جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الرياضيات التطبيقية

الميكانيكا

٢٠١٩-٢٠٢٠

كتاب الطالب

الصف الثالث الثانوي

الاســـم : ....

الفــصل : ....

المدرســة : ....

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عبد الشافى فهمى عبادة   أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ   أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

مراجعة

أ/سمير محمد سعداوى   أ/ فتحى أحمد شحاتة

رقم الإيـــداع ٨٧٠٧ / ٢٠١٦

الرقـــم الدولى 978 - 977 - 706 - 035 - 6

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

يشهد عالم اليوم تطورًا علميًّا مستمرًا ، وجيل الغد يلزمه أن يتسلح بأدوات تطور عصر الغد؛ حتى يستطيع مواكبه الانفجار الهائل في العلوم المختلفة، وانطلاقًا من هذا المبدأ سعت وزارة التربية والتعليم إلى تطوير مناهجها عن طريق وضع المتعلم في موضع المستكشف للحقيقة العلمية بالإضافة إلى تدريب الطلاب على البحث العلمى في التفكير؛ لتصبح العقول هى أدوات التفكير العلمى وليست مخازن للحقائق العلمية.

ونحن نقدم هذا الكتاب « التفاضل والتكامل» للصف الثالث الثانوى؛ ليكون أداة مساعدة يستنير بها أبناؤنا على التفكير العلمى، ويحفزهم على البحث والاستكشاف .

وفى ضوء ما سبق روعى فى كتاب « الميكانيكا » مايلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخططٌ تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضَّح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان (سوف تتعلم). ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس، وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب، ويتضمن الدرس مجموعة من الأنشطة التى تربطه بالمواد الأخرى والحياة العملية، والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب، وتراعى الفروق الفردية من خلال بند (اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب)، وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع، كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قُدِّم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات التفكير المتنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان (حاول أن تحل)، وينتهى كل درس ببند «تمارين»، ويشمل مسائل متنوعة، تتناول المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة، يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة، وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى، يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة، تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.
والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

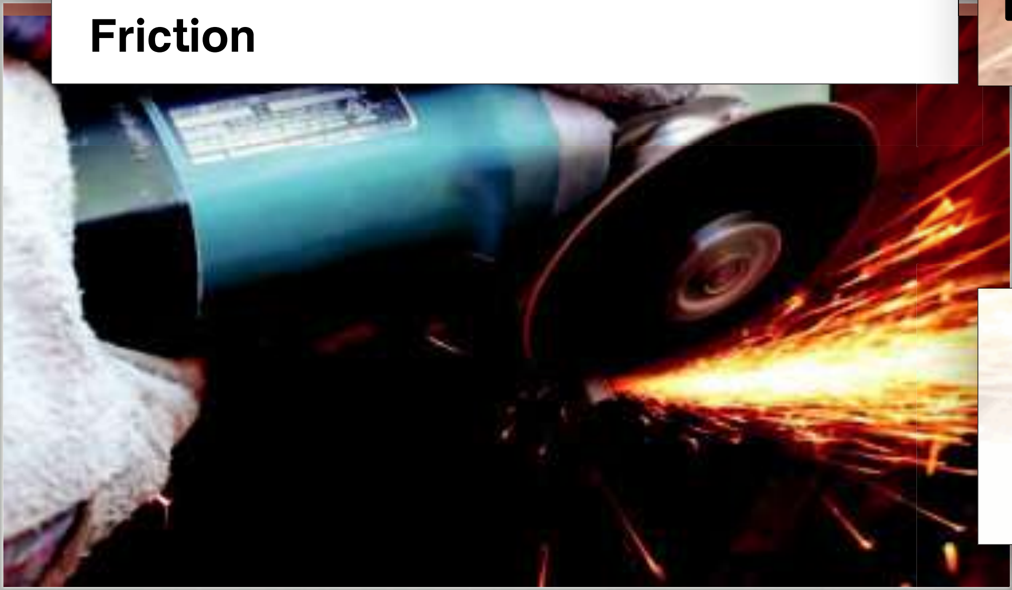
اولا : الاستاتيكا

المحتويات

أولا
الإستاتيكا

الاحتكاك

Friction



الوحدة
١

مقدمة الوحدة

قوة الاحتكاك قديمة منذحقب طويلة فقد اعتمد عليها المصريون القدماء وفقا للأسلوب الهندسى والعلمى المتاح لديهم ، وقد استخدم العمال القدماء مجموعة متنوعة من الأدوات لقطع الكتل الحجرية المستخدمة فى بناء الأهرامات حيث كان يتم سحبها من مكان إلى آخر على دعامات مشحمة حتى تقل قوة الاحتكاك بين الكتل وتلك الدعامات . وفى عهد انتصارات الإمبراطورية الرومانية قام المهندسون الحربيون بتزييت الآلات العسكرية أثناء الحصار وذلك لتقليل قوة الاحتكاك بين هذه الأجزاء . وأول من وضع الأسس العلمية لعلم الاحتكاك فى عصر النهضة هو العالم الايطالى ليوناردو دافنشى Leonardo da Vinci (١٤٦٢م - ١٥١٩م) الذى عَرف مفهوم الاحتكاك كقيمة لقوة الاحتكاك، ومن التجارب العملية التي قام بها العلماء لوحظ أن قوة الاحتكاك للأجسام الساكنة أكبر من قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة. وهذا شيء نلاحظه في حياتنا العملية حيث يحتاج الشخص إلى قوة كبيرة في بداية الأمر لتحريك صندوق خشبي على الأرض ولكن بعد أن يتحرك الصندوق نلاحظ أن القوة اللازمة أصبحت أقل من ذي قبل وهذا لأن الجسم أصبح متحركاً وبالتالي فإن قوة الاحتكاك تصبح أقل .لهذا السبب يمكن تقسيم الاحتكاك إلى نوعين هما الاحتكاك السكوني static friction والاحتكاك الحركي kinetic friction .. وسوف نتناول فى هذه الوحدة مفهوم الاحتكاك وخواصه، وشروط اتزان جسم على مستوى أفقى خشن وأخر على مستوى مائل خشن وسوف نختم هذه الوحدة ببعض التطبيقات الحياتية على الاحتكاك.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يميز بين السطوح الملساء والسطوح الخشنة .
- يتعرف على مفهوم الاحتكاك وخواصه .
- يتعرف قوة الاحتكاك وقوة الاحتكاك النهائى .
- يحدد معامل الاحتكاك ، وزاوية الاحتكاك والعلاقة بينهما .
- يحدد شروط اتزان جسم على مستو أفقى خشن .
- يحدد شروط اتزان جسم على مستو مائل خشن .
- يستنتج العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى عند وضع جسم على مستوى مائل خشن بشرط أن يكون على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط .
- يحل تطبيقات حياتية على الاحتكاك .

المصطلحات الأساسية

الاحتكاك	Friction
سطح أملس	Smooth Surface
سطح خشن	Rough Surface
رد الفعل العمودي	Normal Reaction
قوة الاحتكاك السكونى	Static Frictional force
قوة الاحتكاك الحركى	Kinetic Frictional force
قوة الاحتكاك السكونى النهائى	*Limiting Static Friction*
رد الفعل المحصل	*Resultant Reaction*
زاوية الاحتكاك	*Angle of Friction*
مستوى أفقى خشن	*Horizontal rough plane*
مستوى مائل خشن	*Inclined rough plane*

دروس الوحدة

(٢ - ١): اتزان جسم على مستوى أفقى خشن.

(٢ - ٢): اتزان جسم على مستوى مائل خشن.

الأدوات والوسائل

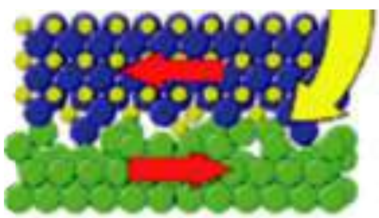
آلة حاسبة علمية .

مخطط تنظيمى للوحدة

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

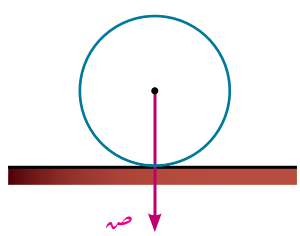
Equilibrium of a body on a horizontal rough plane

ماذا سيحدث لو أن الاحتكاك في لحظة ما قد اختفى من العالم ، إذا اختفى الاحتكاك سنجد أن السيارات والقطارات وجميع وسائل المواصلات لن تستطيع التحرك لأنها تتحرك اعتمادًا على الاحتكاك بين الأرض والعجلات. وحتى لو تحركت فإنها لن تستطيع أن تتوقف، لأن الفرامل تعتمد أساسا على الاحتكاك. كما لن يستطيع الناس السير أو حتى الوقوف وقفة سليمة، وكأنهم واقفون على أرضية جليدية. ولن يستطيعوا أمساك الأشياء المختلفة لأنها ستنزلق من أيديهم. كما ستتفتت الجبال ولن يبقى عليها أي غطاء من التربة.و لن تبقى أي أبنية سليمة بل ستتهدم. وستتفكك الحبال المربوطة. كل هذا بسبب الانزلاق وانعدام الاحتكاك. باختصار فإن الحياة مستحيلة بدون قوى الاحتكاك.لذلك فإن للاحتكاك فوائد هامة ؛ فهو يجعل عجلات السيارة تتحرك على الطريق، ويجعل عجلات القاطرة تُمسك بقضبان السكك الحديدية. وهو يسمح للسير الناقل بأن يدير البكرة دون انزلاق. وأنت لا تستطيع السير دون الاحتكاك لتمنع حذاءك من التزحلق على الرصيف. ولهذا فمن الصعب السير على الجليد ؛ حيث أن السطح الأملس لا يسبب احتكاكاً ، وبذلك لا يسمح للحذاء بالانزلاق. ويثبت التربة على سطح الجبال ويثبت البنايات ويجعلها قائمة.ويجعل الحبال المربوطة تبقى ثابتة. بالإضافة إلى العديد من الفوائد الأخرى .

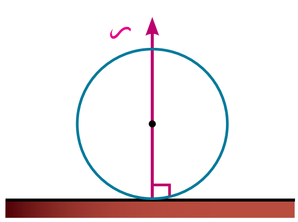


رد الفعل:

تعلمنا فيما سبق نوعا من القوى ينشأ عند تلامس جسمين يطلق عليه اسم رد الفعل . فإذا وضعت كرة على نضد أفقى ساكن فإن الكرة تؤثر على النضد بقوة ضغط (ص) تساوى وزن الكرة فى هذه الحالة وطبقًا للقانون الثالث لنيوتن فإن النضد يؤثر على الكرة بقوة رد فعل (ر) وتساوى ضغط الكرة على النضد؛ أي أن ر = ص .



الضغط المؤثر على النضد
شكل (١)



رد الفعل المؤثر على الكرة
شكل (٢)

سوف تتعلم

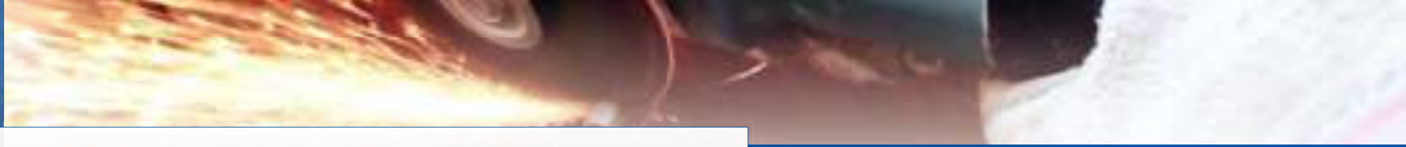
- السطوح الملساء والسطوح الخشنة .
- مفهوم الاحتكاك
- قوة الاحتكاك السكونى
- قوة الاحتكاك الحركى
- العلاقة بين معامل الاحتكاك وظل زاوية الاحتكاك
- خواص الاحتكاك
- اتزان جسم على مستوى أفقى خشن .

المصطلحات الأساسية

- الاحتكاك Friction
- سطح أملس Smooth Surface
- سطح خشن Rough Surface
- رد الفعل العمودي Normal Reaction
- قوة الاحتكاك السكونى Static Friction
- قوة الاحتكاك الحركى Kinetic Friction
- قوة الاحتكاك السكونى النهائى Limiting Static Friction
- رد الفعل المحصل Resultant Reaction
- زاوية الاحتكاك Angle of Friction
- مستوى أفقى خشن Horizontal rough plane

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

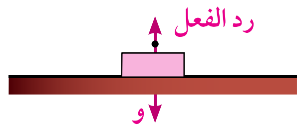


السطوح الملساء والسطوح الخشنة : *Smooth Surfaces and Rough Surfaces*

يفسر العلماء منشأ قوى الاحتكاك بين الأجسام إلى وجود نتوءات وتجويفات مجهرية فى سطوح الأجسام مهما بلغت نعومتها وينتج عن تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ما يسمى بقوة الاحتكاك ، وبالتالى نجد مقاومة عند محاولة تحريك أحد السطحين على السطح الأخر ، ويعتبر معامل الاحتكاك مقياسا لدرجة خشونة الأسطح، فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة والعكس صحيح ، وإذا ساوى معامل الاحتكاك الصفر انعدمت قوى الاحتكاك تماماً.

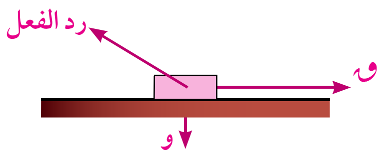
يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم، ففى حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.

أما إذا كان الجسمان خشنين فيكون لرد الفعل مركبة فى اتجاه سطح التماس تسمى بالاحتكاك السكونى ، كما يكون لرد الفعل مركبة عمودية على سطح التماس تسمى برد الفعل العمودى.



رد الفعل فى حالة السطوح الملساء

شكل (٣)

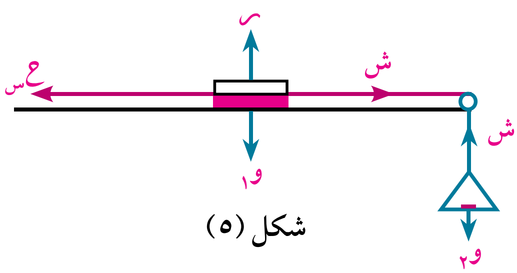


رد الفعل فى حالة السطوح الخشنة

شكل (٤)

تجربة عملية:

ضع قطعة مستوية من الخشب على نضد أفقى واربطها بخيط يمر على بكرة ملساء عند حافة النضد ويتدلى الخيط رأسيًا منتهيًا بحامل للصنج كما بالشكل.



شكل (٥)

ضع اثقالاً مناسبة على القطعة الخشبية وضع فى حامل الصنج ثقلاً صغيرًا تلاحظ أن القطعة الخشبية لاتتحرك : ومعنى ذلك أن قوة الاحتكاك التى اثرت على القطعة الخشبية كانت كافية لمنع الحركة رغم وجود الشد ش فى الخيط وكما هو معروف، فإن مقدار هذا الشد يساوى وزن الحامل ووزن الصنج الموضوعه فيه معا .

زد الصنج الموضوعة على الحامل بالتدريج نلاحظ أن القطعة الخشبية تبدأ فى التحرك على النضد عندما تصل الاثقال الموضوعة فى الحامل إلى حد معين.

ويعنى هذا أن مقدار قوة الاحتكاك السكونى يتزايد كلما تزايد الشد وانه يصل إلى حد معين لايتعداه. فإذا زاد الشد عن هذا الحد لم يستطع الاحتكاك موازنته ويبدأ الجسم فى الحركة ويلاحظ انه لو زدنا الاثقال الموضوعة على القطعة الخشبية فإننا نحتاج إلى زيادة الثقل الموضوع فى حامل الصنج حتى تصبح القطعة الخشبية على وشك الحركة.

خواص قوة الاحتكاك السكونى:

(١) تعمل قوة الاحتكاك السكونى (ع) على معاكسة الانزلاق فتكون فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الانزلاق فيه.

(٢) تكون قوة الاحتكاك السكونى (ع) مساوية فقط للقوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم ولايمكن ان تزيد عن هذه القوة وتظل مساوية لهذه القوة طالما الجسم متزنًا.

(٣) وتتزايد قوة الاحتكاك السكونى (ع) كلما تزايدت القوة المماسية التى تعمل على إحداث الحركة حتى تصل إلى حد لاتتعداه وعند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق ويسمى الاحتكاك فى هذه الحالة بالاحتكاك السكونى النهائى ويرمز له بالرمز ($ع_س$).

(٤) النسبة بين الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى ثابتة وتتوقف هذه النسبة على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما او كتلتهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى ويرمز لها بالرمز $م_س$.

أى أن $م_س = \frac{ع_س}{ر}$ حيث $ع_س$ الاحتكاك السكونى النهائى

قوة الاحتكاك الحركى *Friction Kinetic*

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى($ع_ك$) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته، وتعطى قيمتها بالعلاقة: $ع_ك = م_ك ر$ حيث:

حيث $م_ك$ هو معامل الاحتكاك الحركى Coefficient of Kinetic Friction ، $ر$ رد الفعل العمودى

أى أن: قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودية .

ومن ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

أى أن: $م_ك = \frac{ع_ك}{ر}$ حيث $ع_ك$ قوة الاحتكاك الحركى

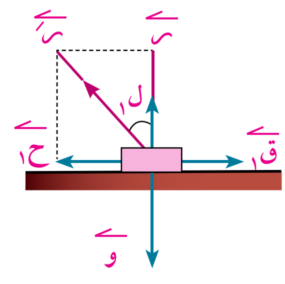
رد الفعل المحصل ($ر'$) *Resultant Reaction*

في حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك السكونى . ويسمى رد الفعل المحصل أو رد الفعل الكلي.

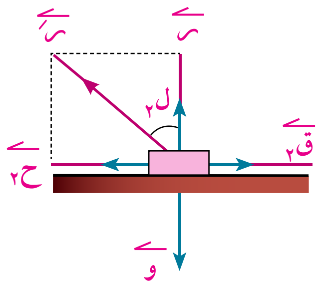
تعريف: رد الفعل المحصل ($\overrightarrow{ر'}$) هو محصلة رد الفعل العمودى $\overrightarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك السكونى $\overrightarrow{ع}$

زاوية الاحتكاك Angle of Friction

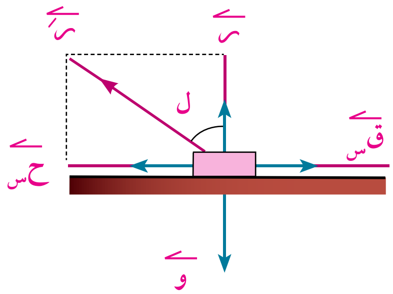
نلاحظ أن قياس الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل تتزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك (بفرض ثبوت مقدار قوة رد الفعل العمودي) وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى ل عندما يصبح الاحتكاك نهائياً . وتسمى الزاوية في هذه الحالة (زاوية الاحتكاك) والأشكال التالية توضح ذلك.



شكل (٦)



شكل (٧)



شكل (٨)

من شكل (١) ، شكل (٢) نجد أن: متجه رد الفعل المحصل $\overleftarrow{\text{ر}'}$ هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{\text{ر}}$ وقوة الاحتكاك $\overleftarrow{\text{ح}}$ أي أن: $\text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ح}^2}$

ومن شكل (٣) عندما يكون الاحتكاك نهائيًا:

$\therefore \text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ح}_{\text{س}}^2}$ $\quad \because \text{ح}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\,\text{ر}$ $\quad \therefore \text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ر}^2\text{م}_{\text{س}}^2}$ $\quad \therefore \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_{\text{س}}^2}$

العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك :

في حالة الاحتكاك النهائي من شكل (٨) :

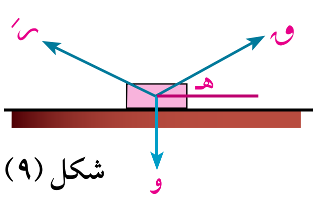
نجد أن : $\text{ظا ل} = \dfrac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}}$ ولكن $\dfrac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}} = \text{م}_{\text{س}}$ $\quad \boxed{\text{أي أن : } \text{م}_{\text{س}} = \text{ظا ل}}$

أى أنه عندما يكون الاحتكاك نهائيا فإن معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك

تفكير ناقد: قارن بين قياسى زاويتي الاحتكاك السكونى والاحتكاك الحركى.

اتزان جسم على مستوى أفقي خشن Equilibrium of a body on a rough horizantal plane

إذا وضع جسم وزنه و على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ق تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم فى وضع التوازن يكون متزنا تحت تأثير القوى :



شكل (٩)

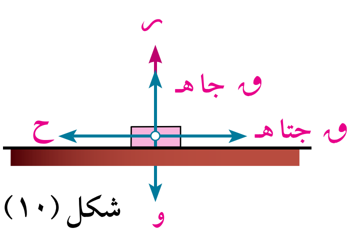
١) قوة الوزن $\overleftarrow{\text{و}}$ رأسيا لأسفل ومقدارها و

٢) قوة رد الفعل المحصل $\overleftarrow{\text{ر}'}$ ومقدارها ر′

٣) القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ومقدارها ق والشكل (٩) يوضح ذلك .

وبتحليل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه فإن مقدارهما يكون ق جتا هـ ، ق جا هـ .

وبتحليل $\overleftarrow{\text{ر}'}$ إلى مركبتين متعامدين هما رد الفعل العمودى $\overleftarrow{\text{ر}}$ ومقداره ر ، وقوة الاحتكاك $\overleftarrow{\text{ح}}$ ومقدارها ح والشكل (١٠) يوضح ذلك .



شكل (١٠)

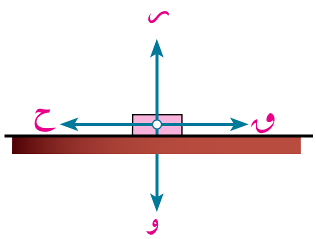
فتكون معادلتا اتزان الجسم هما : ح = ق جتا هـ ، ر + ق جا هـ = و

مثال

القوة المؤثرة على جسم

١ يدفع كريم صندوقا ممتلئا بالكتب إلى سيارته على طريق أفقي ، فإذا كان وزن الصندوق والكتب ١٢٤ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكوني بين الطريق والصندوق ٠,٤٥ فما مقدار القوة الأفقية التي يدفع بها كريم الصندوق حتى يكون على وشك الحركة.

الحل



شكل (١١)

بإعتبار أن و = ١٢٤ نيوتن ، م$_{س}$ = ٠,٤٥

من شروط اتزان جسم على مستوى أفقي فإن :

ر = و أي أن : ر = ١٢٤ (١)

ق = م$_{س}$ ر ومن (١) تكون : ق = ٠,٤٥ × ١٢٤ = ٥٥,٨ نيوتن

حاول أن تحل

١ وضعت كتله وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى افقي خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

أ اذا كانت ق = ٨ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والمستوى

ب اذا كان م$_{س}$ = ٠,٤ فأوجد ق

مثال

قوة الاحتكاك

٢ وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على نضد أفقي وربط بخيط أفقي يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ١,٥ ث كجم . فإذا كان الجسم متزنًا على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا عُلم أن معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{1}{4}$. هل يكون الجسم على وشك الحركة؟ فسر إجابتك.

الحل

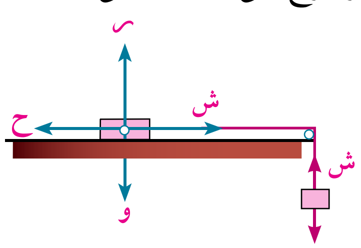
من اتزان الجسم المتدلى رأسيًا نجد أن ش = ١,٥ث كجم ومن اتزان الجسم الموضوع على النضد الأفقي نجد أن :

ر = و ∴ ر = ٨ ث كجم

∴ قوة الاحتكاك ح = ش ∴ ح = ١,٥ ث كجم

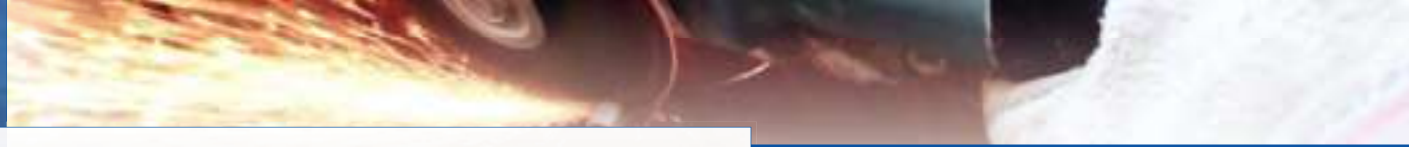
لمعرفة ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ، نعين أقصى قيمة ممكنه لمقدار قوة الاحتكاك السكوني ح$_{س}$

∵ ح$_{س}$ = م$_{س}$ ر ∴ ح$_{س}$ = $\frac{1}{4}$ × ٨ = ٢ ث كجم.



شكل (١٢)

∴ ح < ح$_{س}$ لذلك فإن الاحتكاك غير نهائي ولا يكون الجسم على وشك الحركة.



حاول أن تحل

(٢) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٤}$ أوجد :

أ) مقدار القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة .

ب) القوة التى تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠° وتجعل الجسم على وشك الحركة .

مثال **زاوية الاحتكاك**

(٣) وضع جسم وزنه١٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٤ ، ٤ ث كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك.

الحل

$\because$ **الجسم على وشك الحركة**

الجسم فى حالة اتزان نهائى

$\therefore$ ر = و

$\therefore$ ر = ١٢ ث كجم

، محصلة القوتين ٤، ٤ ث كجم = قوة الاحتكاك النهائى

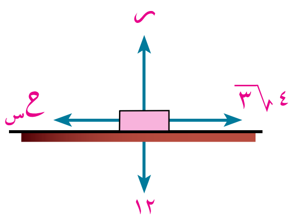
$\because$ ح $= \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ق_١ ق_٢ \text{ جتا ى}}$

$\therefore$ ح $= \sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٤ \times ٤ \times \frac{١}{٢}} = ٤\sqrt{٣}$ ث كجم

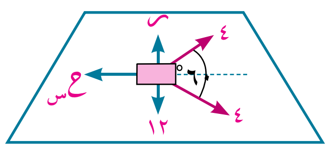
$\because$ $م_س$ ر = ح $\qquad \therefore$ ١٢$م_س$ = $٤\sqrt{٣}$

$\therefore$ $م_س = \frac{٤\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ $\qquad \because$ $م_س$ = ظا ل

$\therefore$ ظا ل $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ $\qquad \therefore$ ل = ٣٠°



شكل (١٣)

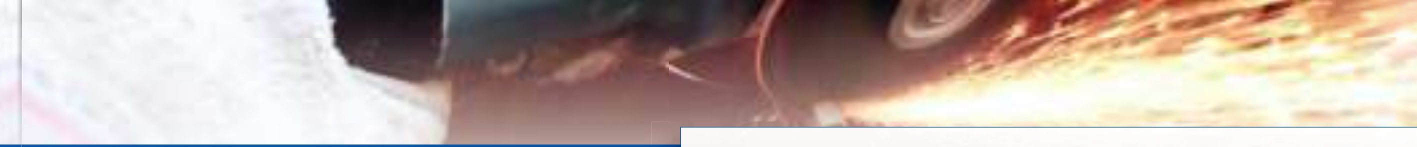


شكل (١٤)

حاول أن تحل

(٣) وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل ساكنا . أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم والمستوى يجب أن لا تقل عن ٣٠° .

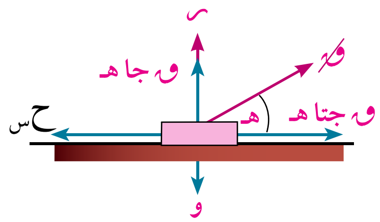
وإذا كانت ل = ٤٥° وبقى اتجاه القوتين ثابتا ، كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير ، فعين مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك أن يبدأ الحركة.



مثال — البرهنة النظرية

④ وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل . شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها هـ وتقع فى المستوى الرأسى المار بوزن الجسم فأصبح الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة يساوى $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ ، ثم أوجد أصغر مقدار لهذه القوة وشرط حدوث ذلك.

الحل



شكل (١٥)

∵ قياس زاوية الاحتكاك = ل

∴ معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$) = ظا ل = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

∴ مقدار قوة الاحتكاك النهائى $ح_س$ = $م_س$ ر = ر × $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

وبتحليل القوة $\overleftarrow{ق}$ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين مقدارهما ق جتا هـ ، ق جا هـ

∴ معادلتا الاتزان هما : ق جتا هـ = $م_س$ ر

∴ ق جتا هـ = ر × $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ .... (١) ، (لأن $م_س$ = ظا ل)،

ر + ق جا هـ = و .... (٢)

تذكر أن

جتا (هـ - ل) = جتاهـ جتا ل + جاهـ جا ل

جتا (هـ + ل) = جتاهـ جتا ل - جاهـ جا ل

ومن (١) ر = $\frac{\text{ق جتا هـ جتا ل}}{\text{جا ل}}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ $\frac{\text{ق جتا هـ جتا ل}}{\text{جا ل}}$ + ق جا هـ = و ∴ ق جتا هـ جتا ل + ق جا هـ جا ل = و جا ل

∴ ق (جتا هـ جتا ل + جا هـ جا ل) = و جال ∴ ق جتا (هـ - ل) = و جا ل

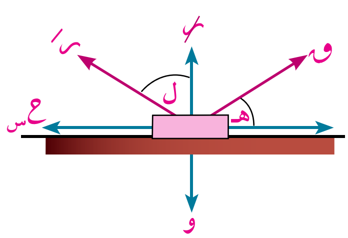
∴ ق = $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ وحيث أن المطلوب هو إيجاد اصغر مقدار لهذه القوة فهذا يستلزم أن يكون جتا (هـ - ل) أكبر ما يمكن . أى أن جتا (هـ - ل) = ١

∴ اصغر مقدار لهذه القوة يساوى ق = و جا ل

وذلك عندما جتا (هـ - ل) = ١ أى أن : هـ - ل = ٠° أى أن : هـ = ل

∴ الشرط اللازم هو أن يكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى يساوى قياس زاوية الاحتكاك

حل آخر



شكل (١٦)

∵ ر َ هى محصلة القوتين ر ، $ع_س$:

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى: $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر َ}$

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا (١٨٠° - ل)}} = \frac{\text{و}}{\text{جا [٩٠° - (هـ - ل)]}}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا ل}} = \frac{\text{و}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ ∴ ق = $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$

∵ المطلوب هو أصغر مقدار للقوة $\overleftarrow{ق}$ ، فيكون المقدار جتا (هـ - ل) أكبر ما يمكن

∴ جتا (هـ – ل) = ١ ∴ وَ = و جا ل والشرط اللازم هو :

جتا (هـ – ل) = جتا ٠ ∴ هـ – ل = ٠ ∴ هـ = ل

∴ الشرط اللازم هو أن تكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى يساوى قياس زاوية الاحتكاك

حاول أن تحل

٤ وضع جسم وزنه (و) ث كجم على مستو أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى (ل)، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (٢ل) لأعلى وتقع فى المستوى الرأسى المار بوزن الجسم جعلت الجسم على وشك الحركة . أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و ظا ل .

تمـــارين ١ - ١

أولا : أكمل ما يأتى :

١ تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنين بقوة ....

٢ تنعدم قوى الاحتكاك ويكون معامل الاحتكاك مساويا للصفر فى السطوح ....

٣ عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون ....

٤ قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى ....

٥ محصلة قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى النهائى تسمى ....

٦ قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى فى قوة ....

٧ إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين كتلة مقدارها ٤٠ كجم وسطح الأرض يساوى ٠,٤٥ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر على الكتلة وتجعلها على وشك الحركة تساوى ....

٨ إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان مقدار قوة الاحتكاك السكونى ٤ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

ثانيا : أجب عن الأسئلة الآتية :

٩ يدفع فتى حجرا وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة . أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الحجر والرصيف.

١٠ جسم وزنه ٢٤٠ ث كجم وضع على مستوٍ أفقى خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة .

١١ وضع جسم وزنه ٣٩ ث جم على مستوى أفقى خشن ، أثرت عليه قوتان أفقيتان مقدارهما ٧ ، ٨ ث جم وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة . أوجد معامل الاحتكاك السكونى .

١٢ وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقى وربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن . فإذا كان الجسم متزن على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. و إذا عُلم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{١}{٣}$. هل يكون الجسم على وشك الحركة ؟ فسر إجابتك .

١٣ شُد صندوق وزنه (و) ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن بواسطة حبلين أفقيين، الشد فيهما ٦ ، ٨ ث كجم و يحصران بينهما زاوية قياسها ٩٠° ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الصندوق والمستوى يساوى $\frac{١}{٤}$ فأوجد وزن الصندوق (و) إذا كان الصندوق على وشك الحركة.

١٤ وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستو أفقى خشن وكان ظل زاوية الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٣}$ ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ جعلت الجسم على وشك الحركة . اوجد :

أولا : مقدار قوة الشد .

ثانيا : مقدار قوة الاحتكاك السكونى

الوحدة الأولى

١ - ٢

اتزان جسم على مستوى مائل خشن

Equilibrium of a body on an Inclined rough plane

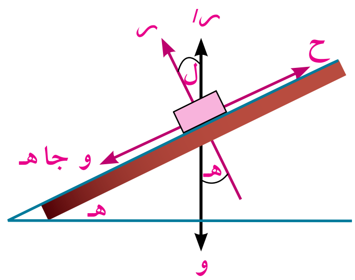
في هذا الدرس سوف ندرس اتزان جسم على مستوى مائل خشن .

نعتبر أن جسما متزنا على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ .

يتزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :

(١) قوة وزنه $\overleftarrow{و}$ وتعمل رأسياً لأسفل وليكن مقدارها (و)

(٢) قوة رد الفعل المحصل وليكن مقدارها (ر‾)



شكل (١)

ومن شروط الاتزان نجد أن :

قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسياً لأعلى .

ويكون : ر‾ = و .... (١)

يمكن الان تعيين قوتى الاحتكاك ورد الفعل العمودى باعتبارهما مركبتى قوة رد الفعل المحصل فى اتجاهين أحدهما يوازى المستوى والآخر عمودى عليه كما فى الشكل المقابل .

قوة الاحتكاك .

ح = و جا هـ .... (٢)

وتعمل هذه القوة عكس اتجاه الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل وتكون موجهة لأعلى المستوى .

قوة رد الفعل العمودى .

ر = و جتا هـ .... (٣)

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

سوف تتعلم

- شروط اتزان جسم على مستوى مائل خشن
- العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .
- تعين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين (نشاط).

المصطلحات الأساسية

- مستوى مائل خشن *Inclined rough plane*
- رد الفعل العمودى *Normal Reaction*
- رد الفعل المحصل *Resultant Reaction*
- زاوية الاحتكاك *Angle of Friction*
- معامل الاحتكاك *Coefficient of Friction*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

البرهان :

∵ الاحتكاك نهائى

∴ قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك السكونى وليكن قياسها (ل) .

ومن الشكل السابق نجد أن : هـ = ل

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالآتى :

ظا ل = $م_{س}$ أو $م_{س}$ = ظا هـ

فمثلا :

إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الحركة بتاثير وزنه فقط عندما كانت زاوية ميل المستوى على الافقى قياسها ٣٠° . فإن معامل الاحتكاك السكونى $م_{س}$ = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

نشاط تعيين معامل الاحتكاك السكونى بين سطحين متلامسين

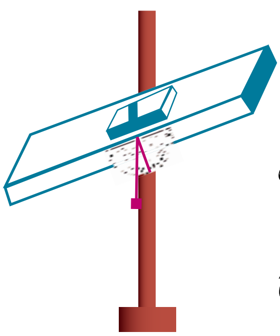
الهدف من النشاط :

تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين معلومين باستخدام المستوى المائل .

الأدوات المستخدمة فى النشاط :

مستوى خشن – كتلة خشبية أحد أوجهها مستوى والآخر المقابل به حفرة مستطيلة الشكل - حامل كابستان بماسك – محور ارتكاز – منقلة – خيط رصاص .

خطوات إجراء النشاط :


شكل (٢)

(١) أربط محور الارتكاز بماسك الحامل وثبت فيه المستوى .

(٢) ثبت المنقلة فى المستوى بحيث ينطبق قطرها على حافة المستوى كما فى الشكل المقابل .

(٣) علق خيط الرصاص من مسمار عند مركز المنقلة و يراعى أن يمر بمنتصف تدريج المنقلة عندها يكون المستوى أفقيا .

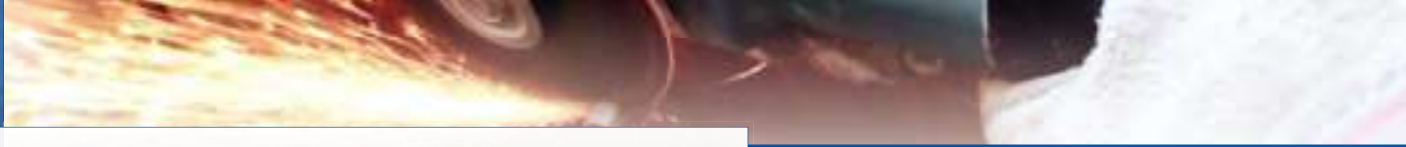
(٤) أجعل المستوى فى وضع أفقى وضع عليه الكتلة الخشبية بوجهها المستوى ثم ضع ثقلا مناسبا فى الحفرة .

(٥) أَمِل المستوى تدريجيا حتى تبدأ الكتلة فى الانزلاق عند طرقها طرقاً خفيفاً .

(٦) أقرأ تدريج المنقلة عند نقطة انطباق الخيط عليها ومن ذلك أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى وليكن (ى) .

(٧) كرر الخطوتين (٥) ، (٦) السابقتين مع تغيير الثقل الموضوع فى الحفرة وتعيين قياس زاوية ميل المستوى فى كل مرة وسجل النتائج فى كل مرة . ماذا تلاحظ عن قياسات الزوايا التى حصلت عليها فى المرات السابقة .

من النشاط السابق نجد أن :



- قياسات الزوايا التى حصلنا عليها فى المرات السابقة متساوية القياس على وجه التقريب .
- متوسط قياسات الزوايا هو قياس زاوية الاحتكاك .
- ظل هذه الزاوية هو معامل الاحتكاك بين السطحين المتلامسين .

مثال

(١) وضع جسم وزنه ٣ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم يساوى $\frac{٢}{٣}$. أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزنا . عين قوة الاحتكاك عندئذ وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل

بتحليل وزن الجسم $\overleftarrow{و}$ إلى مركبتين فى اتجاه المستوى والعمودى عليه .

١) المركبة المماسية فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى إلى أسفل ومقدارها و جا هـ = ٣ جا ٣٠° = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن

٢) المركبة العمودية على المستوى ومقدارها و جتا هـ = ٣ جتا ٣٠° = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن

وبالمقارنة بين مقدار المركبة المماسية للوزن و جا هـ = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن ، مقدار القوة المؤثرة على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى = ٢ نيوتن نجد أن : ق > و جا هـ.

لذلك فإن الجسم يميل إلى التحرك لأعلى المستوى ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك $\overleftarrow{ح}$ فى عكس الاتجاه أى فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى لأسفل وبذلك يكون :

ق = ح + و جا هـ   ∴ ٢ = ح + $\frac{٣}{٢}$ ∴ ح = $\frac{١}{٢}$ نيوتن

ر = و جتا هـ   ∴ ر = ٣ جتا ٣٠°   ∴ ر = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ نيوتن

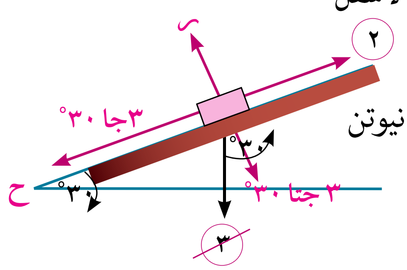
مقدار الاحتكاك = $\frac{١}{٢}$ نيوتن و يعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل

وللتعرف على ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

نوجد مقدار قوة الاحتكاك النهائى $ح_س$ = $م_س$ ر = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٣}$ نيوتن

فنجد أن : ح < $ح_س$ أى أن الاحتكاك غير نهائى

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة .



شكل (٣)

حاول أن تحل

(١) وضع جسم وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$. أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢,٥ ث كجم، فإذا كان الجسم متزنا . عين قوة الاحتكاك عندئذ وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا؟

تفكير ناقد: إذا وضع جسم على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وكان قياس زاوية الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى (ل) – ماذا تتوقع أن يحدث للجسم إذا كان :

أ) هـ < ل   ب) هـ > ل

مثال

(٢) وضع جسم وزنه ١٠ ث كجم على مستو مائل خشن تؤثر عليه قوة $\overleftarrow{و}$ فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى، فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٦ ث كجم ويكون على وشك الحركة إلى اسفل المستوى عندما و = ٤ ث كجم .أوجد :

أ) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

ب) معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى .

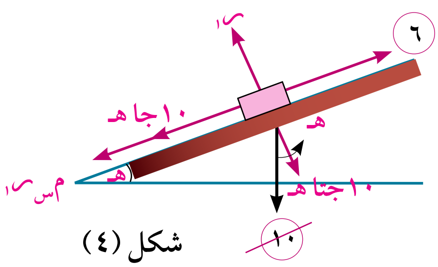
الحل

عندما و = ٦ ث كجم يكون الجسم على وشك الحركةإلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك السكونى نهائيا ويعمل إلى أسفل المستوى .

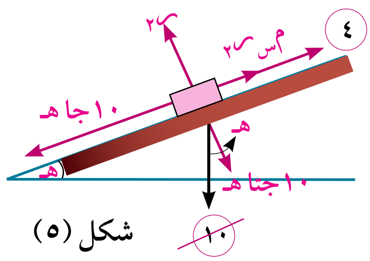
∴ $ر_1$ = ١٠ جتا هـ ، ٦ = ١٠ جاهـ + $م_س$ $ر_1$ وبحذف $ر_1$ من المعادلتين :

∴ ١٠ جا هـ + ١٠ $م_س$ جتا هـ = ٦ .... (١)

عندما و = ٤ ث كجم يكون الجسم على وشك الحركةإلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك السكونى نهائيا ويعمل إلى لأعلى المستوى .



شكل (٤)



شكل (٥)

∴ $ر_2$ = ١٠ جتا هـ ، ٤ + $م_س$ $ر_2$ = ١٠ جا هـ وبحذف $ر_2$ من المعادلتين :

∴ ١٠ $م_س$ جتا هـ = ١٠ جا هـ - ٤ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٦ = ١٠ جا هـ + ١٠ جا هـ – ٤ ∴ ٢٠ جا هـ = ١٠

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

وبالتعويض فى رقم (٢)

∴ ١٠ $م_س$ جتا ٣٠° = ١٠ جا ٣٠° – ٤

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٠ م = ٥ – ٤ ∴ $م_س$ = $\frac{١}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

حاول أن تحل

(٢) وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا زيد ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار :

أ) أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتمنعه من الانزلاق .

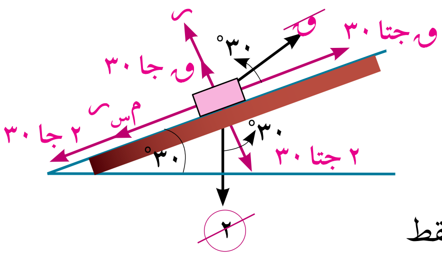
ب) القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط اكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

مثال

٣ وضع جسم وزنه ٢ ث كجم على مستوى افقى خشن ثم اميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق اسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى، و إذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها ٦٠° على الأفقى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

أ مقدار قوة الشد

ب مقدار قوة الاحتكاك السكونى



شكل (٦)

الحل

أولاً: ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى تحت تأثير وزنه فقط

$$∴ م_{س} = ظا ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

ثانيًا: ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى :

معادلات الاتزان هى :

$ر + و جا ٣٠° = ٢ جتا ٣٠°$ ∴ $ر = \sqrt{٣} - \frac{١}{٢}و$ .... (١)،

$و جتا ٣٠° = ٢ جا ٣٠° + \frac{١}{\sqrt{٣}} ر$ ∴ $٣ و = ٢\sqrt{٣} + ٢ر$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

$٣و = ٢\sqrt{٣} + ٢(\sqrt{٣} - \frac{١}{٢}و)$ ∴ $٤ و = ٤\sqrt{٣}$

∴ $و = \sqrt{٣}$ ث كجم

وبالتعويض فى (١) ∴ $ر = \sqrt{٣} - \frac{١}{٢}\sqrt{٣} = \frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ ث كجم

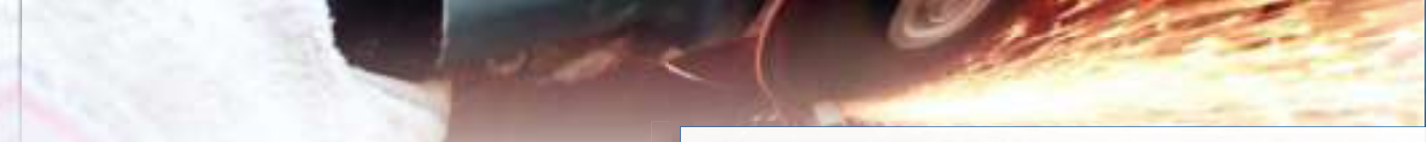
∴ قوة الاحتكاك السكونى $= م_{س} ر = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢}\sqrt{٣} = \frac{١}{٢}$ ث كجم

حاول أن تحل

٣ جسم وزنه ٣٠ نيوتن موضوع على مستو مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{٥}{١٣}$ فإذا زيد ميل المستوى بحيث كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{٣}{٥}$:

أ أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم موازية لخط أكبر ميل للمستوى تمنعه من الانزلاق

ب القوة التى تجعله على وشك الحركة لأعلى المستوى وموازية لخط أكبر ميل.



تمارين ١ - ٢

أولا: ضع علامة (✓) أو علامة (✗):

١) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على شكليهما وكتلتيهما.

٢) تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى بمعامل الاحتكاك.

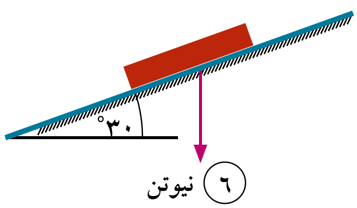
٣) ظل زاوية الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى

٤) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

٦) زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى وقوة رد الفعل المحصل.

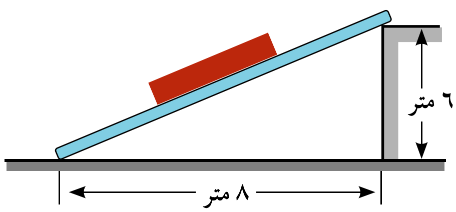
ثانيا: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة



٧) **فى الشكل المقابل:** إذا كان الجسم على وشك الانزلاق لأسفل فإن قوة الاحتكاك النهائى تساوى:

أ) ٣ ب) $٢\sqrt{٣}$

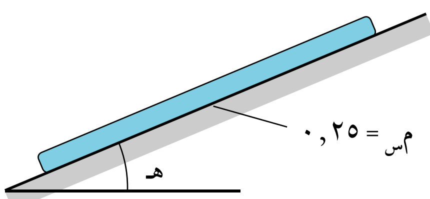
ج) $٣\sqrt{٣}$ د) ٩



٨) **فى الشكل المقابل:** الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى:

أ) ٣٦,٨٧° ب) ٤١,٤١°

ج) ٤٨,٥٩° د) ٥٣,١٣°



٩) **فى الشكل المقابل:**

الجسم على وشك الأنزلاق أسفل المستوى فيكون هـ =

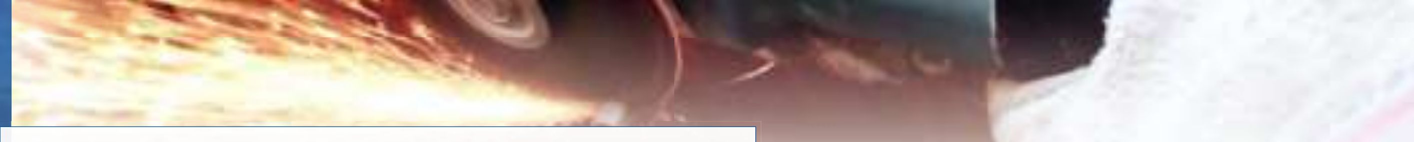
أ) ١٤,٠٤° ب) ١٤,٤٨°

ج) ٧٥,٥٢° د) ٧٥,٨٧°

ثالثا: أجب عن الأسئلة الاتية

١٠) جسم وزنه ٣٨ ث . كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{٤}$، فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت عليه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة . اوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى .

١١) وضع جسم وزنه ٤٠٠ ث . جم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$. أثرت على الجسم قوة مقدارها ٥٠ ث جم فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . إذا كان الجسم متزنا فعين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .



⑫ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$. بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، واوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . ثم اوجد مقدار القوة التى تؤثر على هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث يكون الجسم على وشك الحركة إلى اعلى المستوى .

⑬ وضع جسم وزنه ٢٠$\sqrt{٣}$ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد الجسم إلى اعلى بواسطة خيط واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وفى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ فأوجد أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل المستوى .

⑭ وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فوجد أن القوة التى توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى ٢ و جا هـ . اثبت أن :

أ قياس زاوية الاحتكاك = هـ ب مقدار رد الفعل المحصل = و

⑮ وضع جسم وزنه ٢٥ ث . كجم على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة مقدارها ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ١٥ ث . كجم ويكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما ق = ١٠ ث . كجم فأوجد :

أ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ب معامل الاحتكاك السكونى

⑯ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط اكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى هو $\frac{١}{٢}$، فأوجد وزن الجسم (و).

⑰ وضع جسم وزنه ٨ ث . كجم على مستوى افقى خشن ثم اميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق اسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° . أوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى، وإذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها ٣٠° على المستوى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

أ مقدار قوة الشد ب مقدار رد الفعل العمودى

⑱ وضع جسم وزنه ٣ ث كجم على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$. بين مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكنا ثم أوجد قيمة اكبر واصغر قوة أفقية (واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط اكبر ميل) تؤثر فى الجسم ويبقى متزنا .

⑲ كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوى والجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب . بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم أثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة يساوى $\frac{٣}{٤}$

⑳ تفكير إبداعى : جسم وزنه (و) موضوع على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وزاوية الاحتكاك بينه وبين الجسم قياسها ل . اثرت فى الجسم قوة مقدارها (ق) وتميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها (ى) . اوجد اصغر مقدار للقوة (ق) التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى .

ملخص الوحدة

السطوح الملساء: تنعدم قوى الاحتكاك فيها تماما و يكون معامل الاحتكاك = صفرا وهى سطوح افتراضية.

السطوح الخشنه: تظهر فيها قوى الاحتكاك و يكون معامل الاحتكاك فيها يساوى عدداً حقيقيا موجبا أكبر من الصفر.

رد الفعل:

- **فى حالة السطوح الملساء** يكون رد الفعل عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.
- **فى حالة السطوح الخشنة** يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه إذ يتوقف على طبيعة السطحين المتلامسين كما يتوقف على القوى الأخرى المؤثرة على الجسم .

قوة الاحتكاك السكونى: تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن و يكون اتجاهها معاكسا للأتجاه الذى يميل الجسم إلى الحركة فيه وتعطى قيمتها بالمتباينة $٠ \leqslant ع_{س} \leqslant م_{س} ر$ حيث $م_{س}$ هو معامل الاحتكاك السكونى .

قوة الاحتكاك السكونى النهائى: عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى يكون الجسم عندها على وشك الحركة (دون أن يتحرك) و يكون الاحتكاك عندها نهائيا و يرمز له بالرمز $(ع_{س})$.

وتكون : $ع_{س} = م_{س} ر$

قوة الاحتكاك الحركى: إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى يكون اتجاهها عكس اتجاه حركته ، وتعطى قيمتها بالعلاقة : $ع_{ك} = م_{ك} ر$ حيث $م_{ك}$ هو معامل الاحتكاك الحركى .

ملاحظات على معامل الاحتكاك السكونى والحركى:

- $م_{س}$ ، $م_{ك}$ يعتمد كل منهما على طبيعة الجسمين المتلامسين ، لكنه لا يعتمد على مساحة السطوح المتماسة أو كتلة الجسم المتحرك.
- معامل الاحتكاك السكونى $(م_{س}) >$ معامل الاحتكاك الحركى $(م_{ك})$

رد الفعل المحصل: رد الفعل المحصل $(ر')$هو محصلة قوة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك النهائى $ح_{س}$

زاوية الاحتكاك: الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل العمودي وقوة رد الفعل المحصل .

العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك: معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الاحتكاك

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى: إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

١ زاوية الاحتكاك هى :

أ الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى فى حالة الاحتكاك النهائى.

ب الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك النهائى.

ج النسبة بين رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك النهائى.

د النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى ومعامل الاحتكاك الحركى.

٢ معامل الاحتكاك يتوقف على :

أ مساحة سطح التلامس. ب شكل الجسمين.

ج طبيعة مادة الجسمين. د كل ماسبق.

٣ إذا كان $م_س$ ، $م_ك$ هما معاملى الاحتكاك السكونى والحركى على الترتيب لجسمين متلامسين فإن :

أ $م_س = م_ك$ ب $م_س > م_ك$ ج $م_س < م_ك$ د لاتوجد علاقة بينهما .

اجب عن الاسئلة الآتية :

٤ وضع جسم وزنه ١٣,٥ ث كجم على مستوٍ أفقى خش معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{٢}{٣}$ ، أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٧,٥ ث كجم. بين هل الجسم يكون على وشك الحركة ؟ فسر إجابتك .

٥ جسم وزنه ٤٥ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$.
أوجد:

أ مقدار أقل قوة أفقية تكفى لتحريك الجسم على المستوى.

ب مقدار واتجاه رد الفعل المحصل.

٦ وضع جسم وزنه ٢٦ نيوتن على مستو أفقى خشن واصبح الجسم على وشك الحركة عندما أثرت عليه قوتان أفقيتان مقدارهما ٧ ، ٨ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° . أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى .

٧ وضع جسم وزنه ١٠ ث كجم على مستوٍ يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° فكان الجسم على وشك الانزلاق.
أوجد القوة التى تعمل فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى لتجعل الجسم على وشك الحركة إلى اعلى المستوى.

٨ وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° . بين أن الجسم يبقى متزنا ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر على الجسم فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى لأسفل وتجعله على وشك الحركة .

العزوم

Moments

الوحدة ٢

مقدمة الوحدة

اعتمد الإنسان منذ القدم على فكرة الروافع لتمكنه من حمل ونقل الاشياء من مكان لآخر. والجهاز الحركى للإنسان يشبه إلى حد كبير الفكرة التى تقوم عليها الروافع. فالعظام هى الأجسام الصلبة المادية التى تؤثر عليها القوة العضلية المرتبطة بها لتدور حول نقطة ثابتة (مركز). وهذا يحتم علينا فهم التأثير الدورانى للقوة (عزم القوة). وفى هذه الوحدة سوف نلقى الضوء على مفهوم عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى أو ثلاثى الابعاد.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف ويوجد عزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ.
- يوجد معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة.
- يوجد عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة واقعه فى مستويها.
- يتعرف النظرية العامة للعزوم «إذا كانت لمجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك محصلة فإن المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة».
- يحل تطبيقات متنوعة على العزوم.

المصطلحات الأساسية

عزم	*Moment*
مركز العزم	*Moment centre*
محور العزم	*Moment axis*
ذراع العزم	*Moment arm*
دوران	*Rotation*
محصلة	*Resultant*
مركبة العزم	*Moment component*
عكس اتجاه دوران عقارب الساعة	*Anti clockwise*
فى اتجاه دوران عقارب الساعة	*Clockwise*
القياس الجبرى للعزم	*Algebraic measure of the moment*
معيار العزم	*Norm of the moment*

دروس الوحدة

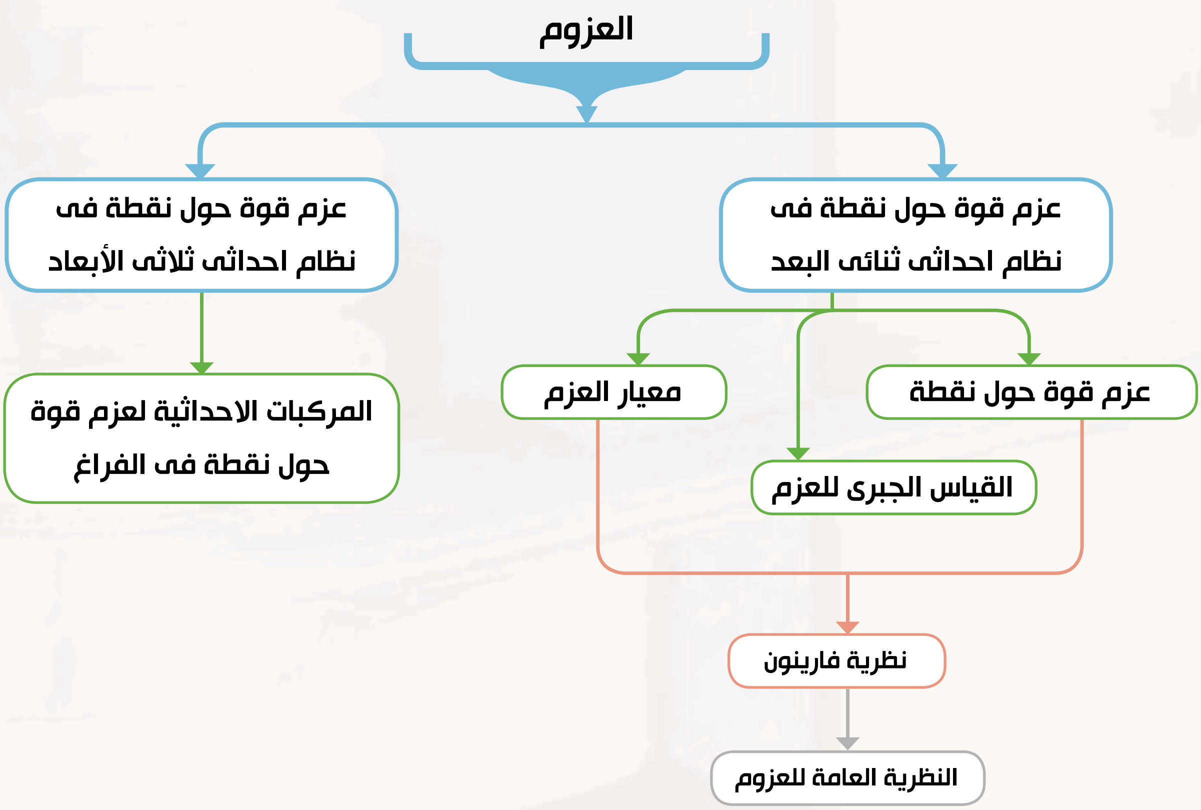
(٢ - ١): عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الابعاد.

