
5. $-\boldsymbol{c}$
6. $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$



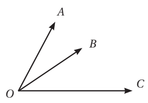
في الشكلِ المجاورِ، M هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{AB}$

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بدلالةِ المتجهيْنِ $\boldsymbol{a}$، وَ$\boldsymbol{b}$:

7. $\overrightarrow{AB}$ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$
8. $\overrightarrow{BO}$ $-\boldsymbol{b}$
9. $\overrightarrow{AM}$ $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$
10. $\overrightarrow{OM}$ $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
11. أُحدِّدُ على الشكلِ موقعَيِ النقطتيْنِ X، وَ Y، بحيثُ يكونَ $\overrightarrow{OX} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \overrightarrow{OY} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$. انظر ملحق الإجابات
12. أكتبُ $\overrightarrow{XY}$ بدلالةِ $\boldsymbol{a}$، وَ$\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$
13. ما المتجهاتُ الأُخرى المكافئةُ لـ $\overrightarrow{XY}$؟ $\overrightarrow{AB}$

إذا كانَ $\boldsymbol{a} = \langle 27, -15 \rangle, \boldsymbol{b} = \langle 9, -21 \rangle, \boldsymbol{c} = \langle -12, 0 \rangle$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

14. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ $\langle 39, -15 \rangle$
15. $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$ $\langle -45, 9 \rangle$
16. $3\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$ $\langle -45, 21 \rangle$
17. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ $\langle 30, 6 \rangle$



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ المتجهاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ O هيَ نقطةُ الأصلِ:

$\overline{OC} = \langle 6, 0 \rangle$ $\overline{OB} = \langle 4, 1 \rangle$ $\overline{OA} = \langle 2, 2 \rangle$ (18–20) انظر ملحق الإجابات

أكتبُ كلًّا منَ المتجهاتِ الآتيةِ بالصورةِ الإحداثيةِ، ثمَّ أرسمُهُ على الشكلِ:

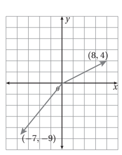
18. $\overrightarrow{AB}$
19. $\overrightarrow{AC}$
20. $\overrightarrow{BC}$
21. هلْ إجاباتُ المسائلِ السابقةِ كافيةٌ لإثباتِ أنَّ ABC مستقيمٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم، كافية. بما أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$، فإن $\overrightarrow{AC} || \overrightarrow{AB}$، وبما أنهما يشتركان في النقطة B فهما يُكوِّنان مستقيمًا واحدًا. وهذا يعني أن ABC خط مستقيم؛ أي إن النقاط A، وB، و C تقع على المستقيم نفسه.

الدرسُ 3
الضربُ القياسيُّ

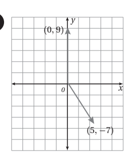
الوحدةُ 7: المتجهاتُ

أَجِدُ ناتجَ الضربِ القياسيِّ للمتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $a = \langle -1, 5 \rangle , b = \langle -6, -2 \rangle$ -4
2. $u = \langle 3, 9 \rangle , v = \langle 6, 5 \rangle$ 63
3. -92



4. -72

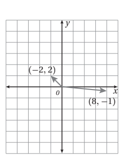


أُحدِّدُ إذا كانَ المتجهانِ u وَ v متوازييْنِ، أوْ متعامديْنِ، أوْ غيرَ ذلكَ في كلٍّ ممّا يأتي:

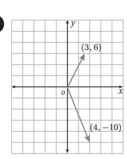
5. $u = \langle 4,-9 \rangle, v = \langle -9,4 \rangle$ غير ذلك.
6. $u = \langle -5, 2 \rangle, v = \langle -10, 25 \rangle$ غير ذلك.

أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ المتجهيْنِ في كلٍّ ممّا يأتي:

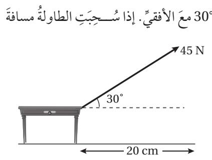
7. $142.1°$



8. $131.6°$

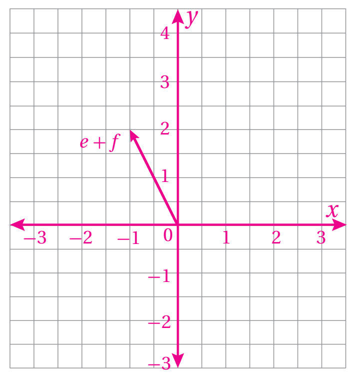


9. يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سحبَ طاولةٍ بقوةٍ مقدارُها 45 N، وزاويةٍ قياسُها $30°$ معَ الأفقيِّ. إذا سُحِبَتِ الطاولةُ مسافةَ 20 cm، فأَجِدُ مقدارَ الشغلِ الذي بُذِلَ.
7.8 J تقريبًا.