(٢ - ٢): عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الابعاد.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثانية

٢ - ١

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الأبعاد

Moment of a force about a point in 2D-coordinate system

تعلمت سابقًا أن القوة قد تنتج من تأثير جسم طبيعى على جسم طبيعى آخر. وهذا التأثير ينتج عنه صور مختلفة (تأثير حركى - تأثير شكلى ...). فإذا تحرك الجسم من موضع إلى آخر فإن تأثير القوة هنا يكون تأثيرًا حركيًا انتقاليًا. و إذا تحرك الجسم حركة دورانية حول نقطة فإن تأثير القوة فى هذه الحالة يكون تأثير حركيًا دورانيًا. وهنا نقول أن القوة قادرة على احداث دوران للجسم حول نقطة وهو ما يعرف بعزم القوة حول نقطة.

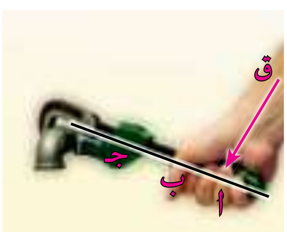
و يعتمد هذا التأثير الدورانى للقوة (العزم) على مقدار القوة وعلى بُعد خط عمل القوة عن هذه النقطة.

فكر و ناقش

(١) الشكل المقابل يوضح طفلان على ارجوحه متزنة فى وضع أفقى.

أى الطفلين (الأثقل - الأخف) يكون أقرب إلى مركز الدوران.

إذا أراد الطفل الأثقل أن يجعل الارجوحة تدور حيث يرتفع الطفل الأخف لاعلى. فما الذى يفعله؟

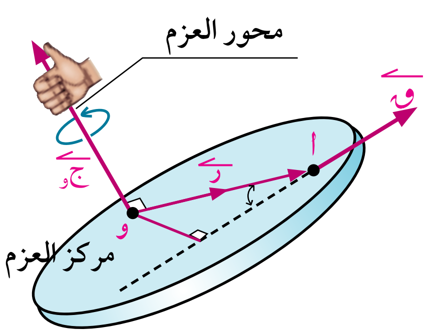


(٢) الشكل المقابل لبد شخص يحاول أن يربط ماسورة. فإن انسب موضع للقوة ق لاحكام الربط هو .. (أ، ب، جـ)

تعلم

عزم قوة حول نقطة فى نظام احداثى متعامد ثنائى الابعاد

Moment of a force about a point in 2D-coordinates system



يعرف عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة و بأنه مقدره القوة على احداث دوران للجسم حول النقطة و. و يمكن حساب هذا التأثير الدورانى من العلاقة $\overrightarrow{جـ_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

حيث $\overrightarrow{ر}$ متجه موضع نقطة أ على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة و. تسمى النقطة (و) مركز العزوم. و يسمى المستقيم المار بالنقطة (و) وعموديًا على المستوى الذى يحوى القوة $\overrightarrow{ق}$ ، بمحور العزم ونلاحظ أن عزم

سوف تتعلم

- عزم قوة بالنسبة لنقطة.
- عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة فى مستويها.

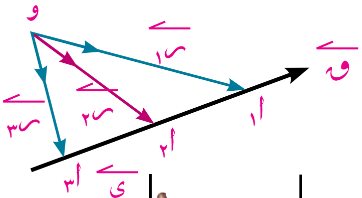
المصطلحات الأساسية

- عزم *Moment*
- مركز العزم *Moment centre*
- محور العزم *Moment axis*
- ذراع العزم

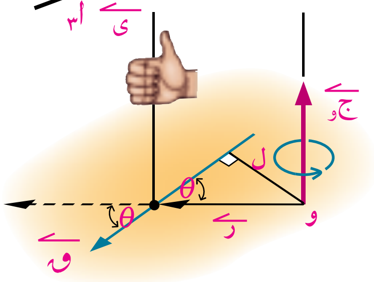
الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.

القوة هو كمية متجهه. وطبقًا لقاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهى يكون اتجاه عزم القوة بالنسبة لنقطة و عموديًا على المستوى الذى يحوى القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ والنقطة و.



تفكير ناقد: هل يتوقف عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة و على موضع النقطة أ على خط عمل القوة؟



(١) عزم قوة بالنسبة لنقطة

من تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فإن

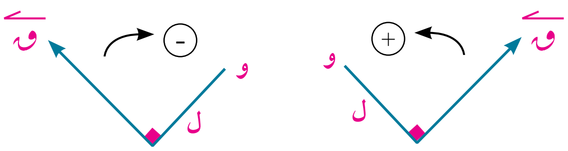
$$\overleftarrow{\text{جـ}_\text{و}} = (\|\overleftarrow{\text{ر}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \text{ جا } \theta)\, \overleftarrow{\text{ى}}$$

حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستوى $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ بحيث يكون الدوران من $\overleftarrow{\text{ر}}$ إلى $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ θ هى قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$

وبفرض $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = \text{ق}$ ، $\|\overleftarrow{\text{ر}}\| \text{ جا } \theta = \text{ل}$

حيث ل طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ (ل يسمى ذراع العزم) فإن عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول نقطة و هو $\overleftarrow{\text{جـ}_\text{و}} = (\text{ق ل})\, \overleftarrow{\text{ى}}$ (١)

(٢) القياس الجبرى للعزم



وإذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل على الدوران حول و فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم موجبًا (متجه العزم فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$) وإذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم سالبًا (متجه العزم فى اتجاه المتجه - $\overleftarrow{\text{ى}}$)

خط عمل القوة يمر بالنقطة و

$\therefore \overleftarrow{\text{جـ}_\text{و}} = \text{صفر}$

(٣) معيار العزم

ويكون معيار العزم هو $\|\overleftarrow{\text{جـ}_\text{و}}\| = \text{ق ل}$ (٢)

(٤) عزم قوة حول نقطة على خط عملها = صفر

(٥) وحدة قياس مقدار العزم

وحدة قياس مقدار العزم = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

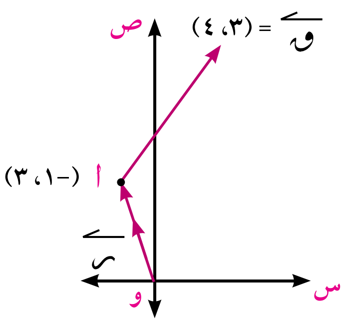
ومنها نيوتن.متر ، داين.سم ، ث كجم.متر ...

مثال

(١) إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٣\overleftarrow{\text{س}} + ٤\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (-١، ٣) من جسم أوجد:

أ) عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠)

ب) طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$



الحل

أ) $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{وأ}} = \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{و}}$

$= (-١، ٣) - (٠، ٠) = (-١، ٣)$

$\overleftarrow{\text{جـ}_\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

$= (-١، ٣) \times (٣، ٤) = (-١ \times ٤ - ٣ \times ٣)\ \overleftarrow{ع}$

$= -١٣\ \overleftarrow{ع}$

معيار العزم = ١٣ وحدة عزم، القياس الجبرى لمتجه العزم = -١٣ وحدة عزم

تفسير الناتج: أى أن القوة $\overleftarrow{ق}$ تحدث دورانًا للجسم حول نقطة و فى اتجاه دوران عقارب الساعة (اتجاه العزم فى اتجاه $-\overleftarrow{ع}$)

ب لايجاد طول العمود المرسوم من و على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$

$\because \|\overleftarrow{جـ_و}\| = ق\ ل \qquad \therefore ل = \frac{\|\overleftarrow{جـ_و}\|}{ق} = \frac{١٣}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{١٣}{٥}$ وحدة طول.

٩ حاول أن تحل

١ إذا كانت $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٢، ٣) أوجد:

أ عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

ب طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة.

تفكير ناقد: إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة. فماذا يعنى ذلك؟

تعلم

مبدأ العزوم (نظرية فارينون) *Principle of moments (Varignons theorm)*

عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\overleftarrow{ق} = ق_س\ \overleftarrow{س} + ق_ص\ \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ

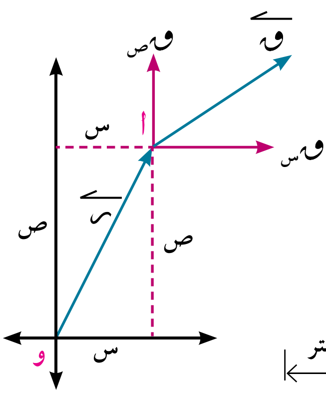
متجه موضعها بالنسبة للنقطة و وهو $\overleftarrow{ر} = (س، ص)$ فإن

$\overleftarrow{جـ_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

$= (س، ص) \times (ق_س، ق_ص)$

$= (س\ ق_ص)\ \overleftarrow{ع} + (-ص\ ق_س)\ \overleftarrow{ع}$

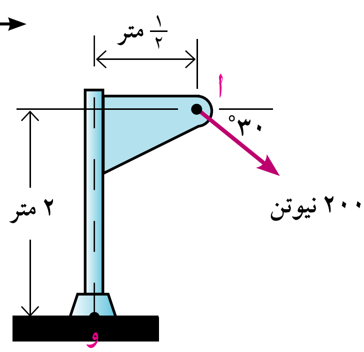
عزم $ق_ص$ حول و + عزم $ق_س$ حول و

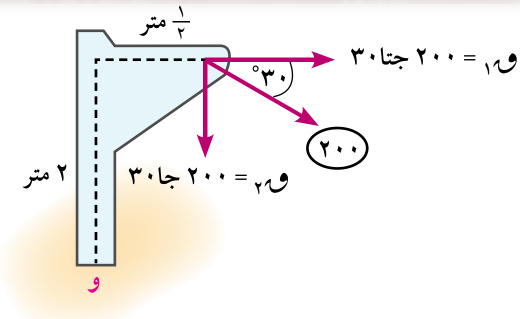


مثال

٢ فى الشكل المقابل:

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة و





الحل الأول:

نحلل القوة ٢٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$و_1$ = ٢٠٠ حتا ٣٠ = ١٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

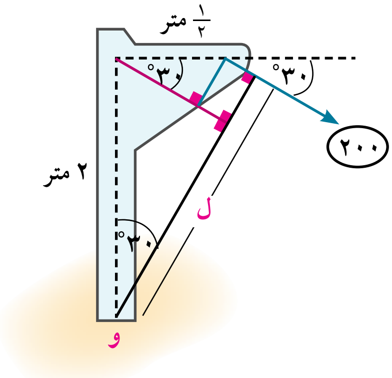
$و_2$ = ٢٠٠ جا ٣٠ = ١٠٠ نيوتن

وطبقًا لنظرية فارينون يكون

$ج_و$ = - $و_1$ × ٢ - $و_2$ × $\frac{١}{٢}$

= - ١٠٠ $\sqrt{٣}$ × ٢ - ١٠٠ × $\frac{١}{٢}$

= (-٢٠٠ $\sqrt{٣}$ - ٥٠) نيوتن . متر



الحل الثانى:

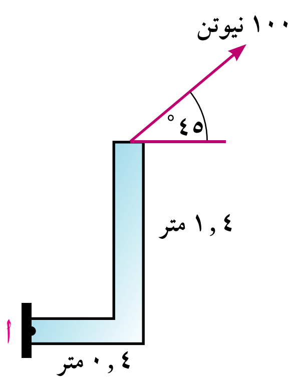
طول العمود الساقط من و على خط عمل القوة = ل

حيث ل = ٢ حتا ٣٠ + $\frac{١}{٢}$ جا ٣٠ = ($\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٤}$) متر

∵ القوة تعمل على الدوران حول و فى اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ القياس الجبرى لعزم القوة يكون سالب

∴ $ج_و$ = - ٢٠٠ × ($\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٤}$) = (-٢٠٠ $\sqrt{٣}$ - ٥٠) نيوتن . متر



حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل: احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة أ

نظرية

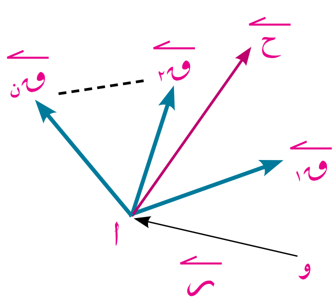
مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

البرهان

بفرض $\overleftarrow{و_1}$ ، $\overleftarrow{و_2}$ ، ....، $\overleftarrow{و_ن}$ مجموعة محدودة ومتلاقية من القوى تؤثر فى نقطة أ

وبفرض أن النقطة المطلوب إيجاد العزوم عندها هى النقطة (و)

∴ $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و أ}$



مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

= $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{و_1}$ + $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{و_2}$ + ... + $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{و_ن}$

= $\overleftarrow{ر}$ × ($\overleftarrow{و_1}$ + $\overleftarrow{و_2}$ + ... + $\overleftarrow{و_ن}$)

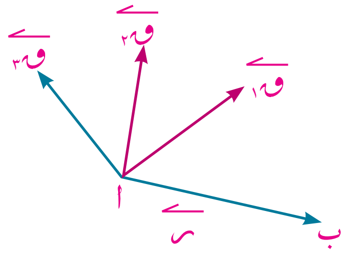
= $\overleftarrow{ر}$ × $\overleftarrow{ح}$

= عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها و

مثال (عزوم القوى المستوية المتلاقية فى نقطة)

٣ تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_1} = \overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (١، ٣)$ ، $\overleftarrow{ق_3} = ٤\,\overleftarrow{س} + ٤\,\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (-٢، ١) أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب (٠، ٢) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب. ماذا تلاحظ؟

الحل



$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (-٢، -١)$

$\overleftarrow{ج_1} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_1}$

$= (-٢، -١) \times (١، ٢)$

$= (-٤ + ١)\,\overleftarrow{ع} = -٣\,\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_2} = (-٢، -١) \times (١، ٣) = (-٦ + ١)\,\overleftarrow{ع} = -٥\,\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_3} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_3} = (-٢، -١) \times (٤، ٤) = (-٨ + ٤)\,\overleftarrow{ع} = -٤\,\overleftarrow{ع}$

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة ب

$= \overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + \overleftarrow{ج_3}$

$= -٣\,\overleftarrow{ع} - ٥\,\overleftarrow{ع} - ٤\,\overleftarrow{ع} = -١٢\,\overleftarrow{ع}$

محصلة القوى: $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} = (١، ٢) + (١، ٣) + (٤، ٤) = (٦، ٩)$

∴ عزم المحصلة $= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}$

$= (-٢، -١) \times (٦، ٩)$

$= (-١٨ + ٦)\,\overleftarrow{ع} = -١٢\,\overleftarrow{ع}$

نلاحظ أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها.

النظرية العامة للعزوم

نظرية: المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

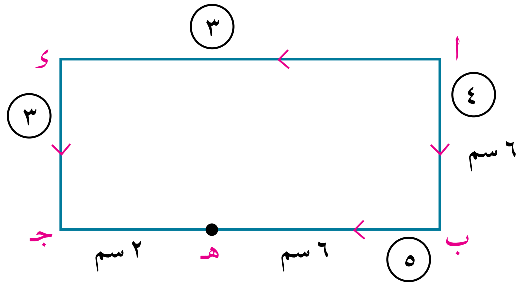
حاول أن تحل

٣ تؤثر القوى $\overleftarrow{ق_1} = ٣\,\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = -٢\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (-١، ٤). اوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب(١، ١) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب.

مثال

٤) أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم اثرت قوى مقاديرها ٤، ٥، ٣، ٣ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ حيث هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب هـ = ٦سم. اثبت أن محصلة هذه القوى تمر بالنقطة هـ.

الحل



مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى

بالنسبة لنقطة هـ = -٤ × ٦ + ٣ × ٢ + ٣ × ٦ = صفر

وطبقًا لنظرية العزوم فإن عزم المحصلة بالنسبة للنقطة هـ

يساوى = صفر

أى أن المحصلة تمر بالنقطة هـ

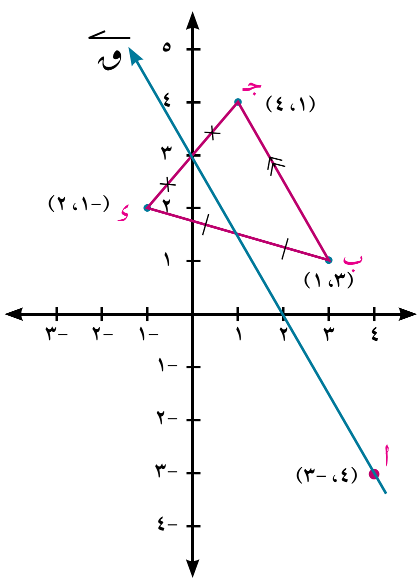
حاول أن تحل

٤) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٦سم، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ = ١سم ، اثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٣، ٤، ق نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ على الترتيب. فإذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة ق

مثال

٥) تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = -٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطة أ (٤، -٣). أوجد عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لكل من النقط ب(٣، ١)، جـ (١، ٤)، ى (-١، ٢)

الحل



$\overleftarrow{\text{ر}_1}$ = $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ - $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١، -٤)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}_\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ر}_1}$ × $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (١، -٤) × (-٢، ٣) = (٣ - ٨) $\overleftarrow{\text{ع}}$ = -٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

$\overleftarrow{\text{ر}_2}$ = $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ - $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٣، -٧)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}_\text{جـ}}$ = $\overleftarrow{\text{ر}_2}$ × $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (٣، -٧) × (-٢، ٣) = (٩ - ١٤) $\overleftarrow{\text{ع}}$ = -٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

$\overleftarrow{\text{ر}_3}$ = $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$ - $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (٥، -٥)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}_\text{ى}}$ = $\overleftarrow{\text{ر}_3}$ × $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (٥، -٥) × (-٢، ٣) = (١٥ - ١٠) $\overleftarrow{\text{ع}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

من المثال السابق نستنتج أن:

(١) إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = عزم هذه القوة حول نقطة جـ كان خط عمل القوة // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

(٢) إذا كان عزم قوة حول نقطة ب = - عزم هذه القوة حول نقطة ى كان خط عمل القوة ينصف $\overline{\text{ب ى}}$

حاول أن تحل

٥) تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى النقطة أ (-٣، ٢) فإذا كان عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول كل من النقطتين ب (٣، ١)، جـ (-١، ٤) يساوى ٢٨ $\overleftarrow{\text{ع}}$ أوجد $\overleftarrow{\text{ق}}$.

تعميم الاستنتاج السابق

إذا أثرت عدة قوى مستوية على جسم وكانت أ، ب نقطتين فى نفس المستوى.

(١) فإذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = مجموع عزوم القوى حول ب فإذا خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أب}$.

(٢) إذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = - مجموعة عزوم القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{أب}$

ملاحظة: أما إذا كان مجموع عزوم القوى حول نقطة ما ولتكن جـ ينعدم فإما جـ تقع على خط عمل المحصلة أ، أن المحصلة هى المتجه الصفرى

مثال

(٦) تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ(١، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب(٢، ١) ، جـ (٦، ٤)

الحل

$\because \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ب أ} = أ - ب = (-١، ٠)$ ، $\overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{ر_1} \times \overrightarrow{ح} = (-١، ٠) \times (٤، ٣) = -٣\overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ر_2} = \overrightarrow{جـ أ} = أ - جـ = (-٥، -٣)$ ، $\overrightarrow{ج_{جـ}} = \overrightarrow{ر_2} \times \overrightarrow{ح} = (-٥، -٣) \times (٤، ٣) = -٣\overrightarrow{ع}$

$\because \overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{ج_{جـ}}$ ، $\overrightarrow{ح} \neq \overrightarrow{٠}$

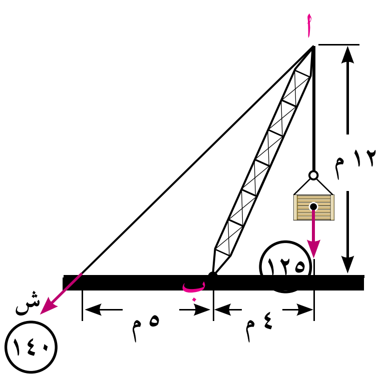
$\therefore$ خط عمل $\overrightarrow{ح}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$

حاول أن تحل

(٦) تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$، $\overrightarrow{ق_2} = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ (-٢، ٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب(-١، ٥)، جـ(١، ٢)

حاول أن تحل

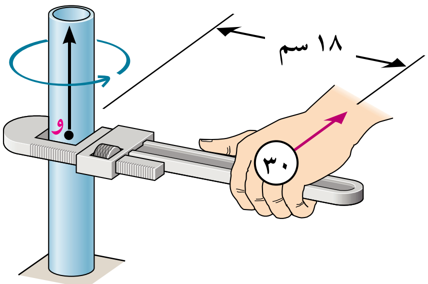
(٧) **فى الشكل المقابل:** $\overline{أب}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد فى الخيط يساوى ١٤٠ نيوتن، ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن. أوجد مجموع عزمى القوتين بالنسبة للنقطة ب



تمـــارين ٢ - ١

أكمل ما يأتى

١) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨سم فإن معيار عزمها حول نقطة أ يساوى .... نيوتن . سم

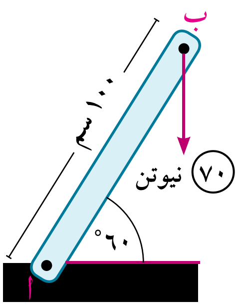


٢) **فى الشكل المقابل:** معيار عزم القوة حول النقطة (و) يساوى ....

٣) قوة ٤ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل يساوى ٥ $\overleftarrow{س}$ متر فإن عزم القوة حول نقطة الأصل يساوى......

٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوى صفرًا فإن ذلك يعنى ....

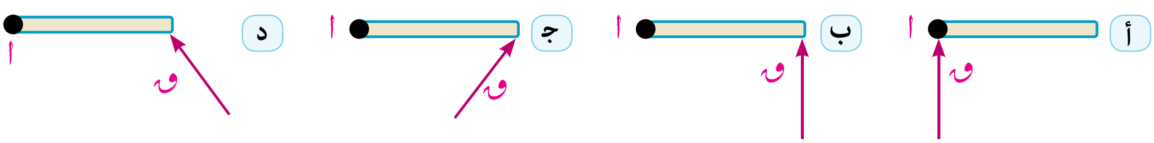
٥) إذا كان عزم القوة حول نقطة ثابتًا فإن مقدار القوة يتناسب عكسيًا مع ....



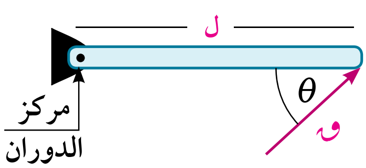
٦) **الشكل المقابل:** قضيب مثبت بمفصل عند أ اثرت على الطرف ب قوة رأسية لاسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوى .... نيوتن. متر

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

٧) **الشكل المقابل** يمثل باب متصل بمفصل عند أ . اثرت عليه قوة $\overleftarrow{ق}$ أى من الأشكال الآتية تكون القوة $\overleftarrow{ق}$ لها أكبر عزم عند أ



٨) قضيب طول ل يمكنه الدوران بسهوله حول نقطة عند أحد نهايتيه.
اثرت على نهايته الاخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم



أ) ل جا θ ب) ل جتا θ ج) ل د) ل ظا θ

⑨ إذا كان عزم قوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة أ يساوى عزمها حول النقطة ب فإن ....

أ) $\overrightarrow{ق}$ ⊥ $\overline{أب}$　　ب) $\overrightarrow{ق}$ تنصف $\overline{أب}$

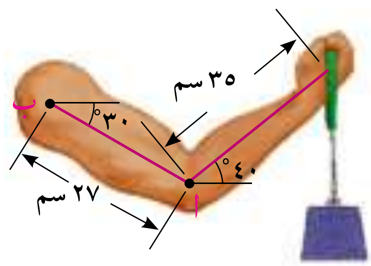
ج) $\overrightarrow{ق}$ // $\overline{أب}$　　د) $\overleftrightarrow{أب}$ ، خط عمل $\overrightarrow{ق}$ متخالفان

أجب عن الأسئلة الآتية

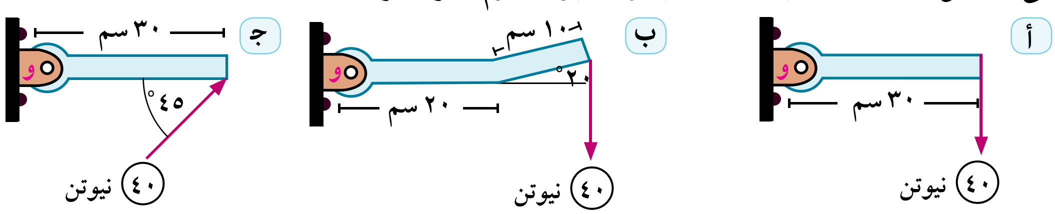
⑩ تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق}_1$ = م $\overrightarrow{س}$ + ٢$\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = ل $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ فى النقطتين $أ_1$ (١، ١)، $أ_2$ (-١، -٢) على الترتيب. عين قيمة كل من الثابتين م، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين حول نقطة الأصل وبالنسبة للنقطة ب (٢، ٣)

⑪ القوى $\overrightarrow{ق}_1$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ = -٣$\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١، ١). برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ١) ، (٦، ٤)

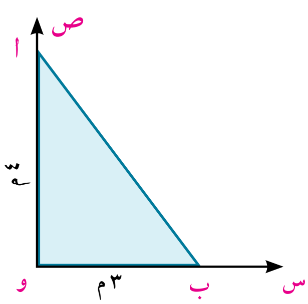
⑫ **الشكل المقابل** يمثل شخص يحمل بيده ثقل. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن متر أوجد عزم الثقل حول نقطة ب



⑬ فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة و



⑭ تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ فى المستوى س ص على المثلث أ و ب. فإذا كان القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و يساوى ٨٤ نيوتن . م ، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة أ يساوى - ١٠٠ نيوتن . م ، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب يساوى صفر. عين $\overrightarrow{ق}$



عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الأبعاد

Moment of a force about a point in 3D- Coordinate system

تعلمت فى الدرس السابق إيجاد عزم قوة بالنسبة لنقطة فى مستويها. وفى هذا الدرس سوف تتعلم إيجاد عزم قوة بالنسبة لنقطة في الفراغ.

سوف تتعلم

- عزم قوة حول نقطة فى الفراغ.
- المركبات الاحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ.

المصطلحات الأساسية

- فراغ *Space*
- مركبات *Components*
- دوران *Rotation*
- محور *Axis*

الأدوات المستخدمة

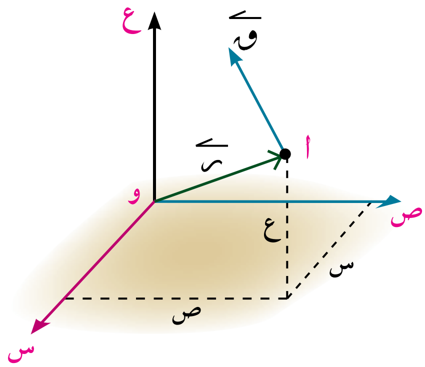
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسوم ثلاثية الأبعاد

تعلم

عزم قوة حول نقطة فى الفراغ

moments of a force about a point in space

إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} ، \text{ق}_{\text{ص}} ، \text{ق}_{\text{ع}})$ تؤثر فى النقطة أ (س ، ص ، ع) التى متجه موضعها بالنسبة للنقطة و (٠، ٠، ٠) هو $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$ فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول نقطة و يساوى

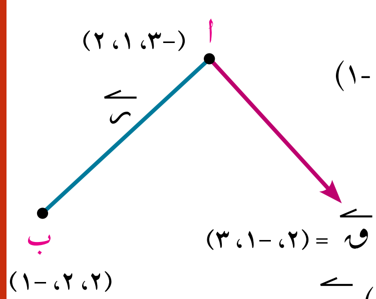


$$\overrightarrow{\text{ج}_{\text{و}}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

مثال

١ تؤثر القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ فى النقطة أ (-٣، ١، ٢). أوجد عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول نقطة ب (٢، ٢، -١) ثم احسب طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة

الحل



$$\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (-٣، ١، ٢) - (٢، ٢، -١)$$

$$= (-٥ ، -١ ، ٣)$$

$$\overrightarrow{\text{ج}_{\text{ب}}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$$

$$= (-٥ ، -١ ، ٣) \times (٢ ، -١ ، ٣)$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٥ & -١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = (-١ \times ٣ - ٣ \times -١)\overrightarrow{\text{س}} - (-٥ \times ٣ - ٣ \times ٢)\overrightarrow{\text{ص}} + (-٥ \times -١ - ٢ \times -١)\overrightarrow{\text{ع}}$$

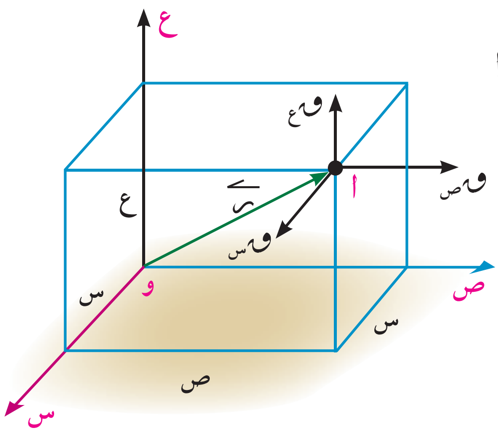
$$= ٢١\overrightarrow{\text{ص}} + ٧\overrightarrow{\text{ع}} \text{ وحدة عزم}$$

$$\text{ل} = \frac{\|\overrightarrow{\text{ج}_{\text{ب}}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|} = \frac{\sqrt{٠^٢ + ٢١^٢ + ٧^٢}}{\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + ٣^٢}} = \sqrt{٣٥} \text{ وحدة طول}$$

حاول أن تحل

(١) أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل حيث $\overrightarrow{ق} = -٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص} + ٥ \overrightarrow{ع}$ وتؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$

المركبات الاحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة



بفرض القوة $\overrightarrow{ق} = ق_{س} \overrightarrow{س} + ق_{ص} \overrightarrow{ص} + ق_{ع} \overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ

متجه موضعها حول نقطة الأصل $\overrightarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$

فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و

يساوى $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_{س} & ق_{ص} & ق_{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (ص\, ق_{ع} - ع\, ق_{ص}) \overrightarrow{س} + (ع\, ق_{س} - س\, ق_{ع}) \overrightarrow{ص} + (س\, ق_{ص} - ص\, ق_{س}) \overrightarrow{ع}$$

أى أن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ له ٣ مركبات يمكن تفسير كل منهم كالآتى:

مركبة العزم فى اتجاه $\overrightarrow{س}$ يمكن حسابها بإيجاد عزم المركبات $ق_{س}$ ، $ق_{ص}$ ، $ق_{ع}$ حول محور س.

المركبة $ق_{س}$ ليس لها عزم دورانى حول محور س لأنها توازى المحور. بينما المركبة $ق_{ص}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $- ع \times ق_{ص}$.

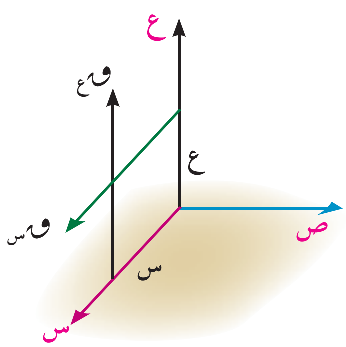
بينما المركبة $ق_{ع}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $ص \times ق_{ع}$

فيكون مجموع عزوم المركبات حول محور س يساوى $ص \times ق_{ع} - ع \times ق_{ص}$

بالمثل لباقى مركبات العزم فى اتجاه $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$

مثال

(٢) إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، ٢)$ وكان مركبة عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول محور ص يساوى ٧ وحدات عزم أوجد قيمة ك ثم أوجد طول العمود المرسوم من و على خط عمل $\overrightarrow{ق}$



الحل

$\overrightarrow{ق} = (ك، ٤، -١) \longrightarrow ق_{س} = ك ، ق_{ص} = ٤ ، ق_{ع} = -١$

$\overrightarrow{ر} = (١، ٢، ٢) \longrightarrow س = ١، ص = ٢، ع = ٢$

مركبة عزم القوة حول محور $\overrightarrow{ص} = ع\, ق_{س} - س\, ق_{ع}$

$\therefore ٢ك - ١ (-١) = ٧$

$\therefore$ ٢ك + ١ = ٧ $\longleftarrow$ ك = ٣

$$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ١- \end{vmatrix} = -١٠\ \overleftarrow{\text{س}} + ٧\ \overleftarrow{\text{ص}} - ٢\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

$\therefore$ طول العمود المرسوم من و على خط عمل القوة = $\dfrac{\|\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overleftarrow{\text{ق}}\|}$

$$= \frac{\sqrt{(-١٠)^٢ + (٧)^٢ + (-٢)^٢}}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + (-١)^٢}} = \frac{٣\sqrt{٤٤٢}}{٢٦} \text{ وحدة طول}$$

حاول أن تحل

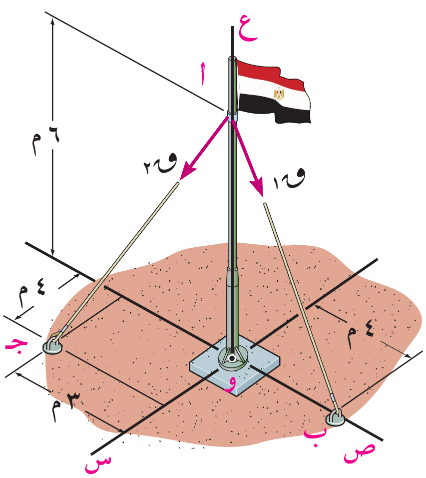
② إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ك $\overleftarrow{\text{س}}$ + م $\overleftarrow{\text{ص}}$ - ٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ١ ، ١) فإذا كانت مركبتا عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول المحورى س ، ص هما - ١ ، - ٨ على الترتيب أوجد قيمة كل من ك ، م

مثال

③ تؤثر القوى ق$_١$ = ٦ $\sqrt{١٣}$ نيوتن ، ق$_٢$ = $\sqrt{٦١}$ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ كما بالشكل. أوجد

أ مجموع عزوم القوى حول نقطة و

ب عزم محصلة القوتين حول نقطة و. ماذا تستنتج



الحل

من هندسة الشكل احداثيات النقط هى

أ(٠ ، ٠ ، ٦) ، ب (٠ ، ٤ ، ٠)، جـ (٤ ، - ٣ ، ٠)

$$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (٠ ، ٤ ، ٠) - (٠ ، ٠ ، ٦) = (٠ ، ٤ ، - ٦)$$

$$\overleftarrow{\text{ق}}_١ = \text{ق}_١ \left(\frac{\overleftarrow{\text{أب}}}{\|\overleftarrow{\text{أب}}\|}\right) = ٦\sqrt{١٣} \left(\frac{(٠ ، ٤ ، -٦)}{\sqrt{٠^٢ + ٤^٢ + (-٦)^٢}}\right) = ٦\sqrt{١٣} \times \frac{(٠، ٤، -٦)}{٢\sqrt{١٣}}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ق}}_١ = (٠، ١٢، -١٨)$$

$$\overleftarrow{\text{أجـ}} = \overleftarrow{\text{جـ}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (٤ ، - ٣ ، ٠) - (٠ ، ٠ ، ٦) = (٤ ، - ٣ ، - ٦)$$

$$\overleftarrow{\text{ق}}_٢ = \text{ق}_٢ \left(\frac{\overleftarrow{\text{أجـ}}}{\|\overleftarrow{\text{أجـ}}\|}\right) = \sqrt{٦١} \left(\frac{(٤ ، - ٣ ، - ٦)}{\sqrt{٤^٢ + (-٣)^٢ + (-٦)^٢}}\right) = \sqrt{٦١} \times \left(\frac{(٤، -٣، -٦)}{\sqrt{٦١}}\right)$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ق}}_٢ = (٤، -٣، -٦)$$

عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_١$ بالنسبة لنقطة و = $\overleftarrow{\text{وأ}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_١$ = (٠ ، ٠ ، ٦) × (٠ ، ١٢ ، - ١٨)

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ١٢ & ١٨- \end{vmatrix} = -٧٢\ \overleftarrow{\text{س}}$$

عزم القوة $\overleftarrow{ق_2}$ بالنسبة لنقطة و = $\overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق_2}$ = (٠ ، ٠ ، ٦) × (٤ ، - ٣ ، - ٦)

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ٦ \\ ٤ & -٣ & -٦ \end{vmatrix} = ١٨ \overleftarrow{س} + ٢٤ \overleftarrow{ص}$$

أ) مجموع عزوم القوى حول و = - ٧٢ $\overleftarrow{س}$ + ١٨ $\overleftarrow{س}$ + ٢٤ $\overleftarrow{ص}$ = - ٥٤ $\overleftarrow{س}$ + ٢٤ $\overleftarrow{ص}$ (١)

محصلة القوتين $\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$ = (٠ ، ١٢ ، - ١٨) + (٤ ، - ٣ ، - ٦)

= (٤، ٩، -٢٤) وتؤثر فى نقطة أ

ب) عزم المحصلة حول النقطة و = $\overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ح}$ = (٠، ٠، ٦) × (٤، ٩، -٢٤)

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ٦ \\ ٤ & ٩ & -٢٤ \end{vmatrix} = -٥٤ \overleftarrow{س} + ٢٤ \overleftarrow{ص} \quad (٢)$$

من ١، ٢ نلاحظ أن

مجموع عزوم القوى حول نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

تمـــارين ٢-٢

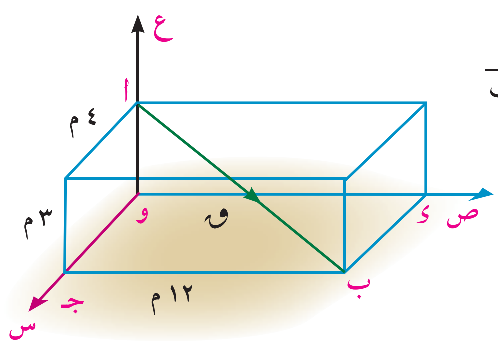
١) إذا كانت $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة. وكانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ(١، -١، ٤) أوجد

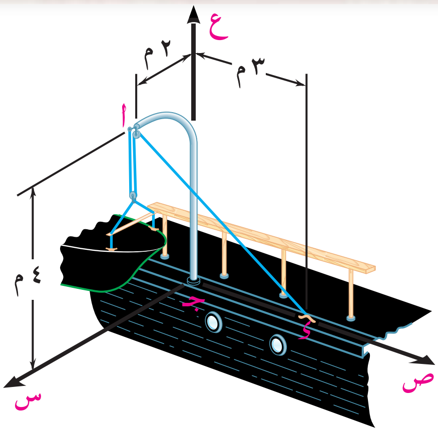
أ) عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

ب) عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة ب (٢، -٣، ١) ثم استنتج طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة

٢) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ل $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (٤، -٢، ٠) وكان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل يساوى ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ١٦ $\overleftarrow{ع}$ فما قيمة ل.

٣) فى **الشكل المقابل** قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر $\overline{أ ب}$ فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣م، ٤م، ١٢م كما بالشكل أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ى





٤ **فى الشكل المقابل** حبل مثبت فى النقطة ء يمر على بكره ملساء عند أ ويتدلى من الطرف الآخر للخيط زورق صغير. فإذا كان مقدار الشد فى الحبل $\overline{ءأ}$ يساوي $١٠\sqrt{٢٩}$ نيوتن أوجد عزم الشد فى الحبل حول النقطة جـ.

٥ قوة $\overrightarrow{ق}$ تؤثر فى النقطة أ(٢، -١، ٣) فإذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوي ٢١ $\overrightarrow{ص}$ + ٧ $\overrightarrow{ع}$ أوجد $\overrightarrow{ق}$ حيث $\overrightarrow{ق}$ توازي محور السينات.

٦ إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (-١ ، ٣ ، -٢) وكانت مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور س يساوى -٣ وحدات عزم . أوجد قيمة ب . ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة.

٧ أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، $\overline{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم، أ ء = ٩سم . رسم $\overline{ء هـ}$ ⊥ مستوى شبه المنحرف حيث ء هـ = ١٢ سم . اثرت قوة مقدارها ٧٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ هـ}$. أوجد معيار عزم القوة حول النقطة ب .

٨ إذا كان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ حول نقطة الأصل و يساوى $\overrightarrow{ج}_{و}$ = -٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ و إذا كانت هذه القوة تمر بنقطة الاحداثى ص لها يساوى ٢ . أوجد الاحداثيي س ، ع للنقطة وكذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الاصل على خط عمل القوة.

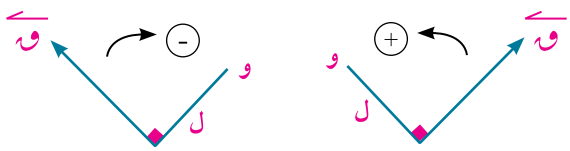
٩ قوة $\overrightarrow{ق}$ = ١٥ $\overrightarrow{س}$ - ٢٥ $\overrightarrow{ص}$ + ٤٠ $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ (-٣، -٣، ٢) أوجد مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور ص .

ملخص الوحدة

١ **عزم قوة بالنسبة لنقطة** يعرف عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ المؤثرة على جسم حول النقطة و بأنه مقدرة القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ على احداث دوران للجسم حول نقطة و ويحسب عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ من العلاقة $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة (و) ويكون اتجاه العزم عمودى على المستوى الذى يحوى كل من $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$

٢ **معيار عزم قوه بالنسبة لنقطة** إذا كان ق يمثل معيار القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، ل يمثل طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة فإن معيار عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول النقطة و يحسب من العلاقة $\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \| = \text{ق ل}$

٣ **القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة** إذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة و، فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة يكون موجبًا وإذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة و ، مع اتجاه دوران عقارب الساعة كان القياس الجبرى لمتجه العزم سالبًا



٤ طول العمود المرسوم من نقطة و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ هو ل حيث $\text{ل} = \dfrac{\| \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \|}{\| \overleftarrow{\text{ق}} \|}$

٥ إذا تلاشى عزم قوة بالنسبة لنقطة فإن خط عمل القوة يمر بهذه النقطة

٦ **مبدأ العزوم (نظرية فارينون)** عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة للنقطة نفسها

٧ **نظرية مجموع عزوم عدة قوى مستوية** متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

٨ إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = مجموع عزوم هذى القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة موازيًا $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٩ إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = - مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة ينصف $\overline{\text{أب}}$

١٠ **عزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ** $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

حيث $\overleftarrow{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة و

١١ **مركبات عزوم قوة فى اتجاه المحاور** إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} ، \text{ق}_{\text{ص}} ، \text{ق}_{\text{ع}})$ قوة تؤثر فى نقطة متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل $\overleftarrow{\text{ر}} = (\text{س، ص، ع})$ فإن:

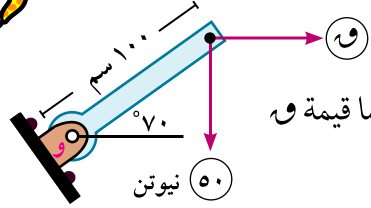
$(\text{ص ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{ص}})$ ⟵ مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه محور س

$(\text{ع ق}_{\text{س}} - \text{س ق}_{\text{ع}})$ ⟵ مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه محور ص

$(\text{س ق}_{\text{ص}} - \text{ص ق}_{\text{س}})$ ⟵ مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه محور ع

تمارين عامة

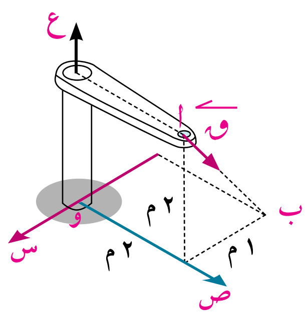
١) إذا كان عزم القوة الأفقية ق حول نقطة و يساوى عزم القوة الرأسية ٥٠ نيوتن حول نقطة و فما قيمة ق



٢) فى الشكل المقابل

احسب عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ١٤$\sqrt{٥}$ نيوتن

حول النقطة و



٣) قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة (-٣، ٠) أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة (١، -٢)

٤) القوة $\overrightarrow{\text{ق}}_{١}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ متر وقوة اخرى $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها - ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ متر أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل

٥) إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

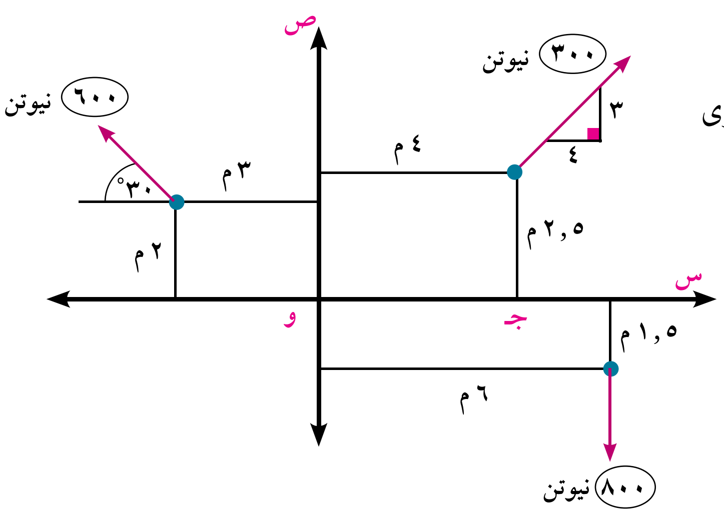
وكانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ٠ ، - ١)

وكان عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (٢، -١، ٣) يساوى ١٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$. فما قيمة ك.

٦) فى الشكل المقابل

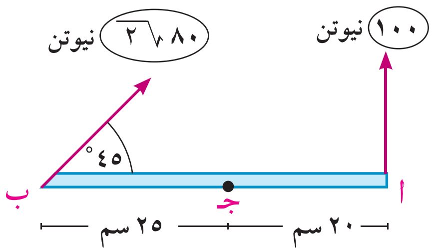
أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى

بالنسبة للنقطة جـ



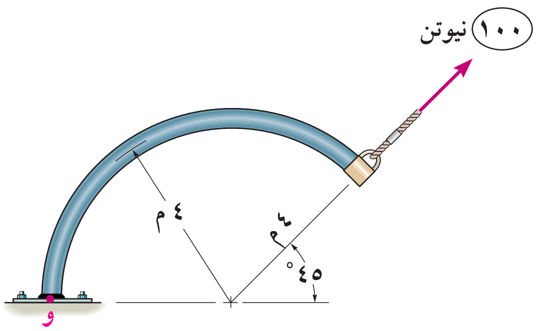
تمارين عامة

⑦ **فى الشكل المقابل** اثبت أن محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن ، ٨٠ $\sqrt{2}$ نيوتن تمر بالنقطة جـ



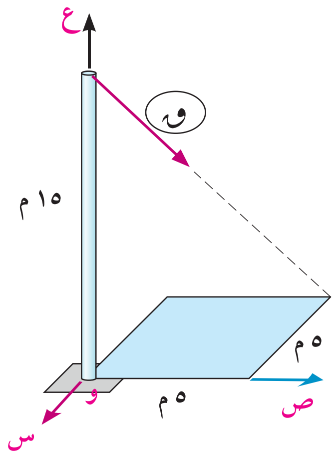
⑧ **فى الشكل المقابل**

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول نقطة و



⑨ **فى الشكل المقابل**

أوجد عزم القوة ق = ١٥ $\sqrt{11}$ نيوتن حول نقطة و



لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، أ جـ = ١٠ سم ، ق(∠ ب جـ أ) = θ فإن ب جـ =

أ ١٠ جا θ ب ١٠ جتا θ جـ ١٠ ظا θ د ٥

(٢) البعد بين النقطتين (٢ ، -١) ، (-١ ، ٣) يساوى

أ ٤ ب ٥ جـ $\sqrt{٥}$ د ٢

(٣) جيوب تمام الاتجاه للمتجه (-٢، ٢، ١) هى:

أ ٢ ، -٢ ، -١ ب $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ د $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم ، ق(∠ أ ب جـ) = ٧٠° فإن طول العمود المرسوم من أ على $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يساوى:

أ ٨ جتا ٧٠ ب ٨ جا ٧٠ جـ ٨ ظا ٧٠ د $\sqrt{٨}$

(٥) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، -١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٢) فإن $\overleftarrow{أ}$ • $\overleftarrow{ب}$ =

أ ٧ ب $\sqrt{٦٥}$ جـ ٤ د ٨

(٦) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (-١ ، ٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، ١) فإن $\overleftarrow{أ}$ × $\overleftarrow{ب}$ =

أ (٤ ، ٧ ، -٦) ب (-٤ ، -٧ ، -٦) جـ (-٤ ، ٧ ، -٦) د ٥

(٧) إذا كان $\overleftarrow{ق}$ = (٢ ، -٣ ، ٤) ، تؤثر فى النقطة (١ ، ١ ، ١) فإن مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ حول محور س يساوى

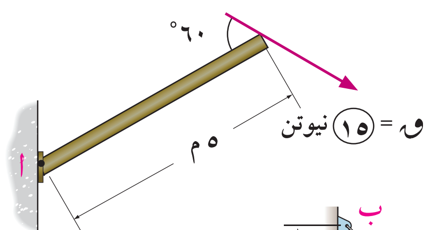
أ ٧ ب -٢ جـ -٥ د ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

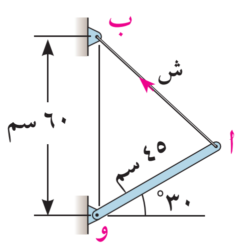
(٨) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم. اثرت قوى مقاديرها ٣، ٥، ٨، ٥$\sqrt{٢}$ ث. كجم فى اتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب . أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى:

أ بالنسبة للنقطة أ ب بالنسبة للنقطة ب

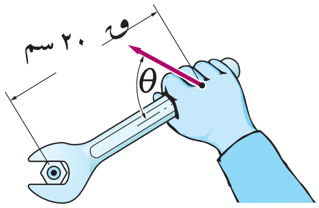
جـ بالنسبة لمركز المربع



(٩) **الشكل المقابل** يمثل تأثير قوة ١٥ نيوتن على ذراع مثبتة بمفصل عند أ . أوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة لنقطة أ .



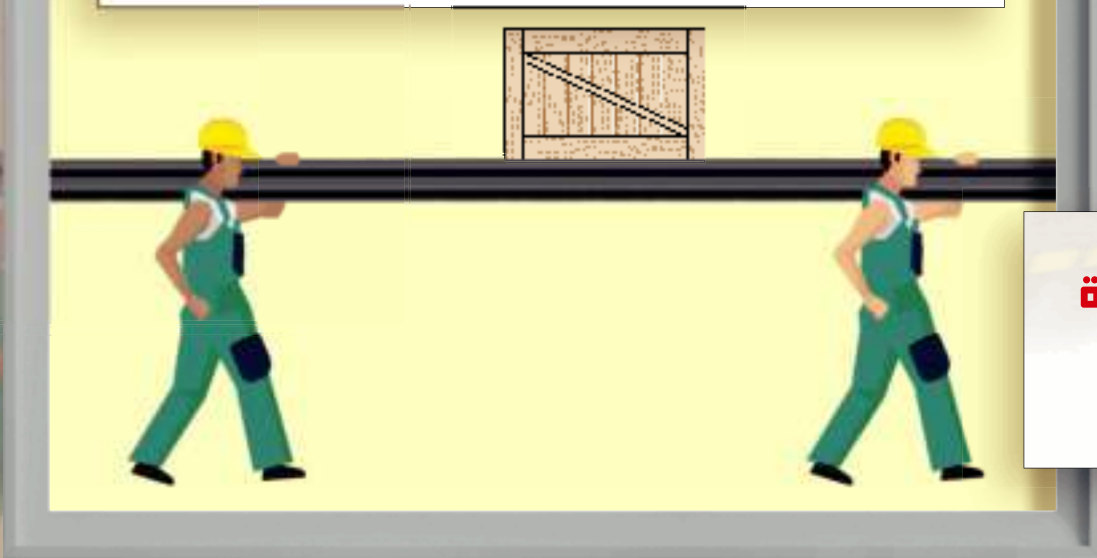
(١٠) **فى الشكل المقابل** الشد فى الخيط $\overline{أ ب}$ مقداره ١٥٠ نيوتن أوجد القياس الجبرى لعزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و.



(١١) إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار يساوى ٤٠٠ نيوتن.سم أوجد اقل قيمة للقوة ق وقيمة θ التى تحقق دوران المسمار.

القوى المتوازية المستوية

Parallel coplanar forces



الوحدة

٣

مقدمة الوحدة

في دراستنا السابقة لمجموعة القوى المستوية المؤثرة علي نقطة مادية، كانت خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة مادية واحدة، وبالتالى فإن خط عمل محصلة هذه القوى يمر بنقطة واحدة هى نقطة التلاقى المشتركة لهذه المجموعة من القوى.

وفى هذه الوحدة سوف نتناول مجموعة القوى التى تؤثر علي جسم متماسك حيث أن خطوط عمل هذه القوى لاتتلاقى فى نقطة واحدة بالضرورة ، وستقتصر دراستنا فى هذه الوحدة على تلك القوى التى تتوازى خطوط عملها وتقع جميعها فى مستو واحد وهو مايطلق عليه بالقوى المتوازية المستوية ، وسوف نتناول فى دراستنا لهذه الوحدة عرض القوى المتوازية المستوية عندما يطلب إيجاد محصلتها من حيث اتجاهها ومقدارها ونقطة تأثيرها.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف القوى المتوازية المستوية
- يعين خط عمل محصلة قوتين متوازيتين عندما تكونان فى اتجاه واحد أو في اتجاهين مختلفين.
- يعين احدى قوتين متوازيتين إذا علمت القوة الآخرى والمحصلة .
- يوجد عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة.
- يوجد محصلة مجموعة من القوى المتوازية المستوية.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوة متوازية حول نقطة يساوى صفر إذا كانت محصلتهما تمر بهذه النقطة.
- يستنتج أن مجموع عزوم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة يساوى صفر إذا تلاشت محصلة هذه القوى.

المصطلحات الأساسية

قوى متوازية	Parallel forces	وزن	Weight
محصلة	Resultant	متوازيان	Parallel
مقدار	Magnitude	حامل (وتد)	Support
معيار	Norm	سقالة	Beam
نقطة تأثير	Point of action	شد	Tension
رد فعل	Reaction	بكرة	pully

دروس الوحدة

(٣-١): محصلة القوى المتوازية المستوية.

(٣-٢): اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

مخطط تنظيمى للوحدة

- القوى المتوازية المستوية
  - محصلة القوى المتوازية المستوية
    - محصلة قوتين متوازيتين
      - يعملان فى نفس الاتجاه
      - يعملان فى اتجاهين متضادين
    - محصلة عدة قوى متوازية ومستوية
  - اتزان القوى المتوازية المستوية
    - مجموع عزوم القوى حول أى نقطة يساوى صفر
    - محصلة القوى تساوى صفرا

محصلة القوى المتوازية المستوية

Resultant of a parallel coplanar forces

سوف تتعلم

- محصلة قوتين متوازيتين وفى نفس الاتجاه.
- محصلة قوتين متوازيتين وفى اتجاهين متضادين.
- محصلة عدة قوى متوازية ومستوية.

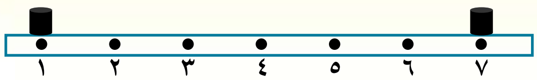
المصطلحات الأساسية

- قوى متوازية *Parallel*
- محصلة *Resultant*
- مقدار *Magnitude*
- معيار *Norm*
- نقطة تأثير *Point of action*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

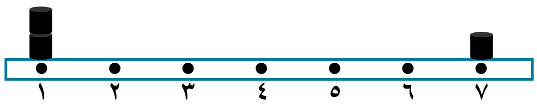
عمل تعاونى



شكل (١)

شكل (١) يوضح مسطرة خشبية مدرجة من ١ إلى ٧ موضوع عليها حجران متماثلان عند طرفى المسطرة.

(١) عين موضع نقطة على المسطرة يمكن تعليق المسطرة منها. بحيث تتزن افقيًا.



شكل (٢)

(٢) إذا وضع ثقلان عند أحد الطرفين شكل (٢).

هل يتغير موضع نقطة التعليق؟

عين موضع نقطة التعليق الجديدة إذا تغير الموضع؟

أولاً: محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه

Resultant of two parallel forces having the same direction

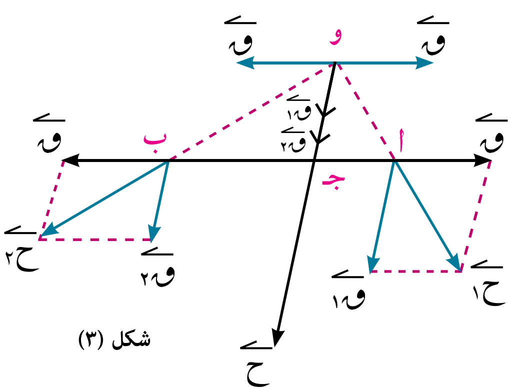
تعلمت أن محصلة عدة قوى مستوية $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ ، ...، $\overrightarrow{ق_{ن}}$ متلاقية فى نقطة واحدة هو قوة $\overrightarrow{ح}$ حيث $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_{١}} + \overrightarrow{ق_{٢}} + ... + \overrightarrow{ق_{ن}}$ وتمر بنفس النقطة. وفى هذا الدرس سوف تتعلم إيجاد محصلة عدة قوى متوازية ومستوية .

نبدأ بإيجاد محصلة قوتين متوازيتين ومستويتين ولهما نفس الاتجاه.

بفرض $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه ويؤثران فى جسم متماسك فى نقطتين أ، ب فتكون محصلة القوتين هى $\overrightarrow{ح}$ حيث:

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_{١}} + \overrightarrow{ق_{٢}}$.

ولتحديد موضع نقطة تأثير المحصلة نفرض قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه تؤثران عند أ، ب وهذا لن يغير من تأثير القوتين $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$.



شكل (٣)

يمكن إيجاد محصلة القوتين$\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق}$. عند أ والتى تمثل قطر متوازى الاضلاع ولتكن $\overrightarrow{ح_{١}}$ كذلك $\overrightarrow{ح_{٢}}$ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ عند ب.

وبفرض أن خطى عمل المحصلتين $\overrightarrow{ح_{١}}$، $\overrightarrow{ح_{٢}}$ يتقاطعان عند نقطة و.

فيمكن استبدال القوة $\overrightarrow{ح_1}$ بمركبتيها الاصليين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق}$ كذلك يمكن استبدال القوة $\overrightarrow{ح_2}$ بمركبتيها الاصليين $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق}$.
القوى المؤثرة عند نقطة (و) هى: $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وتعملان فى اتجاه $\overrightarrow{و جـ}$ (الموازى لخط عمل القوتين الاصليتين) والقوتان $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ق}$ وتعملان فى اتجاهين متضادين حيث يمكن حذفهما دون حدوث أى تغير فى تأثير القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ عند نقطة و). القوتان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ المؤثرتان عند نقطة (و) تعملان فى اتجاه $\overrightarrow{و جـ}$ يكون لهما نفس تأثير القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ المؤثرتان عند أ ، ب وبالتالى فإن محصلتهما هى $\boxed{\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \text{ وتؤثر أيضًا فى اتجاه } \overrightarrow{و جـ}}$

وحيث أن القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ح}$ متوازية فإن

$$\frac{ق}{ق_1} = \frac{أ جـ}{و جـ} \quad (١) \qquad , \qquad \frac{ق}{ق_2} = \frac{ب جـ}{و جـ} \quad (٢)$$

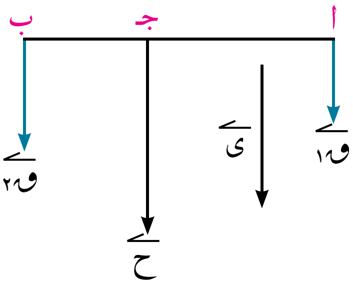
بقسمة (٢) على (١) فإن: $\frac{ق}{ق_2} \times \frac{ق_1}{ق} = \frac{ب جـ}{و جـ} \times \frac{و جـ}{أ جـ}$ أى أن $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{ب جـ}{أ جـ}$

ومن ذلك فإن: $\boxed{ق_1 \times أ جـ = ق_2 \times ب جـ}$

فى شكل (٤) يأخذ متجه وحدة $\overrightarrow{ى}$ فى اتجاه القوتين فإن:

$$\overrightarrow{ق_1} = ق_1 \overrightarrow{ى} \quad , \quad \overrightarrow{ق_2} = ق_2 \overrightarrow{ى}$$

$\therefore \overrightarrow{ح} = (ق_1 + ق_2) \overrightarrow{ى}$ مما يعني أن المحصلة تكون فى اتجاه القوتين
ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين أى أن:

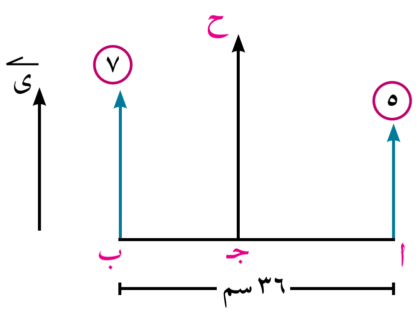


شكل (٤)

> محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الإتجاه هى قوة تعمل فى إتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية لمعياريهما.

مثال تعيين محصلة قوتين متوازيتين تعملان فى نفس الاتجاه

١ قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أب = ٣٦سم أوجد محصلة القوتين



شكل (٥)

الحل

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$\therefore \overrightarrow{ق_1} = ٥ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٧ \overrightarrow{ى}$

مقدار واتجاه المحصلة:

$$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = ٥ \overrightarrow{ى} + ٧ \overrightarrow{ى} = ١٢ \overrightarrow{ى}$$

تعيين نقطة تأثير المحصلة

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ $\in \overline{أب}$ $\therefore \frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{٧}{٥}$ أى أن $\frac{أ جـ}{٣٦ - أ جـ} = \frac{٧}{٥}$

$\therefore$ ٥ أجـ = ٢٥٢ - ٧ أجـ أى أن أجـ = ٢١سم

أى أن مقدار المحصلة يساوى ١٢ نيوتن ويعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين وتؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٢١سم

حاول أن تحل

١ قوتان متوازيتان يعملان فى نفس الاتجاه مقدارهما ٤، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ، ب حيث أ ب = ٢٥سم. أوجد محصلة القوتين

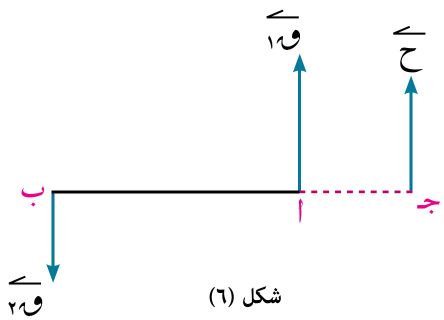
تفكير ناقد: إذا كانت القوتان متساويتان فأين تقع نقطة تأثير المحصلة.

تعلم

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه

Resultant of two parallel forces having opposite directions

بالمثل فى شكل (٦) إذا كان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ قوتان متوازيتان وغير متساويتان وتعملان فى اتجاهين متضادين وتؤثران فى نقطتين أ ، ب من جسم متماسك وكانت محصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$ فإن: $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2}$ وتؤثر فى نقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة عكسية بمعيار القوتين .



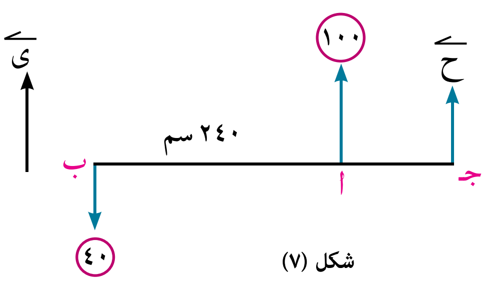
شكل (٦)

إذا كان $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$ فإن $\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$ أى أن: $\boxed{\text{ق}_1 \times \text{أ جـ} = \text{ق}_2 \times \text{ب جـ}}$

أى أن : محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الإتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة تعمل فى إتجاه القوة الأكبر معيارًا و يساوى معيارها الفرق بين معياريهما و يقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارًا بنسبة عكسية لمعياريهما.

مثال تعيين محصلة قوتين متوازيتين يعملان فى اتجاهين مختلفين

٢ قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٤٠ ، ١٠٠ نيوتن والمسافة بين خطى عمليهما ٢٤٠سم. أوجد محصلتهما.



شكل (٧)

الحل

نفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$\therefore \overleftarrow{\text{ق}_1} = ١٠٠ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = -٤٠ \overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار واتجاه المحصلة

$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} = ١٠٠ \overleftarrow{\text{ى}} - ٤٠ \overleftarrow{\text{ى}} = ٦٠ \overleftarrow{\text{ى}}$

تعيين نقطة تأثر المحصلة نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ $\in \overleftarrow{\text{ب أ}}$ حيث $\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \dfrac{٤٠}{١٠٠}$

$\therefore \dfrac{\text{أ جـ}}{٢٤٠ + \text{أ جـ}} = \dfrac{٢}{٥}$ $\therefore$ ٥ أ جـ = ٤٨٠ + ٢ أ جـ $\therefore$ أ جـ = ١٦٠سم

أى أن مقدار المحصلة يساوى ٦٠ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة ١٠٠ نيوتن وتعمل فى نقطة $\in \overleftarrow{\text{ب أ}}$ وتقع خارج $\overline{\text{أ ب}}$ وتبعد عن أ مسافة ١٦٠سم

٩ حاول أن تحل

٢) أوجد محصلة قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن تؤثران فى أ، ب حيث أ ب = ٢٠سم

تفكير ناقد: ماذا تقول عن محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه ؟

نظرية «مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة»

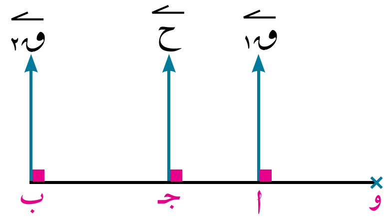
البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

نبدأ باثبات هذه النظرية فى حالة خاصة عندما تكون المجموعة مكونة من قوتين فقط.

(١) إذا كانت القوتان متحدتى الاتجاه

نعتبر نقطة مثل (و) واقعة فى مستوى القوتين ونقيم منها عمودًا مشتركًا على خطى عمل القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فيقطعهما فى النقطتين أ، ب على الترتيب ويقطع خط عمل المحصلة فى نقطة جـ

فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و



شكل (٨)

= - ق$_1$ × وأ - ق$_2$ × وب = - ق$_1$ (و جـ - أجـ) - ق$_2$ (وجـ + جـ ب)

= - ق$_1$ × و جـ + ق$_1$ × أ جـ - ق$_2$ × وجـ - ق$_2$ × جـ ب (١)

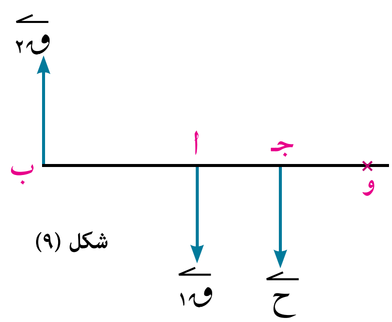
ولكن: $\frac{ق_1}{ق_2}$ = $\frac{ب جـ}{أ جـ}$ أى أن ق$_1$ × أ جـ = ق$_2$ × ب جـ

بالتعويض فى (١) ∴ جـ$_و$ = - ق$_1$ × و جـ - ق$_2$ × و جـ

= - (ق$_1$ + ق$_2$) × و جـ

= - ح × وجـ = عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و

(٢) إذا كانت القوتان متضادتين فى الاتجاه



شكل (٩)

بفرض ق$_1$ > ق$_2$ فيكون المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة لنقطة و

= ق$_1$ × و أ - ق$_2$ × و ب

= ق$_1$ (وجـ + جـأ) - ق$_2$ (وجـ + جـ ب)

= ق$_1$ × وجـ + ق$_1$ × جـ أ - ق$_2$ × وجـ - ق$_2$ × جـ ب (٢)

ولكن $\frac{ق_1}{ق_2}$ = $\frac{جـ ب}{جـ أ}$ أى أن ق$_1$ × جـ أ = ق$_2$ × جـ ب وبالتعويض فى (٢)

∴ جـ$_و$ = ق$_1$ × و جـ - ق$_2$ × و جـ

= (ق$_1$ - ق$_2$) × و جـ

= ح × و جـ = عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و

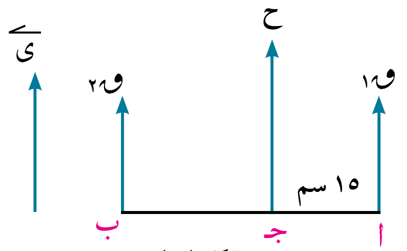
(٣) أما إذا كانت المجموعة تتكون من أى عدد محدود من القوى (أكثر من قوتين) والتى لاتنعدم محصلتها فيمكن إثبات النظرية بتحصيل أى قوتين من قوى المجموعة على التوالى حتى يتم تحصيل كافة قوى المجموعة إلى قوتين وتطبيق النظرية عليها.

مثال تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى والمحصلة

(٣) قوتان متوازيتان مقدارهما ٢٠ ، $و$ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب ومقدار محصلتهما ٣٥ نيوتن والبعد بين خطى عمل القوة المعلومة والمحصلة يساوى ١٥سم. أوجد $\overleftarrow{و}$ فى كل من الحالتين:

أ القوة المعلومة والمحصلة فى نفس الاتجاه. ب القوة المعلومة والمحصلة فى عكس الاتجاه.

الحل



شكل (١٠)

أ نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$\therefore \overleftarrow{ح} = ٣٥\ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{و_{١}} = ٢٠\ \overleftarrow{ى}$

$\because \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و_{١}} + \overleftarrow{و_{٢}}$ أى أن $٣٥\ \overleftarrow{ى} = ٢٠\ \overleftarrow{ى} + \overleftarrow{و_{٢}}$

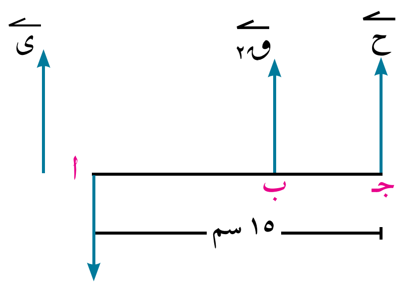
$\therefore \overleftarrow{و_{٢}} = ١٥\ \overleftarrow{ى}$

أى أن القوة $\overleftarrow{و_{٢}}$ مقدارهما ١٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المعلومة والمحصلة

∵ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة جـ = صفر

∴ ٢٠ × ١٥ - ١٥ × ب جـ = صفر

∴ ب جـ = ٢٠ سم أى أن القوة $و_{٢}$ تؤثر فى نقطة ب على بعد ٣٥ سم من أ



شكل (١١)

ب نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$\therefore \overleftarrow{ح} = ٣٥\ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{و_{١}} = -٢٠\ \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و_{١}} + \overleftarrow{و_{٢}}$ أى أن $٣٥\ \overleftarrow{ى} = -٢٠\ \overleftarrow{ى} + \overleftarrow{و_{٢}}$

$\therefore \overleftarrow{و_{٢}} = ٥٥\ \overleftarrow{ى}$

أى أن القوة $\overleftarrow{و}$ مقدارها ٥٥ نيوتن واتجاهها نفس اتجاه القوة المحصلة

∵ مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ يساوى عزم المحصلة بالنسبة لنقطة جـ = صفر

∴ ٢٠ × ١٥ - ٥٥ × ب جـ = صفر أى أن ب جـ = $\frac{٦٠}{١١}$ سم

أى أن القوة $و_{٢}$ تؤثر فى نقطة ب على بعد $\frac{١٠٥}{١١}$ سم من أ

حاول أن تحل

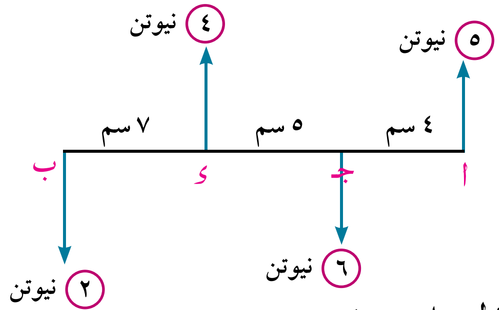
(٣) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان

أولًا: فى اتجاه واحد **ثانيًا:** فى اتجاهين متضادين

مثال عزوم مجموعة من القوى المتوازية المستوية حول نقطة

٤ الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على أ ب أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة إلى

أ نقطة أ ب نقطة جـ



الحل

أ القوة ٥ نيوتن تؤثر فى نقطة أ فيكون عزمها بالنسبة لنقطة أ مساوى صفر

وبمراعاه اتجاه دوران القوى بالنسبة لنقطة أ (مع أو عكس اتجاه دوران عقارب الساعة)

فإن القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة أ

= ٦ × ٤ - ٤ × ٩ + ٢ × ١٦ = ٢٠ نيوتن . سم

ب القوة ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة جـ فيكون عزمها بالنسبة لنقطة جـ مساوى الصفر.

ويكون القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة جـ

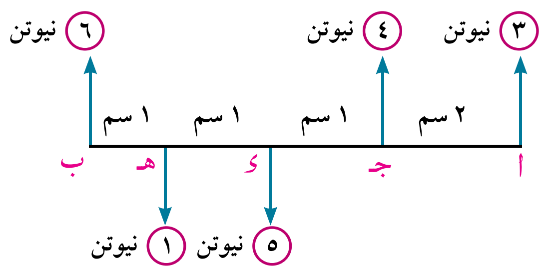
= ٥ × ٤ - ٤ × ٥ + ٢ × ١٢ = ٢٤ نيوتن . سم

حاول أن تحل

٤ الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على أ ب

أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه القوى بالنسبة

أ نقطة أ ب نقطة منتصف أ ب

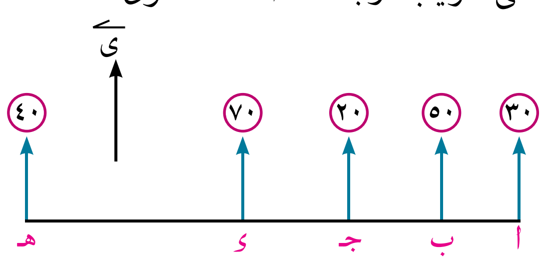


مثال محصلة مجموعة من القوى المتوازية والمستوية

٥ أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث:

أ ب : ب جـ : جـ ى : ى هـ = ٢ : ٣ : ٤ : ٧ اثرت خمس قوى متوازية وفى نفس الاتجاه مقاديرها ٣٠، ٥٠، ٢٠، ٧٠، ٤٠ نيوتن فى النقط أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى

الحل



شكل (١٢)

بفرض أ ب = ٢س ، ب جـ = ٣س

جـ ى = ٤س ، ى هـ = ٧ س

وبفرض ى متجه وحدة فى اتجاه القوى

∴ ح = ق١ + ق٢ + ق٣ + ق٤ + ق٥

= ٣٠ ى + ٥٠ ى + ٢٠ ى + ٧٠ ى + ٤٠ ى = ٢١٠ ى نيوتن

أى أن مقدار المحصلة ٢١٠ نيوتن فى نفس اتجاه القوى

ولإيجاد نقطة تأثير المحصلة، نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة و $\in \overline{\text{أهـ}}$

∵ مجموع عزوم القوى حول أ يساوى عزم المحصلة حول أ

∴ - ٥٠ × ٢س - ٢٠ × ٥س - ٧٠ × ٩س - ٤٠ × ١٦س = - ٢١٠ × أو ∴ أو = $\frac{\text{١٤٧٠س}}{\text{٢١٠}}$ = ٧س سم

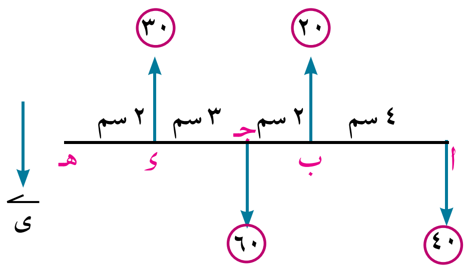
$\frac{\text{أو}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{٧س}}{\text{١٦س}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٦}}$ أى أن المحصلة تؤثر فى نقطة (و) التى تقسم $\overline{\text{أهـ}}$ من الداخل بنسبة ٧ : ١٦ من جهة أ

حاول أن تحل

٥ إذا كانت جـ ، ى ، هـ $\in \overline{\text{أب}}$ بحيث أجـ : جـى : ى هـ : هـب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفى نفس الاتجاه ومتساوية فى المقدار فى النقط أ، جـ، ى، هـ ، ب برهن أن المحصلة تقسم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة ٣ : ٥

مثال محصلة عدة قوى متوازية

٦ فى الشكل المقابل (شكل ١٣) أ ، ب، جـ ، ى، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم واحدا أثرت القوتان ٢٠، ٣٠ نيوتن رأسيًا لأعلى عند النقطتين ب ، ى وأثرت القوتان ٤٠، ٦٠ نويتن رأسيًا لأسفل عند النقطتين أ ، جـ . أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثيرة المحصلة.



شكل (١٣)

الحل

بفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة لأسفل كما فى شكل (١٣)

∴ $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} + \overleftarrow{\text{ق}_3} + \overleftarrow{\text{ق}_4}$

= -٣٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٦٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ - ٢٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٤٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ = ٥٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ تبعد س سم من أ

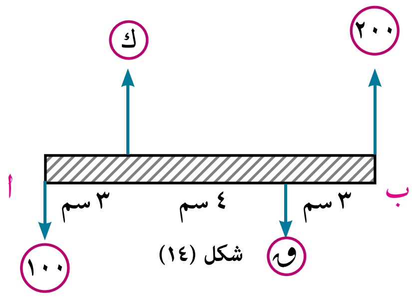
∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

-٣٠ × ٩ + ٦٠ × ٦ - ٢٠ × ٤ = ٥٠ × س ∴ س = ٠,٢

أى أن المحصلة تؤثر فى نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ وعلى بعد ٠,٢ سم من أ

حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{\text{أب}}$. أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ متر من أ. أوجد ق ، ك



شكل (١٤)

مثال البرهنة النظرية

٧ $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ قوتان متوازيتان و يعملان فى نفس الاتجاه تؤثران فى نقطتين أ، ب ومحصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$ إذا تحركت القوة $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ موازية لنفسها فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مسافة س سم اثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ مسافة مقدارها $\left(\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}\right)$ س

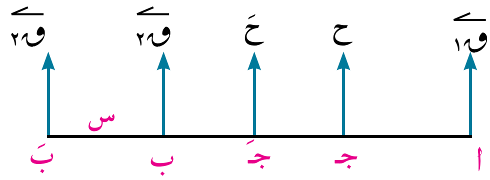
الحل

فى الحالة الأولى:

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ

∵ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

∴ ح × أجـ = و٢ × أ ب (١)



شكل (١٥)

فى الحالة الثانية:

إذا تحركت القوة $\overleftarrow{و_٢}$ موازية لنفسها فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ مسافة س سم.

نفرض المحصلة تؤثر فى جـَ

∵ عزم المحصلة عند أ = مجموع عزوم القوى عند أ

∴ ح × أ جـَ = و٢ × أ بَ (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ح (أ جـَ - أ جـ) = و٢ (أ بَ - أ ب)

∴ ح × جـ جـَ = و٢ × س

∴ جـ جـَ = $\frac{و_٢}{ح}$ × س = $\left(\frac{و_٢}{و_١ + و_٢}\right)$ س

حاول أن تحل

٧ قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما و، ٢و تؤثران فى نقطتين أ، ب إذا تحركت القوة ٢ $\overleftarrow{و}$ موازية نفسها فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ مسافه س سم اثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافه قدرها $\frac{٢}{٣}$ س

مثال

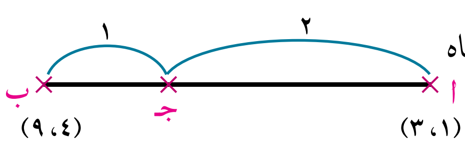
٨ تؤثر القوتان $\overleftarrow{و_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$، $\overleftarrow{و_٢}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ - ٦ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ(١، ٣) ، ب (٤، ٩) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أ ب}$.

الحل

$\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{و_١}$ + $\overleftarrow{و_٢}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ - ٩ $\overleftarrow{ص}$

نلاحظ أن $\overleftarrow{و_٢}$ = ٢ $\overleftarrow{و_١}$ أى أن القوتين متوازيتان وفى نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة جـ ∈ $\overline{أ ب}$ حيث $\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{٢}{١}$



ومن قانون نقطة التقسيم جـ = $\left(\frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} ، \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}\right)$

∴ جـ = $\left(\frac{٢ \times ٤ + ١ \times ١}{٢ + ١} ، \frac{٢ \times ٩ + ١ \times ٣}{٢ + ١}\right)$ = (٣، ٧)

حاول أن تحل

٨ تؤثر القوتان $\overleftarrow{و_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$، $\overleftarrow{و_٢}$ = - ٩ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ(-١، ٠) ، ب (١، ٢) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أ ب}$.

تمــاريـن ٣ – ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) قوتان متوازيتان ومتضادين فى الاتجاه مقدارهما ٧، ١٢ نيوتن فإن مقدار محصلتهما يساوى:

أ ١٩ نيوتن ب ١٢ نيوتن جـ ٧ نيوتن د ٥ نيوتن

(٢) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ٧، ١٠ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ، ب حيث أ ب = ٥١سم.
فإذا كانت محصلتهما تؤثر فى نقطة جـ فإن أ جـ =

أ ٣٠ سم ب ٢٧ سم جـ ٢١ سم د ١٢ سم

(٣) قوتان متوازيتان ومتحدتا فى الاتجاه مقدارهما ٥، ٧ نيوتن فإن مقدار محصلتهما تساوى

أ ١٢ ب ٦ جـ ٢ د ١

اجب عن الأسئلة الآتية:

فى التمارين ٤ - ٦ قوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متوازيتان وتؤثران فى النقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{أ ب}$

(٤) أوجد مقدار واتجاه المحصلة وطول $\overline{أ جـ}$ فى كل مما يأتى (القوتان فى نفس الاتجاه)

أ $ق_1$ = ٩ نيوتن ، $ق_2$ = ١٧ نيوتن ، أ ب = ١٣سم

ب $ق_1$ = ٢٣ نيوتن ، $ق_2$ = ١٥ نيوتن ، أ ب = ٥٧سم

جـ $ق_1$ = ١٦ نيوتن ، $ق_2$ = ١٠ نيوتن ، ب جـ = ٣٠سم

(٥) إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فى نفس الاتجاه اجب عما يأتى:

أ $ق_1$ = ٨ نيوتن ، ح = ١٣ نيوتن ، أ جـ = ١٠ سم أوجد $ق_2$ ، أ ب

ب $ق_2$ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٢٤سم ، أ ب = ٥٦ سم أوجد $ق_1$ ، ح

جـ $ق_1$ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٩ سم ، جـ ب = ٨ سم أوجد $ق_2$ ، ح

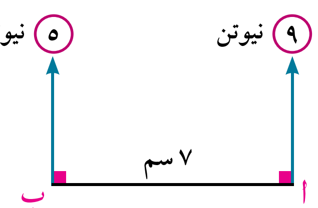
(٦) إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متضادان فى الاتجاه اجب عما يأتى:

أ $ق_1$ = ١٥ نيوتن ، ح = ٢٠ نيوتن ، أ جـ = ٧٠سم أوجد $ق_2$ ، أ ب

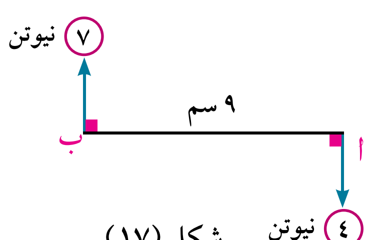
ب $ق_2$ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٢٤ سم ، جـ ∌ $\overline{أ ب}$ ، أ ب = ٥٦ سم أوجد $ق_1$ ، ح

جـ $ق_1$ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٩ سم ، جـ ∌ $\overline{أ ب}$ ، جـ ب = ٨ سم أوجد $ق_2$ ، ح

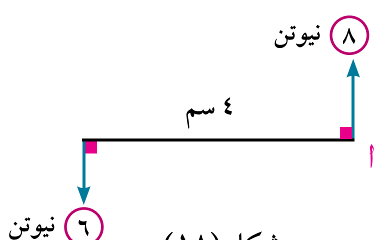
(٧) فى كل مما يأتى أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ



شكل (١٦)



شكل (١٧)



شكل (١٨)

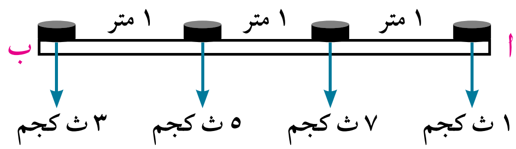
⑧ قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدارهما ٤، ٩ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أ ب = ١٥سم. أوجد محصلتهما.

⑨ إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان ٧ ى⃖ ، ٥ ى⃖ نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد $\frac{١}{٣}$ ٢ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين

⑩ قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف أ ب والكبرى تؤثر فى الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم، فما طول القضيب؟

⑪ أ، ب، جـ، ى، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أ ب = ٤سم، ب جـ = ٦سم، جـ ى = ٨سم ، ى هـ = ١٠سم. اثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم فى النقط أ ، جـ ، ى ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على أ هـ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه، والقوتان الاخريان فى الاتجاه المضاد. عين محصلة المجموعة

⑫ فى شكل (١٩) وضعت أربعة اثقال مقدارها ١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل. عين نقطة يمكن ان يعلق القضيب بحيث يظل القضيب افقيًا.



شكل (١٩)

⑬ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقاديرها ٥، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ، ب حيث أ ب = ٣٩ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق فى نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات. أوجد ق

⑭ أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تقع على مستقيم افقى حيث أ ب = ١ متر ، أ جـ = ٣متر ب ∋ أ جـ. اثرت القوى التى مقاديرها ٢، $\frac{١}{٢}$ نيوتن رأسيًا لاسفل فى النقطتين أ، جـ على الترتيب كما اثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن فى نقطة ب رأسيًا لأعلى. أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ

مطابع الهدايه

الوحدة الثالثة

٣ - ٢ اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

Equilibrium of a system of coplanar parallel forces

سوف تتعلم

- اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية.

المصطلحات الأساسية

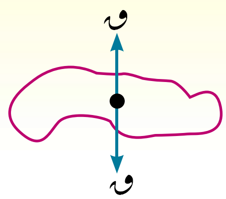
- رد فعل Reaction
- وزن Weight
- متوازيان Parallel
- حامل (وتد) Support
- سقالة Beam
- شد Tension
- بكرة Pulley
- دوران Rotate

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.
- معمل ميكانيكا

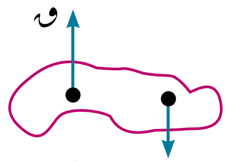
فكر و ناقش

- إذا أثر على الجسم قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه وعلى نفس خط العمل. هل يتزن الجسم؟



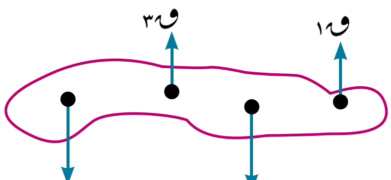
شكل (٢٠)

- إذا اثر على الجسم قوتان متساويتان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه وليسا على نفس خط العمل. هل يتزن الجسم؟



شكل (٢١)

- إذا أثر على الجسم عدة قوى متوازية ومستوية بحيث تنعدم محصلة هذه القوى. هل يتزن الجسم؟



شكل (٢٢)

نشاط

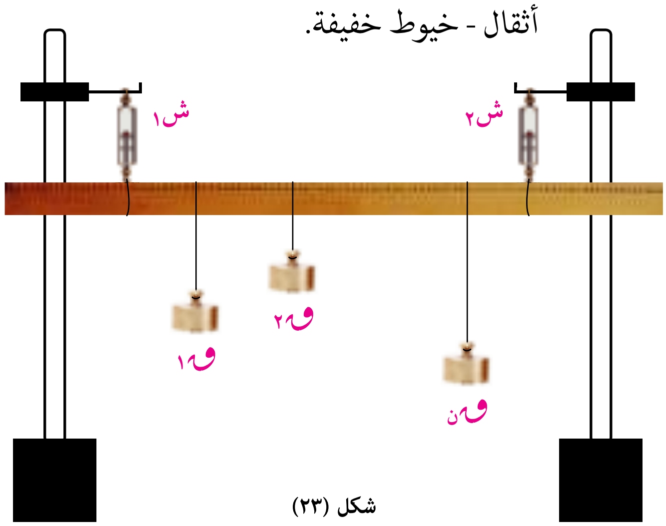
اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

الهدف من النشاط: التحقق من أنه إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية، عددها أكثر من ثلاث، فإن :

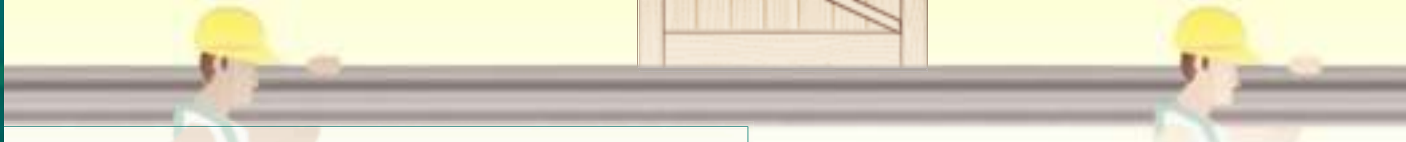
١ مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى يساوى صفرًا.

٢ مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة في مستويها يساوى صفرًا.

الأدوات المستخدمة: مسطرة خفيفة مدرجة - حاملا كابستان - ميزانان زنبركيان - أثقال - خيوط خفيفة.



شكل (٢٣)



تنفيذ النشاط :

١ علق الميزانين الزنبركيين فى حاملى كابستان ثم علق فيهما المسطرة بواسطة خيطين واضبط الجهاز بحيث يصبح الميزانان والخيطان رأسيين كما فى شكل (٢٣).

٢ علق عددًا من الأثقال المناسبة فى المسطرة بواسطة خيوط وعدل فى مواضع هذه الأثقال وفى مقاديرها حتى تتزن المسطرة فى وضع أفقى. ولتكن مقادير الأثقال $و_١$، $و_٢$،...،$و_ن$ (هذه القوى موجهة رأسيًا إلى أسفل)

٣ عين قراءة كل من الميزانين لتعيين قوتى الشد ، وليكن ش١ ، ش٢ معيارى الشدين (هاتان القوتان موجهتان رأسيًا إلى أعلى) نجد أن:

$ش_١ + ش_٢ = و_١ + و_٢ + ... + و_ن$

٤ عين أبعاد الأثقال عن نقطة من نقط المسطرة (تؤخذ عادة نقطة منتصفها)

٥ عين المجموع الجبرى لعزوم كافة القوى : ولتكن مقادير الأثقال$و_١$ ، $و_٢$، ...،$و_ن$ ،$ش_١$، $ش_٢$ المؤثرة على المسطرة حول النقطة المختارة فنجد أنه يساوى صفرًا.

٦ كرر التجربة عدة مرات مع تغيير الأثقال ونقط تعليقها فنحصل فى كل حالة على النتيجة التالية :

إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

١ - مجموعة القياسات الجبرية لهذه القوى = صفرًا .

٢ - مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفرًا أستنادًا إلى النشاط السابق يمكن صياغة القاعدة التالية :

قاعدة

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

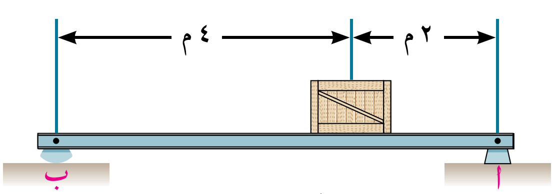
١ - مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفرًا .

(المحصلة = صفر).

٢ - مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفرًا.

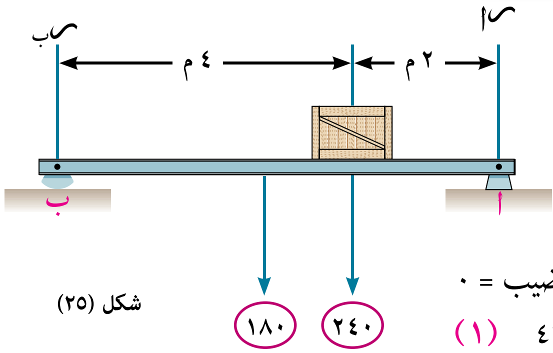
مثال اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية

(١) الشكل المقابل يوضح لوح خشبى كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أ ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم. أوجد الضغط الواقع على كل حامل.



شكل (٢٤)

الحل



شكل (٢٥)

حيث أن اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر فى نقطة منتصفه

كتلة اللوح = ٣٠ × ٦ = ١٨٠ كجم

∴ وزن اللوح = ١٨٠ ث كجم

رد الفعل عند كل حامل يساوى الضغط عليه

مجموع القياسات الجبرية للقوى فى الاتجاه العمودى على القضيب = ٠

∴ ر ا + ر ب = ٢٤٠ + ١٨٠ ر ا + ر ب = ٤٢٠ (١)

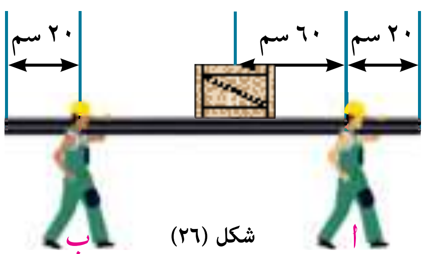
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ب = صفر

- ١٨٠ × ٣ - ٢٤٠ × ٤ + ر ا × ٦ = صفر أى أن ر ا = ٢٥٠ ث كجم

∴ بالتعويض فى (١)تكون ر ب = ١٧٠ ث كجم

تفكير ناقد: ماذا يحدث لرد الفعل عند كل من ا ، ب كلما اقترب الصندوق من نقطة ا

حاول أن تحل



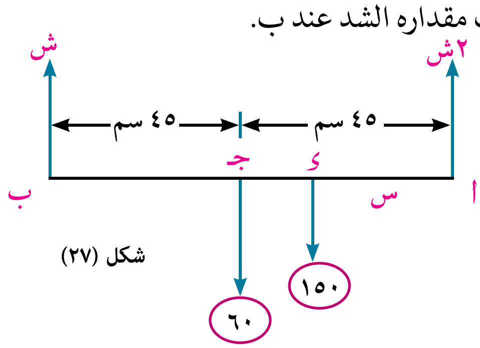
شكل (٢٦)

(١) رجلان ا ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ث كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقا وزنه ٢٤ ث كجم كما هو موضحًا فى شكل (٢٦) أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين على أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين.

مثال

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

(٢) $\overline{\text{ا ب}}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن معلق فى وضع أفقى بخيطين رأسيين من طرفيه ا ، ب اين يعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند ا ضعف مقداره الشد عند ب.



شكل (٢٧)

الحل

نفرض أن الثقل ١٥٠ نيوتن معلق من نقطة تبعد عن ا مسافة س سم وأن الشد عند ب = ش ، الشد عند ا = ٢ ش

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

∴ ٢ ش + ش - ١٥٠ - ٦٠ = صفر ومنها ش = ٧٠ نيوتن

∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ا يساوى صفر ∴ ١٥٠ × س + ٦٠ × ٤٥ - ش × ٩٠ = صفر

وبالتعويض عن ش = ٧٠ ∴ ١٥٠ س = ٣٦٠٠ س = ٢٤ سم

حاول أن تحل

(٢) $\overline{\text{ا ب}}$ لوح خشبى منتظم كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند ا والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب . بين على أى بُعد يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكى يتساوى ردى الفعل على الحاملين.

مثال

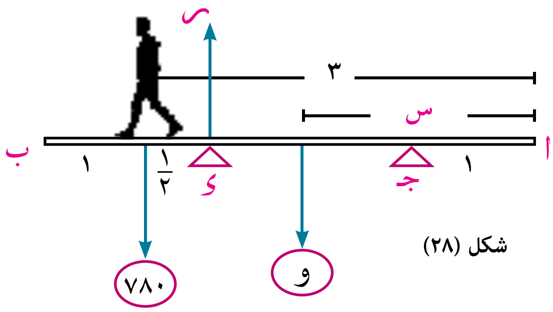
(٣) $\overline{اب}$ لوح خشبى غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند جـ ، ى بحيث ا جـ = ١ متر ، ب ى = $\frac{١}{٢}$ ١ متر. فإذا كانت أقصى مسافة يستطيع أن يتحركها رجل وزنه ٧٨٠ نيوتن على اللوح من ا إلى ب دون أن يختل توازن اللوح هى٣ متر وأقصى مسافة يستطيع أن يتحركها نفس الرجل من ب إلى ا هى $\frac{١}{٢}$ ٣ متر . عين وزن اللوح ونقطة تأثيره.

الحل

نفرض وزن اللوح يساوى(و) نيوتن ويؤثر فى نقطة تبعد عن الطرف ا مسافة س متر.

الحالة الأولى:

عندما يقطع الرجل اقصى مسافة ٣ متر من ا إلى ب يصبح اللوح على وشك الدوران حول ى. أى أن رد فعل الحامل عند جـ ينعدم.



شكل (٢٨)

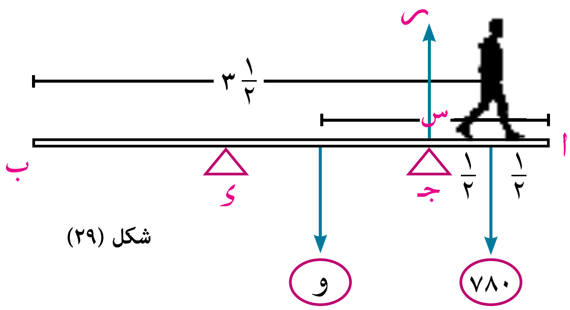
∵ مجموع عزوم القوى حول ى = صفر

٧٨٠ × $\frac{١}{٢}$ - و ($\frac{١}{٢}$٢ - س) = صفر

∴ و ($\frac{١}{٢}$ ٢ - س) = ٣٩٠ (١)

الحالة الثانية:

عندما يقطع الرجل أقصى مسافة$\frac{١}{٢}$ ٣ متر من ب إلى ا يصبح اللوح على وشك الدوران حول جـ . أى أن رد فعل الحامل عند ى = صفر



شكل (٢٩)

∵ مجموع عزوم القوى حول جـ = صفر

∴ و (س-١) - ٧٨٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ و (س-١) = ٣٩٠ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ س - ١ = $\frac{١}{٢}$ ٢ - س ومنها س = ١,٧٥ متر

وبالتعويض فى (٢) نجد أن و = ٥٢٠ نيوتن

أى أن وزن اللوح يساوى ٥٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تبعد عن الطرف ا مسافة ١,٧٥ متر.

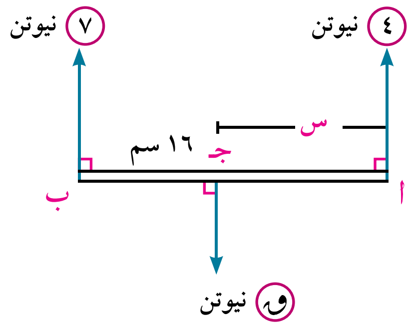
حاول أن تحل

(٣) يرتكز قضيب $\overline{اب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، احدهما عند الطرف ا والآخر عند نقطة جـ تبعد ٣٠سم عن ب ويحمل ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥سم عن ب عين قيمة الضغط على كل حامل . وأوجد ايضًا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وماهى قيمة الضغط على جـ عندئذ.

تمـــارين ٣ – ٢

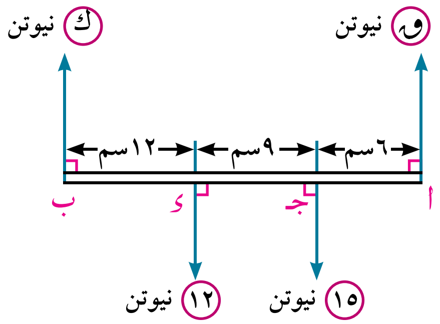
فى كل من الأشكال الآتية . قضيب خفيف متزن أفقيًا أوجد معيار كل من القوى ق، ك ، البعد س

①



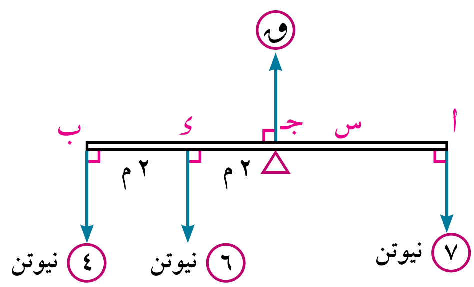
شكل (٣٤)

②



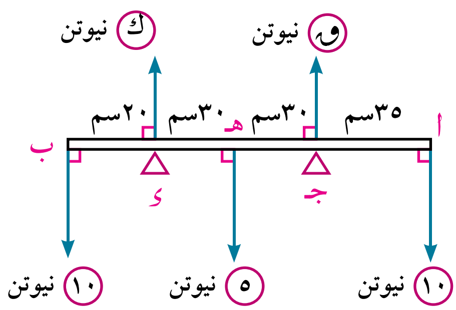
شكل (٣٥)

③



شكل (٣٦)

④



شكل (٣٧)

أجب عمايأتى :

⑤ قضيب منتظم طوله ٢ متر وكتلته ٧٥ كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه. علق ثقل مقداره ١٥ ث كجم من نقطة على القضيب على بعد ٥٠ سم من احد طرفيه. أوجد رد الفعل عند كل حامل.

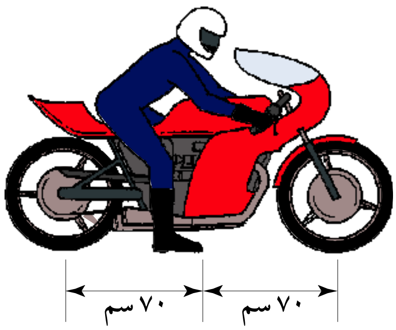
⑥ قضيب منتظم طوله ٣ متر وكتلته ٤ كجم ويحمل جسمين كتلتاهما ٥ كجم، ١,٥ كجم عند طرفيه. أوجد موضع نقطة تعليق على القضيب لكى يتزن القضيب فى وضع أفقى.

⑦ أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠سم، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠سم من أ ، و إذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠سم من أ. أوجد وزن القضيب و بعد نقطة تأثير وزنه عن أ .

٨ فى شكل (٣٨) يوضح دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين العجلتين وكانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر فى الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف العجلة الأمامية أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين فى كل من الحالات الآتية :

أ الدراجة بدون الراكب

ب الدراجة مع وجود الراكب.



شكل (٣٨)

٩ يرتكز قضيب $\overline{\text{أ ب}}$ طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠سم من أ حفظ القضيب أفقيًا فى حالة إتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد :

أ مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.

ب مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم.

١٠ قضيب متنظم أ ب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ث.جم ويؤثر عند منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط فى نقطة أ والآخر مربوط فى نقطة جـ حيث أجـ = س سم، علق ثقل قدره ١٢ ث.جم فى نقطة ى حيث أ ى = ٢٥ سم. فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث . جم، فأوجد القيم التى تقع بينها س، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد فى كل من الخيطين.

١١ ترتكز مسطرة خفيفة $\overline{\text{أ ب}}$ مقيسة بالسنتيمتر أفقيًا على حاملين عند النقطتين جـ ، ى بحيث جـ $\in$ $\overline{\text{أ ى}}$ ، ٢ أ جـ = ٢ ب ى = جـ ى. علق ثقل مقداره (و) نيوتن من النقطة (م) على المسطرة فوجد أنها تكون على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (أ) ثقل مقداره ١٠ نيوتن أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن . أوجد مقدار (و) وأثبت أن : $\frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = \frac{٩}{٧}$.

١٢ يحمل رجلان أ، ب جسما كتلته ٩٠كجم معلق من قضيب معدنى متين وخفيف، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠سم من أ، فما مقدار ما يتحمله كل رجل من هذا الثقل؟ و إذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم، فعين أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب.

١٣ تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية $\overrightarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٤}$ فى النقط أ = (٢، -١)، ب (-٤، -٣) ، جـ = (٣، ٥) ، ى = (-١، ٠) على الترتيب ، فإذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}_١}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، || $\overrightarrow{\text{ق}_٢}$ || = ٢٠ نيوتن فى نفس اتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_١}$. أوجد كلا من $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٤}$ إذا كانتا تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_١}$.

ملخص الوحدة

١ **محصلة قوتين متوازيين وفى نفس الاتجاه**

$\overrightarrow{\text{ق}_1} = \text{ق}_1 \overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = \text{ق}_2 \overrightarrow{\text{ى}}$ تؤثران فى أ ، ب فإن

المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2}$ وتؤثر فى نقطة جـ $\in \overline{\text{أب}}$ بحيث $= \frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

٢ **محصلة قوتين متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه**

$\overrightarrow{\text{ق}_1} = \text{ق}_1 \overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = -\text{ق}_2 \overrightarrow{\text{ى}}$ $(\text{ق}_1 > \text{ق}_2)$ تؤثران فى أ ، ب فإن :

$\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} = (\text{ق}_1 - \text{ق}_2)\overrightarrow{\text{ى}}$ وتؤثر فى نقطة جـ $\in \overleftarrow{\text{ب أ}}$ بحيث $= \frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

٣ **عزوم القوى المتوازية المستوية :**

نظرية (مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة) .

٤ **محصلة عدة قوى متوازية :**

إذا كانت القوى $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ ،..... $\overrightarrow{\text{ق}_\text{ن}}$ متوازية وتؤثر فى النقط أ_1 ، أ_2 ، ... $\text{أ}_\text{ن}$ فإن محصلتها هى $\overrightarrow{\text{ح}}$ حيث

$\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} + ... \overrightarrow{\text{ق}_\text{ن}}$ وتؤثر فى نقطة جـ حيث أ_1 جـ $= \frac{\|\text{مجموع عزوم القوى حول } \text{أ}_1\|}{\|\overrightarrow{\text{ح}}\|}$

٥ **اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية**

قاعدة

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

١ – مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفرًا .
(المحصلة = صفر).

٢ – مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفرًا.

تمارين عامة

أكمل :

(١) قوتان متوازيتان وفى اتجاهين متضادين مقدارهما ١٠، ١٥ نيوتن تؤثران فى أ ، ب على الترتيب حيث أ ب = ٣٥ سم فإن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ حيث أ جـ = ...

(٢) مجموع عزوم عدة قوى متوازية ومستوية حول نقطة يساوى ....

(٣) قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ق، ٢ق وتؤثران فى النقطتين أ ، ب بالترتيب حيث أ ب = ٣٩ سم فإن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ حيث أ جـ = ...

أجب عمايأتى :

(٤) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن ومقدار احدى القوتين ١٥٠ نيوتن وتعمل علي بعد ٤٠سم من المحصلة. أوجد مقدار القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان:
أولاً : فى اتجاه واحد. ثانيًا: فى اتجاهين متضادين.

(٥) أ ، ب ، جـ ، ى اربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث أ ب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، جـ ى = ٨سم اثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى أ ، جـ على الترتيب واثرت القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى ب ، ى فى اتجاه مضاد للقوتين عند أ ، جـ . عين محصلة هذه المجموعة وبعد نقطة تأثيرها عن أ .

(٦) وضعت الأوزان ٢، ٣، ٤، ٥ ث كجم على قضيب خفيف بحيث تبعد عن احدى طرفيه ٢، ٣، ٤، ٥سم على الترتيب . أوجد بعد نقطة تعليق القضيب عن هذا الطرف بحيث يتزن القضيب افقيًا .

(٧) أ ب قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ١٠ نيوتن يؤثر فى منتصفه يرتكز افقيًا على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة على بعد ٢٥سم من ب اوجد الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب من القضيب ليكون قيمة رد الفعل الحامل القريب من الطرف ب مساويًا ستة امثال قيمة رد فعل الحامل عند أ . ثم أوجد رد فعل كل حامل فى هذه الحالة.

(٨) أ ب قضيب غير منتظم طوله ٨٠سم ووزنه ٢٠ ث كجم، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند جـ ، ى حيث أ جـ = ب ى = ١٠سم . علق من أ ثقل قدره ٤٠ ث كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ. أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن أ ثم أوجد اكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق من أ .

(٩) أ ب جـ ى قضيب غير منتظم يرتكز في وضع افقى على حاملين املسين عند ب، جـ بحيث أ ب = ٦ سم ، جـ ى = ٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ . وجد انه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ث جم او من الطرف ى ثقل قدره ١٨٠ ث جم كان القضيب على وشك الدوران ، اوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين.

(١٠) أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب، ويحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة على القضيب تبعد ٤٠ سم عن الطرف أ ويحمل ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠سم من أ . عين قيمة كل من الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ، وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ.

الاتزان العام

General Equilibrium

الوحدة
٤

مقدمة الوحدة

الاتزان هو أحد فروع علم الميكانيكا؛ حيث يتناول دراسة الشروط التي يجب أن تحققها مجموعة ما من القوى ، بحيث إذا أثرت هذه القوى فى نقطة مادية أو فى جسم جاسئ بقيت تلك النقطة أو الجسم فى حالة سكون .

ولقد اهتم الإنسان منذ القدم بموضوع الاتزان قبل غيره من فروع علم الميكانيكا الأخرى، فطلائع تطبيقات هذا العلم ترجع إلى آلاف السنين قبل الميلاد، حين استفاد البابليون والمصريون القدماء من مبادئ الاتزان وقوانين الآلات البسيطة فى رفع الأثقال إلى علو شاهق فى أثناء تشييد المعابد والأهرامات ، بيد أن حسب ما هو متوافر من معلومات يوضح أن بدايات ما خُطَّ فى هذا الموضوع كان من قبل أرشميدس فى القرن الرابع قبل الميلاد.

وقد تم صياغة هذا العلم بشكله الحالي فى القرن السابع عشر الميلادي، حين تكاملت الصياغة النظرية لعلم الميكانيكا فى عهد نيوتن .

وقد حظي علم الميكانيكا - ولاسيما بحوث التوازن - بالاهتمام الكبير فى ظل الحضارة العربية الإسلامية ، فلقد تم نقل بعض الكتب اليونانية فى الميكانيكا إلى العربية، ومن هذه الكتب كتاب «الفيزياء Physics» وبعد دراسة المؤلفات المنقولة دراسة دقيقة ، تمّ إدخال تعديلات على بعضها، وتوسيع بعضها الآخر، وإجراء إضافات أساسية أسهمت فى تطوير هذا العلم. وممن نبغ فى هذا العلم ابن الهيثم وأبو سهل القوهي، والبيروني وابن سينا والخيام وغيرهم ، وقد ألفوا كتباً فى مراكز الأثقال ، وفي البكرات وفي توازن الموائع.
وسوف نتعرف فى هذه الوحدة على شروط اتزان مجموعة من القوى مع حل بعض التطبيقات الحياتية التى تتطلب ذلك .

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد الشروط العامة للاتزان فى المستوى .
- يحدد الشروط العامة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية .
- يحل تطبيقات متنوعة على اتزان سُلم أو قضيب على أرض أفقية خشنة وحائط رأسى أملس.
- يحل تطبيقات حياتية على اتزان سُلم أو قضيب على أرض أفقية خشنة وحائط رأسى خشن.