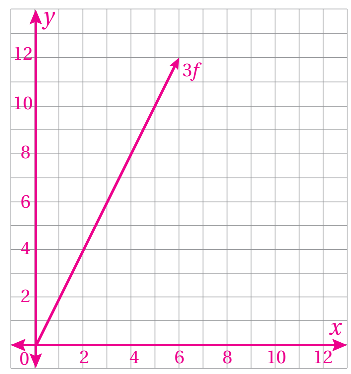


الدرس 2:

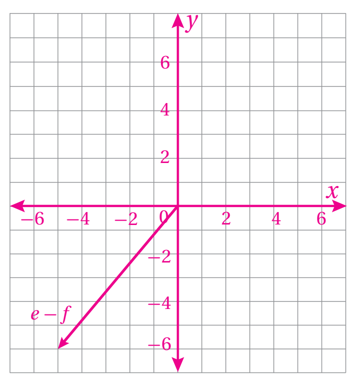
15)



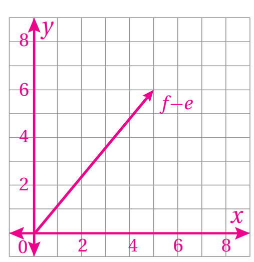
16)



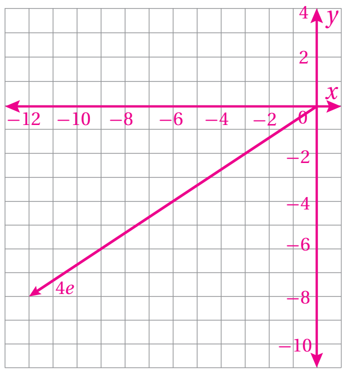
17)



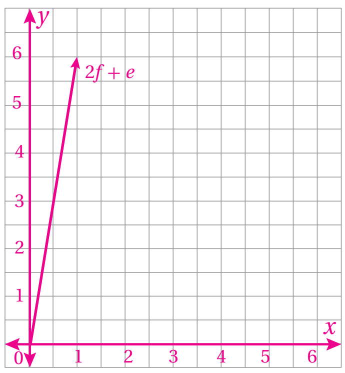
18)



19)



20)



21) $|\frac{1}{3}e| = \frac{1}{3}|e| = \frac{1}{3}\sqrt{(11)^2 + (-8)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{185} \approx 4.5$

$|4d - 3e| = \sqrt{(-13)^2 + (60)^2} = \sqrt{3769} \approx 61.4$

22)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\\
&= \frac{1}{2}(-2\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}b\\
&= -\frac{3}{2}\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

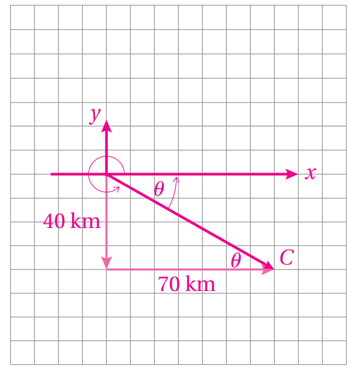
23)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC})\\
&= \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

24) $\overrightarrow{RQ} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a}$

25) بما أن $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2\boldsymbol{a}$، فإن $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{OA}$

إذن، $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{OA}$

27) انظر الشكل الآتي:



$|AC| = \sqrt{40^2 + 70^2}$

$= \sqrt{6500} \approx 80.62 \text{ km}$

$\tan\theta = \frac{40}{70}$

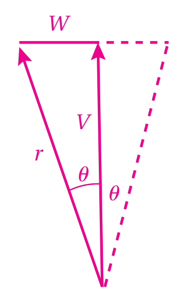
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29.7°$

أي إن القارب يَبعُد 80.62 km عـن نقطة انطلاقه A، وفي اتجاه 330.3° مع محور x الموجب.