المصطلحات الأساسية

الاحتكاك	*Friction*
الاتزان العام	*General Equilibrium*
رد فعل عمودى	*Vertical Reaction*
المحصلة	*Resultant*
مركبة جبرية	
مركبة أفقية	*Horizontal Component*
مركبة رأسية	*Vertical Component*
اتزان جسم جاسىء	*Equilibrium of original body*
مثلث قوى	*triangle of force*

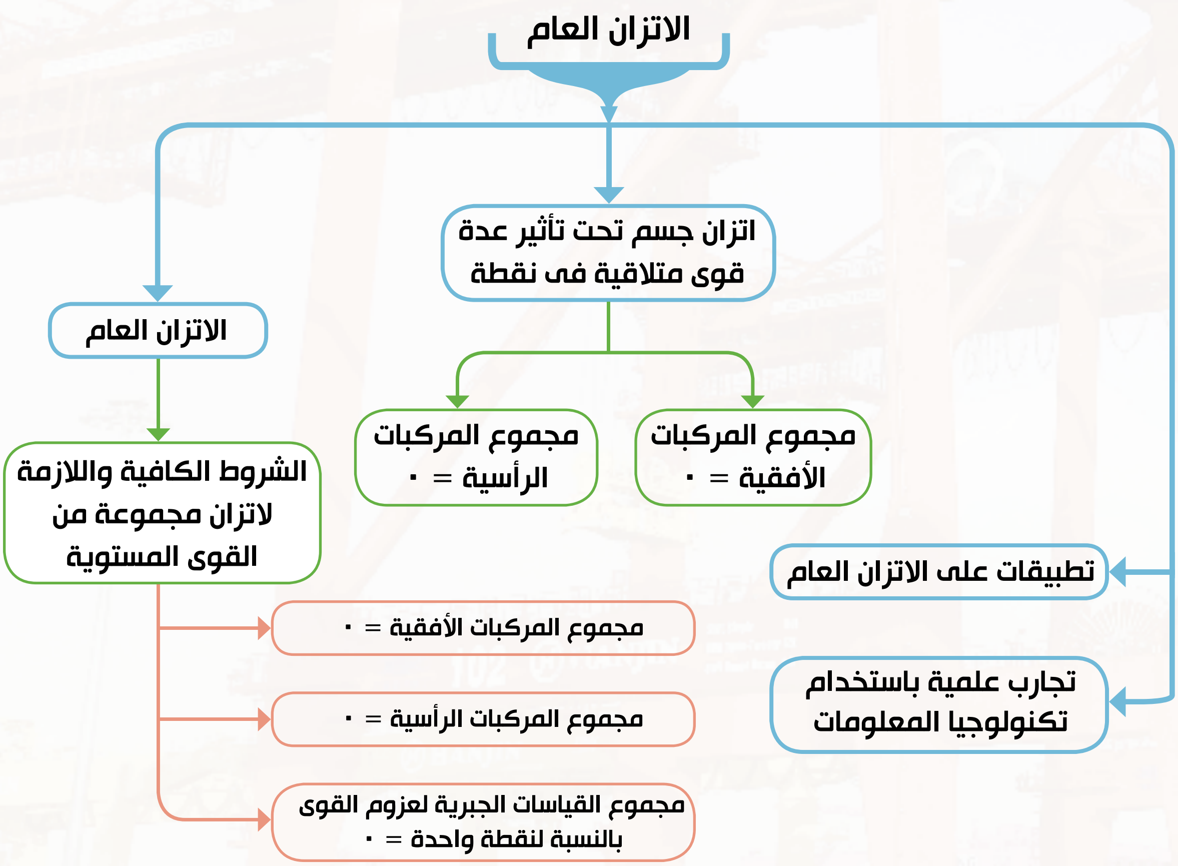
دروس الوحدة

(٤ - ١): الاتزان العام.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

مخطط تنظيمى للوحدة



اتزان جسم جاسىء

Equilibrium of rigid body

سوف تتعلم

- انعدام عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة
- الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية .

المصطلحات الأساسية

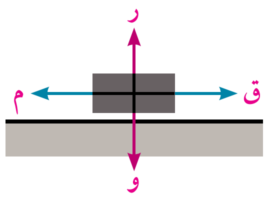
- الاتزان العام *General Equilibrium*
- رد فعل عمودى *reaction Vertical*
- مركبة أفقية *Horizontal Component*
- مركبة رأسية *Vertical Component*
- اتزان جسم جاسىء *Equilibrium of original body*
- مثلث قوى *triangle of force*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

سبق أن علمت إنه إذا أثرت قوتان، أو أكثر متلاقيتان فى نقطة فى جسم جاسئ ولم يتغير وضعه ، قيل أن هذا الجسم متزن.

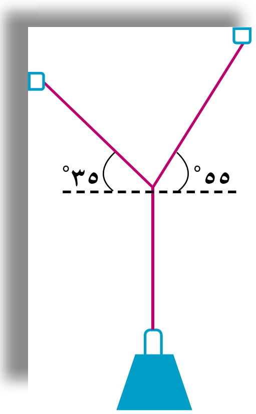
وقد سبق لك أن درست اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين ثم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية، وتعرفت على قاعدة مثلث القوى وقاعدة لامى، ثم درست اتزان جسم جاسئ تحت تأثير عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة. يوضح الشكل المقابل مثالًا للاتزان فى بعدين،



فلكى يكون الجسم ساكنًا تحت تأثير القوى الأربع الموضحة بالشكل يجب أن يكون مجموع كلٍّ من المركبات الأفقية والرأسية للقوى مساويًا للصفر . وبتطبيق شرط الاتزان وهو أن مجموع كل من المركبات الأفقية والرأسية للقوى تساوى صفر

ر – و = ٠ ، ق – م = ٠ باعتبار أن الاتجاه الموجب إلى اليمين و إلى اعلى .

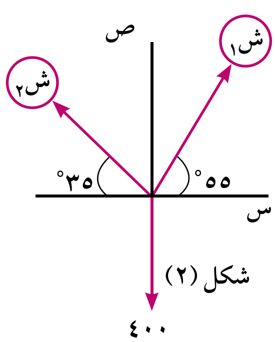
فكر و ناقش



شكل (١)

فى الشكل المقابل: كيف يمكنك إيجاد مقدار قوى الشد المؤثرة على هذا الجسم ؟

وزن الجسم يؤثر فى الاتجاه الرأسى إلى أسفل ومقداره ٤٠٠ نيوتن، وطبقًا لتعريف الشد يجب أن يكون اتجاها القوتين الأخريين على استقامة الحبلين، بحيث تكونا مبتعدتين عن الجسم، وبفرض أن الشد فى الحبلين ش$_1$ ، ش$_2$ نرسم المخطط البيانى كما فى شكل (٢) .



شكل (٢)

كيف يمكنك كتابة مركبات ش$_1$ ، ش$_2$ ؟ نحلل كلًّا من ش$_1$ ، ش$_2$ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين ، ثم نكتب معادلات الاتزان .

ش$_1$ جتا ٥٥° = ش$_2$ جتا ٣٥ °

∴ ٠,٥٧ ش$_1$ = ٠,٨٢ ش$_2$ .... (١) ،

ش$_1$ جا ٥٥° + ش$_2$ جا ٣٥° = ٤٠٠

∴ ٠,٨٢ ش$_1$ + ٠,٥٧ ش$_2$ = ٤٠٠ .... (٢)

وبحل المعادلتين نجد أن : ش$_1$ ≃ ٣٢٨,٨١ نيوتن ، ش$_2$ ≃ ٢٢٨,٥٢ نيوتن

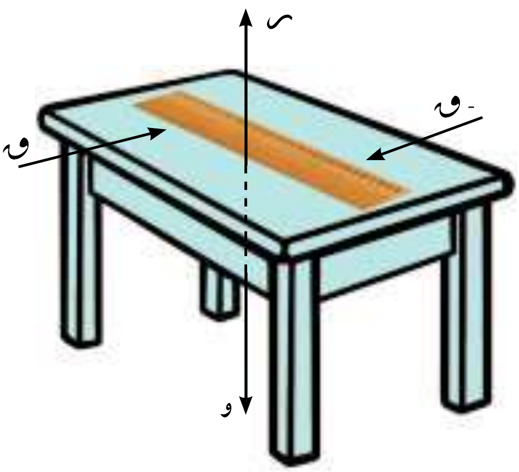
هل يمكنك التحقق من صحة النتائج التى حصلت عليها ؟

يمكن استخدام قانون إيجاد محصلة القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ اللتين تحصران بينهما زاوية قياسها ى على النحو التالى :

$$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ \, ق_١ \, ق_٢ \, \text{جتا ى}}$$

وعلى ذلك فإن : $ع = \sqrt{(٣٢٨,٨١)^٢ + (٢٢٨,٥٢)^٢} \simeq ٤٠٠$ وهذا يتفق مع وزن الجسم.

ماذا تتوقع إذا كانت مجموعة القوى السابقة غير متلاقية فى نقطة واحدة ؟



شكل (٣)

فى هذه الحالة يكون الشرط السابق وهو أن يكون مجموع كل من المركبات الأفقية والرأسية للقوى مساوية للصفر غير كافٍ، ومن الممكن أن يتحرك الجسم حتى إذا تحقق هذا الشرط ، ذلك أن هناك شرطاً ثانياً لا بد من تحققه حتى يكون الجسم فى حالة اتزان استاتيكى. ففى شكل (٣) نجد أن المسطرة متزنة تحت تأثير وزنها رأسيًّا لأسفل (و) ورد الفعل العمودى (ر)؛ حيث ر = و ، فإذا دفعت المسطرة بقوتين متساويتين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه (- ق ، ق) فلن تبقى ساكنة إذ تبدأ فى الدوران، رغم تحقق الشرط الأول . لذلك كان من الضرورى البحث عن شرط آخر يتعلق بالدوران حتى يكون الجسم فى حالة اتزان.

انعدام عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة

تعريف :

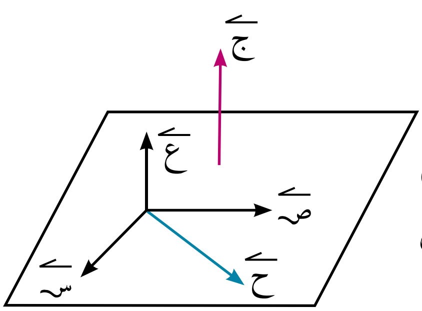
تتوازن عزوم الدوران المؤثرة على جسم فى اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة حتى يكون الجسم فى حالة اتزان.

من ذلك نجد أن:

يكون الجسم الواقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فى حالة اتزان استاتيكى إذا تحقق الشرطان التاليان:

(١) أن ينعدم متجه محصلة القوى للمجموعة ($\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$)

(٢) أن ينعدم عزوم القوى بالنسبة لنقطة ($\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{٠}$)



شكل (٤)

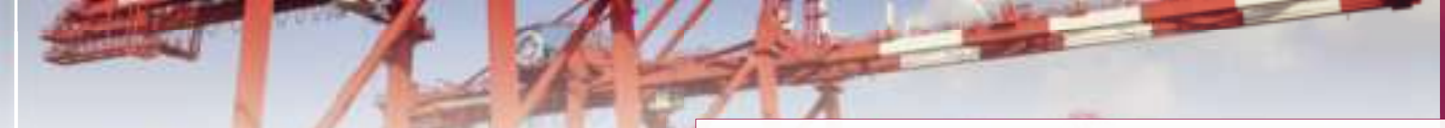
وهذه الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية

الشكل (٤) : يبين مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة ($\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$) بحيث تقع $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ فى مستوى القوى، وبالتالى يكون $\overleftarrow{ع}$ عموديًّا على هذا المستوى .

وبذلك يمكن تحليل متجه المحصلة $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، بينما متجه العزم $\overleftarrow{ج}$ يوازى متجه الوحدة $\overleftarrow{ع}$

لذلك فإن : $\overleftarrow{ح} = س \, \overleftarrow{س} + ص \, \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ج} = ج \, \overleftarrow{ع}$

حيث : س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{س}$ ،



ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،

ج = مجموع القياسات الجبرية لعزوم قوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ع}}$.

ومن ذلك نجد أنه إذا كان س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠ فإن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{٠}}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{٠}}$

وحيث إننا لم نحدد اتجاهى $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى المستوى ، فإنه يمكن التوصل إلى الصياغة التالية :

الشروط الكافية واللازمة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية

لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية يلزم ويكفى أن تتحقق الشروط التالية :

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما .

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها .

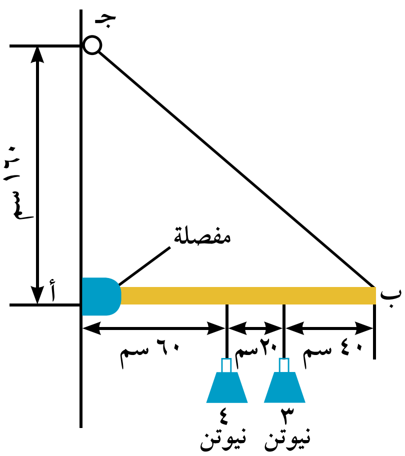
ويمكن التعبير رياضيا عن هذه الشروط كالآتى :

س = صفر ، ص = صفر ، ج = صفر

مثال

اتزان قضيب أفقى مثبت فى مفصل

(١) الشكل (٥) يمثل قضيبًا منتظمًا طوله ١٢٠ سم ووزنه ٤ نيوتن متصلًا بحائط رأسى عن طريق مفصلة ، علق فى القضيب الوزن ٣ نيوتن وربط طرفه الحر بواسطة حبل إلى نقطة على الحائط، فإذا كان القضيب فى حالة اتزان استاتيكى افقيًا، أوجد مقدار الشد فى الحبل؟ ثم أوجد مقدار واتجاه رد فعل المفصل.



شكل (٥)

الحل

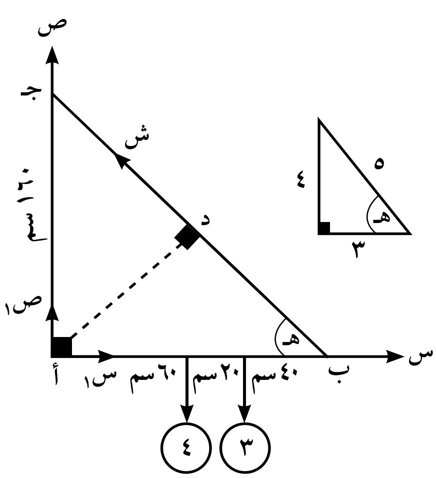
شكل (٦) يمثل المخطط البيانى للمثال، القضيب متزنًا تحت تأثير أربع قوى هى :

وزن القضيب ٤ نيوتن رأسيًّا لأسفل .

الثقل ٣ نيوتن رأسًا لأسفل .

قوة الشد فى الخيط ش ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ ، ويصنع خط عملها مع الأفقى زاوية قياسها هـ .

قوة رد فعل المفصل، ويمثلها المركبتان المتعامدتان $س_١$ ، $ص_١$ كما بالشكل.



شكل (٦)

بكتابة شروط الاتزان:

س = ٠ ، ص= ٠ ، ج = ٠

∴ $س_١$ = ش جتاهـ

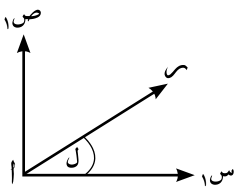
∴ $س_١ = \frac{٣}{٥}$ ش .... (١)

، $ص_١$ + ش جا هـ = ٣ + ٤

∴ $ص_١ + \frac{٤}{٥}$ ش = ٧ .... (٢)

∵ $ج_{ا} = ٠$ ∴ ش $\times \frac{١٦٠ \times ١٢٠}{٢٠٠} - ٤ \times ٦٠ - ٣ \times ٨٠ = ٠$

∴ ٩٦ ش = ٤٨٠ ∴ ش = ٥ نيوتن



وبالتعويض فى (١) ، (٢)

∴ $س_{١} = \frac{٣}{٥} \times ٥ = ٣$ نيوتن ،

$ص_{١} + \frac{٤}{٥} \times ٥ = ٧$ ∴ $ص_{١} = ٣$ نيوتن

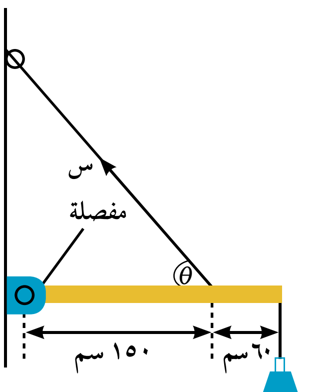
وبذلك يمكن تعيين مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل، وبفرض أن ر هو مقدار هذه القوة ، ل قياس زاوية ميل خط عملها $\overleftarrow{أ س}$

∵ $ر = \sqrt{س_{١}^{٢} + ص_{١}^{٢}} = \sqrt{٩ + ٩} = ٣\sqrt{٢}$ نيوتن

، ظا ل $= \frac{ص_{١}}{س_{١}} = \frac{٣}{٣} = ١$ ∴ ل $= °٤٥$

أى أن : مقدار قوة رد فعل المفصل = $٣\sqrt{٢}$ نيوتن، وتصنع زاوية قياسها °٤٥ مع $\overleftarrow{أ س}$.

حاول أن تحل

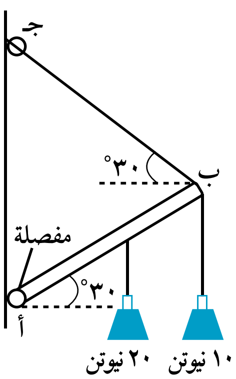


شكل (٧)

(١) شكل (٧) : يمثل قضيبًا مهمل الوزن طوله ٢١٠ سم متصلًا بحائط رأسى عن طريق مفصلة،علق فى القضيب الوزن ١٢٠ نيوتن ، فإذا كان القضيب فى حالة اتزان استاتيكى أفقيًا أوجد مقدار الشد فى الحبل ؟ ثم أوجد مقدار واتجاه رد فعل المفصل حيث جا $\theta = \frac{٤}{٥}$.

مثال

اتزان قضيب مائل مثبت فى مفصل



شكل (٨)

(٢) شكل (٨) يمثل قضيبًا منتظمًا أ ب وزنه ٢٠ نيوتن، يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ ، علق من طرفه ب ثقل مقداره ١٠ نيوتن، وشد بحبل ب جـ يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ ، فإذا كان القضيب فى حالة اتزان استاتيكى، أوجد مقدار الشد فى الحبل ؟ ثم أوجد مقدار واتجاه رد فعل المفصل .

الحل

شكل (٩) يمثل المخطط البيانى للمثال . (لاحظ أن مثلث أب جـ متساوى الأضلاع)

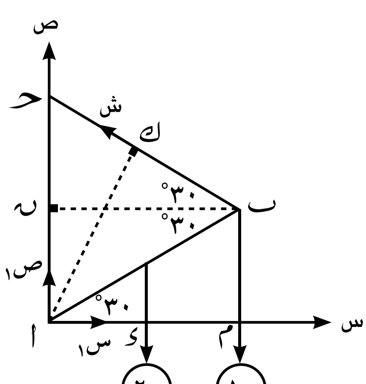
القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى هى :

وزنه ٢٠ نيوتن و يعمل رأسيًا لأسفل عند منتصف القضيب

الثقل ١٠ نيوتن و يعمل رأسيًا لأسفل عند طرف القضيب

الشد فى الحبل ش و يعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب جـ}$

رد فعل المفصل الذى مركبتاه المتعامدتان $س_{١}$ ، $ص_{١}$.



شكل (٩)

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_{ا} = ٠$ (بفرض أن طول القضيب = ٢ ل)

∵ $ج_{ا} = ٠$ ∴ ش × أ ك − ٢٠ × أ ى − ١٠ × أ م = ٠

∴ ش × $\sqrt{٣}$ ل = ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل + ١٠ × $\sqrt{٣}$ ل ∴ ش = ٢٠ نيوتن

، $س_١ = ش \text{ جتا } ٣٠° = ٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٠ \sqrt{٣}$ نيوتن

، $ص_١ + ش \text{ جا } ٣٠° = ١٠ + ٢٠$ ∴ $ص_١ = ٣٠ - ٢٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٠$ نيوتن

∵ $ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$ ∴ $ر = \sqrt{٣٠٠ + ٤٠٠} = ١٠ \sqrt{٧}$ نيوتن

∵ $\text{ظا } ل = \frac{ص_١}{س_١} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} = ١,١٥٤٧$

∴ $ل = ٤٩° \; ٦'$ (حيث ل هى زاوية ميل رد فعل المفصل مع الأفقى)

حاول أن تحل

(٢) أ ب قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٨ نيوتن، يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى، علق ثقل قدره ٦ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٤٠ سم عن الطرف أ . اتزن القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل أحد طرفيه بالطرف ب من القضيب، وثبت الطرف الآخر للخيط فى نقطة على الحائط تبعد ٨٠ سم رأسيًّا أعلى أ . أوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل .

مثال اتزان سلم على مستويين متعامدين أحدهما خشن

(٣) سلم منتظم وزنه ٢٠ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس، أتزن السلم فى مستو رأسى، وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠°، فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يساوى $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$. اثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث كجم أن تصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم .

شكل (١٠)

الحل

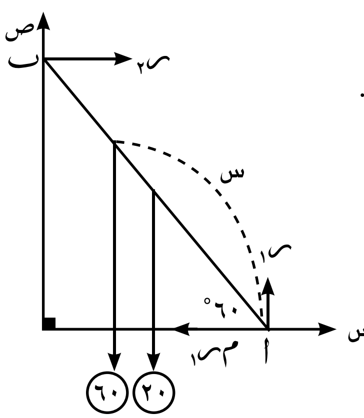
السلم متزن تحت تأثير القوى :

وزن السلم ٢٠ ث كجم، ويعمل رأسيًّا لأسفل عن منتصفه.

وزن الفتاة ٦٠ ث كجم ويعمل رأسيًّا لأسفل على بعد س من قاعدة السلم.

رد فعل الأرض الخشنة على الطرف أ ومركبتيه الرأسية $ر_١$ والأفقية م $ر_١$.

رد فعل الحائط الأملس $ر_٢$ ويكون عموديًّا على الحائط .



شكل (١١)

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

$س = ٠ ، ص = ٠ ، ج_أ = ٠$

وبفرض أن طول السلم = ل ،

وأن أقصى مسافة تصعدها الفتاة = س فيكون القضيب على وشك الحركة

∵ $ر_١ = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠$ ثكجم ،

$ر_٢ = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} ر_١$

∴ $ر_٢ = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} \times ٨٠ = \frac{٤٠}{\sqrt{٣}}$ ث كجم (١)

∵ $ج_أ = ٠$

∴ ٢٠ × $\frac{ل}{٢}$ جتا ٦٠° + ٦٠ × س جتا ٦٠° − $ر_{٢}$ × ل جا ٦٠° = ٠ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ٥ ل + ٣٠ س − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل × $\frac{٤٠}{\sqrt{٣}}$ = ٠

∴ ٣٠ س − ١٥ ل = ٠ ∴ س = $\frac{١٥}{٣٠}$ ل = $\frac{١}{٢}$ ل

∴ المسافة القصوى التى تصعدها الفتاة تساوى نصف طول السلم .

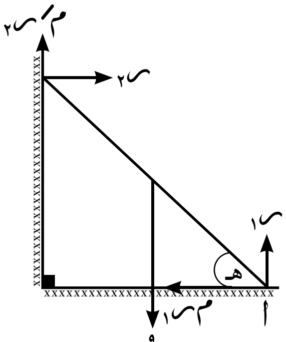
حاول أن تحل

(٣) أ ب سلم منتظم وزنه ٣٠ ث كجم، وطوله ٤ أمتار، يرتكز بطرفه أ على مستو أفقى أملس، وبطرفه الآخر ب على حائط رأسى أملس ، اتزن السلم فى مستو رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى، تقع رأسيًّا أسفل ب تمامًا، فإذا صعد رجل ونه ٨٠ ث كجم على هذا السلم، فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل . و إذا كان الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ث كجم، فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل .

مثال

اتزان قضيب على مستويين متعامدين خشنين

(٤) قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ ، وبطرفه السفلى على مستوى أفقى، معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد ظل زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .



الحل

القضيب متزن تحت تأثير القوى :

وزن القضيب (و) ويعمل رأسيًّا لأسفل.

رد فعل الطرف أ على المستوى الأفقى ومركبتاه المتعامدتان $ر_{١}$ ، م $ر_{١}$.

رد فعل الطرف ب على الحائط الرأسى ومركبتاه المتعامدتان $ر_{٢}$ ، م$'$ $ر_{٢}$.

وبفرض أن طول القضيب ل، ويميل على الأفقى بزاوية هـ وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_{أ}$ = ٠

∵ $ر_{٢}$ = م $ر_{١}$ ∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ $ر_{١}$ ، $ر_{١}$ + م$'$ $ر_{٢}$ = و ∴ $ر_{١}$ + $\frac{١}{٢}$ $ر_{٢}$ = و

∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ (و − $\frac{١}{٢}$ $ر_{٢}$) ∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ و − $\frac{٣}{٨}$ $ر_{٢}$

∴ $\frac{١١}{٨}$ $ر_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ و ∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٦}{١١}$ و .... (١)

∵ $ج_{أ}$ = ٠ ∴ و × $\frac{ل}{٢}$ جتا هـ − $ر_{٢}$ × ل جا هـ − $\frac{١}{٢}$ $ر_{٢}$ × ل جتا هـ = ٠ بقسمة الطرفين على ل جتا هـ ثم الضرب × ٢

∴ و − ٢ $ر_{٢}$ ظا هـ − $ر_{٢}$ = ٠

∴ $ر_{٢}$ (٢ ظا هـ + ١) = و .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{٦}{١١}$ و × (٢ ظا هـ + ١) = و ∴ ٢ ظا هـ + ١ = $\frac{١١}{٦}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$

حاول أن تحل

٤ أب قضيب منتظم مقدار وزنه ٤٠ نيوتن، يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى، معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب تساوى $\frac{١}{٣}$، فإذا كانت أقل قوة أفقية تجعل الطرف ب للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط تساوى ٦٠ نيوتن ، فأوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى ، علما بأن القضيب يتزن فى مستوى رأسى .

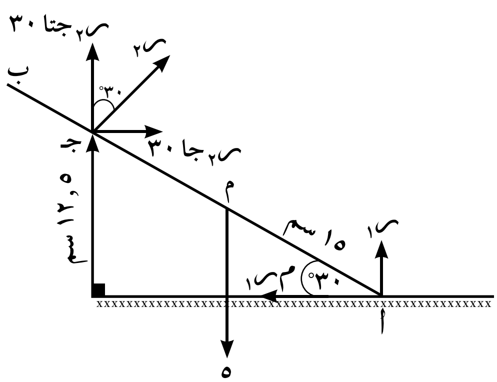
مثال

اتزان ساق على مستوى أفقى خشن ووتد أملس

٥ $\overline{أب}$ ساق منتظمة وزنها ٥ ث كجم وطولها ٣٠ سم، ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة، وترتكز عند إحدى نقطها جـ على وتد أملس، يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢,٥ سم، فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° وتقع فى مستوى رأسى. أوجد :

أولًا : مقدار قوة رد فعل الوتد .

ثانيًا : معامل الاحتكاك بين الطرف أ والأرض .



الحل

نلاحظ أن أ جـ = ٢٥ سم

الساق متزنه تحت تأثير القوى :

وزن الساق ٥ ث كجم و يعمل رأسيًا لأسفل .

رد فعل الطرف أ على الأرض مركبتاه المتعامدتان $ر_١$ ، م $ر_١$.

رد فعل الوتد على القضيب $ر_٢$ ، و يكون عموديًّا على القضيب عند نقطة التماس جـ .

وبتطبيق شروط الاتزان وهى : س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_أ$ = ٠

$\therefore$ $ج_أ$ = ٠

$\therefore$ ٥ × ١٥ جتا ٣٠° − $ر_٢$ × ٢٥ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ $ر_٢ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ .... (١)

ومن معادلتى الاتزان : س = ٠ ، ص = ٠ .

$\therefore$ $ر_٢$ جا ٣٠° − م $ر_١$ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ $ر_٢$ = ٢ م $ر_١$ $\qquad$ وبالتعويض من (١)

$\therefore$ ٢ م $ر_١ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ م $ر_١ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ .... (٢)

، $ر_١$ + $ر_٢$ جتا ٣٠° = ٥ $\qquad$ $\therefore$ $ر_١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ر_٢ = ٥$ $\qquad$ وبالتعويض من (١)

$\therefore$ $ر_١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ٥$ $\qquad$ $\therefore$ $ر_١ = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ث كجم .

وبالتعويض عن قيمة $ر_١$ فى المعادلة (٢) لإيجاد قيمة م .

$\therefore$ م × $\frac{١١}{٤} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ $\qquad$ $\therefore$ م = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

حاول أن تحل

٥ أب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم، يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن، ويرتكز عند إحدى نقطه جـ على وتد أملس، يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠°. أوجد رد فعل الوتد، وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى، علمًا بأن الساق تقع فى مستوى رأسى.

تمارين ٤ - ١

أولًا : ضع علامة (✓) أو علامة (✗):

١ لكى تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم ويكفى أن ينعدم متجه مجموع القوى .

٢ لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم ما ، يلزم ويكفى أن ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى كلٍّ من اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها.

٣ إذا انعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى لمجموعة ما، وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها كانت هذه المجموعة متزنة .

٤ يتزن السلم إذا ارتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية ملساء وبطرفه الآخر على حائط رأسى خشن .

ثانيًا: أكمل مايأتى:

٥ الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى هى ....

٦ إذا استند قضيب بإحدى نقطه على وتد أملس، فإن اتجاه رد الوتد على القضيب يكون ....

٧ إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك بينه وبين الجسم $\frac{1}{3}$، فإن مقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة تساوى ....

ثالثًا : أجب عن الأسئلة الآتية

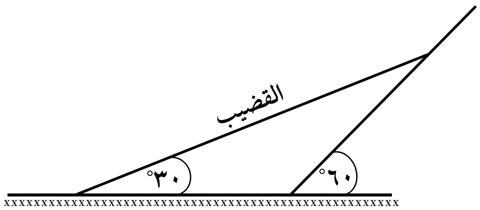
٨ أب قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن وطوله ١٢٠ سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه أ، والمفصل مثبت فى حائط رأسى . علق ثقل قدره ٦ نيوتن من نقطة على القضيب تبعد ٢٠ سم عن طرفه أ ثم حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل رفيع ب جـ مثبت طرفه جـ بنقطة على الحائط تقع رأسيًّا فوق أ تمامًا وتبعد عن أ مسافة ٩٠ سم. أوجد مقدار الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المفصل.

٩ ساق منتظمة وزنها ٤ ث كجم، يتصل طرفها أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى، وتحمل عند طرفها الآخر ب ثقلًا قدره ٢ ث كجم . حفظت الساق فى وضع تميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو لها فى الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف ب للساق، ويتصل طرفه الآخر بنقطة جـ من الحائط تقع رأسيًّا أعلى أ وعلى بعد منها يساوى طول الساق . أوجد مقدار الشد فى الحبل ومقدار قوة رد فعل المفصل .

١٠ قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى، معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{2}$ وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{3}{4}$، أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .

(١١) سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم، يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس، وحفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم وفى نقطة من المستوى تقع رأسيًّا أسفل قمة السلم. وقف رجل وزنه يســاوى وزن السلم على موضع من السلم يبعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم من ناحية القاعدة. عيِّن قوة الشد فى الحبل وردى فعل الحائط والمستوى.

(١٢) **فى الشكل المقابل:** يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠°، فأوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض ورد فعل كلٍّ من المستوى والأرض.



(١٣) يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسيًّا أسفل ب. يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم. أوجد:

أولًا: قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم.

ثانيًا: أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علمًا بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم.

(١٤) يرتكز قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس، بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط، ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥°. أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للقضيب؛ لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط علمًا بأن معامل لاحتكاك بين القضيب والأرض ٠,٧٥.

(١٥) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس، وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى؛ بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$ أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق.

(١٦) أب قضيب منتظم وزنه ٥٦ نيوتن يرتكز بأحد بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة، بحيث يقع فى مستوى رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°. أثبت أنه فى حالة اتزان القضيب معامل الاحتكاك $\geqslant$ ٠,٥، وإذا كان معامل الاحتكاك = ٠,٧٥ فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند ب وتجعله على وشك الحركة:

أولًا: نحو الحائط ثانيًا: بعيدًا عن الحائط

(١٧) قضيب منتظم وزنه «و» يتصل أحد طرفيه بمفصل، ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط فى نقطة فى نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل، بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقى مساوٍ هـ.
أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{و}{٤}\sqrt{ظتا^{٢} هـ + ٩}$

ملخص الوحدة

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.

إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى ، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة .

إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وغير متوازية ، فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

شروط اتزان جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة:

- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ = صفر
- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ = صفر

انعدام عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة تتوازن عزوم الدوران المؤثرة على جسم فى اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة حتى يكون الجسم فى حالة اتزان .

الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية؛ لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية يلزم ويكتفى أن تتحقق الشروط التالية :

- ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما .
- ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها .
- ويمكن التعبير رياضيًا عن هذه الشروط كالآتى: س = صفر ، ص = صفر ، ج = صفر

تمارين عامة

(١) يرتكز قضيب غير منتظم أب طوله ١٤٠ سم بطرفه ب على أرض أفقية، وبطرفه أ على حائط رأسى ، إذا كان معاملا الاحتكاك بين القضيب وكلٍّ من الأرض والحائط يساوى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ على الترتيب، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° ، فأوجد بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف ب .

(٢) أب قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه ٤٣ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية وكان معاملا الاحتكاك بين القضيب وكلٍّ من الحائط والأرض يساويان $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب، وكان الطرف ب يبعد ١٠٠ سم عن الحائط . أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا اثرت فى الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط .

(٣) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° . صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم، فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة $\frac{٣}{٤}$ طول السلم ، أوجد معامل الاحتكاك بين الأرض والسلم. و إذا أراد الولد أن يتم صعود السلم ، فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك .

(٤) أب قضيب منتظم وزنه ١٥ ث كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة، وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، أثرت قوة أفقية ق عند نقطة جـ من القضيب؛ حيث أجـ يساوى $\frac{١}{٤}$ طول القضيب فأصبح الطرف أ على وشك الحركة نحو الحائط إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ أوجد القوة ق ورد فعل الحائط.

(٥) سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة، وكان معامل الاحتكاك بين السلم وكل من الحائط والأرض يساوى $\frac{١}{٢}$. فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فى وضع يميل فيه على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$. برهن أن رجلًا وزنه يساوى ضعف وزن السلم لايمكنه الصعود اكثر من $\frac{١}{٢}$ طول السلم دون أن يختل التوازن .

(٦) قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط يساوى $\frac{١}{٤}$ ومعامل الاحتكاك ين القضيب والأرض يساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا اتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق.

(٧) يتزن سلم منتظم فى مستو رأسى على حائط رأسى وأرض أفقية، إذا كان قياس زاوية الأحتكاك بين السلم وكل من الحائط والأرض هى ل فأثبت أن قياس زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون على وشك الأنزلاق هـ = ٢ ل .

(٨) أب قضيب منتظم وزنه ١٠ ث كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس؛ بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف أ للقضيب، وتجعله على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط ، ومقدار رد فعل الحائط.

اختبار تراكمى

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت المجموعة متزنة . فما قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين .

(٢) أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط ، أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط .

(٣) علق ثقل وزنه ٢٦ نيوتن بخيطين طولهما ٢٥ سم ، ٦٠ سم ، وثبت الطرفان الآخران للخيطين فى نقطتين من خط أفقى، البعد بينهما ٦٥ سم . أوجد الشد فى كلٍّ من الخيطين .

(٤) علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسى بزاويتين قياسيهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن والشد فى الخيط الثانى ٩ نيوتن . أوجد قيمة الوزن (و) وقياس الزاوية هـ .

(٥) كرة مصمتة منتظمة وزنها ٣٠ ث.جم تستند بسطحها على مستويين، فإذا كانت الكرة فى حالة اتزان بين مستويين أملسين أحدهما رأسى ، والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مقدار قوتى الضغط على كلٍّ من المستويين .

(٦) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه)، علق القضيب من طرفيه بخيطين خفيفين، ثبت طرفاهما من نقطة فى سقف حجرة . إذا كان الخيطان متعامدين وطول أحدهما ٦٠ سم ، فأوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا حرًّا وفى حالة توازن .

(٧) اب قضيب منتظم (وزنه يؤثر فى منتصفه) مثبت بطرفه ا فى حائط رأسى بواسطة مفصل ، جذب القضيب أفقيا بقوة مقدارها ق ث كجم حتى اتزن القضيب فى وضع يصنع فيه زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى . أوجد ق، ورد فعل المفصل .

(٨) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٤}$. أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .

(٩) اب سلم منتظم وزنه ١٤ ث كجم، يرتكز بطرفه ا على أرض أفقية خشنة ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى خشن ، وكان معامل الاحتكاك بين السلم والأرض $\frac{٣}{٧}$ ومعامل الاحتكاك بين السلم والحائط $\frac{١}{٣}$ ، فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط عندما كان يميل على الأفقى بزاوية ٤٥° فأوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف ا من السلم لتجعله على وشك الحركة نحو الحائط .

(١٠) اب سلم منتظم طوله ١٠ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه ا على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينها وبين السلم $\frac{١}{٤}$ ، ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس . اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن عندما يكون الطرف ب على بعد ٨ متر من سطح الأرض.

(١١) اب سلم منتظم وزنه ٩ ث كجم يستند بطرفه ا على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى خشن، فإذا كان معاملا الاحتكاك عند ا ، ب هما $\frac{٥}{٦}$، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب ثم شد الطرف ا للسلم بقوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ جعلت السلم على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط، وكان السلم يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٤٥°. أوجد مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ (السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط).

الازدواجات

Couples

الوحدة ٥

مقدمة الوحدة

تناولنا فى الوحدات السابقة تحصيل قوتين متوازيتين متضادتين فى الاتجاه وذلك بإبدالهما إلى قوتين تتلاقيان فى نقطة، ولاحظنا أن ذلك يكون ممكنًا ما دامت القوتان غير متساويتين، أما إذا كانت القوتان المتوازيتان متساويتين فى المقدار، فإنه لا يمكن الاستعاضة عنهما بقوتين غير متوازيتين، بل نحصل دائمًا على قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومختلفتين فى الاتجاه، وبذلك لا يمكن تحصيل مثل هاتين القوتين فى قوة واحدة.

من ذلك نرى أن المجموعة المركبة من قوتين متوازيتين متساويتين فى المقدار ومتضادتين فى الاتجاه تكون مسمى جديدًا فى علم الإستاتيكا يعرف بالازدواج، وتتناول هذه الوحدة مفهوم بالازدواج وتعريفه وحساب عزمه، ثم اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين، وعزم الأزدواج المحصل، وتنتهى الوحدة بدراسة مجموع أى عدد محدود من الازدواجات.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الازدواج.
- يوجد عزم الازدواج.
- يستنتج أن عزم الازدواج هو متجه ثابت.
- يتعرف على تكافؤ ازدواجين واتزان ازدواجين.
- يتعرف مفهوم اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين.
- يوجد محصلة عدة ازدواجات.
- يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواج (المحصلة = صفر، العزوم حول أى نقطة $\neq$ صفر) أو (مجموع عزوم القوى حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة = مقدارًا ثابتًا $\neq$ صفر)
- يثبت أن مجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا باستخدام التعريف.
- يتعرف النظرية التى تنص على أن (مجموعة القوى المؤثرة فى أضلاع مضلع فى اتجاه دورى واحد تكافئ ازدواجًا ..)
- يحل تطبيقات متنوعة على الازدواجات.

المصطلحات الأساسية

- ازدواج *Couple*
- خط عمل *Line of action*
- اتزان *Equilibrium*
- جسم متماسك (جاسئ) *Rigid body*
- تكافؤ *Equivalent*

دروس الوحدة

(٥-١): الازدواجات

(٥-٢): الازدواج المحصل

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية.

مخطط تنظيمى للوحدة

مفهوم الازدواج

- **تعريف عزم الازدواج**
  - **تكافؤ ازدواجين**
  - **اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين**
  - **اتزان ازدواجين**
  - **نظام من القوى المؤثرة فى جسم تكافئ ازدواجًا**
  - **محصلة عدة ازدواجات**

الازدواجات

COUPLES

الوحدة الخامسة

٥ - ١

سوف تتعلم

- الازدواج – عزم الازدواج
- تكافؤ ازدواجين
- اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر.

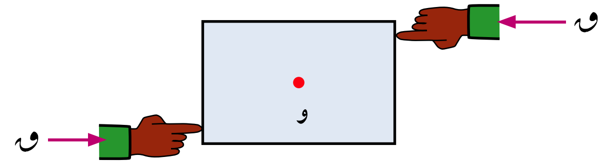
المصطلحات الأساسية

- ازدواج *Couple*
- خط عمل *Line of action*
- اتزان *Equilibrium*
- جسم متماسك *Rigid body*
- تكافؤ *Equivalence*

الأدوات المستخدمة

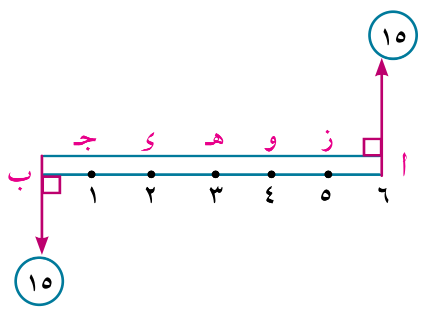
- آلة حاسبة علمية
- معمل ميكانيا

مقدمة: قد يظن البعض أنه إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوى صفرًا فإن هذا الجسم يظل ساكنًا، ولكن إذا نظرت إلى الشكل المقابل تجد قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه (محصلتهما تساوى صفر) ترى أن هذا الجسم سوف يتحرك حركة دورانية حول (و) وتعتمد سرعة الدوران على عدة اشياء يمكن أن يكتشفها الطالب من العمل التعاونى الآتى:



عمل تعاونى

الشكل المقابل يمثل مسطرة مدرجة يؤثر على طرفيها قوتان متوازيتان متضادتان فى الاتجاه، مقدار كل منها ١٥ نيوتن. استعن بزملائك فى إيجاد مجموع عزوم القوتين حول كل من النقط أ، ب، جـ، ى، هـ، و، ز وضَع النتائج فى الجدول الآتى:



النقط	أ	ب	جـ	ى	هـ	و	ز
مجموع عزمى القوتين							

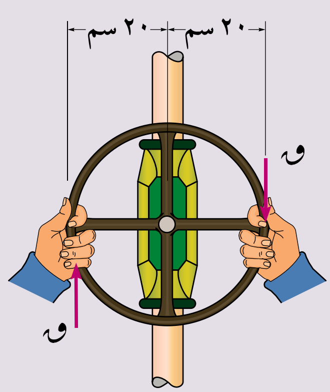
ماذا تلاحظ من نتائج الجدول؟

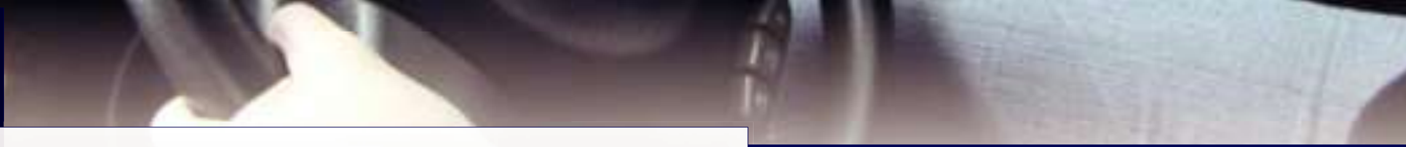
تعلم

الازدواج *couple*

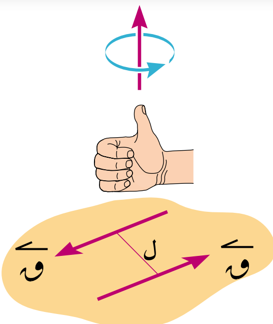
تعريف

الازدواج: هو نظام من القوى، يتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.





عزم الازدواج



يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزوم قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ، ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما، و يرمز له بالرمز ج = $\|\overrightarrow{\text{ج}}\|$

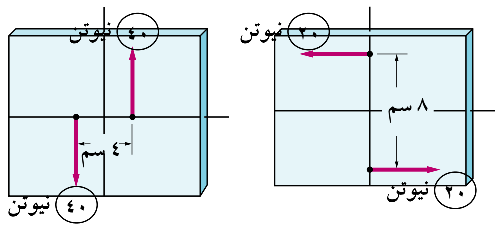
∴ $\|\overrightarrow{\text{ج}}\|$ = ق × ل حيث ق = $\|\overrightarrow{\text{ق}}\|$ ، ل يسمى ذراع الازدواج

مثال

١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى كل من الأشكال الآتية:

أ

ب



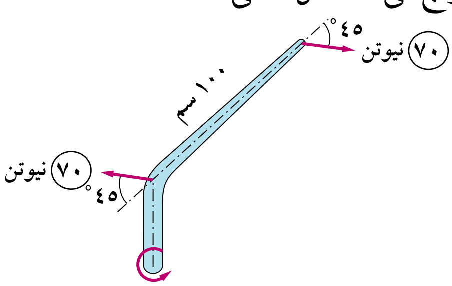
الحل

أ) القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل (أ) يساوى - ٤٠٠٠ نيوتن. سم

ب) القياس الجبرى لكلا العزمين فى شكل (ب) يساوى ١٦٠ نيوتن. سم لاحظ زيادة البعد بين القوتين ونقصان معيار القوتين وثبوت معيار العزم.

حاول أن تحل

١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل الآتى:

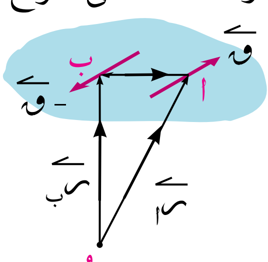


شكل (١)

نظرية عزم الازدواج هو قيمة ثابتة، لا تعتمد على النقطة التى ننسب إليها عزمى قوتيه.

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

نفرض أن القوتين $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، - $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب، ونفرض أن نقطة و نقطة عامة فى الفراغ.



نوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة و

$$\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{و ب}} \times -\overrightarrow{\text{ق}}$$

$$= (\overrightarrow{\text{و أ}} - \overrightarrow{\text{و ب}}) \times \overrightarrow{\text{ق}}$$

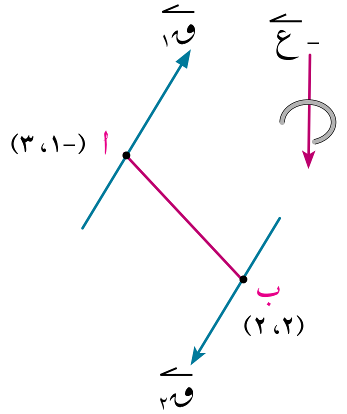
∵ $\overrightarrow{\text{و أ}} - \overrightarrow{\text{و ب}} = \overrightarrow{\text{ب أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

والصورة الأخيرة للعزم توضح أن عزم الازدواج لا يعتمد على موضع نقطة و التى تنسب العزوم إليها.

مثال

(٢) إذا كانت القوتان $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = 2\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - 5\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تكونان ازدواجًا وتؤثران فى النقطتين أ (-١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٢) على الترتيب. أوجد قيمة كل من أ ، ب، ثم أوجد عزم الازدواج.

الحل



∵ القوتان تكونان ازدواجًا   ∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = -\overrightarrow{\text{ق}}_2$.

∴ أ = -٢ ، ب = ٥

عزم الازدواج = عزم $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ حول ب

= $\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_1$ حيث $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$

= (-٣ ، ١) × (٢ ، ٥)

= (-١٥ - ٢) $\overrightarrow{\text{ع}}$ = -١٧ $\overrightarrow{\text{ع}}$

حاول أن تحل

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ قوتى ازدواج بحيث $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = -3\,\overrightarrow{\text{س}} + 2\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١)، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ تؤثر فى النقطة ب (-١ ، ٢) أوجد $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ثم أوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من أ على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}_2$

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

تعريف: يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

إذا كان $\overrightarrow{\text{ج}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}_2$ عزمى الازدواجين، فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير الازدواجين هو $\overrightarrow{\text{ج}}_1 + \overrightarrow{\text{ج}}_2 = \overrightarrow{\text{و}}$

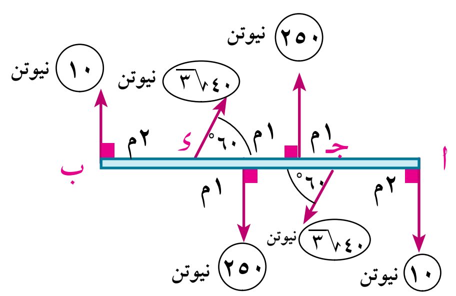
وعمومًا إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية عزومها هى $\overrightarrow{\text{ج}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}_2$ ، ... ، $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ن}}$ فإن شرط توازن الجسم تحت تأثير هذه الازدوجات هو $\overrightarrow{\text{ج}}_1 + \overrightarrow{\text{ج}}_2 + \dots + \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{و}}$

نتيجة: يتزن الجسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.

مثال

(٣) أ ب قضيب خفيف تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل.

أثبت أن القضيب متزن.



الحل

القوتان ١٠، ١٠ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه ج_1 = -١٠ × ٧ = -٧٠ نيوتن. متر

القوتان ٤٠√٣ ، ٤٠√٣ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_{٢} = -٤٠\sqrt{٣} \times ٣$ جا ٦٠ = -١٨٠ نيوتن. متر

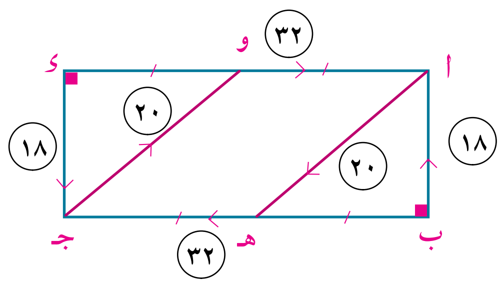
القوتان ٢٥٠، ٢٥٠ تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_{٣} = ٢٥٠ \times ١ = ٢٥٠$ نيوتن. متر

$\because ج_{١} + ج_{٢} + ج_{٣} = -٧٠٠ - ١٨٠ + ٢٥٠ = $ صفر $\qquad \therefore$ القضيب متزن.

حاول أن تحل

(٢) فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء مستطيل هـ، ومنتصفات $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أ ء}}$ على الترتيب أ ب = ٦سم، ب جـ = ١٦سم. فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل. أثبت أن المجموعة متزنة.



مثال

(٤) أ ب قضيب مهمل الوزن معلق أفقيًا من مسمار فى منتصفه، أثرت فيه قوتان مقدار كل منهما ٧,٥ نيوتن فى طرفيه إحدهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل كما شُد بخيط يميل على القضيب بزاوية قياسها ٦٠° من نقطة عليه مثل جـ أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة التى إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة حفظته فى حالة توازن وهو أفقى، علمًا بأن مقدار الشد فى الخيط يساوى ١٠ نيوتن وأن طول القضيب ٣٠سم.

الحل

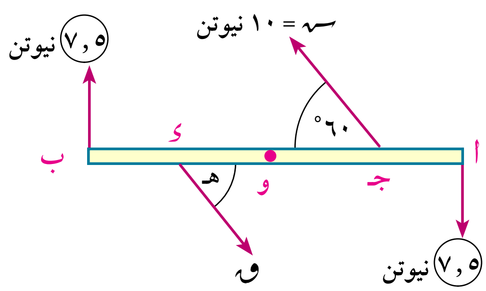
القوتان ٧,٥ ، ٧,٥ نيوتن عند أ ، ب تكونان ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_{١} = -٧,٥ \times ٣٠ = -٢٢٥$ نيوتن. سم

لكى يتزن القضيب يجب أن تكون قوة الشد فى الخيط والقوة الأخرى ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٢٢٥ نيوتن. سم

$\therefore$ القوة الأخرى ق = ش = ١٠ نيوتن ، هـ = ٦٠° ويكون

١٠ × جـ ء جا ٦٠ = ٢٢٥

$\therefore$ جـ ء = $١٥\sqrt{٣}$ سم $\qquad$ أى أن نقطة ء تبعد عن نقطة جـ مسافة $١٥\sqrt{٣}$ سم على القضيب.



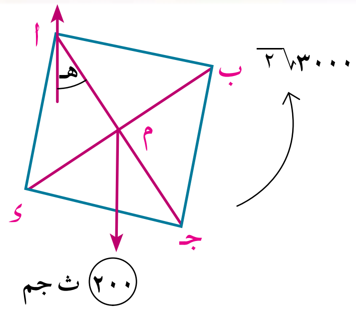
حاول أن تحل

(٣) أب جـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، $ق_{١}$ ، ٣ ، ٩ ، $ق_{٢}$ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ على الترتيب أوجد قيمة كل من $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ لكى تتزن المجموعة.

مثال

(٥) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٦٠ سم ووزنها ٢٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة تلاقى القطرين، عُلقت الصفيحة فى مسمار من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًّا وأثر فيه ازدواج فى مستواها معيار عزمه $٣٠٠٠\sqrt{٢}$ ث جم. سم أوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ جـ}}$ على الرأسى.

الحل



فى وضع التوازن تكون الصفيحة تحت تأثير قوتين هما وزن الصفيحة ورد فعل المسمار عند أ بالإضافة إلى الازدواج الخارجى.
نفرض أن الازدواج الخارجى يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة (كما فى الشكل) وحيث إن الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله. فعلى ذلك رد الفعل عند نقطة أ والوزن يُكوِّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_٢$ = -٢٠٠ × أم جا هـ حيث أم = ٣٠$\sqrt{٢}$

ج$_١$ + ج$_٢$ = صفر ٣٠٠٠$\sqrt{٢}$ - ٢٠٠ × ٣٠$\sqrt{٢}$ جا هـ = صفر

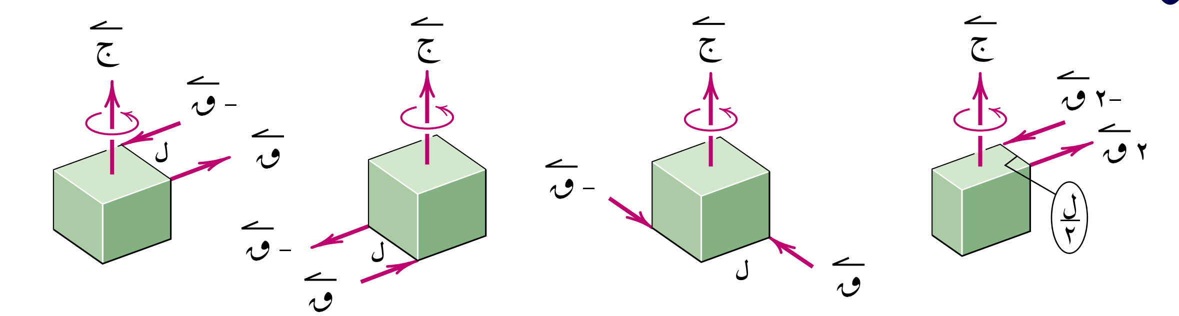
ومنها جا هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ = ٣٠° أو ١٥٠°

حاول أن تحل

٤) قضيب طوله ٤٠سم ووزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه. أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم. سم واتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه. عَيِّن مقدار واتجاه رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان.

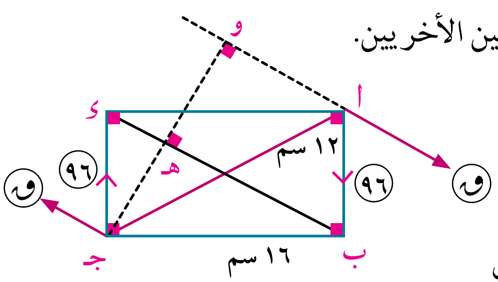
تكافؤ ازدواجين *Equivalent couples*

تعريف يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.



مثال

٦) أ ب جـ ء مستطيل، فيه أ ب = ١٢ سم، ب جـ = ١٦سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ٩٦ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ أوجد مقدار كل من القوتين المتساويتين والمؤثرتين فى أ، جـ فى اتجاه يوازى $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ بحيث يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المُكوْن من القوتين الأخريين.



الحل

القوتان ٩٦، ٩٦ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

ج$_١$ = -٩٦ × ١٦ = -١٥٣٦ نيوتن. سم

لكى يتكافأ الأزدوجان فإن القوتين عند أ، جـ يعملان على الدوران

فى اتجاه عقارب الساعة (كما بالشكل).

∴ $ج_{٢}$ = - ق × جـ و

∴ $ج_{٢}$ = - ق × ١٩,٢

∵ الازدواجين متكافئان ∴ $ج_{١}$ = $ج_{٢}$

∴ - ق × ١٩,٢ = - ١٥٣٦

∴ ق = ٨٠ نيوتن

من نظرية إقليدس

$$جـ هـ = \frac{جـ ب \times جـ ى}{ب ى}$$

$$جـ هـ = \frac{١٦ \times ١٢}{٢٠} = ٩,٦ سم$$

جـ و = ٢ جـ هـ

جـ و = ١٩,٢سم

حاول أن تحل

٥ أ ب قضيب خفيف، طوله ٥٠سم، تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى أ،ب فى اتجاهين متضادين. أثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى نقطتين جـ، ى من القضيب، حيث جـ ى = ٣٠ سم بحيث يكوِّنان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين. أوجد قياس زاوية ميل القوتين الأخريين على القضيب.

تمارين ٥ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ الازدواج هو:

أ قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار متحدتا الاتجاه.

ب قوتان متعامدتان ومتساويتان فى المقدار.

جـ قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار وعلى خط عمل واحد.

د قوتان متوازيتان ومتساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه وليستا على خط عمل واحد.

٢ أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم:

أ ازاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه. ب ازاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازى مستواه

جـ دوران الازدواج فى نفس مستواه. د كل ما سبق.

٣ القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحدثان دورانًا لعجلة القيادة تكونان:

أ احتكاكًا. ب ازدواجًا.

جـ قوة عمودية على عجلة القيادة. د محصلة غير صفرية.

٤ لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان:

أ متساويتين فى المقدار. ب متضادتين فى الاتجاه.

جـ ليسا على خط عمل واحد. د كل ماسبق.

٥ إذا كان $ج_1$، $ج_2$ هما القياسان الجبريان لعزمى ازدواجين، وكان $ج_1 + ج_2$ = صفر فإن:

أ الازدواجين متكافئان
ب الازدواجين غير متزنين
جـ الازدواجين متزنان
د الازدواجين يكافئان قوة

٦ حاصل ضرب معيار إحدى قوتى الازدواج فى ذراع الازدواج يسمى:

أ محصلة الازدواج.
ب عزم الازدواج.
جـ عزم إحدى قوتى الازدواج.
د لا شيء مما سبق.

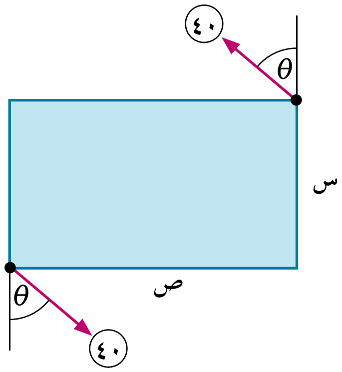
٧ إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ب $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ تكونان ازدواجًا فإن (أ، ب) =

أ (٣، -٤)
ب (٣، ٥)
جـ (-٣، ٥)
د (-٣، -٥)

٨ إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن. م ومعيار إحدى قوتيه ٧٠ نيوتن، فإن طول ذراع الازدواج يساوى:

أ ٥٠ مترًا
ب ٥ أمتار
جـ ٥ سم.
د ٢٤٥٠٠سم.

اجب عن الاسئلة الآتية :



٩ **الشكل المقابل** يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن، تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكل أبعادها س، ص سم. أوجد عزم ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية:

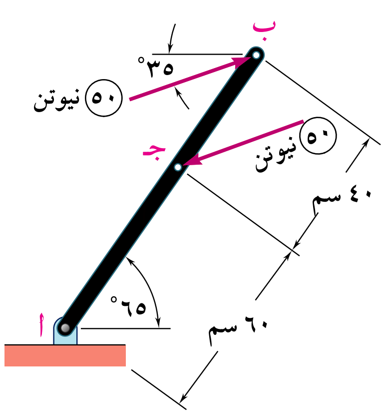
أ س = ٣سم ، ص = ٤ سم ، θ = صفر°

ب س = ص = ٦سم ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

جـ س = ٠ ، ص = ٥سم ، θ = ٣٠°

د س = ٦سم ، ص = ٠ ، θ = ٦٠°

هـ س = ٥سم ، ص = ١٢ سم ، ظا $\theta = \frac{٥}{١٢}$



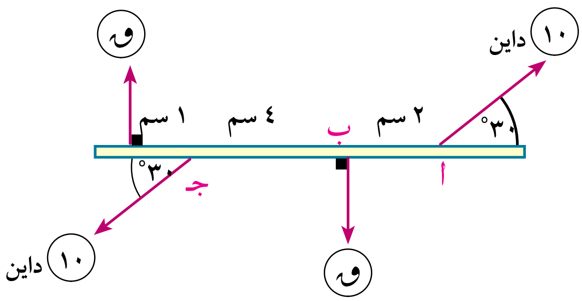
١٠ **الشكل المقابل** يوضح قوتين معيار كل منها ٥٠ نيوتن، تؤثران على رافعة أ ب أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين:

أ باستخدام البعد العمودى بين القوتين.

ب بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ

(١١) أثرت القوتان (٣ $\overleftarrow{س}$ - ٥ $\overleftarrow{ص}$) ، (-٣ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$) نيوتن فى النقطتين أ، ب على الترتيب، متجها موضعهما (٦ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$) ، (٤ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$) متر برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

(١٢) أثرت القوتان (أ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$) ، (٥ $\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$) نيوتن فى النقطتين جـ ، ى على الترتيب حيث جـ(-٢، ١)، ى(٣، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجًا. أوجد قيمة كل من أ، ب، ثم أوجد عزم الازدواج، وأوجد أيضًا البعد العمودى بين خطى عمل القوتين.



(١٣) **الشكل المقابل** يمثل قضيبًا متزنًا تحت تأثير أربع قوى، أوجد قيمة ق.

(١٤) أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٨سم، ب جـ = ٦سم، س، ص، ع، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ى}$ ، $\overline{ى أ}$ على الترتيب، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ع}$ ، $\overleftarrow{ص س}$ ، $\overleftarrow{ل ع}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ ، $\overleftarrow{أ ل}$ على الترتيب إذا اتزن المستطيل، أوجد قيمة ق.

(١٥) أ ب قضيب طوله ٦٠سم ووزنه ١٨ نيوتن، يؤثر عند منتصفه، يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة جـ التي تبعد ١٥ سم عن أ، فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشُد الطرف أ أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب. أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°.

(١٦) أ ب جـ ى صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أ ب = ١٨ سم، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن، ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين، عُلقت الصفيحة فى مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسيًّا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن. سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة. فأوجد زاوية ميل $\overline{ى ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(١٧) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ى جـ}$ ، أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى أ، جـ توازيان $\overleftarrow{ب ى}$ وتكوِّنان ازدواجًا يتكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين.

الوحدة الخامسة

٥ - ٢

الازدواج المحصل

Resultant couple

سوف تتعلم

- مجموع ازدواجات مستوية (الازدواج المحصل)
- شرط مجموعة من القوى المستوية تكافئ ازدواجًا.

المصطلحات الأساسية

- ازدواج محصل Resultant couple
- يكافئ Equivalent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

١) إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواج. ما التأثير الحادث على هذا الجسم نتيجة ذلك الازدواج؟

٢) هل يتحرك الجسم الواقع تحت تأثير ازدواج حركة خطية أم حركة دائرية؟

٣) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟

٤) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة تساوى صفر. هل يمكن أن تمثل هذه القوى ازدواجًا؟

تعلم

نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجًا

يقال لعدة قوى مستوية $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، ... ، $\overrightarrow{\text{ق}}_n$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا:

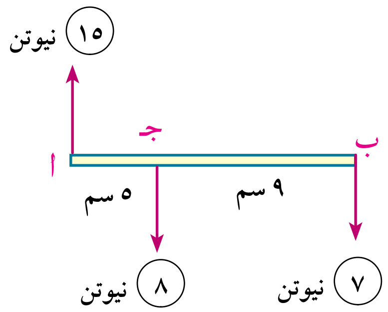
١) انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر)

٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم

ملحوظة: تحقُّق أحد الشرطين فقط لايكفى لإثبات أن المجموعة تكافئ ازدواجًا فالقوى المتلاقية فى نقطة إذا انعدمت محصلتها فإن المجموعة تكون متزنة ولاتكافئ ازدواجًا.

مثال

١ أ ب قضيب خفيف أثرت عليه القوى الموضحة بالشكل أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه.



الحل

بفرض أن $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة ١٥ نيوتن

$\therefore \overrightarrow{\text{ح}} = 15\,\overrightarrow{\text{ى}} - 8\,\overrightarrow{\text{ى}} - 7\,\overrightarrow{\text{ى}} = \overrightarrow{0}$

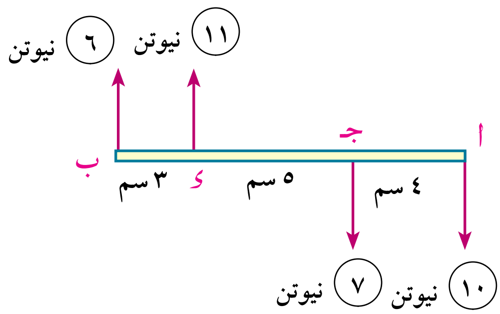
أى أن المحصلة تنعدم

$\therefore$ إما أن تكون المجموعة متزنة أو تكافئ ازدواجًا، لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة (ولتكن أ)

ج$_1$ = -٨ × ٥ - ٧ × ١٤ = - ١٣٨

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا، القياس الجبرى لعزمه يساوى - ١٣٨ نيوتن.سم

تفكير ناقد: أوجد مجموع عزوم القوى حول كل من ب، جـ ماذا تلاحظ؟



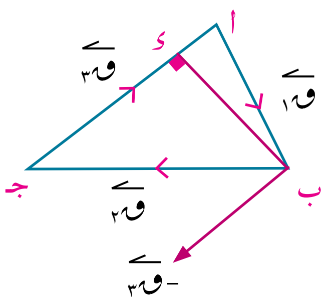
٩ حاول أن تحل

(١) فى الشكل المقابل أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه.

قاعدة

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومَثَّلها تمثيلاً تامًّا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

البرهان (غير مطلوب من الطالب)



تمثل القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ القوى الثلاث تمثيلاً تامًّا، أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل وبفرض أن م تمثل مقدار القوة لوحدة الأطوال

أى م = $\dfrac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{ق}_3}{\text{جـ أ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} + \overrightarrow{\text{ق}_3} = \overrightarrow{\text{و}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} = - \overrightarrow{\text{ق}_3}$

أى أن محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ هى قوة ($- \overrightarrow{\text{ق}_3}$) وتؤثر فى نقطة ب - لذلك فإن المجموعة تكافئ القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_3}$ وتعمل عند جـ ، ($- \overrightarrow{\text{ق}_3}$) وتعمل عند ب، أى أنها تكافئ ازدواجًا.

لتعيين معيار عزم هذا الازدواج نرسم عمودًا من ب على $\overline{\text{أ جـ}}$ فيقطعه فى نقطة ء.

معيار عزم الازدواج = $\| \overrightarrow{\text{ق}_3} \|$ × ب ء

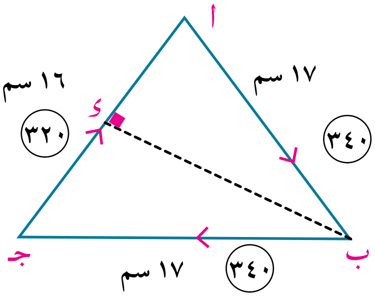
ولكن $\| \overrightarrow{\text{ق}_3} \|$ = أ جـ × م

معيار عزم الازدواج = أ جـ × م × ب ء

= (أ جـ × ب ء) × م = م × ضعف مساحة سطح المثلث أ ب جـ

مثال

(٢) أ ب جـ مثلث، فيه أ ب = ب جـ = ١٧ سم ، أ جـ = ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٣٤٠ ، ٣٤٠ ، ٣٢٠ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.



الحل

حيث إن $\frac{٣٤٠}{١٧} = \frac{٣٤٠}{١٧} = \frac{٣٢٠}{١٦} = ٢٠$

∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال يساوى ٢٠ نيوتن وحيث إن القوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواج

معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة △أ ب جـ × مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

لإيجاد مساحة △ نرسم $\overline{\text{ب ى}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ فينصفه

∴ ب ى = $\sqrt{١٧^٢ - ٨^٢}$ = ١٥ سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٥ × ٢٠ = ٤٨٠٠ نيوتن. سم

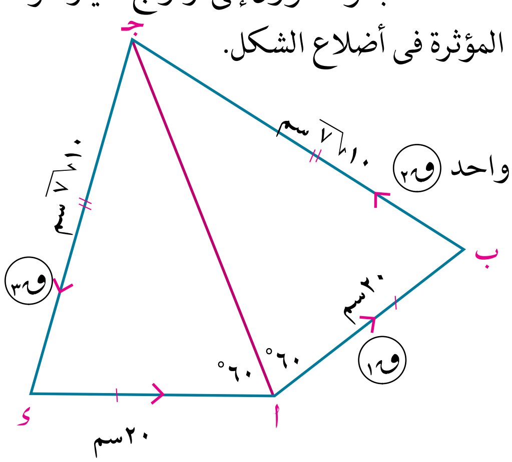
٩ حاول أن تحل

(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٦، ٨، ١٠ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

تعميم: إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

مثال

(٣) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = أ ى = ٢٠ سم، ب جـ = جـ ى = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم ، ق(∠ أ) = ١٢٠° أثرت قوى ممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى أ}}$ فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج معيار عزمه ١٨٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ب جـ ى أوجد مقدار القوى المؤثرة فى أضلاع الشكل.



الحل

∵ القوى تؤثر فى أضلاع المضلع ومأخوذة فى ترتيب دورى واحد

∴ معيار الازدواج = ضعف مساحة الشكل × م

ضعف مساحة الشكل × م = ١٨٠ $\sqrt{٣}$ (١)

من هندسة الشكل △ أ ب جـ ≡ △ أ ى جـ

من قانون جيب التمام فى △ أ ب جـ

(ب جـ)^2 = (أب)^2 + (أجـ)^2 - ٢ أب × أجـ × جتا (ب $\hat{أ}$ جـ)

∴ (١٠ $\sqrt{٧}$)^2 = ٢٠^2 + (أجـ)^2 - ٢ × ٢٠ × أجـ × جتا ٦٠

∴ ٧٠٠ = ٤٠٠ + (أجـ)^2 - ٢٠ أجـ

∴ (أجـ)^2 - ٢٠ أجـ - ٣٠٠ = صفر

∴ (أجـ + ١٠) (أجـ - ٣٠) = ٠ ومنها أجـ = ٣٠

مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٢ × مساحة △ أ ب جـ

= ٢ × $\frac{1}{2}$ × أب × أجـ × جا ٦٠

= ٢٠ × ٣٠ × جا ٦٠ = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ سم^2

بالتعويض فى (١)

∴ ٢ × ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ × م = ١٨٠ $\sqrt{٣}$ ومنها م = $\frac{٣}{١٠}$

∵ $\frac{ق_1}{أب}$ = $\frac{ق_2}{ب جـ}$ = $\frac{ق_3}{جـ ء}$ = $\frac{ق_4}{ء أ}$ = م

∴ $\frac{ق_1}{٢٠}$ = $\frac{ق_2}{١٠\sqrt{٧}}$ = $\frac{ق_3}{١٠\sqrt{٧}}$ = $\frac{ق_4}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ومنها ق$_1$ = ٦ نيوتن ، ق$_2$ = ٣ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، ق$_3$ = ٣ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، ق$_4$ = ٦ نيوتن

٩ حاول أن تحل

(٣) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم ، أء = ٣ سم أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ ، ممثلة تمثيلاً تامًا بالقطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{ءأ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{أب}$ على الترتيب، فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن. سم فى الاتجاه أ ب جـ ء فأوجد مقدار كل من $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$

قاعدة

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدارًا ثابتًا لايساوى الصفر، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

أى مجموعة من القوى اما أن تؤول إلى قوة واحدة $\overleftarrow{ق}$ أو تؤول إلى ازدواج أو تكون متزنة.

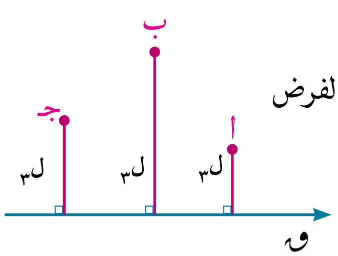
واضح أن القوى غير متزنة لأن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة ما لاينعدم ، نفرض أن المجموعة تكافئ قوة واحدة مقدارها ق وان النقط الثلاث هى أ ، ب ، جـ وان ابعادها عن خط عمل القوة هى ل$_1$ ، ل$_2$ ، ل$_3$ على الترتيب ∴ ق × ل$_1$ = ق × ل$_2$ = ق × ل$_3$ = المقدار الثابت

وبالقسمة على ق حيث ق ≠ صفر ∴ ل$_1$ = ل$_2$ = ل$_3$

أى أن النقط أ ، ب، جـ تقع على مستقيم واحد يوازى خط عمل ق وهذا يتنافى مع الفرض

∴ مجموعة القوى لاتكافئ قوة

∴ المجموعة تكافئ ازدواجا القياس الجبرى لعزمه يساوى المقدار الثابت

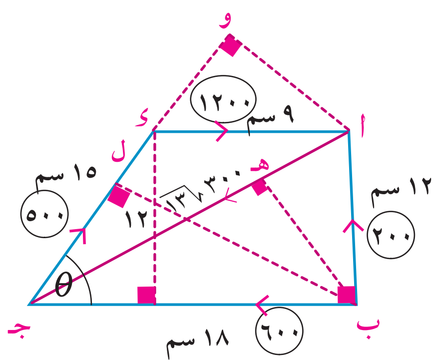


مثال

٤ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه أى // ب جـ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٨ سم ، أ ى = ٩سم، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ ث كجم فى ب أ ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ ، أ جـ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

الحل

نحسب مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن أ، ب، جـ



جـ$_{أ}$ = -٦٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × أ و

حيث أ و = ٩ جا θ = ٩ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ٧,٢

∴ جـ$_{أ}$ = -٦٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ٧,٢ = -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

جـ$_{ب}$ = -١٢٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ب ل + ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ × ب هـ

حيث ب ل = ١٨ جا θ = ١٨ × $\frac{١٢}{١٥}$ = ١٤,٤

، ب هـ = $\frac{١٢ \times ١٨}{٦ \sqrt{١٣}}$ = $\frac{٣٦}{\sqrt{١٣}}$

∴ جـ$_{ب}$ = -١٢٠٠ × ١٢ - ٥٠٠ × ١٤,٤ + ٣٠٠ $\sqrt{١٣}$ × $\frac{٣٦}{\sqrt{١٣}}$

= -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

∴ جـ$_{جـ}$ = ٢٠٠ × ١٨ - ١٢٠٠ × ١٢

= -١٠٨٠٠ ث كجم.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة، معيار عزمه ١٠٨٠٠ ث كجم.سم

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٠سم، هـ ∈ جـ ب ، و ∈ جـ ى ، بحيث كان جـ هـ = جـ و = ٣٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث كجم فى أ ب ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ ، هـ و على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

الازدواج المحصل

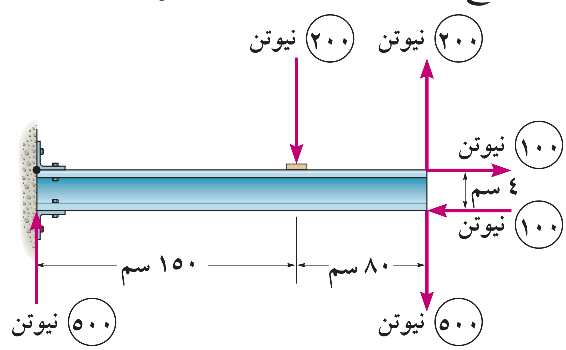
Resultant couple

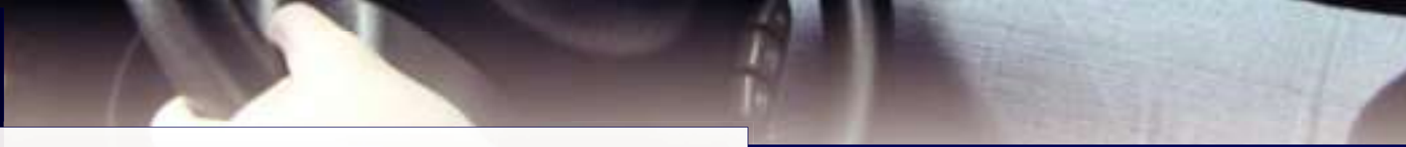
يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه الازدواج الذى عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{جـ_{١}} + \overrightarrow{جـ_{٢}}$ ويسمى مجموع ازدواجين مستويين بالازدواج المحصل (المجموعة تكافئ ازدواجًا)

مثال

٥ فى الشكل المقابل أوجد القياس الجبرى للازدواج المحصل





الحل

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_{١}$ = ٢٠٠ × ٠,٨ = ١٦٠ نيوتن. متر

القوتان ٥٠٠ ، ٥٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

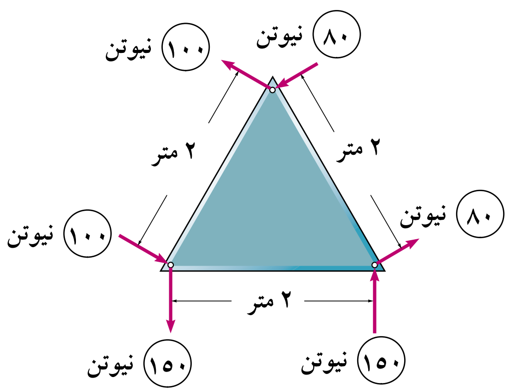
$\overleftarrow{ج_{٢}}$ = -٥٠٠ × ٢,٣ = -١١٥٠ نيوتن.متر

القوتان ١٠٠ ، ١٠٠ تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_{٣}$ = -١٠٠ × ٠,٠٤ = -٤ نيوتن.متر

الازدواج المحصل = $ج_{١}$ + $ج_{٢}$ + $ج_{٣}$

= ١٦٠ + (-١١٥٠) + (-٤) = -٩٩٤ نيوتن.متر



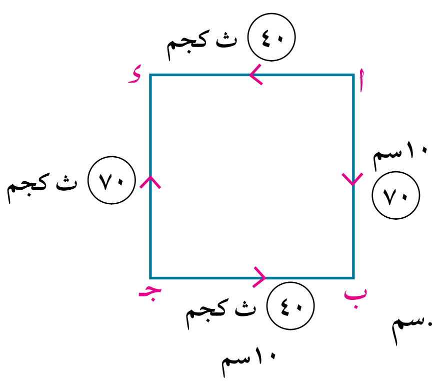
حاول أن تحل

٥ **الشكل المقابل** يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

مثال

٦ أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٠سم، أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤٠ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ وقوتان مقدار كل منهما ٧٠ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحل



القوتان ٤٠، ٤٠ تُكَوِّنان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_{١}$ = ٤٠ × ١٠ = ٤٠٠ ث كجم. سم

القوتان ٧٠ ، ٧٠ تُكَوِّنان ازدواج القياس الجبرى لعزمه

$ج_{٢}$ = -٧٠ × ١٠ = -٧٠٠ ث كجم.سم

الازدواج المحصل = $ج_{١}$ + $ج_{٢}$ = ٤٠٠ + (-٧٠٠) = -٣٠٠ ث كجم.سم

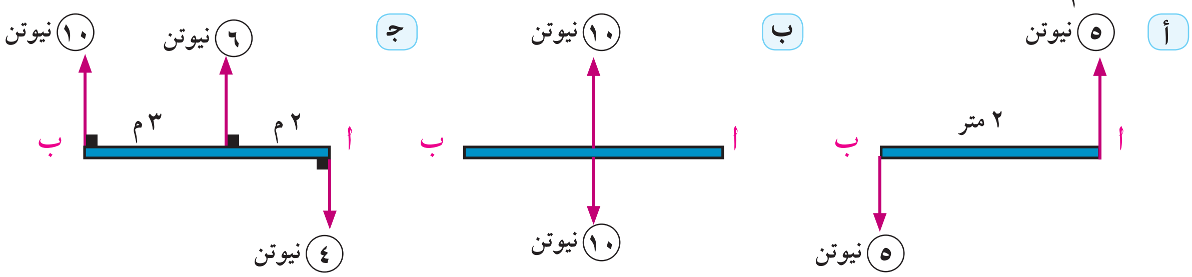
حاول أن تحل

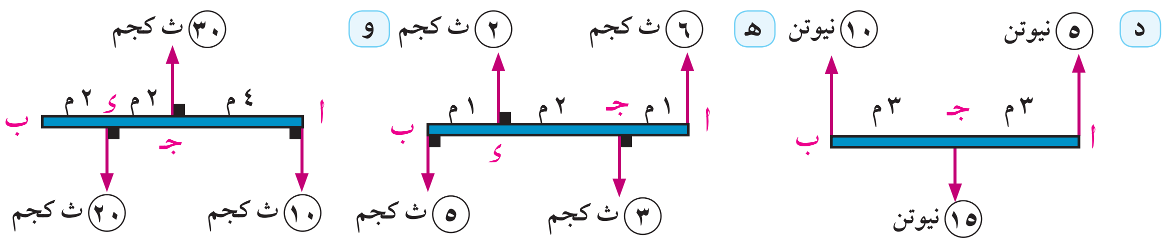
٦ أ ب جـ ى مستطيل، فيه أ ب = ٦٠ سم ، ب جـ = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفات $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$ على الترتيب، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، و ، و نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص جـ}}$، على الترتيب، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن. سم.

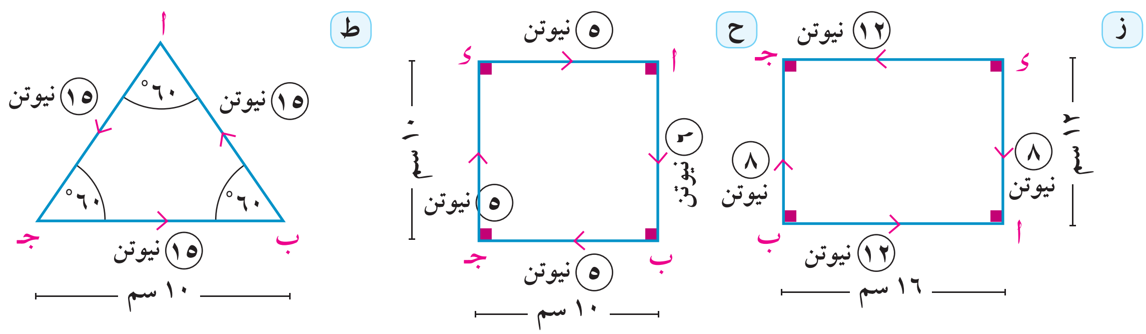
أوجد قيمة: و.

تمـــارين ٥ – ٢

(١) بين أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه:







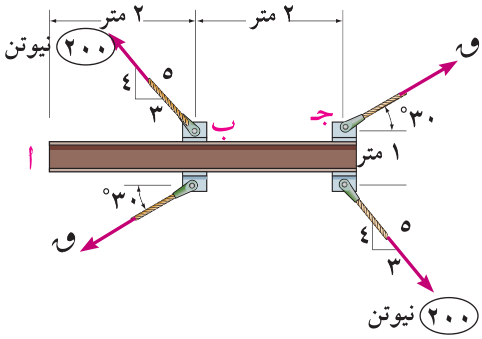
(٢) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٣ أمتار تؤثر القوى التى مقاديرها ٥، ٢، ٥، ٢ نيوتن فى اتجاهات ب أ ، ب جـ ، ى جـ ، ى أ ، على الترتيب. بين أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمها.

(٣) أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث. كجم فى كل من أ ب ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

(٤) أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ٣٠سم، ب جـ = ٤٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥، ٣٠، ١٥، ٣٠ ث.جم فى أ ب ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ ، على الترتيب، أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه، ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، جـ عموديتين على أ جـ ، بحيث تتزن المجموعة.

(٥) أ ب جـ ى معين طول ضلعه ١٠ سم، ق(∠ب أ جـ) = ١٢٠° أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ث كجم فى أ ب ، ب جـ ، جـ ى ، ى أ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى ب، ى عموديتين على ب ى بحيث تتزن المجموعة.

⑥ **الشكل المقابل** يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٢٠٠ - ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. متر أوجد ق.



⑦ أ ب جـ ى شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ى = ٩سم أ ب = ى جـ = ١٥سم ، ب جـ = ٣٣ سم أثرت القوى ٤٥، ٩٩ ، ٤٥، ٢٧ فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

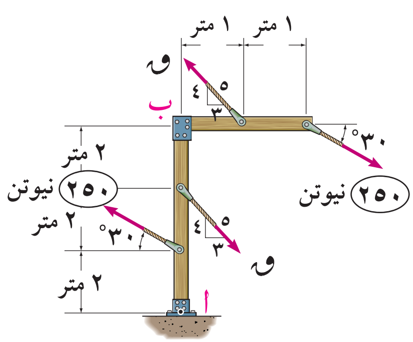
⑧ أ ب جـ ى هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم، أثرت قوى مقاديرها ٤٠، ٥٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ على الترتيب. عين عزم الازدواج المحصل.

⑨ أ ب جـ ى هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٥سم. أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ث كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

⑩ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ب جـ = ٦سم، ق(∠ أ ب جـ) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٨، ١٨، ١٨ $\sqrt{٣}$ فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب، أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

⑪ أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٦٠سم أثرت قوى مقاديرها ١٠، ٢٠، ٨٠، ٥٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى أ}}$ على الترتيب واثرت قوتان مقدارهما ٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٢٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى ب}}$ على الترتيب برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم

⑫ فى **الشكل المقابل** أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٥٠ - ٥٠٠ $\sqrt{٣}$



ملخص الوحدة

تعريف الازدواج: هو نظام من القوى يتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادتين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.

عزم الازدواج: يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزمى قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما.

نظرية: عزم الازدواج هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه.

اتزان ازدواجين: يقال لازدواجين إنهما متزنان إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

اتزان جسم تحت تأثير عدة ازدواجات إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية متجهات عزمها هى $\overrightarrow{ج_{1}}$ ، $\overrightarrow{ج_{2}}$ ، ... ، $\overrightarrow{ج_{ن}}$ فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو $\overrightarrow{ج_{1}} + \overrightarrow{ج_{2}} + .. + \overrightarrow{ج_{ن}} = \overrightarrow{و}$

تكافؤ ازدواجين: يقال لازدواجين مستويين إنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

نظام القوى المستوية التى تكافئ ازدواج: يقال لعدة قوى مستوية $\overrightarrow{ق_{1}}$ ، $\overrightarrow{ق_{2}}$ ، .. $\overrightarrow{ق_{ن}}$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا:

١ - محصلة القوى تساوى المتجه الصفرى ($\overrightarrow{ق_{1}} + \overrightarrow{ق_{2}} + .. + \overrightarrow{ق_{ن}} = \overrightarrow{و}$)

٢ - مجموع عزوم القوى حول أى نقطة فى الفراغ لا ينعدم.

قاعدة ١: إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًّا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

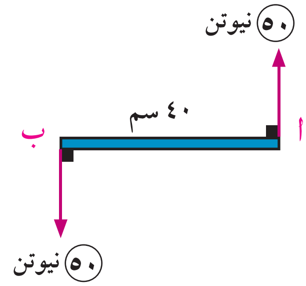
تعميم: إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلا تامًّا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

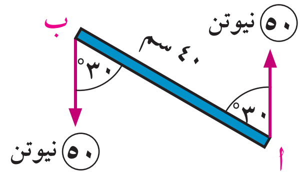
قاعدة ٢: إذا كان مجموع القياسات لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدارًا ثابتًا لا يساوى الصفر كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

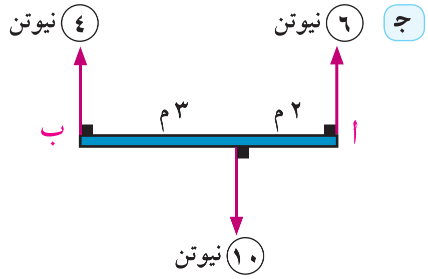
الازدواج المحصل: يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه الازدواج الذى عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين ($\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج_{1}} + \overrightarrow{ج_{2}}$)

تمارين عامة

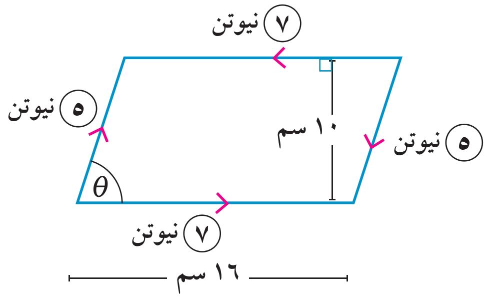
(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل فى كل من الأشكال الآتية:

أ


ب


جـ


(٢) **الشكل المقابل** يوضح صفيحة على شكل متوازى أضلاع أثر عليها ازدواجان، أوجد:



أ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٧ ، ٧

ب القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما θ = ٦٠°.

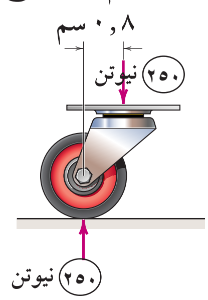
جـ إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٣٠ نيوتن.سم فما قيمة θ؟

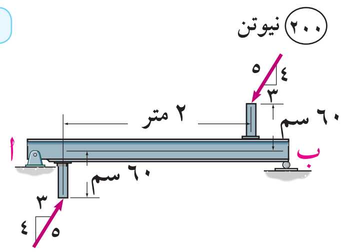
د إذا اتزنت الصفيحة فما قيمة θ؟

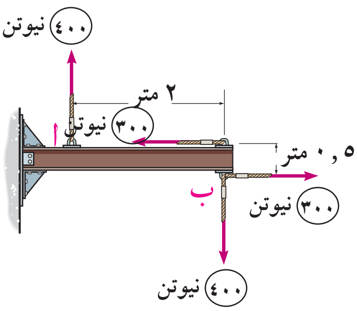
(٣) أ ب قضيب منتظم طوله ٢٠سم، يمكنه الدوران فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة جـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ جـ = ٥سم، إذا اتزن القضيب فى وضع أفقى تحت تأثير قوتين مقدار كل منها ٥٠ نيوتن وتؤثران فى طرفيه أ ، ب فى اتجاهين متضادين وتصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠°. أوجد وزن القضيب ومقدار رد فعل المسمار.

(٤) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٣٠سم، ب جـ = ٤٠سم أثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٤، ٦، ٥ ث.كجم فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ على الترتيب، برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

(٥) عين معيار عزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية:

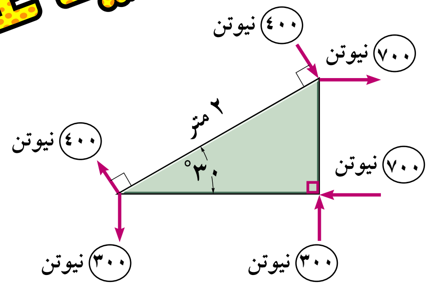
أ


ب


جـ


تمارين عامة

٦ في الشكل المقابل صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية، تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.



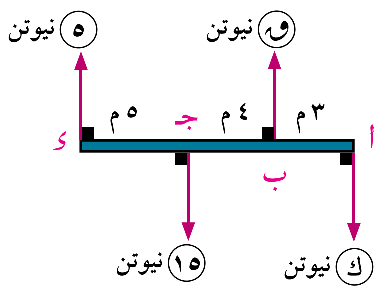
٧ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٢٠سم، أثرت القوى التى مقاديرها ٣، ٥، ٣، ٥ ث كجم فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤ $\sqrt{2}$ ث كجم فى النقطتين أ، جـ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د ب}}$ على الترتيب أوجد معيار الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة.

٨ قوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = - ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثران فى النقطتين جـ(٢، -١)، د (٠، -٢) على الترتيب وتكونان ازدواجًا. أوجد قيمة كل من أ، ب ثم أوجد عزم الازدواج وطول البعد العمودى بين القوتين.

٩ أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى نقطة الاصل كما أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = -٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطة (٢، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة (س، ص) لايعتمد على س، ص.

١٠ أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_3$ = -٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقط أ (-١، ١)، ب (-٢، ٣)، جـ (٠، ١) على الترتيب. برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه

١١ الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى الموثرة على قضيب أ د تكون ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى -٧٥ نيوتن. م. أوجد قيمة كل من ق، ك.



اختبار تراكمي

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات:

١) إذا كانت قوتان مقدارهما ٤، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠ فإن مقدار محصلتهما يساوى:

أ ١٢ ب ٤ جـ $٤\sqrt{٣}$ د $-٨\sqrt{٣}$

٢) إذا كانت قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ٥، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ، ب فإن مقدار محصلتهما يساوى:

أ ١٢ ب ٢ جـ جـ $\sqrt{٧٤}$ د $\sqrt{٢٤}$

٣) إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١، -٢) فإن عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (-١، ٤) يساوى:

أ $-٦\overrightarrow{ع}$ ب $٦\overrightarrow{ع}$ جـ $٢٢\overrightarrow{ع}$ د $-٢٢\overrightarrow{ع}$

٤) إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (٢، -١، ٣) فإن عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى:

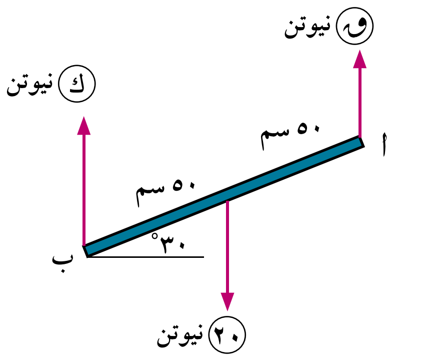
أ $-٣\overrightarrow{س} + ٩\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ ب $-\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

جـ $٣\overrightarrow{س} - ٩\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ع}$ د $٢\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

٥) إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتساوية فى المقدار ومتلاقية في نقطة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين فيها يساوى:

أ ٣٠° ب ٦٠° جـ -٩٠° د ١٢٠°

أجب عن الاسئلة الآتية:



٦) الشكل المقابل يوضح قضيبًا منتظمًا أ ب فى حالة اتزان تحت تأثير القوى الموضحة أوجد ق. ك.

٧) إذا كانت $\overrightarrow{ق} = ل\overrightarrow{س} + م\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٣، -٢) فإذا كان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى $\overrightarrow{٠}$ وبالنسبة للنقطة ب (-١، ٢) يساوى $-٨\overrightarrow{ع}$ أوجد قيمة كل من ل، م.

٨) إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص} + جـ\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ (-٢، ١، ٢) وكانت مركبتا عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لمحورى ص، ع هما ٢، -٣ على الترتيب أوجد قيمة كل من ب، جـ.

٩) أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ق(ب) = ١٢٠°، أ جـ = $١٢\sqrt{٣}$ سم أثرت قوى مقاديرها ٦، ٧، $٨\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{أ ب}$ على الترتيب أوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$.

١٠) أ، ب، جـ ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث أ ب = ٦سم، ب جـ = ٤ سم، جـ ∈ $\overline{أ ب}$. أثرت قوتان متوازيتان فى النقطتين أ، ب مقدار محصلتهما يساوى ٢٤ نيوتن، وتؤثر فى نقطة جـ. أوجد مقدار كل من القوتين.

١١) تؤثر القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$ فى النقطة أ(١، ١)، ب(-٢، ١)، جـ(٣، ٣)، ء (-٢، ٠) على الترتيب. فإذا كانت القوى متزنة وكان $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ، $||\overrightarrow{ق_٢}|| = ٢\sqrt{٥}$ نيوتن فى عكس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$ ، أوجد كلًا من $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$

مركز الثقل

Center of Gravity

الوحدة

٦

مقدمة الوحدة

بالرغم من اختلاف الأجسام (التى تتكون من عدد كبير من الجزيئات) من حيث الشكل والمظهر الخارجى وإن كانت متساوية الوزن، فإنها تتأثر بقوة جذب الأرض لها والتى يعمل اتجاهها عادة رأسيًّا لأسفل (باتجاه مركز الأرض) ، وقد وجد العلماء أن محصلة القوى المؤثرة فى جميع الأجزاء التى يتكون منها الجسم تساوى وزن الجسم ، كما وجدوا أن محصلة هذه القوى المؤثرة فى الجسم تتمركز فى نقطة واحدة وعليه يكون مركز ثقل الجسم الجاسىء هو تلك النقطة الثابتة لهذا الجسم والتى تمر بها خط عمل محصلة قوى الجاذبية الأرضية لنقط الجسم المذكور عند أى وضع له فى الفراغ، وجدير بالذكر أن مركز الثقل هو نقطة هندسية قد تقع خارج الجسم كما فى حالة الحلقة. وأجزائه متمركزة فيها ، وقد أمكن تحديد مركز ثقل بعض الأجسام المنتظمة بسهولة حيث تكُون هذه النقطة هى موقع مركزها الهندسى (كالصفائح الهندسية المنتظمة والأقراص والكرات وغيرها...). أما بالنسبة للأجسام غير المنتظمة (مثل جسم الإنسان) فإن طريقة تحديد مركز ثقلها يتم من خلال أسس علمية مختلفة، ومن الجدير بالذكر أنه تم تحديد مركز ثقل جسم الإنسان باستخدام بعض البرامج الحاسوبية التى تغذى الحاسب بمعلومات عن وزن الجسم ووزن كل جزء من أجزائه وأبعاد مراكز ثقلها فى الأنظمة الإحداثية المتعامدة.

ومن الدراسات التى اهتمت بذلك هى دراسة (براون وفيشر) التى حددت ارتفاع مركز ثقل جسم الإنسان بـ ٥٤,٨ ٪ من طوله مقاسا من أسفل القدم ، كما أشار (كروسكى) إلى أن مركز الثقل عند الرجال أعلى منه عند النساء. وتظهر أهمية دراسة مركز الثقل فى الحركة الرياضية فى مجال التحليل الحركى (الميكانيكا الحيوية الرياضى Biomechanics of sports) وسوف نتناول ذلك من خلال أنشطة هذه الوحدة.

وفى هذه الوحدة سوف نتعرف مركز ثقل نظام من الجسيمات، وإيجاد مركباته فى الأنظمة الإحداثية المتعامدة مع تعيين مركز ثقل الجسم الجاسئ والصفائح المركبة ، كما سنتناول بعض التطبيقات على مركز الثقل فى مجالات حياتية مختلفة.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يتعرف مركز ثقل الجسم الجاسئ.
- يتعرف العلاقة بين ثقل الجسم ومركز الثقل والاتزان والجاذبية الأرضية.
- يتعرف مركز ثقل نظام من الجسيمات.
- يتعرف متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل.
- يستنتج مركبات مركز الثقل فى نظام الإحداثيات الديكارتية المتعامدة.
- يستنتج مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًّا.
- يستنج مركز ثقل نقطتين ماديتين بينهما مسافة ل.
- يستنتج مركز ثقل قضيب رفيع منتظم.
- يستنتج مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع.
- يستنتج مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث.
- يتعرف طريقة الكتل السالبة لحساب مركز ثقل جسم بعد حذف جزء منه.
- يتعرف مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل.

المصطلحات الأساسية

كتلة سالبة	*Negative Mass*
تماثل	*Symmetry*
مركز الثقل	*Center of Gravity*
جسيم نقطة مادية	*Physical point*
نظام ثنائى الأبعاد	*two-dimensional system*
نظام ثلاثى الأبعاد	*Three-dimensional system*
تعليق حر	*free suspension*

دروس الوحدة

(٦-١): مركز الثقل

(٦-٢):طريقة الكتلة السالبة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية.

مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة السادسة
٦ - ١

مركز الثقل
Center of Gravity

سوف تتعلم
- مركز ثقل الجسم الجاسئ
- ثقل الجسم ومركز ثقله والجاذبية الأرضية.
- مركز ثقل نقطتين ماديتين.
- متجه موضع مركز ثقل الجسم الجاسئ.
- مركز الثقل فى نظام الإحداثيات المتعامدة.
- التعليق الحر للجسم الجاسئ.
- مركز ثقل قضيب رفيع منتظم.
- مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل متوازى أضلاع.
- مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل مثلث.

المصطلحات الأساسية
- مركز الثقل Center of Gravity
- جسيم Particle
- نقطة مادية Physical point
- نظام ثنائى الأبعاد two−dimensional system
- نظام ثلاثى الأبعاد Three−dimensional system
- تعليق حر free suspension

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

تمهيد

مركز ثقل الجسم الجاسئ:

إذا نظرنا إلى الأجسام الكبيرة التى تتحرك بشكل انتقالى فقط لوجدنا أن كل نقطة فيها تتحرك بنفس الشكل تمامًا، وبالتالي فإن اعتبار هذا الجسم مكافئًا لنقطة واحدة ممكن فى هذه الحالة. إلا أنه لو كان لدينا جسم كبير يتحرك عشوائيًّا (كانتقال ودوران) لتحركت كل نقطة منه بشكل مختلف عن غيرها، فمثلًا عند قذف مضرب كرة فى الهواء، فإن حركته صعودًا وهبوطًا أكثر تعقيدًا من حركة كرة فلزية ويعود ذلك إلى وجود الحركة الدورانية للمضرب أثناء حركته الانتقالية ؛ أي إن كل نقطة فى المضرب لها حركتها المختلفة عن غيرها من النقاط ، وفى الشكل (١) سنجد أن هناك نقطة معينة على المضرب تتحرك على المسار المعروف لدينا للجسم المقذوف؛ أي كحركة الكرة الفلزية الصغيرة عند قذفها فى الهواء.


شكل (١)

من الواضح أن هذه النقطة تتحرك كما لو أن كتلة المضرب تتركز فى هذه النقطة؛ ووزن المضرب يؤثر فقط فى هذه النقطة.

إن هذه النقطة المعينة تسمى مركز الثقل Center of Gravity والتي تبدو وكأن كل الجسم متجمع عندها. أى أن مركز الثقل هو نقطة افتراضية تعبر عن محصلة أثقال عناصر الجسم الجاسئ، وهي أيضًا نقطة الاتزان، كما نستطيع القول إنها النقطة التى تتوزع حولها ثقل الجسم بالتساوي من جميع الجهات.

ثقل الجسم ومركز ثقله والجاذبية الأرضية :

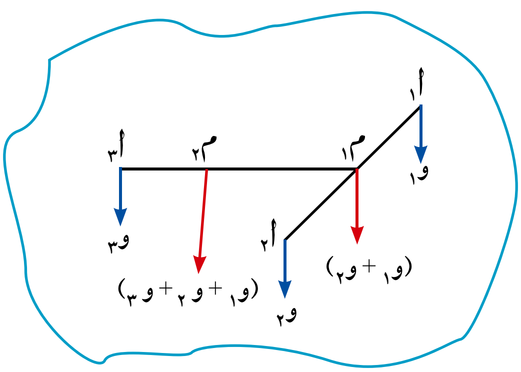
إذا اعتبرنا أن الجسم بوجه عام (**غازيًا أم سائلًا أم صلبًا**) مجموعة من النقط المادية، فإن تأثير الجاذبية الأرضية عليه بقوة وزنه تكون عند كل نقطة من هذه النقاط، و إذا اعتبرنا أن الأرض كرة متجانسة، فإن خط عَمِل وزن كل نقطة هو المستقيم المار بهذه النقطة ومركز الأرض، ولما كانت الأجسام التى تقابلنا فى حياتنا اليومية وتدخل فى نطاق دراستنا صغيرة جدًا بالنسبة للأرض ونظرًا لبعدها الكبير عن مركز الأرض، فإنه يمكن اعتبار خطوط عمل أوزان النقط المادية المكونة لجسم ما متوازية. وبذلك يمكن تحصيلها فى قوة واحدة تساوى من حيث المقدار مجموع أوزان هذه النقاط وتعمل رأسيًا إلى أسفل نحو الأرض.

من الطبيعى أن الجاذبية الأرضية تؤثر فى جميع أجزاء الجسم ، ولكن عند أخذ العزوم تؤثر قوة الجاذبية الأرضية (**وزن الجسم**) فى نقطة واحدة فيه تسمى بمركز ثقل الجسم.

مركز ثقل نظام من الجسيمات :

Center of gravity of a system of particles

إذا اعتبرنا أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ،....... مجموعة من الجسيمات المكونة لجسم جاسئ وأن و$_1$ ، و$_2$ ، و$_3$ ،....... هى أوزان هذه الجسيمات على الترتيب وتؤثر رأسيًا لأسفل كما فى شكل (٢).



شكل (٢)

- محصلة القوتين المتوازيتين و$_1$ ، و$_2$ المؤثرتين عند أ$_1$، أ$_2$ على الترتيب وتمر بالنقطة م$_1$ هى (و$_1$ + و$_2$) لذلك فإن : و$_1$ × أ$_1$ م$_1$ = و$_2$ × أ$_2$ م$_1$ مهما كان وضع الجسم بالنسبة للأرض وذلك لأن البعد بين النقطتين أ$_1$ ، أ$_2$ ثابت لأن الجسم جاسئ، وبالتالى تظل م$_1$ ثابتة.
- محصلة القوتين المتوازيتين (و$_1$ + و$_2$) ، و$_3$ هى (و$_1$ + و$_2$ + و$_3$) ونفرض أن نقطة تأثيرها هى نقطة م$_2$. لذلك فإن: و$_3$ × أ$_3$ م$_2$ = (و$_1$ + و$_2$) × م$_1$ م$_2$ وتظل المسافة أ$_3$ م$_1$ ثابتة. وبالتالى فإن م$_2$ نقطة ثابتة مهما كان وضع الجسيمات عند النقاط أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$.

تعريف

مركز ثقل جسم جاسئ (متماسك) هو نقطة ثابتة بالنسبة للجسم، يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، ولا يتغير موضعها بالنسبة للجسم، مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

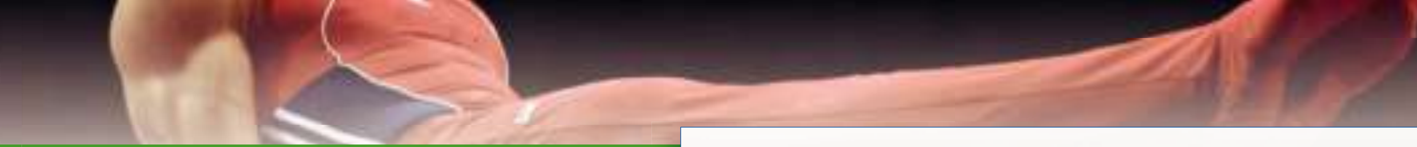
لاحظ أن :

١ - مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونة له.

٢ - لكل جسم متماسك مركز ثقل واحد

الجسم المنتظم الكثافة :

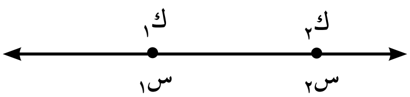
هو الجسم الذى تكون كتلته وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.



مركز ثقل نقطتين ماديتين (جسيمين) : *Center of gravity of two points (particles)*

إذا كانت كتلة الجسيمين هما $ك_١$ ، $ك_٢$ فى الموضعين $س_١$ ، $س_٢$ على محور السينات على الترتيب بالنسبة لراصد موجود عند نقطة الأصل و كما بالشكل (٣) ، فإن مركز ثقل هذين الجسيمين بالنسبة للراصد تتحدد بالعلاقة :

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢}{ك_١ + ك_٢}$$



شكل (٣)

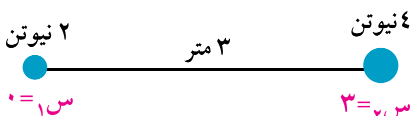
مثال

مركز ثقل نقطتين ماديتين

(١) جسيمين ماديين وزناهما ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن والمسافة بينهما ٣ أمتار. أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة للجسيم ٢ نيوتن.

الحل

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسيمين يقع على محور السينات وباعتبار أن نقطة الأصل تقع عند الجسم ٢ نيوتن فيكون : $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = ٣$ ، $و_١ = ٢$ ، $و_٢ = ٤$



شكل (٤)

باستخدام العلاقة : $س_م = \frac{و_١ س_١ + و_٢ س_٢}{و_١ + و_٢}$

فإن : $س_م = \frac{٢ \times ٠ + ٤ \times ٣}{٢ + ٤} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

أى أن : مركز ثقل الجسيمين الماديين يقع على بعد ٢ متر من موضع الجسم ٢ نيوتن.

حاول أن تحل

(١) جسيمين ماديين وزناهما ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن والمسافة بينهما ٨ أمتار. أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة لموضع الجسيم ٣ نيوتن.

متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل

إذا كانت $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، .... ، $و_ن$ أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overleftarrow{ر}_١$ ، $\overleftarrow{ر}_٢$ ، $\overleftarrow{ر}_٣$ ، .... ، $\overleftarrow{ر}_ن$ متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل

$و_١ = ك_١ ى$
$و_١ = ك_٢ ى$

$و_ن = ك_ن ى$

فإن متجه الموضع $\overleftarrow{ر}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوبًا إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة:

$$\overleftarrow{ر}_م = \frac{و_١ \overleftarrow{ر}_١ + و_٢ \overleftarrow{ر}_٢ + و_٣ \overleftarrow{ر}_٣ + ... + و_ن \overleftarrow{ر}_ن}{و_١ + و_٢ + و_٣ + ... + و_ن} \quad .... (١)$$

وبكتابة كل من الأوزان $و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، ...... ، $و_ن$ كحاصل ضرب الكتلة المناظرة فى مقدار عجلة الجاذبية الأرضية وقسمة كل من البسط والمقام على ى نحصل على العلاقة:

$$\overleftarrow{ر}_م = \frac{ك_١ \overleftarrow{ر}_١ + ك_٢ \overleftarrow{ر}_٢ + ك_٣ \overleftarrow{ر}_٣ + ... + ك_ن \overleftarrow{ر}_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + ... + ك_ن} \quad .... (٢)$$

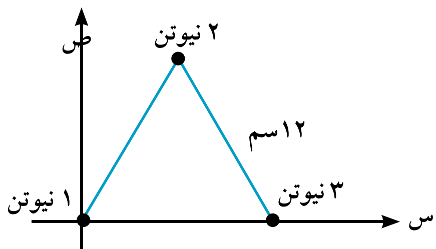
ويمكن كتابة العلاقات الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الاحداثيين المتعامدين $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ فنحصل على الآتى :

$$\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_{١}\,\text{س}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\text{س}_{٢} + \text{ك}_{٣}\,\text{س}_{٣} + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \text{ك}_{٣} + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$

$$\text{، ص}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_{١}\,\text{ص}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\text{ص}_{٢} + \text{ك}_{٣}\,\text{ص}_{٣} + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \text{ك}_{٣} + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$

مثال

مركز ثقل نظام ثنائى الأبعاد



شكل (٥)

٢ فى شكل (٥): أوجد مركز ثقل ثلاثة أوزان مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ نيوتن موضوعة عند رؤوس مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم.

الحل

يمكن وضع بيانات المسألة فى جدول على النحو التالى على أعتبار المحاور المتعامدة كما بالشكل (٥):

الثقل	١ نيوتن	٢ نيوتن	٣ نيوتن
س	٠	٦	١٢
ص	٠	$٦\sqrt{٣}$	٠

$$\therefore \text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{و}_{١}\,\text{س}_{١} + \text{و}_{٢}\,\text{س}_{٢} + \text{و}_{٣}\,\text{س}_{٣}}{\text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣}}$$

$$\therefore \text{س}_{\text{م}} = \frac{١\times٠ + ٢\times٦ + ٣\times١٢}{١+٢+٣} = ٨ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ص}_{\text{م}} = \frac{\text{و}_{١}\,\text{ص}_{١} + \text{و}_{٢}\,\text{ص}_{٢} + \text{و}_{٣}\,\text{ص}_{٣}}{\text{و}_{١} + \text{و}_{٢} + \text{و}_{٣}}$$

$$\therefore \text{ص}_{\text{م}} = \frac{١\times٠ + ٢\times٦\sqrt{٣} + ٣\times٠}{١+٢+٣} = ٢\sqrt{٣} \text{ سم}$$

مركز الثقل للمجموعة هو $(٨ ، ٢\sqrt{٣})$

تفكير ناقد:

هل يتغير مركز الثقل للنظام فى المثال السابق بتغير مواضع المحاور المتعامدة ؟ فسر إجابتك.

٩ حاول أن تحل

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ٤ ديسيمترات ، النقط ء ، هـ ، و منتصفات أضلاعه $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ ، $\overline{أ ب}$ على الترتيب، وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث كجم عند النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و، على الترتيب. أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من ب.

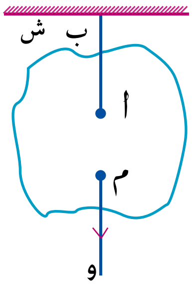
ملاحظة هامة: التعليق الحر للجسم الجاسئ :

إذا علق جسم جاسئ من إحدى نقطه أ تعليقًا حرًا فإن مركز ثقله م يقع على الخط الرأسى المار بنقطة التعليق وذلك لأن الجسم فى هذه الحالة يكون متزنًا تحت تأثير القوتين المبينتين فى الشكل (٦) وهما :

(١) الشد فى الخيط ، (٢) ثقل الجسم و يعمل رأسيًا إلى اسفل

وعلى ذلك فلابد أن تتساوى هاتان القوتان فى المقدار وتتضادا فى الاتجاه وتتحدا فى خط العمل .

لذلك لابد وأن يقع مركز ثقل الجسم م على الخط الرأسى المار بنقطة أ



شكل (٦)

مركز ثقل القضبان والصفائح المنتظمة :

١- مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة عند نقطة منتصفة.

٢- مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة المحدودة على شكل متوازى الأضلاع يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين)

٣- مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث.

٤-مركز ثقل صفيحة منتظمة السمك والكثافة على شكل دائرة يقع فى مركزها الهندسى.

مثال

مركز ثقل قضيب منتظم

(٣) ثُنِىَ قضيب منتظم $\overline{أ جـ}$ طوله ٢ ل من نقطة منتصفه ب، ثم عُلق من الطرف أ تعليقًا حرًّا ، فإذا كان $\overline{ب جـ}$ أفقيًّا فى وضع الاتزان. فأثبت أن جتا($\measuredangle$ أ ب جـ) = $\frac{١}{٣}$.