28) $|v+w| = \sqrt{450^2 + 60^2} \approx 453.98 \text{ km/h}$

$\tan\theta = \frac{60}{450} = \frac{2}{15}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{15}\right) \approx 7.59°$

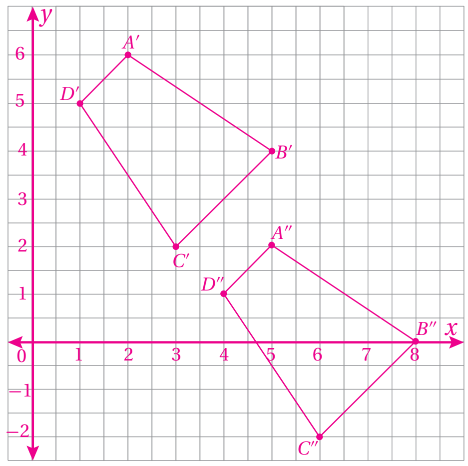


أي يتعيَّن على الربّان أن يحرف مسـار الطائرة بزاوية 7.59° نحو اليمين، ويزيد سـرعتها لتصبح 453.98 km، فتعيدها الرياح إلى اتجاه الشمال، وتخفض سرعتها حتى تصل 450 km/h

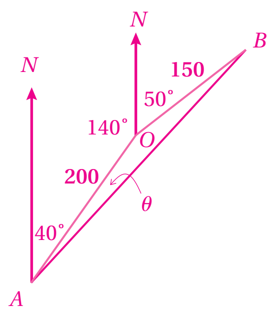
29) $|v+u| = \sqrt{3^2 + 1.8^2} = \sqrt{12.24} \approx 3.50 \text{ km/h}$

إذن، يجب أن يسـبح بسـرعة 3.5 km/h، وفي اتجاه 31° غرب الجنوب حتى ينهي السباق في موعده.

31) انظر الشكل الآتي:



33) انظر الرسم التقريبي المجاور:



$m\angle AON = 180° - 40° = 140°$

$m\angle AOB = 360° - (50° + 140°) = 170°$

$AB^2 = 200^2 + 150^2 - 2 \times 200 \times 150 \times \cos 170°$

$= 121588.47$

$AB = \sqrt{121588.47} \approx 348.70 \text{ km}$

$\frac{\sin\theta}{150} = \frac{\sin 170}{348.7}$

$\sin\theta = 0.075$

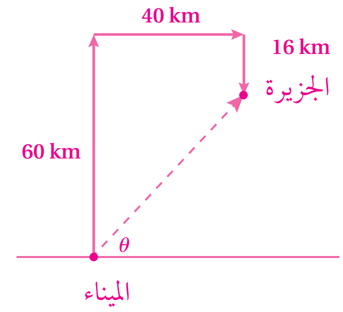
$\theta = \sin^{-1}(0.075) \approx 4.30°$

أي إن B تَبعُد عـن A مسـافة 348.70 km، واتجاهها من A هو 044.3°

34) $x = -13, y = \pm 2$

متعة التعليم الهادف

35) انظر الرسم التقريبي المجاور:



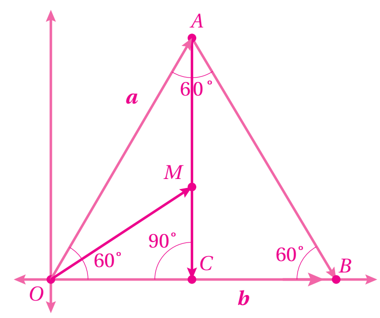
مجموع المسافات التي قطعها اليخت: 60+40+16=116 km

وبافتراض أن الجزيرة تَبعُد عن الميناء x km، فإن:

$$x=\sqrt{44^2+40^2}\approx 59.46 \text{ km}$$

إذن، مجمــوع المســافات التي قطعها اليخت تســاوي مثلي بُعْد الجزيرة عن الميناء تقريبًا؛ لأن اليخت لم يسلك المسار المستقيم من الميناء إلى الجزيرة.

36) انظر الشكل المجاور.