الحل

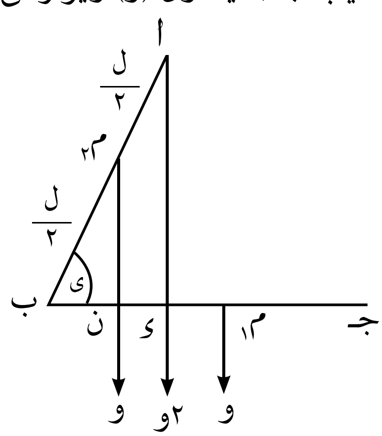
نفرض أن وزن القضيب $\overline{أ ب}$ يساوى (و) يؤثر فى نقطة منتصفه م$_٢$ ، وزن القضيب $\overline{ب جـ}$ يساوى (و) و يؤثر فى منتصفه م$_١$

(لاحظ أن : أ ب = ب جـ) ، وأن ق($\measuredangle$ أ ب جـ) = ى

$\because$ القضيب متزن وهو معلق من نقطة أ فى وضع يكون فيه $\overline{ب جـ}$ أفقيًّا.

$\therefore$ مركز الثقل يقع على الخط $\overleftrightarrow{أ ء}$.

$\therefore$ و × م$_١$ء = و × ن ء $\therefore$ م$_١$ء = ن ء....... (١)



شكل (٧)

من هندسة الشكل :

∵ $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{م}_٢\text{ ن}}$ ، م٢ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ن منتصف $\overline{\text{ب ى}}$

∴ ى ن = ب ن .... (٢)   ومن (١) ، (٢)

∴ م١ ى = ن ى = ب ن = $\frac{١}{٣} \times \frac{ل}{٢} = \frac{ل}{٦}$

∴ جتا ى = $\frac{\text{ن ب}}{\text{ب م}_٢} = \frac{ل}{٦} \div \frac{ل}{٢} = \frac{ل}{٦} \times \frac{٢}{ل} = \frac{١}{٣}$

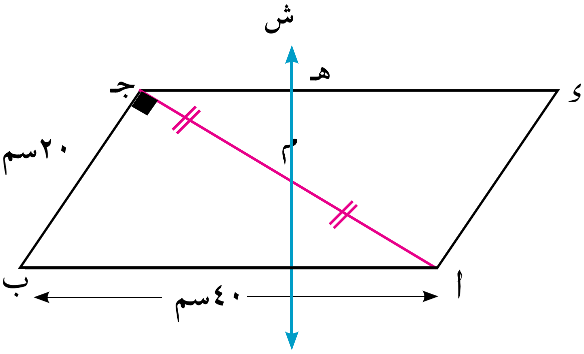
حاول أن تحل

③ سلك رفيع منتظم السمك والكثافة على شكل شبه منحرف أب جـ ى فيه أب = ١٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، جـ ى = ١٠ سم ، ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ب جـ ى) = ٩٠°. أوجد بُعد مركز ثقل هذا السلك عن الضلعين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

مثال

④ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع أب جـ ى فيه أب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ق (∠ب جـ أ) = ٩٠°. عُلقت الصفيحة من نقطة (هـ) على $\overline{\text{جـ ى}}$ فاتزنت عندما كانت $\overline{\text{جـ ى}}$ أفقيًا. أوجد طول $\overline{\text{جـ هـ}}$.

الحل



شكل (٨)

∵ الخط الرأسى المار بنقطة التعليق لا بد وأن يمر بمركز ثقل الصفيحة

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ هو الخط الرأسى

∵ $\overline{\text{جـ ى}}$ أفقى ∴ ق(∠م هـ جـ) = ٩٠°.

من المثلث أ ب جـ نجد أن : ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°، ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

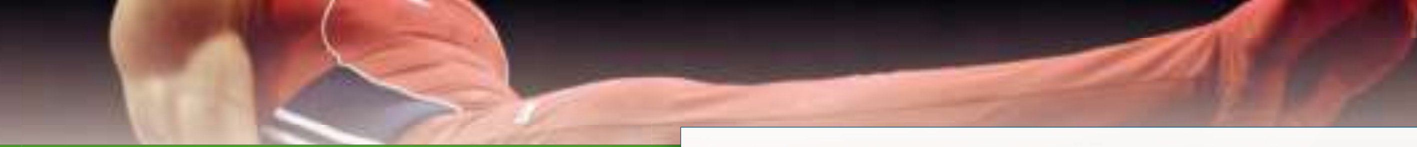
∴ ق(∠جـ أ ب) = ٣٠°،   أ جـ = ٢٠$\sqrt{٣}$ سم

∴ م جـ = ١٠$\sqrt{٣}$ سم   ،   ∵ ق(∠م جـ هـ) = ٣٠°

∴ جـ هـ = م جـ جتا ٣٠°   ∴ جـ هـ = ١٠$\sqrt{٣}$ × ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ١٥ سم.

حاول أن تحل

④ عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها (و) تعليقًا حرًا من الرأس أ وثبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$ و. أثبت أن ظل زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ جـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{١}{٥}$.

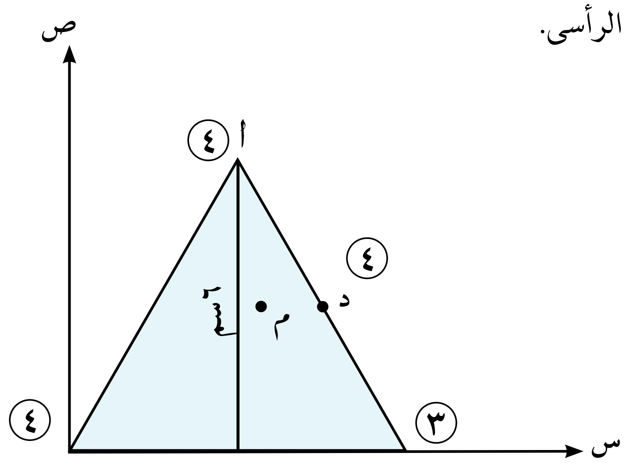


تفكير ناقد:

أثبت أن مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.

مثال — إيجاد مركز ثقل صفيحة مثلثة

(٥) صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣ كجم على شكل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = أ جـ ، ب جـ = ارتفاع المثلث = ٦سم. ثبتت الكتل ٣ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقط أ، ب ، جـ ، ؤ على الترتيب حيث ؤ منتصف $\overline{أ ب}$. عين مركز ثقل المجموعة وأثبت أنه يبعد عن جـ مسافة ٤ سم. و إذا عُلقت الصفيحة من جـ تعليقًا حرًّا فأوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل كل من $\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ أ}$ على الرأسى.



شكل (٩)

الحل

باعتبار أن الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ وبذلك تكون نقطة جـ هى نقطة الأصل.

نوزع كتلة الصفيحة ٣ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، جـ إلى ثلاث كتل متساوية كتلة كل منهما ١ كجم وبذلك تصبح الكتل المثبتة عند أ ، ب ، جـ، ؤ هى ٤ ، ٣ ، ٤ ، ٤ كجم كما هو موضح بالشكل.

يمكن وضع بيانات المسألة فى جدول على النحو التالى:

	عند أ	عند ب	عند جـ	عند ؤ
الكتلة	٤	٣	٤	٤
س	٣	٦	٠	٤,٥
ص	٦	٠	٠	٣

$$\therefore س_م = \frac{٤ \times ٣ + ٣ \times ٦ + ٤ \times ٠ + ٤ \times ٤,٥}{٤ + ٣ + ٤ + ٤} = ٣,٢ \text{ سم ،}$$

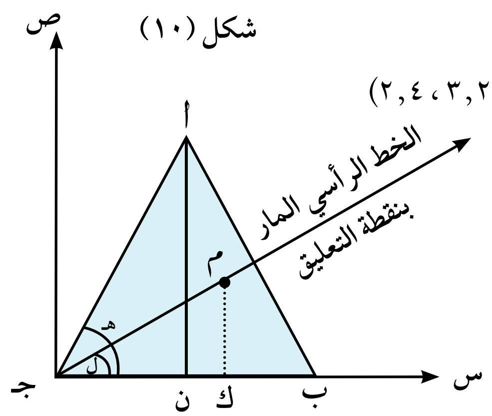
$$\therefore ص_م = \frac{٤ \times ٦ + ٠ + ٠ + ٤ \times ٣}{٤ + ٣ + ٤ + ٤} = ٢,٤ \text{ سم ،}$$

$\therefore$ م = (٣,٢ ، ٢,٤)

$\therefore$ بعد مركز الثقل م عن جـ وليكن م جـ

$$\therefore م\,جـ = \sqrt{(٣,٢)^٢ + (٢,٤)^٢} = ٤ \text{ سم}$$

شكل (١٠)



إيجاد قياس زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على الرأسى :

نرسم $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق (جـ) وباعتبار أن ل هى قياس زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ، ونرسم $\overline{\text{م ك}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$.

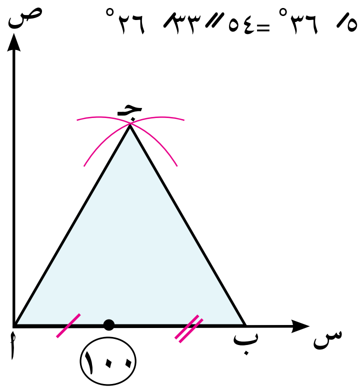
∴ ظا ل = $\frac{\text{م ك}}{\text{ك جـ}}$ = $\frac{٢,٤}{٣,٢}$ =٠,٧٥ ، ∴ ل = ١٢ً ٥٢َ ٣٦°

إيجاد قياس زاوية ميل $\overline{\text{جـ أ}}$ على الرأسى:

نحسب قياس زاوية أجـ ب ولتكن هـ حيث ظاهـ = $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن جـ}}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

∴ هـ = ٦ً ٢٦َ ٦٣°

∴ قياس زاوية ميل جـ أ على الرأسى جـ م = هـ - ل = ٦ً ٢٦َ ٦٣° - ١٢ً ٥٢َ ٣٦° =٥٤ً ٣٣َ ٢٦°



شكل (١١)

حاول أن تحل

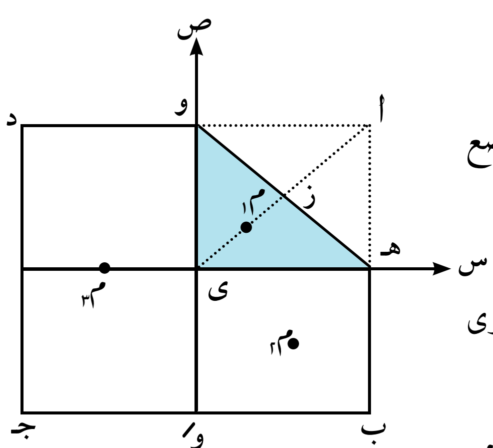
٥ فى شكل (١١) صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جم على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب جـ، طول ضلعه ١٢ سم ، أُلصقت كتلة ١٠٠ جم فى الصفيحة عند نقطة تثليث $\overline{\text{أ ب}}$ من جهة أ عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ص}}$.

مثال

إيجاد مركز ثقل صفيحة على شكل مربع

٦ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع أ ب جـ ء طول ضلعه ل ، فيها هـ ، و منتصفا الضلعين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ على الترتيب. ثُنى المثلث أهـ و حول الضلع $\overline{\text{هـ و}}$ بحيث انطبقت أ على مركزالمربع ى. عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد.

الحل



شكل (١٢)

باعتبار أن كتلة الصفيحة (٤ك) ، $و^/$ منتصف الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى الوضع الجديد.

وباعتبار أن الصفيحة مكونة من ثلاثة أجزاء كالآتى:

- الصفيحة المثلثة (المكونة من طبقتين) و هـ ى كتلتها تساوى ربع كتلة الصفيحة أى (ك) وليكن مركز ثقلها $م_1$
- الصفيحة المربعة هـ ب $و^/$ى وكتلتها (ك) ، وليكن مركز ثقلها $م_2$
- الصفيحة المستطيلة و $و^/$جـ ء وكتلتها (٢ك) ، وليكن مركز ثقلها $م_3$.

وبالتالى تصبح الصفيحة فى وضعها الجديد تكافئ مجموعة مكونة من ثلاث كتل.. كتلة (ك) عند $م_1$ ، وأخرى مساوية لها عند $م_2$ وكتلة (٢ك) عند $م_3$ كما هو مبين بشكل (١٢).

وباعتبار $\overleftarrow{\text{ى س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى ص}}$ اتجاهين متعامدين بحيث يمر المحور الأول بالنقطة هـ ، والمحور الثانى بالنقطة و كما هو مبين بنفس الشكل نفسه. وباعتبار النقطة ز منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ فإن:

$$\text{ز ى} = \frac{1}{2}\,\text{أ ى} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{أ هـ})^2 + (\text{هـ ى})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{ل}^2}{4} + \frac{\text{ل}^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{ل}^2}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{ل}$$

$$\therefore \text{ى م}_1 = \frac{2}{3}\,\text{ز ى} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{ل} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\text{ل}$$

$$\therefore \text{م}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\,\text{ل جتا } 45^\circ \text{ ، } \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\text{ل جا } 45^\circ\right) = \left(\frac{\text{ل}}{6} \text{ ، } \frac{\text{ل}}{6}\right)$$

ويقع مركز الثقل م_2 للصفيحة المربعة هـ ب وَ ى فى مركز المربع أى أن : $\text{م}_2 = \left(\frac{\text{ل}}{4} \text{ ، } \frac{-\text{ل}}{4}\right)$

ويقع مركز الثقل م_3 للصفيحة المستطيلة ووَ جـ د فى مركزها أيضًا أى أن : $\text{م}_3 = \left(\frac{-\text{ل}}{4} \text{ ، } 0\right)$

ولإيجاد مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد نستخدم المركبات الآتية :

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1\text{س}_1 + \text{ك}_2\text{س}_2 + \text{ك}_3\text{س}_3 + \ldots + \text{ك}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \ldots + \text{ك}_\text{ن}}$$

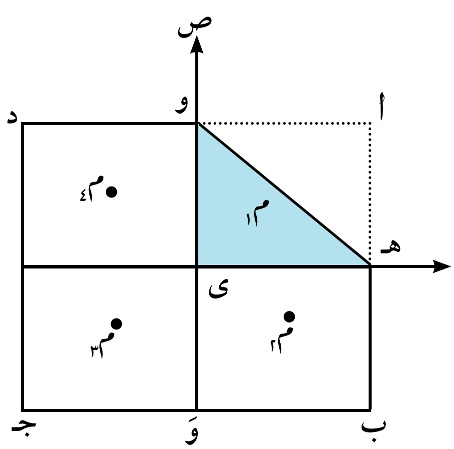
$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك} \times \frac{\text{ل}}{6} + \text{ك} \times \frac{\text{ل}}{4} + 2\,\text{ك} \times \left(-\frac{\text{ل}}{4}\right)}{\text{ك} + \text{ك} + 2\,\text{ك}} = -\frac{1}{48}\,\text{ل}$$

$$\therefore \text{ص}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1\text{ص}_1 + \text{ك}_2\text{ص}_2 + \text{ك}_3\text{ص}_3 + \ldots + \text{ك}_\text{ن}\text{ص}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \ldots + \text{ك}_\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ص}_\text{م} = \frac{\text{ك} \times \frac{\text{ل}}{6} + \text{ك} \times \left(-\frac{\text{ل}}{4}\right) + 2\,\text{ك} \times \text{صفر}}{\text{ك} + \text{ك} + 2\,\text{ك}} = -\frac{1}{48}\,\text{ل}$$

حل آخر :

فى شكل (١٣) ومن خلال جدول البيانات تحدد المركبات الآتية:



شكل (١٣)

	م_1	م_2	م_3	م_4
الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	$\frac{\text{ل}}{6}$	$\frac{\text{ل}}{4}$	$\frac{-6}{4}$	$\frac{-\text{ل}}{4}$
ص	$\frac{\text{ل}}{6}$	$\frac{-\text{ل}}{4}$	$\frac{-\text{ل}}{4}$	$\frac{\text{ل}}{4}$

$$\text{س}_{\text{م}} = \text{ك} \times \frac{\frac{\text{ل}}{٦} + \frac{\text{ل}}{٤} - \frac{\text{ل}}{٤} - \frac{\text{ل}}{٤}}{٤\,\text{ك}} = -\frac{١}{٤٨}\,\text{ل}$$

$$\text{ص}_{\text{م}} = \text{ك} \times \frac{\frac{\text{ل}}{٦} - \frac{\text{ل}}{٤} - \frac{\text{ل}}{٤} + \frac{\text{ل}}{٤}}{٤\,\text{ك}} = -\frac{١}{٤٨}\,\text{ل}$$

حاول أن تحل

٦) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ء فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم، هـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ بحيث أ هـ = ٦سم ، ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{\text{ب هـ}}$ حتى انطبق $\overline{\text{أ ب}}$ على $\overline{\text{ب جـ}}$ تمامًا عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$.

تمـــارين ٦ – ١

أولًا : ضع علامة (✓) أو علامة (✗) لكل عبارة مما يأتى:

١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتًا ولا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم.

٢) إذا عُلقت صفيحة غير منتظمة ومحدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقًا حرًّا فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث.

٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع على نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث.

٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند نقطة تقاطع قُطريهِ.

٦) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قُطريهِ.

٧) إذا عُلق جسم جاسئ تعليقًا حرا فإن الخط المستقيم الرأسى المار بمركز ثقل الجسم يمر بنقطة التعليق.

٨) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة المرسومة بينهما و يقسم طولها بنسبة تساوى النسبة بين كتلتيهما.

٩) إذا عُلقت صفيحة منتظمة السمك والكثافة ومحدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقًا حرًّا ، كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقيًّا.

١٠) إذا وضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازى أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطرى متوازى الأضلاع.

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

١١ أوجد مركز ثقل جسيمين ماديين وزناهما ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن والمسافة بينهما ٥ متر.

١٢ أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو التالى :

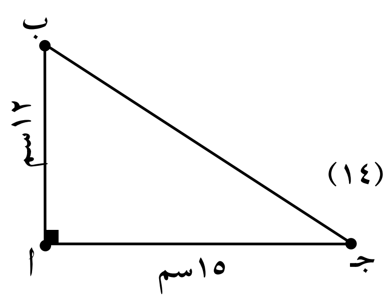
ك$_{١}$ = ١ كجم عند الموضع م$_{١}$ (٠ ، ٠) ، ك$_{٢}$ = ١ كجم عند الموضع م$_{٢}$ (٣ ، ٠) ، ك$_{٣}$ = ٢ كجم عند الموضع م$_{٣}$ (٣ ، ٤).

١٣ أوجد مركز ثقل التوزيع الآتى:

و$_{١}$ = ٣ نيوتن عند (٤ ، - ١) ، و$_{٢}$ = ٥ نيوتن عند (٠ ، ٣) ،

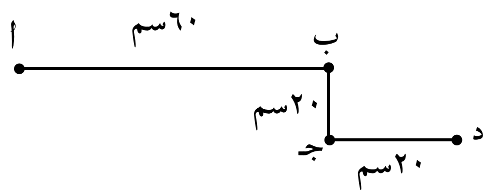
و$_{٣}$ = ٤ نيوتن عند (- ٢ ، ٣)

١٤ عين مركز ثقل كل من المجموعات الآتية حسب البيانات المعطاة فى الجدول:



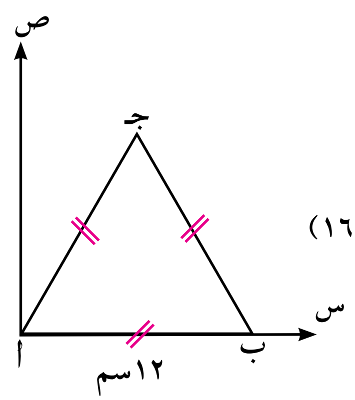
شكل (١٤)

الكتلة	٢٠ جم	٤٠ جم	٣٠ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند جـ



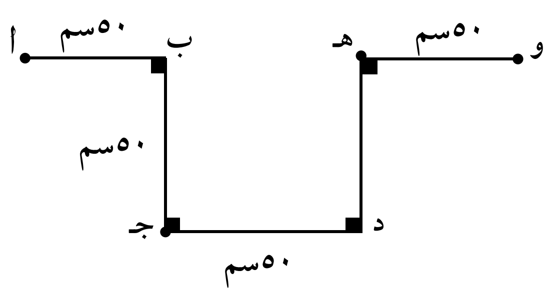
شكل (١٥)

الكتلة	ك	ك	ك	ك
الموضع	عند أ	عند جـ	عند هـ	عند و



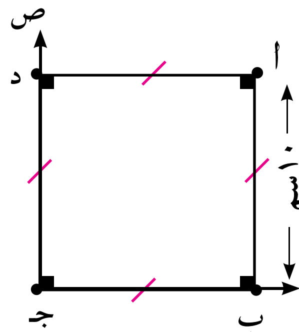
شكل (١٦)

الكتلة	٤ جم	٥ جم	٣ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند جـ



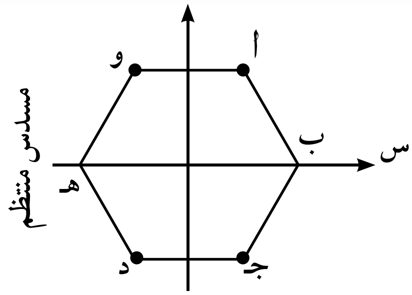
شكل (١٧)

الوزن	٨ ث جم	٣ ث جم	٢ ث جم	٢ ث جم
الموضع	عند أ	عند جـ	عند هـ	عند و



شكل (١٨)

الكتلة	٢٠ جم	٣٠ جم	١٠ جم	٤٠ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند جـ	عند ى



شكل (١٩)

الكتلة	١٠ جم	١٥ جم	٥ جم	٢٠ جم
الموضع	عند أ	عند جـ	عند ى	عند و

ثالثا: أجب عن الأسئلة الاتية

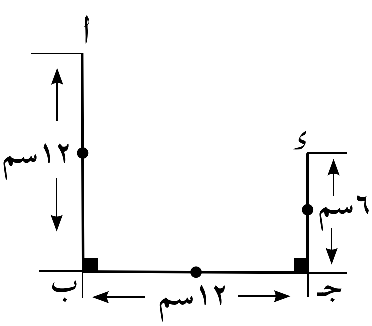
(١٥) أب قضيب منتظم ،طوله ٩٠ سم وكتلته ٥ كجم، جـ ، ى نقطتا تثليث من ناحية الطرف أ. وضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقط أ ، ب ، جـ ، ى على الترتيب عين بعد مركز ثقل المجموعة عن الطرف أ.

(١٦) أب قضيب غير منتظم طوله ٣٠ سم ، وزنه ٥٠٠ ث جم. ثُبت ثقلان مقدارهما ١٠٠ ، ٢٠٠ ث جم من الطرفين أ ، ب للقضيب على الترتيب فاصبح مركز ثقل المجموعة فى نقطة منتصف القضيب عين موضع مركز ثقل القضيب بالنسبة للطرف أ.

(١٧) أب جـ صفيحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها ، وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، جـ على الترتيب. برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م جـ}}$.

(١٨) عُلقت صفيحة مربعة منتظمة الكثافة وزنها ٤٠ ثقل جرام تعليقًا حرًّا من الرأس أ وثبت عند الرأس ب ثقل قدره ١٠ ثقل جرام. أوجد قياس زاوية ميل القطر $\overline{\text{أ جـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(١٩) شكل (٢٤) : أب سلك رفيع منتظم الكثافة ثنى عند ب ، جـ. أوجد بُعد مركز الثقل عن كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ثم أوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الرأسى إذا عُلق السلك من أ تعليقًا حرًّا.



شكل (٢٤)

(٢٠) أب جـ ى مربع طول ضلعه ل، رسم على $\overline{\text{ب جـ}}$ مثلث متساوى الساقين ب جـ هـ بحيث يقع الرأس هـ خارج المربع. أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السمك والكثافة المحدودة بالشكل الناتج علمًا بأن طول ضلع المربع يساوى ضعف طول ارتفاع المثلث.

(٢١) تتكون صفيحة منتظمة الكثافة من جزءين : مستطيل أب جـ ى فيه أب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٦ سم ومثلث متساوى الساقين جـ هـ ى فيه ى هـ = جـ هـ = ١٠ سم والرأس هـ خارج المستطيل. عين مركز ثقل الصفيحة.

(٢٢) أب جـ ى صفيحة منتظمة السمك والكثافة على شكل مستطيل فيه أب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، هـ نقطة تقاطع قُطريهِ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ى}}$ فصل المثلث أهـ ى وثبت فوق المثلث ب هـ جـ. أوجد مركز ثقل الصفيحة فى هذه الحالة. و إذا عُلقت الصفيحة تعليقًا حرًّا من نقطة جـ ، فأوجد ظل زاوية ميل $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ على الرأسي.

الوحدة السادسة
٦ - ٢

طريقة الكتلة السالبة

Negative Mass Method

سوف تتعلم

- طريقة الكتلة السالبة.
- مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل.

المصطلحات الأساسية

- كتلة سالبة *Negative Mass*
- تماثل *Symmetry*

الأدوات المستخدمة

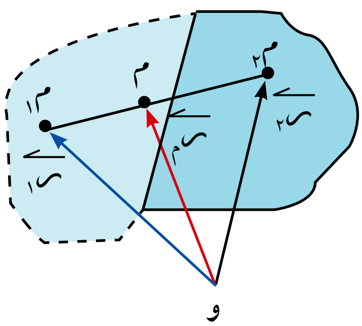
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تمهيد

سبق أن علمنا أن مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها هذا الجسم، ثم أوجدنا مركبات مركز الثقل فى نظام ثنائى الأبعاد فى نظام الإحداثيات المتعامدة، ثم علمنا بأن مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًا يقع على المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق. وسوف ندرس فى هذا الدرس طريقة الكتلة السالبة لحساب مركز ثقل جسم بعد انتزاع جزء منه، كما سنتعرف مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل.

طريقة الكتلة السالبة:

باعتبار أن جسمًا كتلته ك ومركز ثقله م ، فإذا اقتطعنا منه الجزء الأيسر كما فى (شكل ٢٠) وكان $م_١$ مركز ثقل الجزء المقتطع ، $م_٢$ مركز ثقل الجزء الأيمن المتبقى ، فإذا كان $\overleftarrow{ر}_١$ ، $\overleftarrow{ر}_٢$ ، $\overleftarrow{ر}_م$ متجهات موضع $م_١$ ، $م_٢$ ، م على الترتيب بالنسبة لنقطة الأصل (و) وباعتبار أن كتلة الجسم الأصلى (ك) والجزء المقتطع (باعتبار أن كتلته سالبة) هو $(-ك_١)$ فإن كتلة الجزء المتبقى $(ك - ك_١)$ لذلك فإن $\overleftarrow{ر}_م$ تعطى بالعلاقة :



شكل (٢٠)

$$\overleftarrow{ر}_م = \frac{ك_١ \overleftarrow{ر}_١ + (ك - ك_١)\overleftarrow{ر}_٢}{ك}$$

وبضرب الطرفين فى ك فإن:

$$ك \overleftarrow{ر}_م = ك_١ \overleftarrow{ر}_١ + (ك - ك_١) \overleftarrow{ر}_٢$$

أى أن : $(ك - ك_١) \overleftarrow{ر}_٢ = ك \overleftarrow{ر}_م - ك_١ \overleftarrow{ر}_١$

لذلك فإن : $\overleftarrow{ر}_٢ = \frac{ك \overleftarrow{ر}_م - ك_١ \overleftarrow{ر}_١}{ك - ك_١}$

بالتعويض عن $\overleftarrow{ر}_م$ ، $\overleftarrow{ر}_١$ بدلالة مركباتها الجبرية فى اتجاه المحاور المتعامدة المتعامدة $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$، نحصل على احداثيات الجزء المتبقى وهما :

$$س_م = \frac{ك\,س - ك_1\,س_1}{ك - ك_1} \quad ، \quad ص_م = \frac{ك\,ص - ك_1\,ص_1}{ك - ك_1}$$

حيث (س ، ص) مركز ثقل الجسم الأصلى وكتلته ك ، ($س_1$ ، $ص_1$) مركز ثقل الجسم المقتطع وكتلته $ك_1$
وهذه القاعدة تعنى أنه عند إيجاد مركز ثقل الجسم المتبقى ينظر اليه كما لوكان مكونًا من جسمين هما:

(١) الجسم الأصلى وكتلته ك

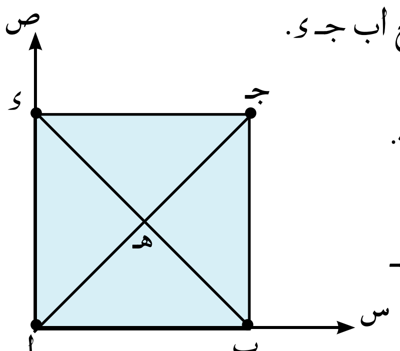
(٢) الجسم المتقطع باعتبار كتلته (- $ك_1$) لذلك سميت طريقة الكتلة السالبة.

مثال

① وضعت أربع كتل متساوية مقدار كل منها ١٠٠ جرام عند رؤوس المربع أب جـ ى.

أولًا : عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى $\overrightarrow{اب}$ ، $\overrightarrow{اى}$.

ثانيًا : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند الرأس جـ فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية.



شكل (٢١)

الحل

أولًا : بفرض أن طول ضلع المربع = ل سم وان نقطة هـ هى مركز المربع أب جـ ى ، أ هى نقطة الأصل كما فى شكل (٢١).

	عند أ	عند ب	عند جـ	عند د
الكتلة	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
س	٠	ل	ل	٠
ص	٠	٠	ل	ل

$$\because \; س_م = \frac{ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + ك_3 س_3 + ك_4 س_4}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + ك_4}$$

$$\therefore \; س_م = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ل + ١٠٠ \times ل + ١٠٠ \times ٠}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{ل}{٢} \text{ سم}$$

$$\because \; ص_م = \frac{ك_1 ص_1 + ك_2 ص_2 + ك_3 ص_3 + ك_4 ص_4}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + ك_4}$$

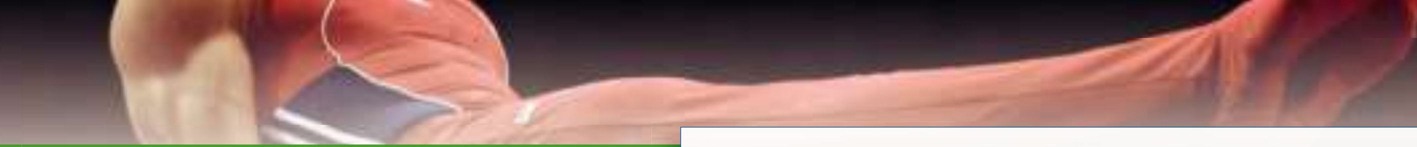
$$\therefore \; ص_م = \frac{١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ٠ + ١٠٠ \times ل + ١٠٠ \times ل}{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠} = \frac{ل}{٢} \text{ سم}$$

احداثى مركز ثقل المجموعة هى ($\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{ل}{٢}$) أى عند مركز المربع عند نقطة هـ

ثانيًا : بعد رفع الكتلة الموجودة عند جـ أى ١٠٠ جرام يكون :

مركز ثقل المجموعة الأصلية (حيث الكتلة ك = ٤٠٠ جرام) هو نقطة هـ = (س، ص) = ($\frac{ل}{٢}$، $\frac{ل}{٢}$)

مركز ثقل الكتلة المرفوعة $ك_1$ = ١٠٠ جرام عند الرأس جـ هى (ل ، ل)



مركز ثقل الجزء المتبقى ليكن $م_2 = (س_2 ، ص_2)$ يتعين من :

$$س_2 = \frac{ك\,س - ك_1\,س_1}{ك - ك_1} = \frac{٤٠٠ \times \frac{ل}{٢} - ١٠٠ \times ل}{٤٠٠ - ١٠٠} = \frac{ل}{٣} \text{ سم}$$

$$ص_2 = \frac{ك\,ص - ك_1\,ص_1}{ك - ك_1} = \frac{٤٠٠ \times \frac{ل}{٢} - ١٠٠ \times ل}{٤٠٠ - ١٠٠} = \frac{ل}{٣} \text{ سم}$$

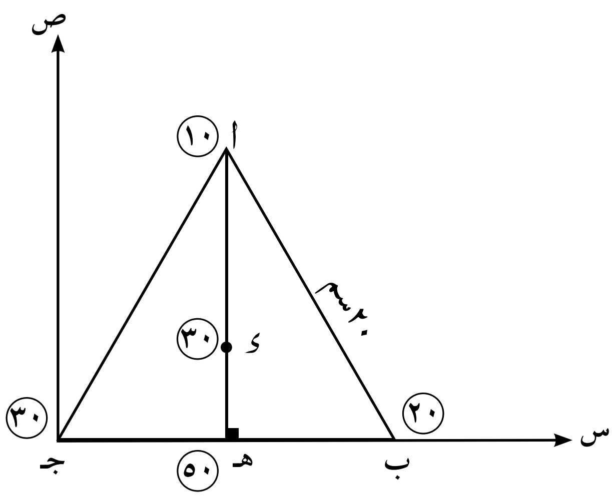
∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو $(\frac{ل}{٣} ، \frac{ل}{٣})$

؟ حاول أن تحل

(١) هل يمكنك حل مثال (١) بطرق أخرى عرفتها من الدرس السابق؟ وضح ذلك و اكتب هذه الطرق الأخرى إن وجدت.

مثال

(٢) فى شكل (٢٢) : أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ٢٠ سم ، ى نقطة تقاطع متوسطاته ، هـ نقطة منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ثبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٥٠ جم عند النقط أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ على الترتيب. عين مركز ثقل هذه المجموعة. و إذا رفعت الكتلة المثبتة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للرأس جـ.



شكل (٢٢)

الحل

تعيين مركز ثقل المجموعة:

نأخذ $\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ اتجاهين متعامدين باعتبار أن جـ نقطة الأصل.

أ هـ = ٢٠ جا ٦٠° = $١٠\sqrt{٣}$ ، ى هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$

بتكوين جدول الإحداثيات الآتى:

	عند جـ	عند هـ	عند ب	عند أ	عند ى
الكتلة	٣٠	٥٠	٢٠	١٠	٣٠
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	$١٠\sqrt{٣}$	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$

$$∴ س_م = \frac{١٠ \times ٣٠ + ١٠ \times ١٠ + ٢٠ \times ٢٠ + ١٠ \times ٥٠}{٣٠ + ١٠ + ٢٠ + ٥٠ + ٣٠} = \frac{٦٥}{٧}$$

$$ص_م = \frac{\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} \times ٣٠ + ١٠\sqrt{٣} \times ١٠}{٣٠ + ١٠ + ٢٠ + ٥٠ + ٣٠} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$$

أى أن احداثيى مركز الثقل هما $(\frac{٦٥}{٧} ، \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧})$ من نقطة جـ.

عند رفع الكتلة الموجودة عند ب :

$$\therefore س_٢ = \frac{ك\, س_م - ك_١\, س_١}{ك - ك_١} = \frac{١٤٠ \times \frac{٦٥}{٧} - ٢٠ \times ٢٠}{١٤٠ - ٢٠} = \frac{١٥}{٢}$$

$$ص_٢ = \frac{ك\, ص_م - ك_١\, ص_١}{ك - ك_١} = \frac{١٤٠ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧} - ٢٠ \times ٠}{١٤٠ - ٢٠} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$$

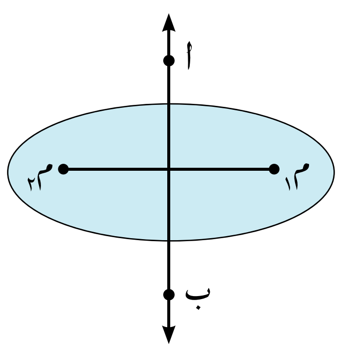
∴ مركز الثقل الجديد بعد رفع الكتلة ٢٠ عند ب هو $\left(\frac{١٥}{٢} ،\ \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}\right)$

٩ حاول أن تحل

(٢) وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ لمربع أب جـ ء حيث هـ ملتقى قُطريهِ وطول ضلع المربع ١٢ سم. عين مركز ثقل المجموعة، و إذا رُفعت الكتلة الموجودة عند ب فعين مركز ثقلَ المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أء}$.

مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل *Center of gravity of some symmetric bodies*

تماثل صفيحة هندسية رقيقة منتظمة الكثافة باعتبار $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للصفيحة المنتظمة لذا فهو يُقسِّم الصفيحة إلى جزأين متماثلين تمامًا من حيث الشكل وبالتالى من حيث الكتلة كما فى شكل (٢٣).

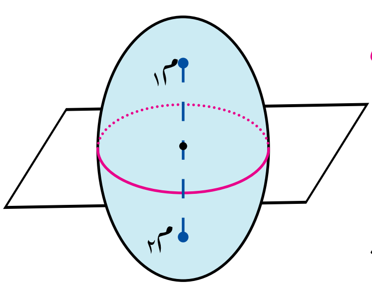


شكل (٢٣)

وباعتبار أن م١ ، م٢ مركزى ثقل هذين الجزأين فمن الواضح أن محور التماثل يقطع القطعة $\overline{م_١م_٢}$ على التعامد من منتصفها.

وحيث أن مركز ثقل الصفيحة هو نفسه مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين عند م١ ، م٢ ، فإنه يقع عند نقطة منتصف $\overline{م_١م_٢}$ ، أى على محور التماثل.من ذلك نستطيع أن نستنتج الآتى:

إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة، فإن مركز ثقلها يقع على هذا المحور.



شكل (٢٤)

بعض المجسمات الهندسية المنتظمة الكثافة

تماثل المجسمات الهندسية يماثل تمامًا تماثل الأشكال الهندسية بعد الاستعاضة عن محور التماثل بمستوى التماثل، وشكل (٢٤) يوضح ذلك.

لذلك نستطيع أن نستنتج أنه:

إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة، وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

من التماثل السابق للشكل الهندسى المنتظم والمجسم الهندسى المنتظم يمكننا تحديد بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل على النحو التالى :

١ - مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.

٢ - مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع فى مركز الدائرة.

٣ -مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

٤ -مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

٥ -مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.

٦ -مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة، يقع عند نقطة منتصف محورها.

٧ -مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

٨ - مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه، باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

مثال

③ لوح رقيق دائرى منتظم مساحته ٢٠٠ سم^2 ، ثُقب ثقبًا دائريًا مساحته ٤٠ سم^2 ، فإذا كان بُعد مركز الثقب عن مركز اللوح ٤ سم. عين مركز ثقل الجزء المتبقى من اللوح.

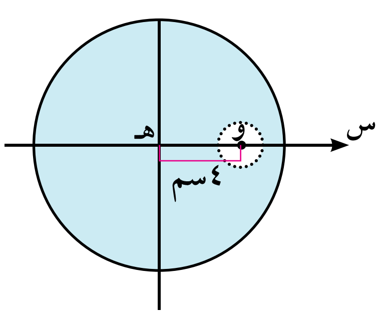
الحل

	الكتلة	بعد مركز الثقل عن هـ
اللوح	ك	٠
الثقب	$-\frac{1}{5}$ ك	٤
الجزء المتبقى	$\frac{4}{5}$ ك	س

بفرض أن كتلة اللوح ك

∵ مساحة اللوح = ٢٠٠ سم^2 ،   مساحة سطح الثقب = ٤٠ سم^2.

∴ كتلة الثقب = $-\frac{1}{5}$ ك.



شكل (٢٥)

$$\therefore س_2 = \frac{ك\ س_م - ك_1\ س_1}{ك - ك_1}$$

$$= \frac{ك \times ٠ - \frac{1}{5}ك \times ٤}{ك - \frac{1}{5}ك} = \frac{-٤ك}{٥ك - ك} = -١$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى يبعد عن هـ بمقدار ١ سم فى اتجاه $\overleftarrow{وهـ}$.

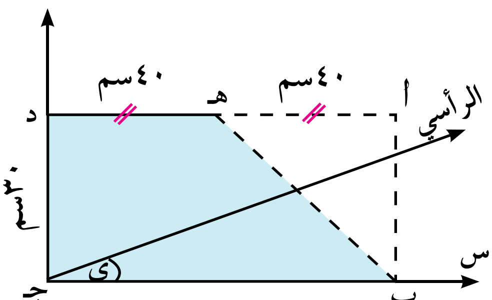
٩ حاول أن تحل

٣) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٦ وحدات طول، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (-١ ، -٣) وطول نصف قطره وحدة طول واحدة ومركز الآخر (١ ، ٢) وطول نصف قطره ٣ وحدات طول. أوجد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص الأصلى.

مثال

٤) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أ ب جـ ﺀ الذى فيه أ ب = ٣٠ سم، ب جـ = ٨٠ سم، قُطع منها المثلث أ ب هـ حيث هـ منتصف $\overline{ﺀ أ}$ ، ثم علق الجزء الباقى تعليقًا حرًّا من الرأس جـ. عين قياس زاوية ميل الضلع $\overline{جـ ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان. و إذا كانت كتلة الصفيحة هى ك فما الكتلة التى يجب وضعها عند الرأس ﺀ حتى يميل $\overline{ب جـ}$ بزاوية ٤٥° مع الرأسى فى وضع التوازن؟

الحل



شكل (٢٦)

أولًا : إيجاد قياس زاوية ميل الضلع $\overline{جـ ب}$ على الرأسى:

$$\frac{\text{مساحة سطح المثلث أ ب هـ}}{\text{مساحة سطح المربع أ ب جـ ﺀ}} = \frac{\frac{1}{2}\times ٣٠ \times ٤٠}{٣٠ \times ٨٠} = \frac{1}{4}$$

∴ كتلة المستطيل أ ب جـ ﺀ = ك، كتلة △ أ ب هـ = $-\frac{1}{4}$ ك

ننشئ جدول الإحداثيات كالآتى:

	المستطيل	المثلث
الكتلة	ك	$-\frac{1}{4}$ك
س	٤٠	$\frac{٨٠ + ٨٠ + ٤٠}{٣} = \frac{٢٠٠}{٣}$
ص	١٥	$\frac{٠ + ٣٠ + ٣٠}{٣} = ٢٠$

$$\therefore س_٢ = \frac{ك \times ٤٠ - \frac{1}{4}ك \times \frac{٢٠٠}{٣}}{ك - \frac{1}{4}ك} = \frac{٢٨٠}{٩}$$

$$ص_٢ = \frac{ك \times ١٥ - \frac{ك}{4} \times ٢٠}{ك - \frac{1}{4}ك} = \frac{٤٠}{٣}$$

$$\text{ظا ى} = \frac{ص}{س} = \frac{٤٠}{٣} \div \frac{٢٨٠}{٩} = \frac{٣}{٧}$$

∴ ى = ٢٣°٨٢

ثانيًا : عند تعليق ثقل مقداره و عند ﺀ حتى يصبح ميل $\overline{ب جـ}$ على الرأسى بزاوية ٤٥° فى وضع التوازن.

$$\because \text{ظاى} = \frac{ص}{س} \qquad \therefore \text{ظا } ٤٥° = \frac{ص}{س}$$

$$\therefore ١ = \frac{ص}{س} \qquad \therefore ص = س$$

	المستطيل	المثلث	الثقل عند و
الكتلة	ك	$-\frac{1}{4}$ ك	و
س	٤٠	$\frac{200}{3}$	٠
ص	١٥	٢٠	٣٠

∵ س$_م$ = ص$_م$

$$\therefore \frac{\text{٤٠ك} - \frac{200}{12}\text{ك}}{\frac{3}{4}\text{ك} + \text{و}} = \frac{\text{١٥ك} - \text{٥ ك} + \text{٣٠و}}{\frac{3}{4}\text{ك} + \text{و}}$$

$\therefore \frac{40}{3}$ ك = ٣٠ و   ∴ و = $\frac{4}{9}$ ك.

٩ حاول أن تحل

(٤) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أ ب جـ ى الذى فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، قُطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقًا حرًّا من الرأس جـ فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على الرأسى.

تمـــارين ٦ – ٢

أولًا : أكمل ما يأتى:

١) تسمى النقطة الثابتة التى يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض بـ ....

٢) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًّا على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

٣) مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند ....

٤) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى الأضلاع يقع عند ....

٥) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى...............................

٦) إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ، فإن مركز ثقلها يقع على...............................

٧) إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى...............................

٨) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى...............................

٩) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى...............................

١٠) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى...............................

١١) مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة...............................

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

١٢) وضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، جـ ، ى لمربع طول ضلعه ٨٠ سم ثم أضيفت كتلة خامسة مساوية لها عند مركزه. عين مركز ثقل المجموعة ، و إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أ عين مركز ثقل المجموعة باستخدام طريقة الكتلة السالبة.

١٣) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ٣٠ سم. اقتطع منها جزء على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ١٠ سم و يبعد مركزه عن مركز الصفيحة ٢٠ سم. أوجد مركز ثقل الجزء المتبقى.

١٤) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٢ سم ، م مركز ثقله. اقتطع منه المثلث م ب جـ. عين مركز ثقل الجزء المتبقى.

(١٥) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ ى}}$ هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم. رُسم مستقيم موازٍ للقاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ و يمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على $\overline{\text{أ ى}}$ ويبعد ٧ سم عن نقطة ى.

(١٦) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم أ ب جـ ى هـ و. عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس. و إذا عُلق السلك تعليقًا حرًّا من طرفه أ ، فعين قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(١٧) صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل أ ب جـ ى حيث أ ب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ى}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ى جـ}}$ ، فإذا فُصل المثلث هـ ى ن من الصفيحة وعُلق الجزء الباقى تعليقًا حرًّا من النقطة ب فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{\text{ب جـ}}$ مع الرأسى.

(١٨) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع أ ب جـ ى طول ضلعه ٣٦ سم، تقاطعَ قُطراه فى م ونصفت $\overline{\text{ى م}}$ فى نقطة هـ وفُصل منها المثلث هـ أ ى. عين مركز ثقل الجزء الباقى من الصفيحة. و إذا عُلقت الصفيحة تعليقًا خالصًا من نقطة أ حتى اتزنت فى مستوى رأسى فأوجد ميل $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ على الرأسى.

(١٩) صفيحة منتظمة على شكل مربع أ ب جـ ى طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائرى طول نصف قطره ٢ سم و يبعد مركزه ٣ سم عن كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$. عين بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من $\overline{\text{ى جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$.

(٢٠) صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع أ ب جـ ى الذى طول ضلعه ٤٠ سم ، ثقبت ثقباً دائريا مساحته ١٠٠ سم^{٢} ومركزه عند نقطة على القطر $\overline{\text{ب ى}}$ وتقسمه من الداخل بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ، ثم عُلقت تعليقًا حرًّا من الرأس أ. عين قياس زاوية ميل الضلع $\overline{\text{أ ب}}$ على الراسى فى وضع الاتزان.

ملخص الوحدة

مُلخَّصُ الوَحْدَة

١) **مركز ثقل جسم جاسئ :** هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، ولا يتغير موضعها بالنسبة للجسم ، مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

٢) **ملاحظات على مركز الثقل :**

مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونه له.

الجسم المنتظم الكثافة : هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

٣) **متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل:**

إذا كانت ك_1 ، ك_2 ، ك_3 ،....... كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_2$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_3$ ،....... ، $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{ن}}$ متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل، فإن متجه الموضع $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوبًا إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة:

$$\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}} = \frac{\text{و}_1\,\overleftarrow{\text{ر}}_1 + \text{و}_2\,\overleftarrow{\text{ر}}_2 + \text{و}_3\,\overleftarrow{\text{ر}}_3 + \dots + \text{و}_{\text{ن}}\,\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{ن}}}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3 + \dots\dots + \text{و}_{\text{ن}}}$$

ويُعبر عنها بدلالة مركبات مركز الثقل فى نظام الإحداثيات الديكارتية المتعامدة كالآتى:

$$\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1\text{س}_1 + \text{ك}_2\text{س}_2 + \text{ك}_3\text{س}_3 + \dots\dots + \text{ك}_{\text{ن}}\text{س}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \dots\dots + \text{ك}_{\text{ن}}}$$

$$\text{ص}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1\text{ص}_1 + \text{ك}_2\text{ص}_2 + \text{ك}_3\text{ص}_3 + \dots\dots + \text{ك}_{\text{ن}}\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \dots\dots + \text{ك}_{\text{ن}}} ،$$

٤) **التعليق الحر للجسم الجاسئ :** يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًّا على الخط المستقيم الرأسى المار بنقط التعليق.

٥) **مركز ثقل قضيب رفيع منتظم :** مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

٦) **مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع :** مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى الأضلاع يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين).

٧) **مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث:** مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث.

٨) **طريقة الكتلة السالبة:** وباعتبار أن كتلة الجسم الأصلى (ك) والجزء المقتطع (باعتبار أن كتلته سالبة) هو $(-\text{ك}_1)$ فإن كتلة الجزء المتبقى $(\text{ك} - \text{ك}_1)$ لذلك فإن $\overleftarrow{\text{ر}}_2$ تُعطى بالعلاقة:

$$\overleftarrow{\text{ر}}_2 = \frac{\text{ك}\,\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}} - \text{ك}_1\,\overleftarrow{\text{ر}}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

ويمكن كتابة العلاقة الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاه محاور الإحداثيات المتعامدة: $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ فنحصل على الآتى:

$$\text{س}_2 = \frac{\text{ك س}_م - \text{ك}_1 \text{س}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1} \quad ، \quad \text{ص}_2 = \frac{\text{ك ص}_م - \text{ك}_1 \text{ص}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

٩) تماثل صفيحة هندسية رقيقة منظمة الكثافة : إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ، فإن مركز ثقلها يقع على خط هذا المحور.

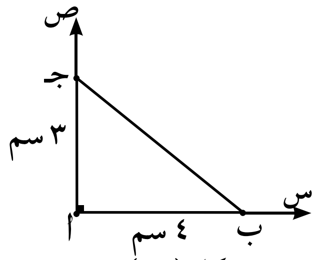
١٠) تماثل مجسم هندسى منظم الكثافة: إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

١١) بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل :

- مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.
- مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة منتصف محورها.
- مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمته منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.
- مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه، باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

تمارين عامة

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:



شكل (٣٥)

(١) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية قيمة كل واحدة ٢ كجم موضوعة عند رؤوس مثلث قائم الزاوية طول ضلعى القائمة ٣ سم ، ٤ سم هو:

أ $(١ ، \frac{٤}{٣})$ ب $(٢ ، \frac{٣}{٢})$

جـ $(\frac{٤}{٣} ، ١)$ د $(\frac{٣}{٢} ، ٢)$

(٢) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسب:

أ طردية. ب عكسية. جـ عشوائية. د ثابتة.

(٣) مركز ثقل النظام التالى : $ك_١$ = ١ كجم عند (٢ ، ٣) ، $ك_٢$ = ٢ كجم عند (- ٢ ، ١) $ك_٣$ = ٣ كجم عند (٠ ، ١) هو:

أ $(-\frac{١}{٣} ، \frac{٤}{٣})$ ب $(\frac{٧}{٦} ، \frac{٤}{٣})$ جـ $(\frac{-١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ د (٠ ، ١)

(٤) مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٦ ، ٩ ث كجم بينهما مسافة ١٠ أمتار، يبعد عن الكتلة الأولى مسافة:

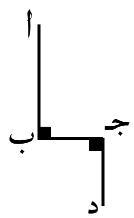
أ ٣ متر ب ٤ متر جـ ٥ متر د ٦ متر

(٥) بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى :.

أ ٢ $\sqrt{٣}$ سم ب ٤ $\sqrt{٣}$ سم جـ ٦سم د ٦ $\sqrt{٣}$ سم

(٦) إذا عُلقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرفها تقسمه بنسبة ١ : ٢ فإن زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى تساوى :

أ ٢٢,٥° ب ٣٠° جـ ٤٥° د ٦٠°



شكل (٣٦)

(٧) فى الشكل المقابل : أب جـ ى سلك طوله ٣٢ سم فيه أب = ٢ب جـ = ٢ جـ ى = ١٦ سم فإن بعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ على الترتيب هو:

أ (٣ ،٣) ب (٤ ،٤) جـ (٣ ،٥) د (٤ ،٨)

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٤سم . وضعت ثلاث كتل متساوية، مقدار كل منها ك عند ب ، نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ ، نقطة منتصف $\overline{أ جـ}$ أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث.

(٩) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ب جـ = ٩ سم. إذا فصل المثلث أ ب م حيث م مركز ثقل الصفيحة وعلق الجزء الباقى تعليقًا حرًّا من النقطة ب فأوجد ظل زاوية ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ على الرأسى فى وضع التوازن.

(١٠) أ ب قضيب منتظم طوله ٢٤ سم وكتلته ٢ كجم. ثُبتت كتلة مقدارها ٢ كجم عند نقطة أ وثبتت كتلة أخرى مقدارها ٣ كجم عند نقطة جـ واقعة على القضيب وتبعد ٨ سم عن نقطة ب. أوجد بعد مركز ثقل المجموعة عن ب.

(١١) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٤ سم ثُبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ جرام عند أ، ب ، جـ ، ى على الترتيب، كما ثُبتت كتلة مقدارها ١٠ جرام عند منتصف $\overline{\text{أ ب}}$. عين بعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$.

(١٢) سلك رفيع منتظم السمك والكثافة ثنى على شكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٤ سم. أوجد بعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ثم أوجد بعده عن ب.

(١٣) سلك رفيع منتظم السمك والكثافة طوله ٤٠ سم ثنى على شكل شبه منحرف أ ب جـ ى فيه أ ب = ١٦ سم ، جـ ى = ٨ سم ، ى أ = ٦ سم ، ق(ى أ ب) = ق(∠ جـ ى أ) = ٩٠°. أوجد بُعد مركز ثقل هذا السلك عن الضلعين $\overline{\text{أ ى}}$ $\overline{\text{أ ب}}$ وإذا عُلق السلك تعليقًا حرًا من أ فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{\text{أ ب}}$ مع الراسى فى وضع الاتزان.

(١٤) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل شبه منحرف أ ب جـ ى فيه ق(∠ أ) = ق(∠ ى) = ٩٠°، جـ ى = ٤٠ سم ، أ ى = ٦٠ سم ، أ ب = ١٢٠ سم. عين بعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من $\overline{\text{أ ى}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$.

(١٥) سلك منتظم السمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٦٠٠ جرام، ثُنى على شكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٣٠ سم ، إذا ثُبتت كتلة ك جرام عند الرأس أ ، ثم عُلق السلك تعليقًا حرًّا من الرأس ب فاتزن عندما كانت $\overline{\text{أ جـ}}$ أفقية فأوجد ك.

(١٦) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٢٤ سم، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (- ٢ ، - ١٢) وطول نصف قطره ٤ سم ومركز الآخر (٦ ، ١٠) وطول نصف قطره ١٢ سم. عين مركز ثقل الجزء الباقى من القرص.

(١٧) أ ب جـ ى صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠سم ، تقاطع قطراه فى م ، قطع منها المثلث ب جـ م ثم عُلِّق الجزء الباقى تعليقًا حرًّا من الرأس جـ. عين ظل زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان

(١٨) أ ب جـ ى صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم وكتلتها ٤٠ جم. النقطتان ل ، م منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ى}}$ على الترتيب. قطع المثلث أ ل م ثم ثُبتت عند كل من جـ ، ى كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع وثبت عند ب كتلة تساوى ضعف كتلة المثلث المقطوع ، فإذا عُلقت المجموعة تعليقًا حرًّا من النقطة جـ. أوجد ظل زاوية ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(١٩) أ ب جـ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٢٠ سم وكانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ على الترتيب. قطع المثلث جـ ص ع وطبق على المثلث ص ب س فإذا عُلقت المجموعة تعليقًا حرًّا من النقطة ب. أوجد ظل زاوية ميل $\overline{ب جـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(٢٠) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل المثلث أ ب جـ المتساوى الساقين حيث أ ب = أ جـ = ٢٦ سم، ب جـ = ٢٠ سم. رسم $\overleftarrow{أ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ى ، فإذا كانت هـ منتصف $\overline{أ ى}$ وفصل المثلث هـ ب جـ. أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن النقطة هـ.

(٢١) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مربع أ ب جـ ى طول ضلعه ٤٨ سم ، م نقطة تقاطع قطريه. قُطع المثلث جـ م ى ثم لصق على المثلث جـ م ب بحيث انطبق $\overline{م ى}$ على $\overline{م ب}$. أوجد بعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من $\overline{ب أ}$ ، $\overline{ب جـ}$.

(٢٢) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ى مركزه م حيث أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم. أخذت النقطتان هـ ، و على $\overline{أ ب}$ حيث أ هـ = ب و = ٣ سم ، إذا قُطع المثلث م هـ و فأوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من $\overline{جـ ى}$ ، $\overline{أ ى}$. وإذا عُلق هذا الجزء تعليقًا حرًّا من ى فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ى أ}$ مع الرأسى.

(٢٣) ثبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٣٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، جـ ، ى ، هـ ، و على الترتيب لمسدس منتظم طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد بعد مركز ثقل هذه المجموعة عن مركز المسدس.

(٢٤) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ى الذى فيه أ ب = ٢٥سم، ب جـ = ١٦سم. فرضت نقطة هـ ∈ $\overline{ب جـ}$، و ∈ $\overline{ب أ}$ بحيث ب هـ = ١٠سم ثم فصل المثلث ب هـ و ووضعت الصفيحة فى مستو رأسى بحيث انطبق حرفها $\overline{جـ هـ}$ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول (هـ) . أوجد طول $\overline{ب و}$.

الحركة فى خط مستقيم

Rectilinear Motion

ثانيا
الديناميكا

الوحدة
١

مقدمة الوحدة

فى هذه الوحدة سوف ندرس الحركة الخطية لجسيم متحرك وتحليل هذه الحركة ودراسة الموضع والإزاحة ومتجه السرعة وعجلة الحركة للجسيم، ويتم تحديدها عند أى لحظة خلال حركة الجسيم على الخط المستقيم سواء كانت الحركة منتظمة أو منتظمة التغير مستخدمين فى ذلك طرق التكامل والتفاضل لاستنتاج عناصر الدراسة وسيتم تحليل الحركة الخطية بيانيًّا من خلال منحنيات الحركة، واستخدام ذلك فى حل المسائل المختلفة، ولن تقتصر الدراسة على الجسيم المتحرك فقط ولكن سيؤخذ فى الاعتبار الأجسام الأخرى المختلفة كالسيارات والقطارات والطائرات وغير ذلك.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستخدم للتعبير عن السرعةإذا كانت الإزاحة دالة فى الزمن ($ع = \frac{ءف}{ءن}$)
- يستخدم للتعبير عن العجلة إذا كانت السرعة دالة فى الزمن($جـ = \frac{ءع}{ءن}$)
- يعبر عن العجلة كدالة فى الإزاحة إذا كانت السرعة دالة فى الإزاحة ($جـ = ع \frac{ءع}{ءف}$)
- إذا كانت كل من ف . ع. جـ دوالًا فى الزمن فإن:
  - $ع = \frac{ءف}{ءن} \Leftrightarrow \int ع\, ءن = \int ءف \quad \therefore ف = \int ع\, ءن$
  - $جـ = \frac{ءع}{ءن} \Leftrightarrow \int جـ\, ءن = \int ءع \quad \therefore ع = \int جـ\, ءن$
- إذا كانت جـ دالة فى الإزاحة فإن:
  - $جـ = ع \frac{ءع}{ءف} \Leftrightarrow \int جـ\, ءف = \int ع\, ءع$

المصطلحات الأساسية

- الحركة فى خط مستقيم *Rectilinear Motion*
- موضع *Position*
- إزاحة *Displacement*
- مسافة *Distance*
- متجه السرعة المتوسطة *Average Velocity*
- السرعة المتوسطة *Average Speed*
- متجه السرعة *Velocity*
- السرعة *Speed*
- العجلة المتوسطة *Average Acceleration*
- العجلة *Acceleration*

دروس الوحدة

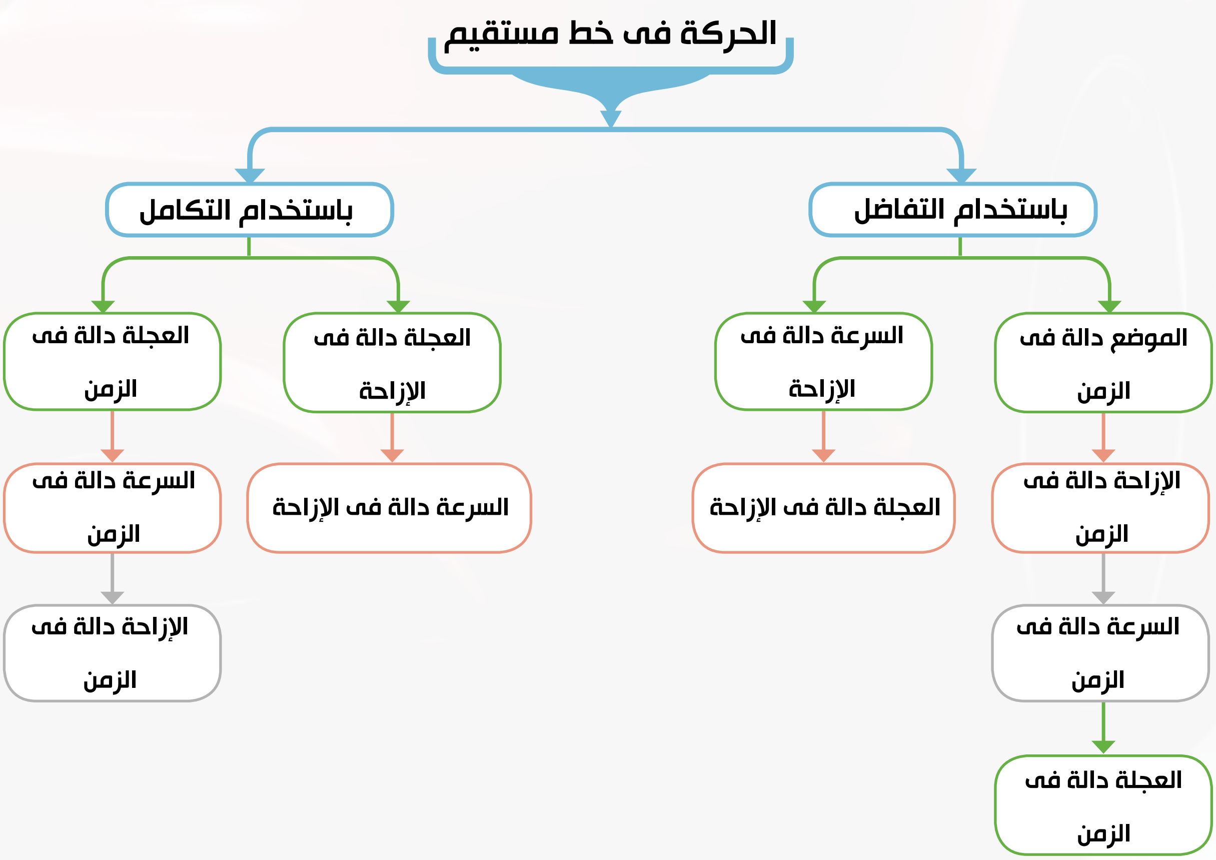
(١ - ١): تفاضل الدوال المتجهة.

(١ - ٢): تكامل الدوال المتجهة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب.

مخطط تنظيمى للوحدة



مطابع الهدايه

تفاضل الدوال المتجهة

Differentiation of vector functions

الوحدة الأولى

١ - ١

سوف تتعلم

- إذا كانت $\overleftarrow{\text{ف}}$ دالة فى الزمن فإن:
- $\overleftarrow{\text{ع}} = \dfrac{\text{د}\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{د ن}}$
- إذا كانت $\overleftarrow{\text{ع}}$ دالة فى الزمن فإن:

$\overleftarrow{\text{ج}} = \dfrac{\text{د}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{د ن}}$

- إذا كانت $\overleftarrow{\text{ع}}$ دالة فى الإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ فإن $\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{ع}} \dfrac{\text{د ع}}{\text{د ف}}$

المصطلحات الأساسية

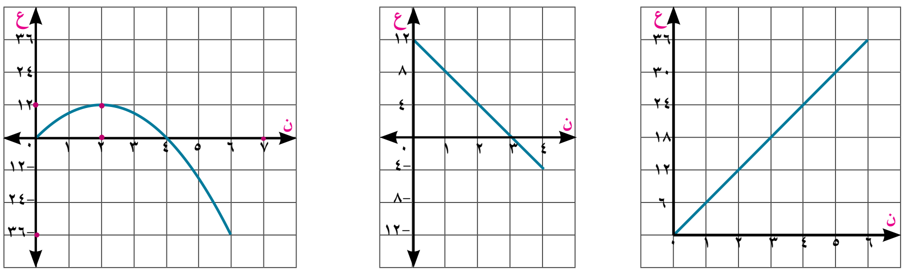
- الحركة فى خط مستقيم *Rectilinear motion*
- موضع الجسيم *Position of the particle*
- الإزاحة *Displacement*
- المسافة *Distance*
- السرعة *Speed*
- متجه السرعة *Velocity*
- متجه السرعة المتوسطة *Average velocity*
- متجه السرعة اللحظية *Instantaneous velocity*
- العجلة المتوسطة *Average acceleration*
- العجلة *Accelertion*

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

فكر و ناقش

كل من الأشكال البيانية الآتية تمثل منحنى السرعة- الزمن لجسيم يتحرك فى خط مستقيم.



بعد دراسة هذه المنحنيات،

١) هل يمكنك تعيين سرعة الجسيم ع عند بداية الحركة ثم بعد ٢ ثانية، بعد ٤ ثوان من بدء الحركة؟

٢) كيف يمكنك حساب إزاحة الجسيم عند ن = ٢، ن = ٤؟

٣) هل يمكن تعيين عجلة الحركة للجسيم المتحرك؟

تعلم

١- الحركة فى خط مستقيم: *Rectilinear motion*

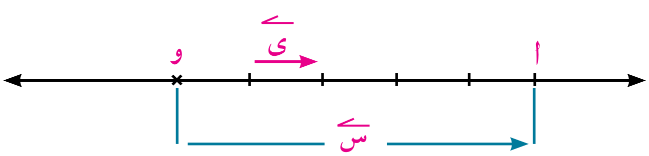
إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم فيقال إنه يتحرك حركة خطية.

٢- موضع الجسيم: *Position of the particle*

عندما يتحرك جسيم حركة خطية فإنه عند أى لحظة ن سيشغل موضع معين على الخط المستقيم ، ولتعيين الموضع $\overleftarrow{\text{س}}$ لجسيم متحرك عند أى لحظة زمنية ن ، نختار نقطة ثابتة "و" على الخط المستقيم كنقطة أصل ونحدد اتجاه موجب على طول الخط.

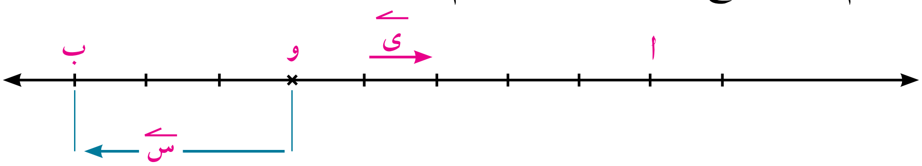
على سبيل المثال:

عندما يكون الجسيم عند الموضع (أ) على الخط المستقيم فإن $\overleftarrow{\text{س}} = ٥ \; \overleftarrow{\text{ى}}$



حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ،

بينما إذا كان الجسيم عند الموضع ب على الخط المستقيم فإن $\overleftarrow{\text{س}} = -٣ \overleftarrow{\text{ى}}$



لاحظ أن موضع الجسيم كمية متجهة ويمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن ن
أى أن $\overleftarrow{\text{س}}$ (ن) ويقاس معيار $\overleftarrow{\text{س}}$ فى النظام الدولى للوحدات بالمتر.

٣- الإزاحة: *Displacement*

تعرف إزاحة الجسيم $\overleftarrow{\text{ف}}$ بأنها التغير فى موضعه.

إذا تحرك الجسيم من الموضع ا إلى الموضع اَ على الخط المستقيم **فإن:**

الإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}} = \triangle \overleftarrow{\text{س}}$ حيث $\triangle \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{سَ}} - \overleftarrow{\text{س}_\circ}$ ، فى هذه الحالة △ س تكون موجبة حيث أن موضع الجسيم النهائى اَ على يمين الموضع الابتدائى للجسيم ا ، وإذا كان الموضع النهائى للجسيم على يسار الموضع الابتدائى للجسيم فإن $\triangle \overleftarrow{\text{س}}$ ستكون سالبة.

وعلى وجه العموم $\overleftarrow{\text{ف}}$ (ن) = $\overleftarrow{\text{س}}$ (ن) - $\overleftarrow{\text{س}}$ (٠)

- إزاحة الجسيم $\overleftarrow{\text{ف}}$ كمية متجهة ويمكن التعبير عنها كدالة فى الزمن ن **أى** $\overleftarrow{\text{ف}}$ (ن)، والإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ تتميز عن المسافة المقطوعة بواسطة الجسيم، وعلى وجه التحديد المسافة كمية قياسية موجبة تمثل طول المسار الكلى المقطوع بواسطة الجسيم.
- يمكن استخدام الرموز س ، ف للتعبير عن القياس الجبرى لمتجه الموضع $\overleftarrow{\text{س}}$ وللإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ على الترتيب
- إذا كان موضع الجسم عند بداية قياس الزمن عند نقطة الأصل فإن $\overleftarrow{\text{س}_\circ} = \overleftarrow{\bullet}$ ويكون $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{س}}$

٤- متجه السرعة: *Velocity*

إذا كانت $\overleftarrow{\text{ف}} = \triangle \overleftarrow{\text{س}}$ هى إزاحة الجسيم خلال فترة زمنية △ن فإن متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ يساوى خارج قسمة الإزاحة على الزمن أى $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \dfrac{\triangle \overleftarrow{\text{س}}}{\triangle \text{ن}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{س}}(\text{ن} + \triangle\text{ن}) - \overleftarrow{\text{س}}(\text{ن})}{\triangle \text{ن}}$

ويعرف متجه السرعة اللحظية $\overleftarrow{\text{ع}}$ عند أى لحظة زمنية ن بالعلاقة:

$$\overleftarrow{\text{ع}} = \lim_{\triangle\text{ن} \to 0} \dfrac{\triangle \overleftarrow{\text{س}}}{\triangle \text{ن}} = \lim_{\triangle\text{ن} \to 0} \dfrac{\overleftarrow{\text{س}}(\text{ن} + \triangle\text{ن}) - \overleftarrow{\text{س}}(\text{ن})}{\triangle \text{ن}}$$

ومن تعريف المشتقة يمكن استنتاج أن: $\overleftarrow{\text{ع}} = \dfrac{\text{ى}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ى ن}}$ (ميل المماس لمنحنى الموضع - الزمن)

وحيث أن $\overleftarrow{\text{س}_\circ}$ متجهًا ثابتًا دائمًا فإن: متجه السرعة يساوى معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن $\overleftarrow{\text{ع}} = \dfrac{\text{ى}\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ى ن}}$

(ميل المماس لمنحنى الإزاحة - الزمن) و يحسب معيار متجه السرعة بوحدة م / ث فى النظام الدولى للوحدات.

- يمكن استخدام الرمز ع للتعبير عن القياس الجبرى لمتجه السرعة $\overleftarrow{ع}$.

مثال

(١) قذف حجر رأسيًّا لأعلى، وكان ارتفاعه س بعد ن ثانية من قذفه يعطى بالعلاقة س = ٤٩ ن - ٤,٩ ن^{٢} حيث س بالمتر.

أ أوجد أقصى ارتفاع يبلغه الجسم المقذوف.

ب أوجد القياس الجبرى لمتجه السرعة عندما يكون الحجر على ارتفاع ٧٨,٤ مترًا، ثم أوجد معيار سرعته عندئذ.

جـ ارسم كلًّا من منحنى الموضع - الزمن ومنحنى السرعة -الزمن واستخدمه فى تحليل الحركة.

الحل

فى النظام الإحداثى للحركة فى خط مستقيم نعتبر س تقيس الارتفاع (الموضع) عن نقطة القذف، ع تكون موجبة فى حالة الحركة لأعلى.

∵ س (ن) = ٤٩ ن - ٤,٩ ن^{٢} ∵ ع (ن) = $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ع (ن) = ٤٩ - ٩,٨ ن

أ يبلغ الحجر أقصى ارتفاع له عندما ع = ٠

∴ ٤٩ - ٩,٨ ن = ٠ ∴ ن = ٥ ث

∴ أقصى ارتفاع س (٥) = ٤٩ × ٥ - ٤,٩ × ٥^{٢} = ١٢٢,٥ متر

ب يكون الحجر على ارتفاع ٧٨,٤ متر عندما س = ٧٨,٤

∴ ٤٩ ن - ٤,٩ ن^{٢} = ٧٨,٤ ∴ ٤,٩ ن^{٢} - ٤٩ ن + ٧٨,٤ = ٠

بقسمة طرفى المعادلة على ٤,٩ نجد أن: ن^{٢} - ١٠ ن + ١٦ = ٠

∴ (ن - ٢) (ن - ٨) = ٠ ∴ ن = ٢ ث أو ن = ٨ ث

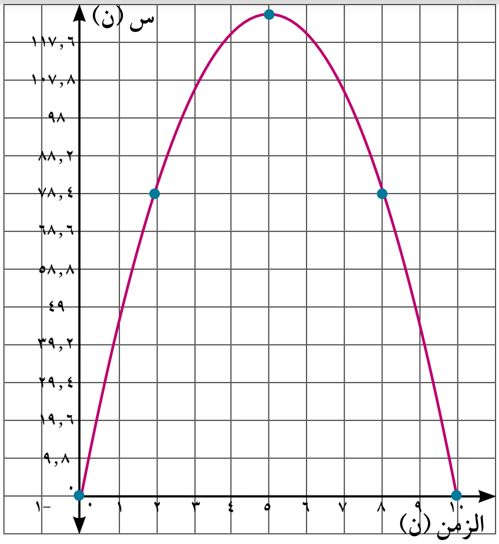
∴ ع (٢) = ٤٩ - ٩,٨ × ٢ = ٢٩,٤ م/ث

∴ ع (٨) = ٤٩ - ٩,٨ × ٨ = -٢٩,٤ م/ث

أى أن: الحجر يكون على ارتفاع ٧٨,٤ متر مرة صاعدًا بعد ٢ ث ومرة هابطًا بعد ٨ ث

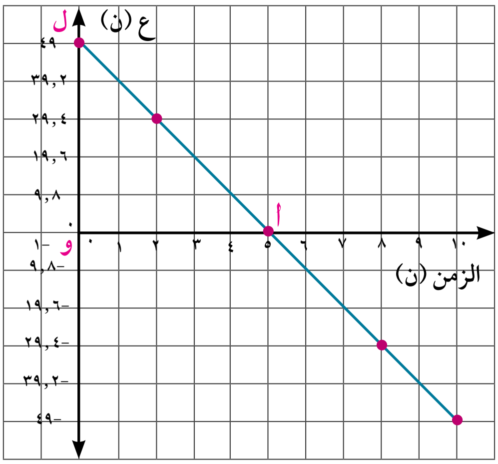
القياس الجبرى لمتجه السرعة إما ٢٩,٤ أو - ٢٩,٤

∴ معيار سرعة الحجر فى الحالتين = |± ٢٩,٤| = ٢٩,٤ م / ث



جـ من منحنى الموضع – الزمن نجد أن:

- الحجر يبلغ أقصى ارتفاع له ١٢٢,٥ متر عندما ن = ٥ ث (نقطة رأس المنحنى).
- يعود الحجر لنقطة القذف مرة أخرى عندما ن = ١٠ ث (النقطة ب (١٠ ، ٠)
- مرحلة الصعود استغرقت ٥ ثوان، ومرحلة الهبوط استغرقت ٥ ثوان أخرى.
- الحجر كان على ارتفاع ٧٨,٤ متر عندما ن = ٢ ث ، ن = ٨ ث



من منحنى السرعة – الزمن نجد أن:

١- السرعة الابتدائية للحجر كانت ٤٩ م / ث وأخذت سرعته فى التناقص خلال الفترة الزمنية]٠ ، ٥[حتى سكن لحظيًّا عندما ن = ٥ وعندها وصل لأقصى ارتفاع له ثم أخذت سرعته فى التزايد فى الاتجاه المضاد فى الفترة الزمنية]٥ ، ١٠[حتى عاد مرة أخرى لنقطة القذف عندما ن = ١٠ ث بنفس سرعة القذف ٤٩ م / ث.

٢- يمكن حساب أقصى ارتفاع للحجر من خلال منحنى السرعة - الزمن بإحدى طريقتين:

- أقصى ارتفاع = مساحة $\triangle$ و أ ل = $\frac{١}{٢}$ و أ × و ل = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩ = ١٢٢,٥ متر مربع
- بحساب التكامل وسنبحث هذه الطريقة بشكل مفصل لاحقًا.

تفكير ناقد: كيف تحسب من المنحنى السابق السرعة - الزمن فى مثال (١) المسافة المقطوعة خلال رحلة الحجر حتى عودته إلى نقطة القذف، وكذلك إزاحته خلال هذا الزمن؟

٩ حاول أن تحل:

(١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان موضعه $\overleftarrow{س}$ عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{س}$ (ن) = (ن^{٢} - ٤ن + ٣) $\overleftarrow{ى}$ حيث س مقاسه بالمتر ، ن بالثانية، $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسيم.

أ أوجد إزاحة الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى

ب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما ن ∋ [٠، ٢]

جـ أوجد متجه سرعة الجسيم عندما ن = ٤

د من خلال منحنى السرعة-الزمن، منحنى الموضع - الزمن قم بتحليل حركة الجسيم، وبين متى يغير الجسيم اتجاه حركته

٥- العجلة: *Acceleration*

إذا كانت $\Delta \overleftarrow{\text{ع}}$ تعبر عن التغير فى متجه السرعة خلال فترة زمنية Δن فإن العجلة المتوسطة $\overleftarrow{\text{جـ}}_{\text{م}}$ تعطى بالعلاقة

$$\overleftarrow{\text{جـ}}_{\text{م}} = \frac{\Delta \overleftarrow{\text{ع}}}{\Delta \text{ن}} \qquad \text{أى أن } \overleftarrow{\text{جـ}}_{\text{م}} = \frac{\overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$$

وتعرف العجلة اللحظية $\overleftarrow{\text{جـ}}$ **(العجلة اختصارًا)** عند أى لحظة زمنية ن

$$\text{بالعلاقة } \overleftarrow{\text{جـ}} = \lim_{\Delta\text{ن} \leftarrow 0} \frac{\overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$$

ومن تعريف المشتقة يمكن استنتاج أن: $\overleftarrow{\text{جـ}} = \frac{\text{ى}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{ى ن}}$

أى أن العجلة هى معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن(ميل المماس لمنحنى السرعة - الزمن)

ويحسب معيار متجه العجلة بوحدةم / ث/ ث (م/ث^2) فى النظام الدولى للوحدات

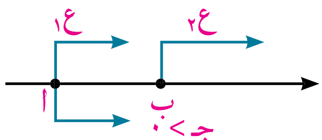
مما سبق نجد أن: إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ (ن) موضع الجسيم وهى دالة فى الزمن ن، فإن متجه السرعة $\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ى}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ى ن}}$ ،

من ذلك يمكن استنتاج أن العجلة $\overleftarrow{\text{جـ}} = \frac{\text{ى}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى}^2\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ى ن}^2}$

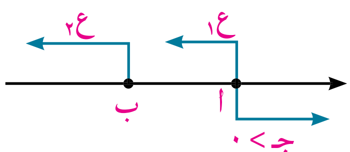
تنبيه: عند الإشارة إلى القياسات الجبرية لكل من الموضع ومتجه السرعة والعجلة فإننا نستخدم على الترتيب الرموز س ، ع ، جـ.

القياس الجبرى لمتجه السرعة والعجلة:

١- إذا كانت جـ > ٠ فإن ع تتزايد، وهذا يعنى أن الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الاتجاه الموجب شكل **(١)** أو أن الجسيم يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه السالب شكل **(٢)** فى الحالتين Δع > ٠ .

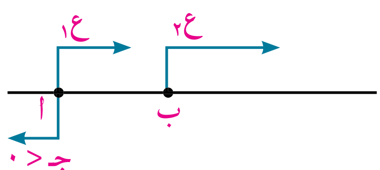


(١)

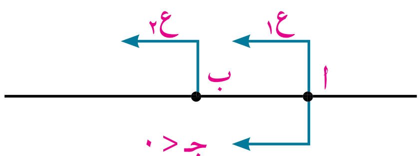


(٢)

٢- إذا كانت جـ < ٠ فإن ع تتناقص وهذا يعنى:
أن الجسيم يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه الموجب شكل **(٣)** أو
أن الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الاتجاه السالب شكل **(٤)**.



(٣)



(٤)

٣- فى كل من الحالتين **(٢)** ، **(٣)** يقال إن الجسيم يتحرك بتقصير، بينما فى كل من الحالتين **(١)** ، **(٤)** يتحرك الجسيم بتسارع **(بتحرك أسرع)**.

أى أن: الجسم يتحرك حركة متسارعة إذا كان $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ لهما الاتجاه نفسه (ع جـ > صفر)
ويتحرك حركة تقصيرية إذا كان $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ متضادين فى الاتجاه (ع جـ < صفر)

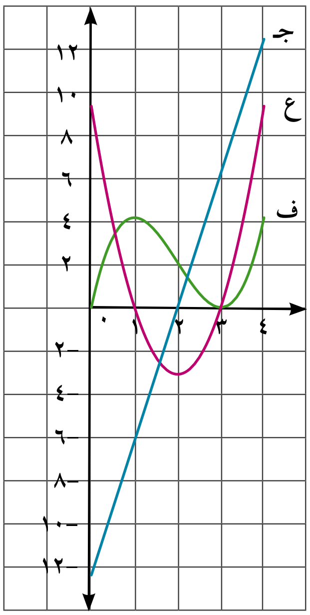
مثال

② إذا كان القياس الجبرى لإزاحة جسيم يتحرك فى خط مستقيم يعطى بالعلاقة $ف = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٩ن$ حيث ف مقاسه بالمتر ، ن بالثانية

أ) أوجد عجلة الجسيم عند انعدام السرعة

ب) أوجد معيار سرعة الجسيم عندما تنعدم العجلة

جـ) أوجد المسافة المقطوعة بواسطة الجسيم خلال الفترة من ن = ٠ إلى ن = ٢



الحل

∵ $ف = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٩ن$ ∴ $ع = \frac{ءف}{ءن} = ٣ن^{٢} - ١٢ن + ٩$

∴ $جـ = \frac{ءع}{ءن} = ٦ن - ١٢$

أ) تنعدم سرعة الجسيم عندما $٣ن^{٢} - ١٢ن + ٩ = ٠$

∴ $ن^{٢} - ٤ن + ٣ = ٠$

$(ن - ١)(ن - ٣) = ٠$ عندما ن = ١ ، ن = ٣

$جـ(١) = ٦(١) - ١٢ = -٦$ م/ث^{٢}

$جـ(٣) = ٦(٣) - ١٢ = ٦$ م/ث^{٢}

ب) تنعدم عجلة الجسيم عندما ٦ن - ١٢ = ٠ ∴ ن = ٢

معيار السرعة = $|ع(٢)| = |٣ \times ٤ - ١٢ \times ٢ + ٩| = ٣$ م/ث

جـ) من دراسة منحنى السرعة - الزمن لحركة الجسيم أو بدراسة إشارة ع (ن) نجد أن الجسيم يتحرك فى الاتجاه الموجب فى الفترة $٠ \leqslant ن < ١$ ثم يغير اتجاه حركته ويتحرك فى الاتجاه المضاد فى الفترة $١ < ن < ٣$.

∴ المسافة المقطوعة من ن = ٠ إلى ن = ٢ خلال الثانيتين الأولى والثانية

$= |ف(١) - ف(٠)| + |ف(٢) - ف(١)|$

$= |٤ - ٠| + |٢ - ٤| = ٦$ أمتار

تفكير ناقد: مستعينًا بالشكل السابق بين فترات التسارع وفترات التباطؤ لحركة الجسيم

حاول أن تحل

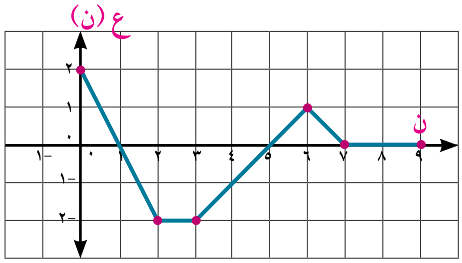
② إذا كان متجه سرعة جسيم $\overleftarrow{ع}$ يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overleftarrow{ع}(ن) = -(ن^{٢} - ٦ن + ٥)\overleftarrow{ى}$ حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسيم.

أ) متى يغير الجسيم اتجاه حركته؟

ب) متى تزداد سرعة الجسيم، ومتى تتناقص؟

جـ) أوجد عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم سرعته

تفكير ناقد:



الشكل المرفق يبين سرعة جسيم ع = د(ن) يتحرك فى خط مستقيم.

أ) متى يتحرك الجسيم للأمام ومتى يتحرك للخلف؟ ومتى تتسارع حركته ومتى تتباطأ؟

ب) متى تكون عجلة الحركة موجبة ؟ ومتى تكون سالبة؟ ومتى تنعدم؟

جـ) متى تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى؟

د) متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة؟

استنتاج العجلة عندما يكون متجه السرعة دالة فى الموضع:

إذا كانت ع = د (س) ، س = د(ن)

فباستخدام قاعدة السلسلة يمكن استنتاج أن: $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}} = \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} \cdot \frac{\text{ى س}}{\text{ى ن}}$

أى أن: $\text{جـ} = \text{ع} \cdot \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}}$

وهى صورة أخرى للعجلة يمكن استخدامها عندما يكون متجه السرعة $\overleftarrow{\text{ع}}$ دالة فى الموضع $\overleftarrow{\text{س}}$

مثال

(٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته $\overleftarrow{\text{ع}}$ يعطى بالعلاقة $\text{ع} = \frac{١}{٢٠}(٤٠٠ - \text{س}^٢)$ حيث س تعبر عن القياس الجبرى للموضع $\overleftarrow{\text{س}}$ ، أوجد القياس الجبرى لعجلة الحركة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ عندما س = ١٥

الحل

$\because \text{ع} = \frac{١}{٢٠}(٤٠٠ - \text{س}^٢)$

$\therefore \frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}} = \frac{-١}{١٠}\,\text{س}$

$\because \text{جـ} = \text{ع}\,\frac{\text{ى ع}}{\text{ى س}}$

$\text{جـ} = \frac{-١}{٢٠٠}\,\text{س}\,(٤٠٠ - \text{س}^٢)$

عندما س = ١٥ وحدة طول.

$\therefore \text{جـ} = \frac{-١}{٢٠٠} \times ١٥\,(٤٠٠ - ٢٢٥)$

$\text{جـ} = -\frac{١٠٥}{٨}$ وحدة عجلة

حاول أن تحل

(٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين ع ، س تعطى فى الصورة $\text{ع} = \frac{٥}{\text{س} + ٤}$ حيث ع مقاسة بوحدة م / ث، س مقاسة بوحدة متر. أوجد عجلة الحركة عندما س = ٢ متر.

مثال

(٤) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين ع ، س تعطى فى الصورة ع^{٢} = ٥ (٩ - س^{٢})
أوجد عجلة الحركة عند انعدام السرعة علمًا بأن السرعة مقاسة بوحدة م/ث ، س مقاسة بوحدة المتر.

الحل

∵ ع^{٢} = ٥ (٩ - س^{٢}) ∴ ٢ ع $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = - ١٠ س

∴ ٢ جـ = -١٠ س ∴ جـ = - ٥ س

تنعدم السرعة عندما ع = ٠ أى ٥ (٩ - س^{٢}) = ٠ ∴ س = ± ٣

جـ (٣) = -٥ × ٣ = - ١٥ م/ث^{٢} جـ (-٣) = -٥ × -٣ = ١٥ م/ث^{٢}

حاول أن تحل

(٤) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع فى علاقة مع القياس الجبرى موضعه س معطاة بالصورة ع^{٢} = $\frac{١}{٨ (٤ - س^{٢})}$ أوجد جـ بدلالة س حيث جـ هو القياس الجبرى لعجلة الحركة، ثم أوجد أصغر سرعة للجسيم المتحرك.

تمــارين ١ - ١

تخير الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) عندما يتحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ثابتة فإن معيار عجلته ....

أ يزداد ب يتناقص ج ثابت لا يساوى الصفر د صفر

(٢) التغير فى متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم يعرف بأنه ....

أ الإزاحة ب المسافة ج متجه السرعة د متجه العجلة

(٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت ع = ٣هـ$^{ن+٢}$ فإن سرعته الابتدائية تساوى ....

أ ٣ ب هـ ج ٣هـ^{٢} د هـ^{٢}

(٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم، ومعادلة حركته س =طا ن فإن عجلة الحركة حـ تساوى ....

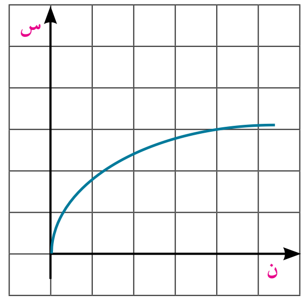
أ قا^{٢}ن ب ٢ قان ج ٢ع س د ع س

(٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم وكانت معادلة حركته س = ٢ + لو$_{هـ}$ (ن + ١) فإن ....

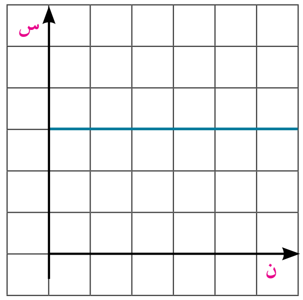
أ سرعته وعجلة الحركة تتناقصان دائمًا. ب سرعته وعجلة الحركة تتزايدان دائمًا.

ج السرعة تتناقص وعجلة الحركة تزداد. د السرعة تتزايد وعجلة الحركة تتناقص.

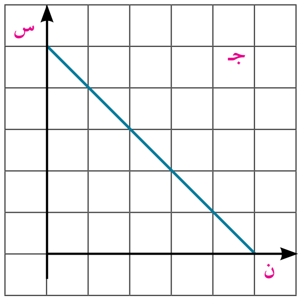
٦ تخير الرسم البيانى المناسب امام كل جملة من الجمل التالية :



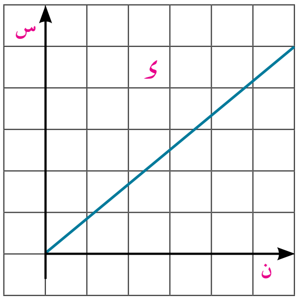
شكل أ



شكل ب



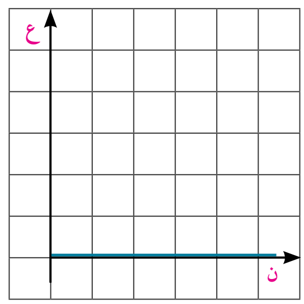
شكل جـ



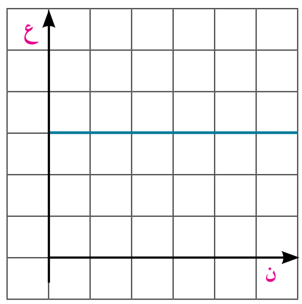
شكل د

(١) الجسيم متوقف
(٢) الجسيم يتحرك للامام بسرعة ثابتة
(٣) الجسيم يرجع للخلف
(٤) سرعة الجسيم تتناقص

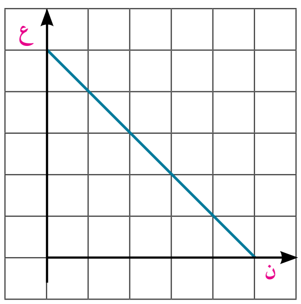
٧ تخير الرسم البيانى المناسب امام كل جملة من الجمل التالية:



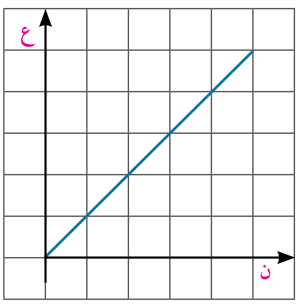
شكل أ



شكل ب



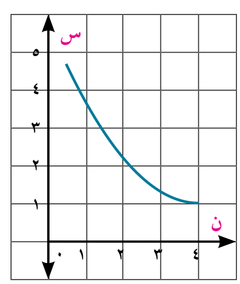
شكل جـ



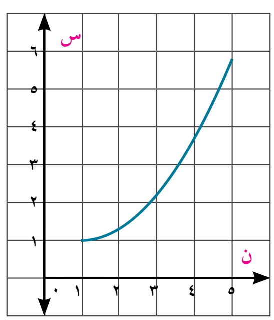
شكل د

(١) حركة الجسيم تقصيرية
(٢) الجسيم يتحرك بسرعة ثابتة
(٣) الجسيم متوقف
(٤) حركة الجسيم متسارعة

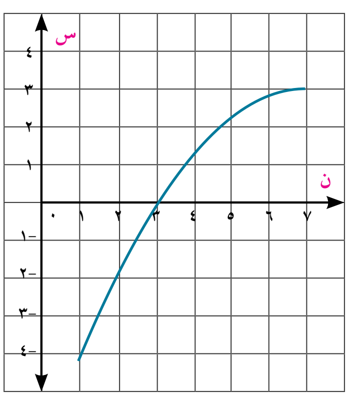
٨ فى كل من المنحنيات المرسومة **(منحنى الموضع - الزمن)** حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة، ثم عين ما إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتباطأ (يتحرك ببطء).



شكل (١)

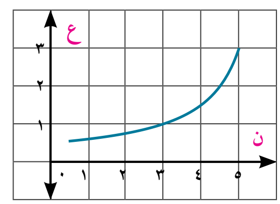


شكل (٢)

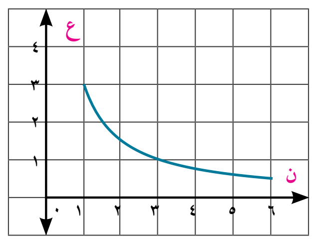


شكل (٣)

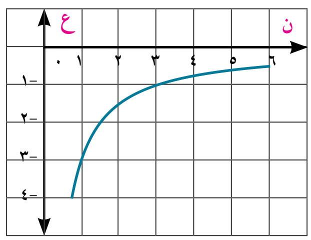
٩ فى كل من المنحنيات المرسومة (منحنى السرعة – الزمن) حدد إشارة العجلة، وبين إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتحرك بتباطؤ.



شكل (١)

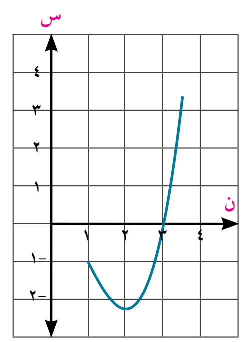


شكل (٢)

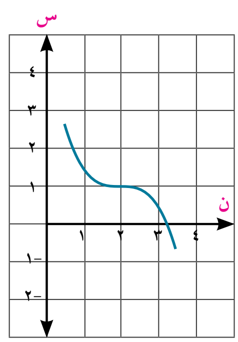


شكل (٣)

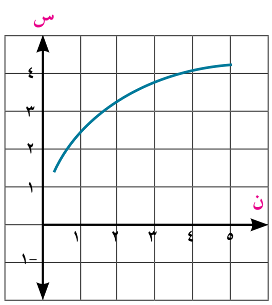
١٠ أمامك ثلاثة منحنيات (١) ، (٢) ، (٣) كل منها تمثل منحنى الموضع - الزمن وثلاثة منحنيات (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها تمثل منحنى السرعة - الزمن . صل كل منحنى من المجموعة الأولى بالمنحنى المناظر له من المجموعة الثانية.



شكل (١)

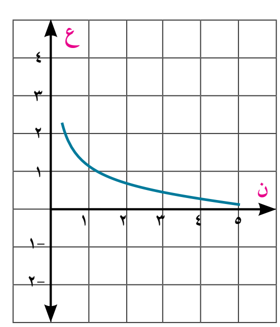


شكل (٢)

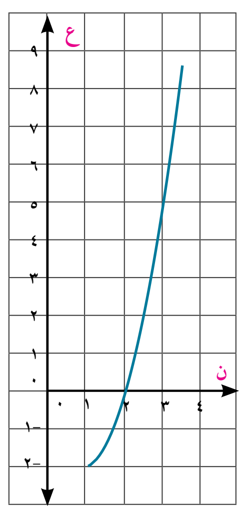


شكل (٣)

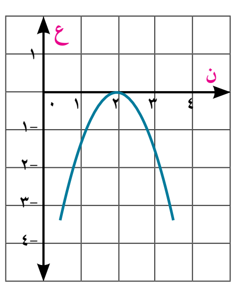
المجموعة الأولى



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

المجموعة الثانية

(١١) إذا كانت ع = ٣ س فأوجد جـ بدلالة س ثم أوجد جـ عندما س = ٢

(١٢) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه السرعة ع فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة ع = س + $\frac{١}{س}$ ، أوجد عجلة الحركة عندما س = ٢ حيث س مقاسة بالمتر، ع مقاسة بوحدة م/ث.

(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لسرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س بالصورة ع = $\frac{١}{س^٢}$، أوجد حـ بدلالة س، ثم أوجد حـ عندما س = $\frac{١}{٢}$

(١٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى للسرعة ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س بالصورة $ع^٢$ = ١٦ - ٩ جتا س، أوجد أقصى سرعة للجسيم وعجلة الحركة عندئذ.

(١٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث تكون معادلة حركته تعطى بالصورة س (ن) = ٣ جتا ن + ٤ جا ن حيث س مقاسة بالمتر ، ن مقاسة بالثانية.

أ أوجد القياس الجبرى للإزاحة $\overleftarrow{ف}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٢}$ ، ن = π

ب أوجد القياس الجبرى لمتجه السرعة $\overleftarrow{ع}$ عندما ن= ٠ ، ن = $\frac{\pi}{٢}$ ، ن = π

جـ أوجد أقصى إزاحة للجسيم.

(١٦) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تبعًا للعلاقة س = أ جا ك ن حيث س يعبر عن القياس الجبرى للموضع، ن الزمن، أ ، ك ∈ ح.

أ أوجد العلاقة بين ع، س حيث ع القياس الجبرى لمتجه السرعة.

ب أوجد ع عندما س = $\frac{أ}{٢}$.

جـ أوجد الزمن المستغرق حتى يكون س = $\frac{-أ}{٢}$ وأوجد عجلة الحركة عندئذ.

تكامل الدوال المتجهة

Integration of vector functions

سوف تتعلم

- إذا كانت كل من حـ ، ع دوال فى الزمن فإن:

  س = ∫ ع ء ن

  ع= ∫ جـ ء ن
- إذا كانت العجلة دالة فى الموضع فإن

  ∫جـ ء س = ∫ ع ء ع

المصطلحات الأساسية

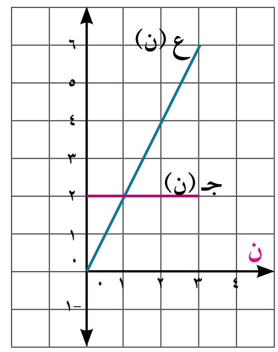
- تكامل *Integration*

الأدوات المستخدمة

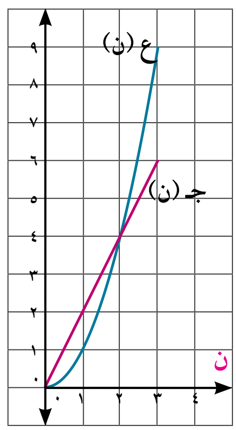
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

عمل تعاونى

المنحنى المرسوم يمثل منحنى السرعة- الزمن، منحنى العجلة- الزمن فى شكل بيانى واحد؛ بين أن المساحة تحت منحنى العجلة- الزمن خلال أى فترة زمنية [٠ ، ن] يساوى سرعة الجسيم عند الزمن ن



شكل (١)



شكل (٢)

يمكن استخدام المنحنيات المرسومة أو باستخدام أى برامج رسومية إنشاء منحنيات أخرى تثبت من خلالها ما هو مطلوب منك.

تعلم

١- التكامل المحدد:

$$\int_{أ}^{ب} د'(س) \cdot ء س = د(ب) - د(أ)$$

فمثلًا: $\int_{١}^{٤} (س^٢ + ٢س - ١)\ ء س$

$$= [\frac{س^٣}{٣} + ٢س - ١]\ ء س$$

$$= [\frac{س^٣}{٣} + س^٢ - س]_{١}^{٤} = [\frac{٦٤}{٣} + ١٦ - ٤] - [\frac{١}{٣} + ١ - ١] = ٣٣$$

وسوف يدرس التكامل المحدد فى كتاب التفاضل

تذكر أن

الرموز حـ ، ع ، س تستخدم لتدل على القياسات الجبرية لكل من العجلة ، متجه السرعة والموضع على الترتيب.

٢- استنتاج السرعة والإزاحة:

(أ) إذا كانت جـ = $\frac{ء ع}{ء ن}$

فإن ∫ جـ ء ن = ∫ ء ع

∴ ع = ∫جـ ء ن   (١ – ١)

ولتعيين عجلة حركة وحيدة تطابق العجلة المعطاة جـ (ن) يجب وضع الشروط الابتدائية لكل من السرعة الابتدائية $ع_٠$ والموضع الابتدائى س وذلك عند ن = ٠.

ويمكن استبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فيكون لدينا.

$$\int_{ع_٠}^{ع} ءع = \int_{٠}^{ن} جـ ءن$$

$$\therefore ع - ع_٠ = \int_{٠}^{ن} جـ ءن \qquad (١ - ٢)$$

= المساحة تحت منحنى العجلة - الزمن

وإذا كانت العجلة جـ ثابتة فإن: $ع - ع_٠ = جـ \int_{٠}^{ن} ءن$

$$\therefore ع = ع_٠ + جـ ن \qquad (١ - ٣)$$

لاحظ أن:

لا يمكن استخدام المعادلة (١ – ٣) إلا فى حالة العجلة الثابتة أما إذا كانت العجلة دالة فى الزمن نستخدم المعادلة (١ – ١) أو (١ – ٢) حسب معطيات المسألة.

(ii) إذا كانت $ع = \frac{ءس}{ءن}$ فإن: $\int ع ءن = \int ءس$

$$\therefore س = \int ع ءن \qquad (٢ - ١)$$

ومع استخدام التكامل المحدد وحدود التكامل المناسبة نجد أن:

$$\int_{س_٠}^{س} ءس = \int_{٠}^{ن} ع ءن$$

$$\therefore س - س_٠ = \int_{٠}^{ن} ع ءن \qquad \text{(لاحظ أن } س - س_٠ = ف\text{)} \qquad (٢ - ٢)$$

∴ الازاحه = المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن

وإذا كانت العجلة ثابتة يمكن بالتعويض عن السرعة ع من المعادلة (١ – ٣) نجد أن:

$$\therefore س - س_٠ = \int_{٠}^{ن} (ع_٠ + جـ ن) ءن \qquad \therefore س - س_٠ = ع_٠ ن + \tfrac{1}{2} جـ ن^2$$

$$\therefore س = س_٠ + ع_٠ ن + \tfrac{1}{2} جـ ن^2$$

(تستخدم فى حالة ثبوت العجلة)

(iii) إذا كانت حـ = $ع \frac{ءع}{ءس}$ فإن: $\int جـ ءس = \int ع ءع \qquad (٣ - ١)$

وباستخدام التكامل المحدد ومع حدود التكامل المناسبة نجد أن:

$$\int_{ع_٠}^{ع} ع ءع = \int_{س_٠}^{س} جـ ءس$$

$$\tfrac{1}{2}(ع^2 - ع_٠^2) = \int_{س_٠}^{س} جـ ءس \qquad (٣ - ٢)$$

= المساحة تحت منحنى العجلة - الإزاحة

وعند ثبوت العجلة حـ يكون: $ع^2 - ع_٠^2 = ٢ جـ \int_{س_٠}^{س} ءس$

$$\therefore ع^2 = ع_٠^2 + ٢ جـ (س - س_٠) \qquad \text{(لاحظ أن } س - س_٠ = ف\text{)} \qquad (٣ - ٣)$$

$$\therefore ع^2 = ع_٠^2 + ٢ جـ ف$$

مثال

١) بدأ جسيم حركته فى خط مستقيم من نقطة الأصل بسرعة ابتدائية قدرها ٨م/ث وكانت عجلة الحركة بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة (٣ ن -٢) أوجد كلًّا من سرعة الجسيم و إزاحته بعد ٢ث من بدء الحركة.

الحل

∵ جـ = ٣ ن - ٢ ∴ ع = $\int$ (٣ ن - ٢) ءن ∴ ع = $\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ث

∵ ع. = ٨م/ث ∴ ع = ٨م/ث عندما ن = ٠ ∴ ث = ٨

∴ ع = $\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ٨ ∴ ع (٢) = $\frac{٣}{٢}$ × ٤ - ٢ × ٢ + ٨ = ١٠ م/ث

∵ ع = $\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ٨ ∴ س = $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ٨) ء ن

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ن^٣ - ن^٢ + ٨ن + ث́

∵ س = ٠ عندما ن = ٠ ∴ ث́ = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ن^٣ - ن^٢ + ٨ ن

ف(٢) = س (٢) - س (٠) = $\frac{١}{٢}$ (٢)^٣ - (٢)^٢ + ٨(٢) = ١٦ متر

حل آخر:

∵ جـ = ٣ ن - ٢ ∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٣ ن - ٢

∴ $\int_{٨}^{ع}$ ءع = $\int_{٠}^{ن}$ (٣ ن -٢) ءن ∴ ع - ٨ = $\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن

∴ ع = $\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ٨ ∴ ع(٢) = $\frac{٣}{٢}$ × ٤ - ٢ × ٢ + ٨ = ١٠ م/ث

∵ ف = $\int_{٠}^{ن}$ ع ءن ∴ ف(٢) = $\int_{٠}^{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$ ن^٢ - ٢ ن + ٨) ءن

∴ ف(٢) = $\left[\frac{١}{٢}\right.$ ن^٣ - ن^٢ + ٨ ن$\left.\right]_{٠}^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (٢)^٣ - (٢)^٢ + ٨ (٢) = ١٦ متر

حاول أن تحل

١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون وعلى بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت جـ = ٦ن - ٤ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^٢ فأوجد العلاقة بين السرعة والزمن، كذلك العلاقة بين الإزاحة والزمن.

مثال

٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لسرعته ع يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة ع = ٦ن^٢ - ٢٤ حيث ع مقاسة بوحدة (م/ث) أوجد متى تصل سرعة الجسيم ٧٢ م/ث ، ثم أوجد مقدار عجلة الجسيم عندما تبلغ سرعته ٣٠ م/ث ثم أوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة ن ∈ [١ ، ٤]

الحل

∵ ع = ٦ن^٢ - ٢٤

١- عندما تبلغ سرعة الجسيم ٧٢ م/ث

∴ ٦ن^٢ - ٢٤ = ٧٢ ∴ ٦ن^٢ = ٩٦ ن^٢ = ١٦ ن = ٤ ث

٢- عندما تبلغ سرعة الجسيم ٣٠ م / ث

$\therefore$ ٦ن^{٢} - ٢٤ = ٣٠ $\quad \therefore$ ٦ن^{٢} = ٥٤ $\quad$ ن^{٢} = ٩ $\quad$ ن = ٣ ث

$\because$ جـ = $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$ $\quad \therefore$ جـ = ١٢ ن $\quad$ جـ (٣) = ٣٦ م /ث^{٢}

٣- الإزاحة خلال الفترة الزمنية ن ∋ [١ ، ٤]

ف = $\int_{١}^{٤}$ ع ء ن $\quad$ ف = $\int_{١}^{٤}$ (٦ن^{٢} - ٢٤) ء ن = $[$٢ن^{٣} - ٢٤ ن$]_{١}^{٤}$

ف = (٢ × ٦٤ - ٢٤ × ٤) - (٢ - ٢٤) = ٥٤ مترًا

حاول أن تحل

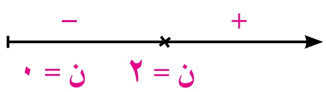
(٢) بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط و يعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة ع = ٣ ن^{٢} + ٢ ن حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ، ن مقاسة بالثانية. أوجد كلًّا من عجلة الحركة و إزاحة السيارة عند ن = ٢

مثال

(٣) بدأت سيارة حركتها من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة ع = ٣ن^{٢} - ٦ ن حيث ع مقاسة بوحدة م/ث، ن مقاسة بالثانية. أوجد كلًّا من متجه السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة خلال الفترة الزمنية ٠ ⩽ ن ⩽ ٣,٥

الحل

$\because$ ع = ٣ ن^{٢} - ٦ن $\quad \therefore$ ع = ٣ ن (ن - ٢)

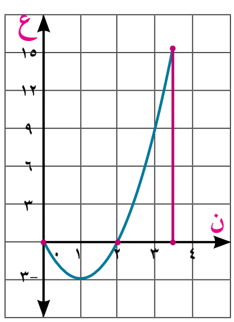


نجد أن السيارة تغير اتجاه حركتها بعد ٢ ث و يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) أو منحنى السرعة - الزمن

$\therefore$ ف = $\int_{٠}^{٣,٥}$ ع ء ن = $\int_{٠}^{٣,٥}$ (٣ ن^{٢} - ٦ ن) ء ن

= $[$ن^{٣} - ٣ ن$^{٢}]_{٠}^{٣,٥}$ = (٣,٥)^{٣} - ٣ (٣,٥)^{٢} = $\frac{٤٩}{٨}$

$\therefore$ متجه السرعة المتوسطة $\overrightarrow{ع_{م}}$ = $\frac{\frac{٤٩}{٨}\overrightarrow{ى}}{٣,٥ - ٠}$ = ١,٧٥ $\overrightarrow{ى}$



حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة ، ويكون القياس الجبرى لمتجه السرعة المتوسطة يساوى ١,٧٥م/ث

المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية ن ∋ [٠ ، ٣,٥]

= $|\int_{٠}^{٢}$ ع ء ن$|$ + $|\int_{٢}^{٣,٥}$ ع ء ن$|$ = $|$ $[$ن^{٣} - ٣ن$^{٢}]_{٠}^{٢}$ $|$ + $|$ $[$ن^{٣} - ٣ن$^{٢}]_{٢}^{٣,٥}$ $|$ = ٤ + $\frac{٤٩}{٨}$ + ٤ = $\frac{١١٣}{٨}$ متر

$\therefore$ السرعة المتوسطة = $\frac{\frac{١١٣}{٨}}{٣,٥ - ٠}$ = $\frac{١١٣}{٢٨}$ ≃ ٤,٠٤ م/ث

حاول أن تحل

(٣) بدأت سيارة حركتها من السكون في خط مستقيم من نقطة ثابتة على هذا الخط، ويعطى القياس الجبرى لمتجه السرعة ع بعد زمن ن بالعلاقة ع = ٤ ن - ٣$ن^{٢}$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث، ن مقاسة بالثانية أوجد خلال الفترة الزمنية ن حيث ن∈ [٠ ، ٤] كلًّا من السرعة المتوسطة ومتجه السرعة المتوسطة. متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى؟ وأوجد مقدار العجلة عندئذ.

مثال

(٤) جسيم يتحرك في خط مستقيم يبدأ حركته من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان القياس الجبرى لعجلته جـ يعطى بدلالة القياس الجبرى لموضعه س بالعلاقة جـ = ٢ س + ٥ علمًا بأن سرعة الجسيم الابتدائية ٢م/ث **فأوجد:**

أ) $ع^{٢}$ بدلالة س

ب) أوجد سرعة الجسيم عندما س = ١

جـ) أوجد س عندما ع = ٤ م/ث

الحل

أ) ∵ جـ = ٢ س + ٥

∴ $\int_{٠}^{س}$ (٢س + ٥) ء س = $\int_{٢}^{ع}$ ع ء ع

∴ $س^{٢}$ + ٥ س = $\frac{١}{٢}$ ($ع^{٢}$ - ٤)

∵ ∫ جـ ء س = ∫ ع ء ع

∴ $[س^{٢} + ٥س]_{٠}^{س} = \frac{١}{٢}[ع^{٢}]_{٢}^{ع}$

∴ $ع^{٢}$ = ٢ $س^{٢}$ + ١٠ س + ٤

ب) عندما س = ١ **نجد أن:**

$ع^{٢}$ = ١٦

∴ السرعة = |ع| = ٤ م/ث

جـ) عندما ع = ٤ م/ث **نجد أن:**

١٦ = ٢ $س^{٢}$ + ١٠ س + ٤

∴ $س^{٢}$ + ٥ س - ٦ = ٠

(س + ٦) (س - ١) = ٠

س = - ٦ متر أو س = ٥ متر

حاول أن تحل

(٤) سيارة تتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار في الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت جـ = س -٤ فأوجد:

أ) $ع^{٢}$ بدلالة س

ب) أوجد سرعة السيارة عندما جـ = ٠

مثال

(٥) جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية قدرها ٨م / ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت جـ = ٤٠ $هـ^{-س}$ ، أوجد:

أ) $ع^{٢}$ بدلالة س

ب) أوجد س عندما ع = ١٠ م/ث

جـ) عين أقصى سرعة للجسيم.

الحل

أ $\because$ جـ = ٤٠ $هـ^{-س}$ $\qquad$ $\because$ $\int$ جـ ء س = $\int$ ع ء ع

$\therefore$ ٤٠ $\int_{٠}^{س}$ $هـ^{-س}$ ء س = $\int_{٨}^{ع}$ ع ء ع

$\therefore$ -٤٠ $[هـ^{-س}]_{٠}^{س}$ = $\frac{١}{٢}$ $[ع^{٢}]_{٨}^{ع}$ $\qquad$ $\therefore$ -٨٠ ($هـ^{-س}$ - ١) = $ع^{٢}$ - ٦٤

$\therefore$ $ع^{٢}$ = ١٤٤ - ٨٠ $هـ^{-س}$

ب عندما ع = ١٠ م/ث نجد أن: $\qquad$ ٨٠ $هـ^{-س}$ = ٤٤

$\therefore$ $هـ^{س}$ = $\frac{٢٠}{١١}$ $\qquad$ $\therefore$ س = $لو_{هـ}$ $\frac{٢٠}{١١}$ متر

جـ $\because$ $ع^{٢}$ = ١٤٤ - $\frac{٨٠}{هـ^{س}}$ $\qquad$ $\because$ $هـ^{س}$ > ٠ لجميع قيم س

$\therefore$ $\frac{٨٠}{هـ^{س}}$ $\longrightarrow$ ٠ عندما س $\longrightarrow \infty$ $\qquad$ $\therefore$ أقصى سرعة = ١٢ م/ث

حاول أن تحل

٥ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت جـ = $هـ^{س}$ ، أوجد $ع^{٢}$ بدلالة س ثم أوجد ع عندما س = ٤ متر ، س عندما ع = ٢٠ م/ث.