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$$
$$=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$
$$=\langle|\boldsymbol{b}|\cos0°,|\boldsymbol{b}|\sin0°\rangle-\langle|\boldsymbol{a}|\cos60°,|\boldsymbol{a}|\sin60°\rangle$$
$$=\langle|\boldsymbol{b}|,0\rangle-\langle\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|,\frac{\sqrt3}{2}|\boldsymbol{a}|\rangle$$
$$=\langle|\boldsymbol{b}|-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|,\frac{-\sqrt3}{2}|\boldsymbol{a}|\rangle$$
$$=\langle\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|,\frac{-\sqrt3}{2}|\boldsymbol{a}|\rangle.$$ (لأن $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$)

37) انظر الشكل السابق.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

(لأن مركز المثلث يقســم القطع المتوسطة بنســبة 2:1 من جهة الرأس).

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})$$
$$=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$
$$=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

الدرس 3:

17) إذا كان $\boldsymbol{a}=\langle a_1,a_2\rangle, \boldsymbol{b}=\langle b_1,b_2\rangle, \boldsymbol{c}=\langle c_1,c_2\rangle$، فإن:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$$
$$=b_1a_1+b_2a_2$$ (لأن ضرب الأعداد الحقيقية تبديلي).

وإن: $\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}=b_1a_1+b_2a_2$

إذن، $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$؛ أي إن الضرب القياسي للمتجهات تبديلي.

18) إيجاد الطرف الأيسر:

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\langle a_1,a_2\rangle.(\langle b_1,b_2\rangle+\langle c_1,c_2\rangle)$$
$$=\langle a_1,a_2\rangle.\langle b_1+c_1,b_2+c_2\rangle$$
$$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$$

ثم إيجاد الطرف الأيمن:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}=\langle a_1,a_2\rangle.\langle b_1,b_2\rangle+\langle a_1,a_2\rangle.\langle c_1,c_2\rangle$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_1c_1+a_2c_2$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$$

(بتبديل موقعي الحدين: الثاني، والثالث)

إذن، $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$؛ أي إن الضرب القياســي يتوزَّع على جمع المتجهات.

19) $\boldsymbol{0}.\boldsymbol{a}=\langle0,0\rangle.\langle a_1,a_2\rangle=0\times a_1+0\times a_2=0+0=0$

20) بافتراض أن $\boldsymbol{p}=\langle a,b\rangle$، فإن:

$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q}=30$؛ أي إن $6a+2b=30$

ولهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول؛ فإذا افترضنا أن $a=2$، فإن $b=9$، وعندئذٍ، فإن $\boldsymbol{p}=\langle2,9\rangle$

وبافتراض وجود قيم أُخرى لـ a، فإنه توجد قيم مناظرة لـ b، فتنتج قيم ممكنة للمتجه $\boldsymbol{p}$.

21) بافتراض أن $\boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ يعامد المتجه $\boldsymbol{a} = \langle -8, -2 \rangle$، فإن:

$-8\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = 0$ ؛ أي إن $\boldsymbol{d} = -4\boldsymbol{c}$

إذن، جميع المتجهات في صورة $\langle \boldsymbol{c}, -4\boldsymbol{c} \rangle$ تعامد المتجه $\boldsymbol{a} = \langle -8, -2 \rangle$، ومن أمثلتها: $\langle 1,-4 \rangle, \langle 3,-12 \rangle, \langle -2,8 \rangle$.

22) إذا كان $A(6, -2), B(1, 5), C(-4, -2)$، فإن:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -5,7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -10,0 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100} = 10$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle -5,-7 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

إذن، المثلث ABC متطابق الضلعين؛ لأن $AB = BC = \sqrt{74}$

$$m\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{\sqrt{74} \times 10} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \times |\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1}\frac{50}{10 \times \sqrt{74}} \approx 54.5^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - (54.5^\circ + 54.5^\circ) = 71^\circ$$

23) $\boldsymbol{a} || \boldsymbol{b}$ إذا كان قياس الزاوية بينهما 0°، أو 180°؛

أي إن $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|}$ يساوي $\cos 0^\circ$، أو $\cos 180^\circ$ ؛

أي إن: $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|} = \pm 1$

$$\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}} \Rightarrow \left(\frac{-2-3r}{\sqrt{13} \times \sqrt{1+r^2}}\right)^2 = (\pm 1)^2$$

$$\frac{4+12r+9r^2}{13+13r^2} = 1 \Rightarrow 4 + 12r + 9r^2 = 13 + 13r^2$$

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$(2r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حل آخر:

$\boldsymbol{a} || \boldsymbol{b}$ إذا وُجِد عدد حقيقي k، حيث: $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ ؛

أي إن: $\langle 2,-3 \rangle = k\langle -1, r \rangle$، ومنه:

$2 = -k \Rightarrow k = -2$ ، و $-3 = kr \Rightarrow r = \dfrac{-3}{k} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$

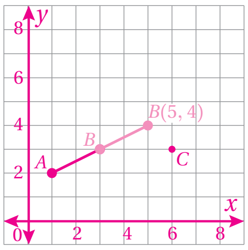
اختبار الوحدة:

11) صحيحة.

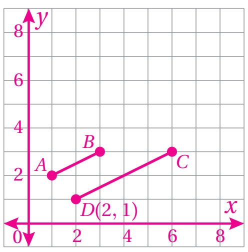
12) غير صحيحة؛ فالمتجهان المتوازيان لهما الاتجاه نفسه، أو لهما اتجاهان متعاكسان.

13) صحيحة.

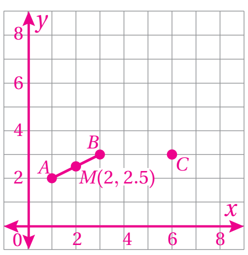
14)



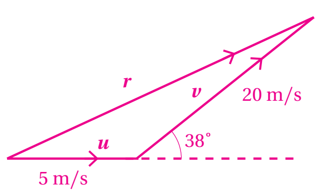
15)



16)



23) يُمثِّل المتجه $\boldsymbol{u}$ سرعة حسام، ويُمثِّل المتجه $\boldsymbol{v}$ سرعة الكرة، ويُمثِّل المتجه $\boldsymbol{r}$ محصلة السرعتين. ولهذا، فإن:



$$(|r|)^2 = 5^2 + 20^2 - 2 \times 5 \times 20 \cos 142^\circ$$

$$= 582.6$$

$$|r| = \sqrt{582.6} \approx 24.1 \text{ m/s}$$

أي إن محصلة سرعة الكرة هي 24.1 m/s تقريبًا.

24) قياس الزاوية التي يصنعها متجه سرعة الطائرة مع المحور الأفقي عكس حركة عقارب الساعة هو $360° - 10° = 350°$؛ لذا، فإن الصورة الإحداثية للسرعة المتجهة للطائرة هي:

$$\langle 200\cos 350°\,,\, 200\sin 350° \rangle = \langle 196.96, -34.73\rangle$$

27) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

28) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

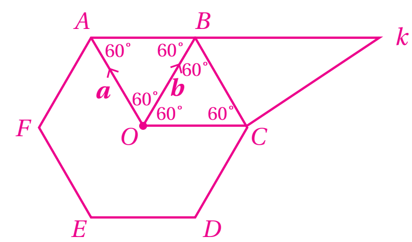
$= \boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$= \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

29) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

30) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB}$

لكن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$؛ لأن $ABCO$ متوازي أضلاع؛ فكل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتان.



إذن، $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} + 2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

كتاب التمارين - الدرس 1:

7) $\overrightarrow{BD} = \langle 3,2\rangle$

$\overrightarrow{BF} = \langle 6,4\rangle$

اتجاه $\overrightarrow{BD}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$،

واتجاه $\overrightarrow{BF}$ هو $\tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

إذن، النقاط B، و D، و F تقع على خط مستقيم واحد.

13) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$7 = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$49 = (x+1)^2 + 4$

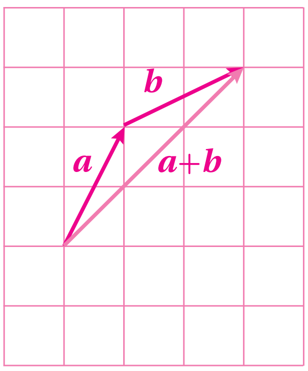
$(x+4)^2 = 45$

$x + 1 = \pm\sqrt{45}$

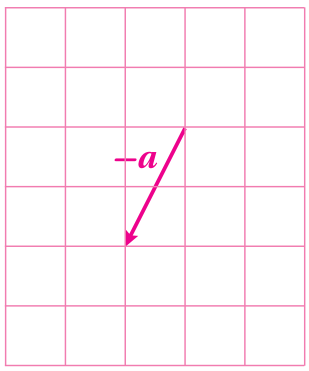
$x = -1 \pm 3\sqrt{5}$

كتاب التمارين - الدرس 2:

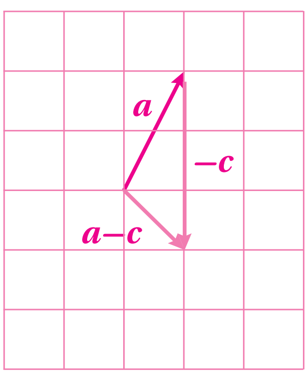
1)



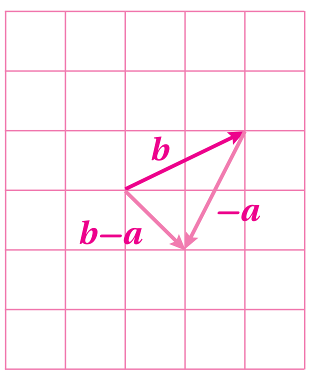
2)



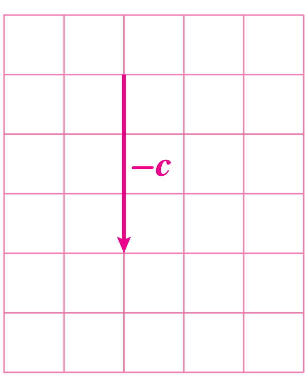
3)



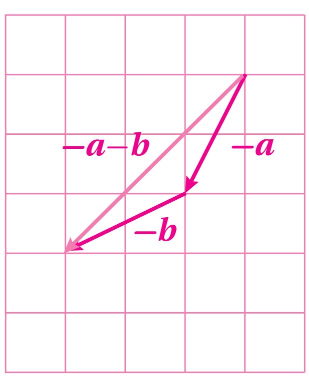
4)



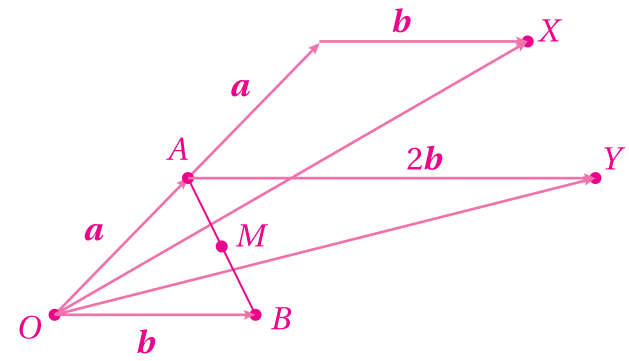
5)



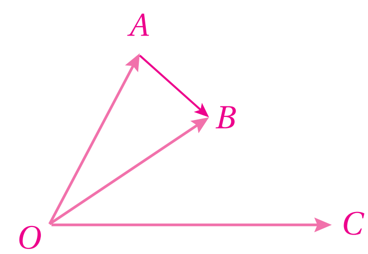
6)



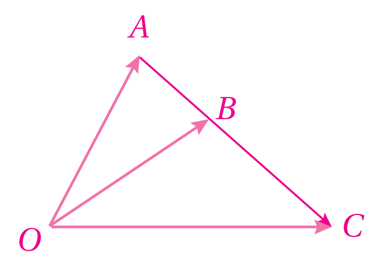
11)



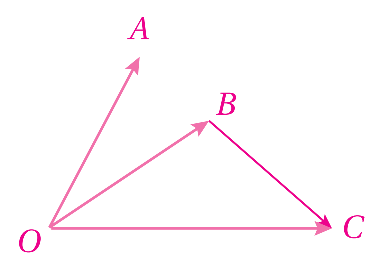
18) $\langle 2, -1 \rangle$



19) $\langle 4, -2 \rangle$



20) $\langle 2, -1 \rangle$



21) نعـم، كافية. بمـا أن $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$، فـإن $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$، وبما أنهما يشتركان في النقطة B فهما يُكوِّنان مستقيمًا واحدًا. وهذا يعني أن ABC خط مسـتقيم؛ أي إن النقاط A، وB، و C تقع على المستقيم نفسه.

منهاجي
متعة التعليم الهادف