تمارين ١ - ٢

في جميع المسائل اعتبر أن الجسيم يتحرك فى خط مستقيم ، س ، ع ، جـ هى القياسات الجبرية لكل من الموضع ، متجه السرعة، العجلة على الترتيب:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ع = ٣$ن^{٢}$ - ٢ن ، وكانت س = ١ عندما ن = ٠ فإن:

أ س = ٦ن - ٢ $\qquad$ ب س = ٣$ن^{٢}$ - ٢ن + ١ $\qquad$ جـ س = $ن^{٣}$ - $ن^{٢}$ + ١ $\qquad$ د س = $ن^{٢}$ - ن - ١

٢ إذا كان ع = ١ + جا ن، وكانت س = -٢ عندما ن = ٠ فإن:

أ س = ن + جتا ن $\qquad$ ب س = ن - جتا ن $\qquad$ جـ س = ن - جتا ن + ٢ $\qquad$ د س = ن - جتا ن -٢

٣ إذا كان ع = ٣ن - ٢ ، فإن ف خلال الفترة [٠ ، ٢]

أ ١ وحدة طول $\qquad$ ب ٢ وحدة طول $\qquad$ جـ ٣ وحدة طول $\qquad$ د ٤ وحدة طول

٤ إذا كان ع = ٣ $ن^{٢}$ - ٢ن ، فإن المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٢]

أ $\frac{٤}{٢٧}$ وحدة طول $\qquad$ ب ٤ وحدة طول $\qquad$ جـ $\frac{١١٢}{٢٧}$ وحدة طول $\qquad$ د $\frac{١١٦}{٢٧}$ وحدة طول

٥ إذا كانت ع = $ن^{٣}$ - ٣ $ن^{٢}$ + ٢ن ، فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٣]

أ $\frac{١}{٤}$ وحدة طول $\qquad$ ب $\frac{١}{٢}$ وحدة طول $\qquad$ جـ $\frac{٩}{٤}$ وحدة طول $\qquad$ د $\frac{١١}{٤}$ وحدة طول

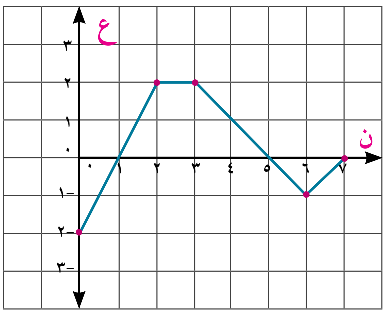
٦ إذا كانت حـ = ٣ ، ع. = -١ فإن ف خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٢].

أ $\frac{١}{٦}$ وحدة طول ب ٤ وحدة طول ج $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول د $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

٧ إذا كانت حـ = ٣ ، ع. = -١ فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٢].

أ $\frac{١}{٦}$ وحدة طول ب ٤ وحدة طول ج $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول د $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

٨ من منحنى السرعة - الزمن المقابل فإن مقدار الازاحة ....



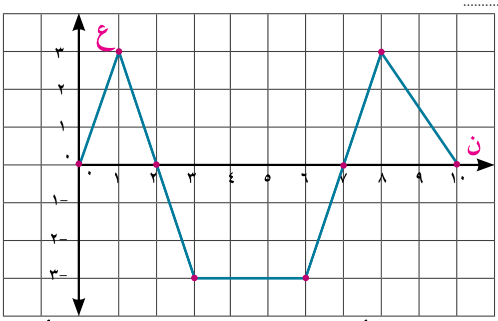
أ ٣ وحدة طول

ب ٥ وحدة طول

ج ٧ وحدة طول

د ٨ وحدة طول

٩ من منحنى السرعة - الزمن المقابل ،فإن المسافة المقطوعة = ...



أ ٤,٥ وحدة طول

ب ١٠,٥ وحدة طول

ج ١٣,٥ وحدة طول

د ١٩,٥ وحدة طول

١٠ قذف جسيم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٥,٦ م/ث من نقطة على أرتفاع ٢٤,٥ متر من سطح الأرض أوجد كل من ع ، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

١١ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٢ م / ث من نقطة ثابتة بحيث كانت حـ = ٢ ن - ٦ حيث حـ مقاسة بوحدة م / ث^٢ أوجد بدلالة ن كل من ع ، س ثم أوجد س عندما ع = ١٨ م/ث

١٢ جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت حـ = ٨ - ٢ن^٢ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^٢ أوجد أقصى سرعة للجسيم والمسافة المقطوعة حتى يصل لأقصى سرعة.

١٣ جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على المستقيم مبتدأ من السكون بحيث كانت حـ = $\frac{٣}{٨}$ س^٢ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^٢ ، س بالمتر. أوجد سرعة الجسيم عندما يكون س = ٢ متر ، ثم أوجد موضعه عندما تكون ع = ٤ م / ث

١٤ جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٣ م/ث من نقطة ثابتة بحيث حـ = ٦س + ٤ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ ث^٢ ، س بالمتر أوجد ع^٢ بدلالة س ، أوجد سرعة الجسيم عندما س = ٢ ثم أوجد س عندما ع^٢ = ٨٧

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان س = ن^{٢} - ٣ن + ٢ فإن الجسيم يغير اتجاه حركته عندما:

أ ن = ١، ن = ٢ ب ن = ١ ج ن = ١,٥ د ن = ٢

٢) إذا كان س = ٦ن - ن^{٢} فإن المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية ٠ ≤ ن ≤ ٦ تكون

أ صفر ب ٩ ج ١٨ د ٣٦

٣) إذا كانت ع (ن) = ٩,٨ن + ٥ حيث س (٠) = ١٠ ، فإن س (١٠)

أ صفر ب ٥٣٠ ج ٥٤٠ د ٥٥٠

٤) إذا كانت ع (ن) = $\frac{٢}{\pi}$ جتا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ ، كانت س ($\pi^{٢}$) = ١ فإن س (ن)

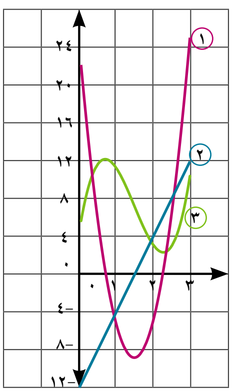
أ $\frac{٢}{\pi}$ جا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ١ ب $\frac{٢}{\pi}$ جا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ - ١

ج جا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ١ د جا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ - ١

٥) إذا كان حـ (ن) = -٤جا ٢ن ، كان ع (٠) = ٢ ، س (٠) = -٣ فإن س (π)

أ -٣ ب ٠ ج ٢ د ٣

٦) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع جسيم ومتجه سرعته وعجلة الحركة فأى الاختيارات الآتية تمثل على الترتيب منحنيات الموضع - الزمن، السرعة - الزمن، العجلة - الزمن.



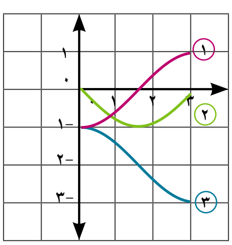
أ ٣ ، ٢، ١

ب ١، ٣، ٢

ج ٣، ١، ٢

د ١، ٢، ٣

٧) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع جسيم ومتجه سرعته وعجلة الحركة فأى الاختيارات الآتية تمثل على الترتيب منحنيات الموضع - الزمن، السرعة - الزمن ، العجلة - الزمن.



أ ٣ ، ٢، ١ ب ١، ٢، ٣

ج ٢، ٣، ١ د ٣، ١، ٢

٨) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقًا للعلاقة س = ٤ جتا ن حيث س مقاسة بوحدة سنتيمتر ، ن بالثانية ، أوجد :

أ ع عندما ن = $\frac{\pi}{٢}$ ب جـ عندما ن = π

(٩) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط المستقيم طبقًا للعلاقة ع = جا ن - جتا ن، أوجد س $(\frac{\pi}{٢})$

(١٠) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لإزاحته ف يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة ف = $ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩$ ن حيث ف مقاسة بالمتر ، ن بالثانية .

أ) أوجد عجلة الحركة عند لحظات انعدام السرعة.

ب) أوجد سرعة الجسيم عندما تكون جـ = ٠

جـ) حدد متى تتزايد سرعة الجسيم ومتى تتناقص ؟

د) أوجد المسافة المقطوعة خلال الخمس ثوان الأولى .

(١١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقًا للعلاقة حـ (ن) = -٢ بسرعة ابتدائية قدرها ٣ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم أوجد كلًّا من الإزاحة والمسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [١ ، ٤]

(١٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقًا للعلاقة ف = $ن^٣ - ٣ ن^٢$ حيث ف مقاسة بالمتر ،ن بالثانية أوجد كلًّا من:

أ) عجلة الحركة عندما تنعدم السرعة

ب) سرعته المتوسطة ، متجه سرعته المتوسطة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٥] .

(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية قدرها -٢م / ث، ومن موضع يبعد ٣ أمتار فى الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت حـ = ٢ن + ١ فأوجد س عند لحظات انعدام السرعة.

(١٤) أ ، ب نقطتان على خط مستقيم واحد تحرك جسيم من السكون مبتدءًا من النقطة أ فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ بحيث كان القياس الجبرى لسرعته يعطى بالعلاقة ع = ٠,٤ ن + ٠,٩ $ن^٢$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ،ن بالثانية وبعد ثانيتين من تحرك الجسيم الأول تحرك جسيم آخر مبتدءا من النقطة ب فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$ من السكون بعجلة ثابتة قدرها ٠,٢ م/$ث^٢$ فتقابل الجسمان بعد ٥ ثوان من تحرك الجسم الأول فأوجد البعد بين أ ، ب

قوانين نيوتن للحركة

Newton's laws of motion

الوحدة
٢

مقدمة الوحدة

يعود الفضل فى اكتشاف قانون الجذب العام إلى العالم الإنجليزى إسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) الذى يعد أحد رموز الثورة العلمية فى مجال علم الميكانيكا الحديث ، ثم جاء العالم الألمانى يوهان كبلر (١٥٧١ - ١٦٣٠) ومن قبله فوضع بعض القواعد الرياضية التى تحكم حركة الكواكب حول الشمس ، بناء على ارصاد العلماء المسلمين التى ترجمت واجريت خلال القرون السابقة وقد أسس العالم الإيطالى جاليليو جاليلى (١٥٦٤م - ١٦٤٢م) علم الحركة، حيث أجرى الكثير من التجارب على الأجسام الساقطة أو المقذوفة، كذلك الأجسام المتحركة أفقيًّا، وقد اكتشف من خلال تجاربه الكثير من الخصائص المهمة لحركتها، ويرجع له الفضل فى اكتشاف أن الأجسام التى تتحرك على سطوح أفقية بدون مقاومة تستمر فى حركتها بسرعة منتظمة ، ويُعتقد أن جاليليو كان قد توصل من خلال تجاربه إلى القانون الأول والثانى من قوانين الحركة لنيوتن. ولقد جمع إسحق نيوتن مجمل أبحاثه فى كتابه اسماه "برنسيبيا" أى المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية، ويعد هذا الكتاب من أهم الكتب العلمية التى ظهرت فى العصر الحديث، وفيه صاغ نيوتن قوانينه الثلاثة. ولقد أوضح قانون الجذب العام لنيوتن مفهوم أن القوة يمكن أن تحدث تأثيرًا عن بُعد ، فالأجسام تجذب بعضها البعض ، حتى وإن لم تكن متلامسة، فعلى سبيل المثال تجذب الأرض الأجسام بقوة تسمى " قوة الوزن" .

أما بشأن الكتلة فنلاحظ أن تعريفها الاستاتيكى لا يسمح بتعيين كتل الأجسام ، ولكن فقط بمقارنة الكتل فيما بينها عن طريق مقاومة أوزانها، كما يمكن إعطاء تعريف ديناميكى للكتلة عن طريق دراسة حركة الاجسام وتتناول هذه الوحدة دراسة الكتلة، وكمية الحركة، وقوانين نيوتن للحركة، مع تطبيقات على هذه القوانين تتناول الحركة على المستوى الأملس والخشن، ودراسة حركة البكرات البسيطة.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم كمية الحركة ووحدات قياسها - التغير فى كمية الحركة.
- يتعرف على قوانين نيوتن (الأول - الثانى - الثالث).
- يتعرف العلاقة بين القوة والعجلة:
  إذا كانت القوة ق دالة فى الزمن ن أى أن ق = د(ن) فإن :
  $ق = ك \frac{دع}{دن}$ أى أن $\int ق \, دن = ك \int دع$
  إذا كانت القوة ق دالة فى الإزاحة ف أى ق = د(ف) فإن :
  $ق = ك ع \frac{دع}{دف}$ أى أن $\int ق \, دف = ك \int ع \, دع$
- يطبق قوانين نيوتن للحركة فى مواقف حياتية مثل:
- جسم موضوع داخل مصعد متحرك بعجلة منتظمة (حركة الأجسام المتصلة بخيوط أو سلاسل).
- حركة البكرات البسيطة.
- حركة جسم على مستوى أملس (أفقى - مائل).
- يتعرف الحركة على مستوى خشن (أفقى - مائل)
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًّا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين مربوطين فى طرفى خيط يتحرك أحدهما على نضد أفقى خشن والآخر رأسيًّا.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين مربوطين فى طرفى خيط أحدهما يتحرك على مستوى مائل أملس والآخر يتحرك رأسيًّا.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين مربوطين فى طرفى خيط أحدهما يتحرك على مستوى مائل خشن والآخر يتحرك رأسيًّا.

المصطلحات الأساسية

كمية الحركة	Momentum
كمية الحركة الخطية	linear momentum
كتلة	Mass
متجه السرعة	Velocity
التغير فى كمية الحركة	Change of momentum
القانون الأول لنيوتن	Newton's first law
القصور الذاتى	Inertia
مبدأ القصور الذاتى	Inertia principle
القوة	Force
القانون الثانى لنتوتن.	Newton's second law
معادلة الحركة	Equqtion of motion
الوزن	weight
القانون الثالث لنيوتن	Newtons third law
الضغط	Pressure
رد الفعل	Reaction
حركة المصاعد	Lift motion
ميزان الزنبرك	Spring scale
ميزان الضغط	Pressure scale
ميزان معتاد	balance
مستوى مائل	Inclined plane
مستوى أملس	Smooth plane
مستوى خشن	Rough plane
احتكاك ديناميكي	Kinetic friction
احتكاك استاتيكي	static friction
بكرة ملساء	Pulley

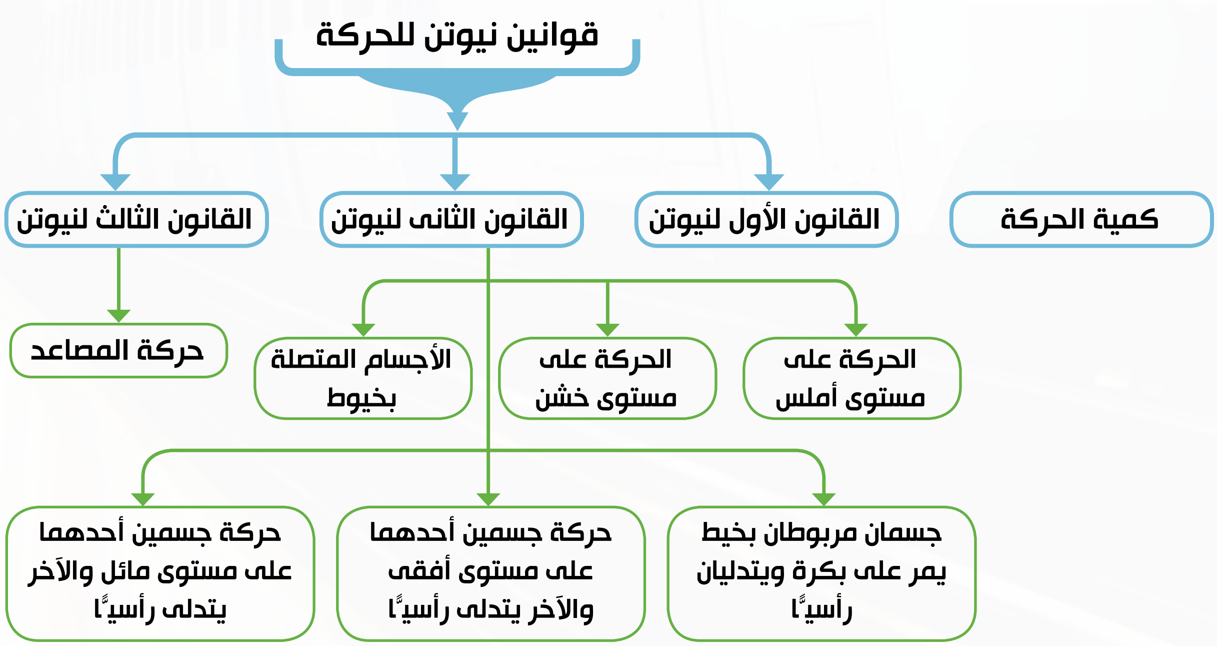
دروس الوحدة

(٢ - ١): كمية الحركة.
(٢ - ٢): القانون الأول لنيوتن
(٢ - ٣): القانون الثانى لنيوتن
(٢ - ٤): القانون الثالث لنيوتن
(٢ - ٥): حركة جسم على مستوى مائل
(٢ - ٦): حركة جسم على مستوى خشن
(٢ - ٧): البكرات البسيطة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثانية

٢ - ١

كمية الحركة

Momentum

سوف تتعلم

- مفهوم كمية الحركة.
- وحدات قياس كمية الحركة.
- التغير فى كمية الحركة.

المصطلحات الأساسية

- كمية الحركة *Momentum*
- كمية الحركة الخطية *linear momentum*
- كتلة *Mass*
- متجه السرعة *Velocity*
- التغير فى كمية الحركة *Change of momentum*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

١ ما تأثير وضع حجر كبير على سقف منزل؟ وما تأثير انطلاق رصاصة من فوهة بندقية على هذا السطح؟

٢ ما تأثير وضع حبة رمل على كف يدك؟ وما تأثير هذه الحبة من الرمل إذا تحركت فى عاصفة تجاه سيارة تتحرك مسرعة نحو هذه العاصفة؟

لاحظ من هذه الأمثلة أن:

١ - إطلاق الرصاصة رغم صغر كتلتها على سقف المنزل ستغوص فيه لمسافة ما لأن سرعة الرصاصة أكبر بكثير من سرعة الحجر.

٢ - حبة الرمل رغم صغر كتلتها يمكن أن تخدش زجاج السيارة لأنها اكتسبت كمية حركة بالنسبة للسيارة، وأن متجه كمية حركتها أصبح كبيرًا جدًّا نتيجة كِبر متجه سرعتها النسبية.

تعلم

كمية الحركة *Momentum*

كمية حركة جسم متحرك هى كمية متجهة لها نفس اتجاه سرعة هذا الجسم ومقدارها عند لحظة ما يُقدر بحاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى سرعته عند هذه اللحظة و يُرمز لمتجه كمية الحركة بالرمز $\overleftarrow{\text{مـ}}$.

$$\overleftarrow{\text{مـ}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

وفى حالة الحركة الخطية يكون كل من $\overleftarrow{\text{مـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ موازيًا للخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة، و يمكن التعبير عن كل من $\overleftarrow{\text{مـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ بدلالة القياس الجبرى لكل منهما:

$$\text{مـ} = \text{ك}\ \text{ع}$$

حيث مـ ، ع هما القياسان الجبريان لمتجهى كمية الحركة والسرعة على الترتيب.

وحدات قياس كمية الحركة *Units of momentum*

وحدة معيار كمية الحركة = وحدة كتلة × وحدة سرعة

وفى النظام الدولى للوحدات يُقاس معيار كمية الحركة بوحدة كجم. م/ث

أى أن: مـ (كجم. م / ث) = ك (كجم) × ع (م/ث).

لاحظ أن: عند ثبوت كتلة الجسم يتناسب م مع ع وتكون العلاقة بينهما خطية؛ لذلك تسمى كمية الحركة فى هذه الحالة بكمية الحركة الخطية.

مثال تعريف كمية الحركة


شكل (١)

(١) احسب كمية حركة دراجة كتلتها ٣٥ كجم تتحرك بسرعة ثابتة قدرها ١٢ م/ث فى اتجاه الشرق.

الحل

∵ م = ك ع

∴ م = ٣٥ × ١٢ = ٤٢٠ كجم . م/ث

كمية حركة الدراجة = ٤٢٠ كجم . م/ث فى اتجاه الشرق.

حاول أن تحل

(١) احسب كمية حركة قطار كتلته ٤٠ طنًّا يتحرك فى اتجاه الشمال بسرعة ثابتة قدرها ٧٢ كم/س.

(٢) احسب كمية حركة سيارة كتلتها ٨٠٠ كجم تتحرك فى اتجاه الجنوب الغربى بسرعة ثابتة قدرها ١٢٦ كم/س.

مثال استخدام المتجهات

(٢) سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ = (٣ن^{٢} - ٤ن + ١) $\overleftarrow{\text{ى}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة اتجاه حركة السيارة، إذا كانت س مقيسة بوحدة المتر فأوجد مقدار كمية حركة السيارة عند بدء الحركة ثم بعد ٣ث من بداية الحركة.


شكل (٢)

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{س}}$ = (٣ن^{٢} - ٤ن + ١) $\overleftarrow{\text{ى}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ع}}$ = $\dfrac{\text{ء}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ء ن}}$ = (٦ن - ٤) $\overleftarrow{\text{ى}}$

(١) عند بدء الحركة ن = ٠ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ = - ٤ $\overleftarrow{\text{ى}}$

∵ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ك $\overleftarrow{\text{ع}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٢٠٠٠ (- ٤ $\overleftarrow{\text{ى}}$) = - ٨٠٠٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار كمية الحركة = ٨٠٠٠ كجم. م/ث

(٢) عندما ن = ٣ث ، فإن $\overleftarrow{\text{ع}}$ = (٦ × ٣ - ٤) $\overleftarrow{\text{ى}}$ = ١٤ $\overleftarrow{\text{ى}}$

∵ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ك $\overleftarrow{\text{ع}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٢٠٠٠ (١٤ $\overleftarrow{\text{ى}}$) = ٢٨٠٠٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

مقدار كمية الحركة = ٢٨٠٠٠ كجم. م/ث.

حاول أن تحل

(٣) سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت ف = ن^{٣} - ١٢ ن^{٢} حيث ف مقيسة بالمتر، أوجد كمية حركة السيارة بعد ٤ ث من بداية الحركة.

التغير فى كمية الحركة *The change of momentum*

إذا كان متجها سرعة جسم متحرك عند لحظتين زمنيتين متتاليتين ن١ ، ن٢ على الترتيب هما $\overrightarrow{ع_1}$ ، $\overrightarrow{ع_2}$ فإن التغير فى كمية حركة الجسم يتحدد بالعلاقة:

$$\Delta \overrightarrow{م} = ك \cdot \Delta \overrightarrow{ع}$$

حيث ك كتلة الجسم المتحرك، $\Delta \overrightarrow{ع}$ التغير الحادث فى قيمة سرعته

∴ التغير فى كمية حركة الجسم Δ م = ك $(\overrightarrow{ع_2} - \overrightarrow{ع_1})$

و إذا كانت $\overrightarrow{جـ}$ (ن) هى عجلة الجسم المتحرك فإن:

$$\boxed{\Delta م = ك \int_{ن_1}^{ن_2} جـ \; ى ن}$$

مثال

التغير فى كمية الحركة

(٣) سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠٠جم من ارتفاع ٩٠سم على سطح أفقى فارتدت إلى ارتفاع ٤٠سم. احسب بوحدة كجم.م/ث مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم.

الحل

نعتبر $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة رأسيًّا لأسفل.

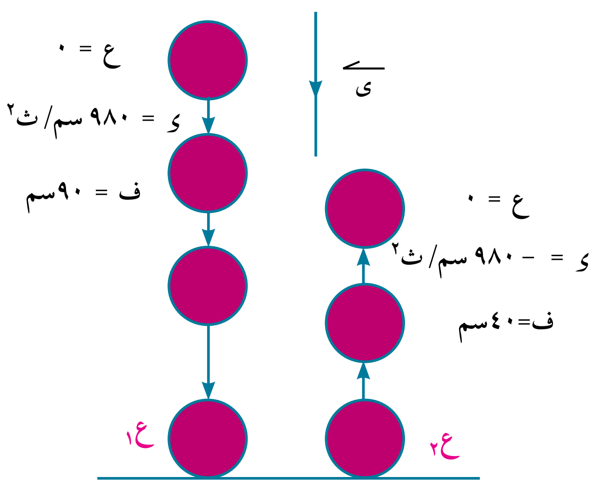
دراسة حركة الكرة فى مرحلة السقوط.

∴ ع٢ = ع٢. + ٢ ى ف

∴ ع١٢ = ٠ + ٢ × ٩٨٠ × ٩٠

ع١ = ٤٢٠ سم / ث

∴ $\overrightarrow{ع_1}$ = ٤٢٠ $\overrightarrow{ى}$



شكل (٣)

دراسة حركة الكرة فى مرحلة الارتداد.

∴ ع٢ = ع٢. + ٢ ى ف

∴ ٠ = ع٢٢ - ٢ × ٩٨٠ × ٤٠

ع٢ = ٢٨٠ سم / ث

∴ $\overrightarrow{ع_2}$ = - ٢٨٠ $\overrightarrow{ى}$

التغير فى كمية الحركة $\Delta \overrightarrow{م}$ = ك $(\overrightarrow{ع_2} - \overrightarrow{ع_1})$

= $\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ (-٢,٨ - ٤,٢) $\overrightarrow{ى}$ = -١,٤ $\overrightarrow{ى}$

∴ مقدار التغير فى كمية الحركة = ١,٤ كجم. م/ث

حاول أن تحل

(٤) حجر كتلته ٨٠٠ جم يسقط من السكون لمدة ثانيتين ثم يصطدم بسطح بركة، ويغوص فى الماء بسرعة منتظمة فيقطع ١٢ مترًا فى ٣ ثوانٍ ، أوجد التغير فى كمية حركة الحجر نتيجة لتصادمه بسطح الماء.

مثال
استخدام التكامل

٤) جسم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت عجلة حركته جـ تُعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة جـ = ٢ن - ٦ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^2، الزمن ن بالثانية، احسب التغير فى كمية حركة الجسم فى الفترة الزمنية ٥ ≥ ن ≥ ٣ إذا كانت كتلة الجسم ٨ كجم.

الحل

$\therefore \Delta م = ك \int_{ن_1}^{ن_2} جـ \, ء ن$

$\therefore \Delta م = ٨ \int_{٣}^{٥} (٢ن - ٦) \, ء ن = ٨ [ن^2 - ٦ن]_{٣}^{٥}$

$= ٨ [(٢٥ - ٣٠) - (٩ - ١٨)] = ٣٢$ كجم. م/ث

$\therefore \Delta \overrightarrow{م} = ٣٢ \, \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم.

حاول أن تحل

٥) سيارة كتلتها ١,٥ طن، تتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت جـ (ن) تعطى بالعلاقة جـ = ١٢ن - ن^2 حيث جـ مقيسة بوحدة م/ث^2، الزمن ن مقيس بالثانية أوجد:

أ) التغير فى كمية حركة السيارة خلال الثوانى الست الأولى.

ب) التغير فى كمية حركة السيارة خلال الفترة الزمنية [٢ ، ١٤]

تفكير ناقد:

فى لعبة البلياردو عندما تضرب الكرة البيضاء إحدى الكرات الأخرى نجد أن حركة كل من الكرتين تتغير، فتباطأ حركة الكرة البيضاء وربما يتغير اتجاهها ومن ثم تتناقص كمية حركتها، بينما تبدأ الكرة الأخرى فى الحركة، ومن ثم تزداد كمية حركتها. **فسر ذلك.**

شكل (٤)

تمارين ٢ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتى:

١) كمية حركة رصاصة كتلتها ١٠٠جم تتحرك بسرعة ٢٤٠م/ث.

أ) ٢٤ × ١٠$^{-3}$ جم. م/ث
ب) ٢٤ كجم. م/ث
جـ) ٢٤ × ١٠^{4} جم. م/ث
د) ٢٤ × ١٠^{3} كجم. م/ث

٢) كمية حركة سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك فى خط مستقيم بسرعة ٥٤ كم/ س.

أ) ١٠٨ طن. م/ث
ب) ٣٠ طن . كم/س
جـ) ٣٠٠٠٠ كجم. م/ث
د) ١٠٨٠٠٠ كجم. م/ث

③ جسم كتلته ٥٠٠جم يسقط من ارتفاع ٤,٩ أمتار عن سطح الأرض، كمية حركة الجسم لحظة وصوله للأرض.

أ ٢,٤٥ كجم.م/ث
ب ٤,٩ كجم.م/ث
ج ٢٤٥٠ كجم.م/ث
د ٤٩٠٠ كجم.م/ث

④ صاروخ كتلته ٤ طن بما فيه من وقود، إنطلق بسرعة ٢٠٠ م/ث، ويقذف الوقود بمعدل ثابت قدره ١٠٠ كجم كل ثانية مع بقاء كمية الحركة ثابتة فإن سرعة الصاروخ بعد ١٠ ثوان بوحدة كم/س.

أ $\frac{٨٠٠}{٣}$
ب ٦٠٠
ج ٨٠٠
د ٩٦٠

⑤ قذيفة كتلتها ١ كجم تنطلق بسرعة ٧٢٠ كم/س نحو دبابة كتلتها ٥٠ طن تتحرك نحو المدفع بسرعة ٢٠م/ث فإن:

(١) مقدار كمية حركة القذيفة بالنسبة للدبابة:

أ ٢٠٠ كجم. م/ث
ب ٢٢٠ كجم. م/ث
ج $١٠^{٧}$ كجم. م/ث
د $١,١ \times ١٠^{٧}$ كجم. م/ث

(٢) مقدار كمية حركة الدبابة بالنسبة للقذيفة:

أ ٢٠٠ كجم. م/ث
ب ٢٢٠ كجم. م/ث
ج $١٠^{٧}$ كجم. م/ث
د $١,١ \times ١٠^{٧}$ كجم. م/ث

أجب عن الأسئلة الآتية:

⑥ كرة كتلتها ٢٠٠جم تتحرك أفقيًّا بسرعة ثابتة قدرها ٤٠ م/ث، اصطدمت بحائط رأسى وكان مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة التصادم ١٢ كجم.م/ث، احسب سرعة ارتداد الكرة.

⑦ سقط جسم كتلته ٩٠جم وبعد ٣ ثوانٍ من سقوطه اصطدم بسطح سائل لزج فغاص فيه بسرعة منتظمة فقطع ٢,٢ متر فى نصف ثانية احسب التغير فى كمية الحركة نتيجة للتصادم.

⑧ جسم من المطاط كتلته ١٠٠جم يتحرك أفقيًّا بسرعة ١٢٠سم/ث عندما اصطدم بحائط رأسى وارتد فى اتجاه عمودى على الحائط بعد أن فقد ثلثى مقدار سرعته. احسب التغير فى كمية حركة الجسم المطاطى نتيجة التصادم.

⑨ من نقطة أسفل سقف حجرة بمسافة ٢٤٠سم قُذفت كرة كتلتها ٤٠جم بسرعة ٩٨٠سم/ث رأسيًّا إلى أعلى فاصطدمت بالسقف وتغيرت لذلك كمية حركتها بمقدار ٠,٤ كجم. م/ث، أوجد سرعة ارتداد الكرة.

⑩ سقطت كرة من المطاط كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم من ارتفاع ٨,١ أمتار عن أرض أفقية فارتدت الكرة رأسيًّا لأعلى إلى ارتفاع ٣,٦ أمتار بعد اصطدامها بالأرض. احسب التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم بالأرض.

⑪ عربة سكة حديد كتلتها ١٥ طنًّا تتحرك أفقيًّا بسرعة مقدارها ٤٠م/ث اصطدمت بالحاجز فى نهاية الخط فارتدت للخلف بسرعة ٣٠م/ث. احسب التغير فى كمية حركتها.

(١٢) قذف جسم كتلته ١ كجم رأسيًا لأعلى بسرعة ٥٨,٨م/ث. فاحسب التغير فى كمية حركته فى الفترات الزمنية الآتية:

أ [٢ ، ٥] ب [٤ ، ٨] ج [٧ ، ١١]

(١٣) جسم متحرك فى خط مستقيم كتلته عند أى زمن ن بالثانية تساوى $\frac{١}{٥}$ (ن + ٥) كجم، وكانت إزاحته عند أى زمن ن تُعطى بالصورة $\overleftarrow{ف}$ = $\frac{١}{٢}$ (ن^{٢} - ٤ن + ٣) $\overleftarrow{ى}$ حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم، ومعيار $\overleftarrow{ف}$ يُعطى بالمتر.

أ أوجد كمية حركة الجسم عند أى لحظة زمنية ن.

ب أوجد التغير فى كمية حركة الجسم خلال الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

(١٤) جسم كتلته ١٢ كجم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت $\overleftarrow{ف}$ تُعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overleftarrow{ف}$ = ن (٦ - ن) $\overleftarrow{ى}$ حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة، إذا كان معيار $\overleftarrow{ف}$ بوحدة المتر، ن بالثانية فأوجد التغير فى كمية حركة الجسم فى الفترات الزمنية الآتية:

أ [١ ، ٢] ب [٢ ، ٥] ج [٤ ، ٦]

(١٥) جسم يتحرك فى خط مستقيم بعجلة منتظمة حـ = - ٣م/ث^{٢} وبسرعة ابتدائية ٥م/ث. إذا كانت كتلة الجسم ١٨ كجم فأوجد مقدار التغير فى كمية الحركة فى الفترات الزمنية الآتية:

أ [٠ ، ٣] ب [١ ، ٢]

(١٦) جسم كتلته ٤٨ جم، يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت جـ = (٣ن - ١٢) م/ث^{٢}. احسب التغير فى كمية حركة الجسم خلال الفترة الزمنية الآتية:

أ [١ ، ٣] ب [٣ ، ٥]

الوحدة الثانية

٢ - ٢

القانون الأول لنيوتن

Newton's first law

سوف تتعلم

- القانون الأول لنيوتن.
- مبدأ القصور الذاتى.

المصطلحات الأساسية

- القانون الأول لنيوتن *Newton's first law*
- القصور الذاتى *Inertia*
- مبدأ القصور الذاتى *Inertiaprinciple*
- القوة *Force*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة :

نتعامل فى حياتنا اليومية مع العديد من أنواع القوى المختلفة التى قد تؤثر على الأجسام المتحركة فتغير من سرعتها مثل شخص يدفع عربة أو يسحبها أو أن تؤثر القوة على الأجسام الساكنة لتبقيها ساكنة مثل الكتاب الموضوع على المكتب أو الصور المعلقة على الحائط، ويكون تأثير القوة مباشر Contact force مثل سحب زنبرك أو دفع صندوق، ويمكن أن يكون تأثير القوة عن بعد Action -at - a distance مثل تنافر أو تجاذب قطبى مغناطيس، ويُعرف الجسيم الساكن بأنه فى حالة اتزان equilibrium

عندما تكون محصلة القوى المؤثرة عليه تساوى صفرًا .

يوجد العديد من أنواع القوة الموجودة فى الطبيعة وهى أما أن تكون ميكانيكية أو جاذبية أو كهربية أو مغناطيسية أو نووية، وسندرس فى هذه الوحدة النوع الأول والثانى فقط.

أنواع من القوى

ميكانيكية | جاذبية | كهربية | مغناطيسية | نووية

ولدراسة القوى الميكانيكية سنبدأ بدراسة قوانين نيوتن للحركة

القانون الأول لنيوتن — *Newton's first law*

وصف نيوتن من خلال هذا القانون ما الذى يحدث لجسم عندما تنعدم محصلة القوى المؤثرة عليه.

> **كل جسيم يحتفظ بحالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حالته.**

نلاحظ من القانون الأول لنيوتن الآتى :

(١) الجسم الساكن يظل ساكنًا ما لم تؤثر عليه قوة تحركه، والجسم المتحرك حركة منتظمة يظل متحركًا بها ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حركته.

(٢) يقصد بتعبير "القوة" فى صياغة القانون محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسم، ويقاس معيار القوة بوحدة النيوتن فى النظام الدولى للوحدات.

(٣) يضع القانون حالتى السكون والحركة المنتظمة فى خط مستقيم فى وضع متكافئ، وتمثل كلتاهما" الحالة الطبيعية" للجسم، عندما تكون محصلة القوى المؤثر عليه مساوية للصفر.

(٤) يبين القانون أن الجسم الساكن أو المتحرك حركة منتظمة فى خط مستقيم (أى عندما يكون فى حالته الطبيعية) لا يمكنه تغيير حالته هذه تلقائيًا ، بل لابد أن تؤثر عليه قوة فتخرجه من هذه الحالة . ولهذا السبب سمى القانون الأول لنيوتن" قانون القصور الذاتى ".

القصور الذاتى *Inertia*

من القانون الأول لنيوتن يمكن استنتاج أن الأجسام لها ميل طبيعى للمحافظة على حالتها من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم وتعرف هذه الممانعة أو المقاومة للتغيير بالقصور الذاتى.

مبدأ القصور الذاتى:

كل جسم قاصر أو عاجز بذاته عن تغيير حالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم.

نشاط

العلاقة بين الكتلة والقصور الذاتى

شكل (٥)

١ يبين النشاط التالى أن الكتلة هى مقياس لكمية القصور الذاتى.

٢ أحضر كرتين إحداهما كرة جولف تزن حوالى ٥٠٠ ث جم، وكرة بولينج وزنها تقريبًا ٥ ث كجم.

٣ أى من الكرتين تحتاج قوة أكبر لتتحرك؟

٤ دون شك تحتاج كرة البولينج إلى قوة أكبر لتبدأ الحركة من القوة التى تحتاجها كرة الجولف.

٥ يرجع ذلك إلى ميل كرة البولينج للحفاظ على وضع السكون، أى أن قصورها الذاتى كبير نظرًا لكتلتها الكبيرة التى تقدر بعشرة أضعاف كتلة كرة الجولف.

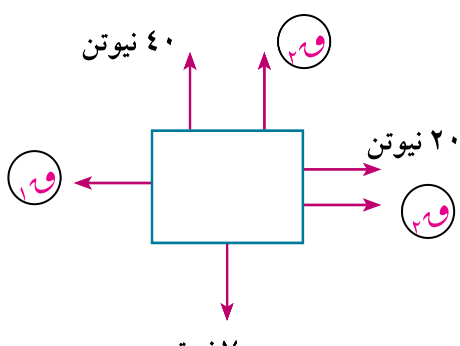
القوة *Force*

يتضمن القانون الأول لنيوتن تعريفًا للقوة بأنها المؤثر الذى يغير أو يعمل على تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة فى خط مستقيم.

مثال

(الجسم فى حالة سكون)

(١) يوضح الشكل المقابل جسم ساكن تؤثر عليه مجموعة القوى. أوجد ق١ ، ق٢ .



شكل (٦)

الحل

∵ الجسم فى حالة سكون ∴ القوى الرأسية متزنة

∴ ق٢ + ٤٠ = ٧٠

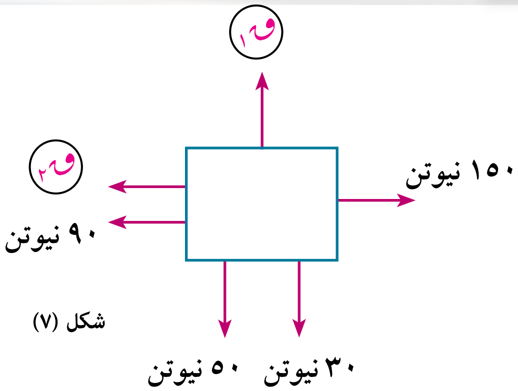
∴ ق٢ = ٣٠ نيوتن

∵ القوى الأفقية متزنة ∴ ق١ = ٢٠ + ق٢

∴ ق١ = ٥٠ نيوتن

حاول أن تحل

(١) يوضح الشكل المقابل جسمًا ساكنًا تؤثر عليه مجموعة من القوى . أوجد ق١ ، ق٢.

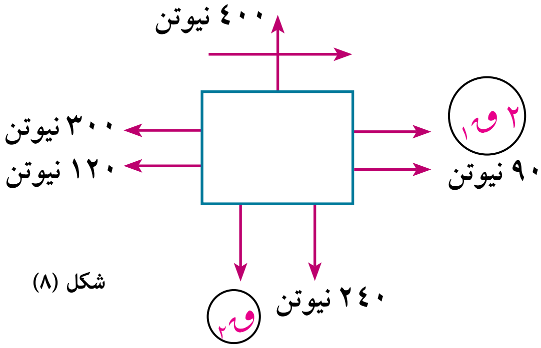


شكل (٧)

مثال

(الجسم فى حالة حركة)

(٢) يوضح الشكل المقابل جسمًا يتحرك أفقيًّا فى الاتجاه الموضح بسرعة ثابتة قدرها ٨م/ث ، أوجد ق١ ، ق٢.



شكل (٨)

الحل

∵ الجسم فى حالة حركة منتظمة

∴ القوى الأفقية متزنة

∴ ٢ق١ + ٩٠ = ٣٠٠ + ١٢٠

∴ ق١ = ١٦٥ نيوتن

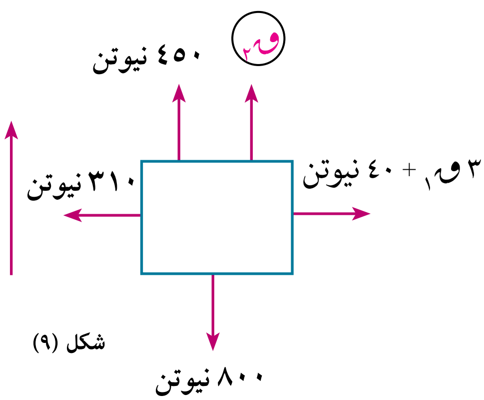
∵ القوى الرأسية متزنة

∴ ٢٤٠ + ق٢ = ٤٠٠

∴ ق٢ = ١٦٠ نيوتن

حاول أن تحل

(٢) يوضح الشكل المقابل جسمًا متحركًا رأسيًا لأعلى بسرعة ثابتة تؤثر عليه مجموعة من القوى . أوجد ق١ ، ق٢.



شكل (٩)

مثال

(٣) قطار كتلته ٢٠٠ طن، يتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته. فإذا كانت هذه المقاومة٩,٦ ث. كجم لكل طن من كتلة القطار عندما كانت سرعة القطار ٧٢ كم / ساعة. فأوجد أقصى سرعة للقطار إذا كانت القاطرة تجره بقوة ثابتة مقدارها ٤,٣٢ ث طن.

معطيات

م١ = ٩,٦ × ٢٠٠

= ١٩٢٠ ث كجم

ع١ = ٧٢ كم / س


شكل (١٠)

الحل

نفرض أن المقاومة = م١ عندما تكون سرعة القطار ع١.

المقاومة = م٢ عندما تكون سرعة القطار ع٢.

∵ المقاومة تتناسب مع مربع السرعة

$$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$$

يبلغ القطار أقصى سرعة له عندما تكون المقاومة مساوية تمامًا لقوة جَرِّ القطار

فإذا كانت $ع_2$ أقصى سرعة للقطار فإن $م_2 = ٤,٣٢$ ث طن $\qquad \therefore م_2 = ٤٣٢٠$ ث كجم

$$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2} \qquad \frac{١٩٢٠}{٤٣٢٠} = \frac{٧٢ \times ٧٢}{ع_2^2} \qquad \therefore ع_2 = ١٠٨ \text{ كم/ساعة.}$$

حاول أن تحل

(٣) قطار كتلته ٢٤٠ طنًّ تجره قاطرة بقوة ثابتة مقدارها ١٢ ث طن، فإذا كانت المقاومة لحركة القطار تتناسب مع مربع سرعته، وكانت المقاومة ٨ ث كجم لكل طن من الكتلة المتحركة عندما كانت سرعة القطار ٤٥ كم/ س. احسب أقصى سرعة للقطار.

مثال

(٤) يهبط أحد جنود المظلات رأسيًّا ومظلته مفتوحة، فإذا كان وزن الجندى ومعداته ٩٠ ث كجم، وكانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعته، وكانت أقصى سرعة هبوط للجندى ١٥ كيلومتر / ساعة فأوجد مقاومة الهواء للجندى عندما كانت سرعته ١٠ كيلو متر / ساعة.

الحل

يبلغ الجندى أقصى سرعة هبوط عندما تكون المقاومة مساوية لوزن الجندى ومعداته.

إذا كانت $م_1$ هى مقاومة الهواء عندما كانت سرعة الجندى $ع_1$

$\therefore م_1 = ٩٠$ ث كجم $\qquad$ عندما $\quad ع_1 = ١٥$ كم/ س

واذا كانت $م_2$ هى مقاومة الهواء عندما كانت سرعة الجندى $ع_2$

$\therefore م_2 = ؟ \qquad$ عندما $\quad ع_2 = ١٠$ كم/ س

$\because$ المقاومة تتناسب مع مربع السرعة

$$\therefore \frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2} \qquad \therefore \frac{٩٠}{م_2} = \frac{١٥ \times ١٥}{١٠ \times ١٠} \text{ ،} \quad م_2 = ٤٠ \text{ث كجم}$$

شكل (١١)

حاول أن تحل

(٤) رجل مربوط إلى مظلة نجاة يهبط هو والمظلة رأسيًّا، فإذا كانت مقاومة الهواء تتناسب طرديًّا مع مربع سرعته ومقاومة الهواء تساوى $\frac{٤}{٩}$ من وزن الجندى ومعداته عندما كانت سرعته ١٢ كم /س . أوجد أقصى سرعة هبوط للجندى.

مثال

(٥) يتحرك جسم فى خط مستقيم تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} - ١٥\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ بحيث كان متجه إزاحته $\overrightarrow{ف}$ يُعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = ٢ن\overrightarrow{س} - ن\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ فأوجد معيار $\overrightarrow{ق_3}$.

الحل

$\because \overrightarrow{\text{ف}} = ٢\text{ن}\,\overrightarrow{\text{س}} - \text{ن}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{ع}} = \frac{\text{د}\,\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{د ن}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = \frac{\text{د}\,\overrightarrow{\text{ع}}}{\text{د ن}} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ الجسم يتحرك بسرعة ثابتة

$\therefore \overrightarrow{\text{ق}_١} + \overrightarrow{\text{ق}_٢} + \overrightarrow{\text{ق}_٣} = \overrightarrow{٠}$ $\therefore \overrightarrow{\text{ق}_٣} = -\overrightarrow{\text{ق}_١} - \overrightarrow{\text{ق}_٢}$

$\overrightarrow{\text{ق}_٣} = (-٤ ، ٠ ، -٣) + (١ ، -٤ ، ١٥)$ $\overrightarrow{\text{ق}_٣} = -٣\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\text{ق}_٣ = \|\overrightarrow{\text{ق}_٣}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = ١٣$ وحدة قوة.

حاول أن تحل

(٥) جسم يتحرك بسرعة منتظمة تحت تأثير مجموعة القوى $\overrightarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$
حيث $\overrightarrow{\text{ق}_١} = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢} = -٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{جـ}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، أوجد كلًا من أ ، ب ، حـ..

تمـــارين ٢ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة فى كل مما يأتى:

(١) سيارة كتلتها ٤ أطنان تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة، إذا كانت قوة المحرك ١٢٠ ث كجم فإن مقاومة الحركة لكل طن من الكتلة.

(أ) ٤ ث طن　(ب) ٣٠ ث كجم　(ج) ١٢٠ ث كجم　(د) ٤٨٠ ث كجم

(٢) تحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة منتظمة تحت تأثير القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_١} = ٢\,\text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢} = ٦\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}} - \text{هـ}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ فأوجد أ + ب + هـ .

(أ) ٤　(ب) ٣　(ج) -٣　(د) -٤

(٣) إذا كان جسم وزنه ٢٠ ث كجم ينزلق بسرعة منتظمة على مستوى مائل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ فإن مقاومة المستوى بثقل الكيلو جرام:

(أ) صفر　(ب) ١٠　(ج) $١٠\sqrt{٣}$　(د) ٢٠

(٤) جسم يتحرك بسرعة منتظمة تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$ حيث $\overrightarrow{\text{ق}_١} = ٥\,\overrightarrow{\text{س}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٣٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢} = ٥\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٤٩\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، فإن مقدار $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$.

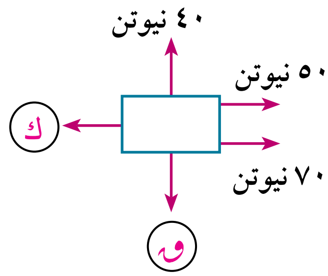
(أ) ٤٩ وحدة قوة .　(ب) ٥٤ وحدة قوة.　(ج) ٨٥ وحدة قوة.　(د) ١٠٣ وحدة قوة.

(٥) جندى مظلات يهبط رأسيًا وكانت مقاومة الهواء لحركته تتناسب مع مربع سرعته وكانت $\text{ع}_١$ سرعته عندما كانت مقاومة الهواء له تعادل $\frac{٩}{٢٥}$ من وزنه، $\text{ع}_٢$ أقصى سرعة هبوط للجندى. احسب $\text{ع}_١ : \text{ع}_٢$

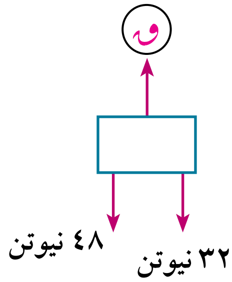
(أ) ٩ : ٢٥　(ب) ٢٥ : ٩　(ج) ٣ : ٥　(د) ٥ : ٣

أجب عن الأسئلة الآتية:

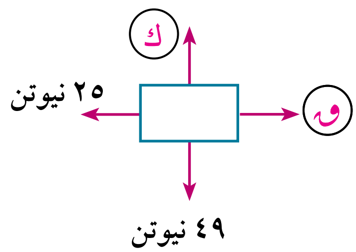
٦ في كل من المواقف الآتية الجسم في حالة سكون تحت تأثير مجموعة من القوى.

أ


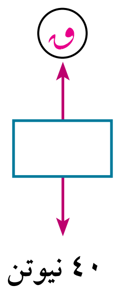
شكل (١٢)

ب


شكل (١٣)

جـ


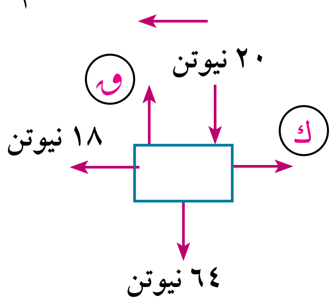
شكل (١٤)

د


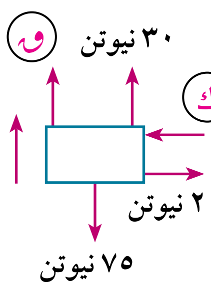
شكل (١٥)

أوجد مقدار القوة المجهولة فى كل حالة.

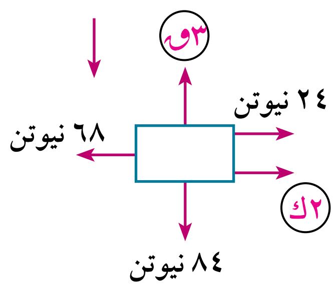
٧ في كل من المواقف الآتية: الجسم متحرك بسرعة منتظمة ع تحت تأثير مجموعة من القوى.

أ


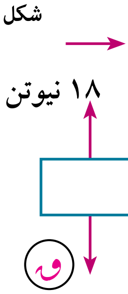
شكل (١٦)

ب


شكل (١٧)

جـ


شكل (١٨)

د


شكل (١٩)

أوجد مقدار القوة المجهولة فى كل حالة.

٨ سيارة كتلتها ٨ أطنان تتحرك بسرعة منتظمة تحت تأثير مقاومة ثابتة مقدارها ٦ ث كجم لكل طن من كتلة السيارة. فما قوة محرك السيارة؟

٩ قطار كتلته ٢٤٠ طنًّا يتحرك بسرعة منتظمة، وكانت قوة محرك القطار ٤ ث طن ، أوجد مقدار المقاومة لكل طن من كتلة القطار؟

١٠ سيارة كتلتها ٣ أطنان تتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعة السيارة ، فإذا كانت هذه المقاومة ٨ ث كجم لكل طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٣٦ كم/س ، فأوجد أقصى سرعة للسيارة إذا كانت قوة آلات جر السيارة ١٢٠ ث كجم.

١١ قطار كتلته ٢٠٠ طن يتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت هذه المقاومة ٨ث كجم لكل طن من كتلة القطار عندما كانت سرعة القطار ٧٠ كم/س. فأوجد أقصى سرعة للقطار إذا كانت القاطرة تجره بقوة ثابتة مقدارها ٦,٤ ث طن.

١٢ قطار كتلة ٣٠٠ طن تجره قاطرة بقوة ثابتة مقدارها ٨١٠ ث كجم تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع السرعة، فإذا كانت أقصى سرعة للقطار تساوى ٣٠ م/ث. فأوجد معدل المقاومة لكل طن من كتلة القطار عندما تكون سرعة القطار ٩٠ كم/س.

١٣ وزن جندى مظلات ومعداته ٨٠ ث كجم ، ومقاومة الهواء لحركته تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت هذه المقاومة تساوى ٤٥ ث كجم عندما كانت سرعة الجندى ٤,٥ كم/س فأوجد أقصى سرعة يكتسبها الجندى أثناء هبوطه.

١٤ وزن جندى ومعداته ٩٠ ث كجم ، ومقاومة الهواء لحركته تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت أقصى سرعة هبوط للجندى ١٢ كم /س، فأوجد مقاومة الهواء عندما كانت سرعته ٨ كم /س.

١٥ قاطرة كتلتها ٣٠ طنًّا وقوة آلاتها ٥١ ثقل طن تجر عدد من عدد العربات كتلة كل منها ١٠ أطنان لتصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° بسرعة منتظمة، فإذا كانت المقاومة لحركة القاطرة والعربات ١٠ ثقل كجم لكل طن من الكتلة فما هو عدد العربات.

١٦ قطار كتلته ٣٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٤٠}$ فى اتجاه خط أكبر ميل، فإذا كانت أقصى سرعة للقطار ١٠٨ كم/س وقوة آلات الجر تساوى ٣٥٠٠ ث كجم، وإذا كان مقدار المقاومة يتناسب مع مربع مقدار السرعة فأوجد المقاومة التى يلاقيها القطار عندما يتحرك بسرعة قدرها ٧٢ كم/س.

الوحدة الثانية
٢ - ٣

القانون الثانى لنيوتن

Newton's second law

فكر و ناقش

نعلم من القانون الأول لنيوتن أن محصلة القوى المؤثرة على جسم متحرك بسرعة منتظمة تنعدم، أما إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على الجسم لا تساوى صفرًا، فإن الجسم سيتحرك بعجلة .

- هل توجد علاقة بين مقدار القوة المحصلة المؤثرة على الجسم ومقدار عجلة الحركة؟
- هل يمكنك استنتاج هذه العلاقة؟

تعلم

١ - القانون الثانى لنيوتن
Newton's second law

معدل التغير فى كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثة له، ويحدث فى اتجاه القوة

$\frac{د}{د ن}(ك \overleftarrow{ع}) \propto \overleftarrow{ق}$ أى أن $\frac{د}{د ن}(ك \overleftarrow{ع}) = أ \overleftarrow{ق}$ (حيث أ ثابت التناسب)

وعند ثبوت كتلة الجسم أثناء الحركة فإن :

$ك \frac{د \overleftarrow{ع}}{د ن} = أ \overleftarrow{ق}$ (حيث أ ثابت التناسب)

وتكون $ك \overleftarrow{جـ} = أ \overleftarrow{ق}$

وإذا عرفنا وحدة القوى بأنها القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته وحدة الكتل لأكسبته وحدة العجلات، وبالتعويض فى المعادلة السابقة نجد أن:

$١ = أ \times ١ \times ١$ $\therefore أ = ١$

ونأخذ المعادلة السابقة الصورة $ك \overleftarrow{جـ} = \overleftarrow{ق}$

وتسمى هذه المعادلة **بمعادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة**، وتعتبر المعادلة الأساسية لعلم الديناميكا. إذ يمكن تطبيقها على جميع الأجسام المتحركة ثابتة الكتلة.

من معادلة الحركة السابقة نجد أن كل من $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ لهما نفس الاتجاه، فإذا قيست $\overleftarrow{جـ}$ فى اتجاه معين لزم قياس $\overleftarrow{ق}$ فى الاتجاه نفسه ؛ لذلك من الأنسب كتابة معادلة الحركة فى الصورة :

$$\boxed{ك \overleftarrow{جـ} = \overleftarrow{ق}}$$

لتحديد اتجاه العجلة اولاً.

سوف تتعلم
- القانون الثانى لنتوتن.
- وحدات القوة.
- الوزن والكتلة.

المصطلحات الأساسية
- القانون الثانى لنتوتن. *newton's second law*
- معادلة الحركة *Equqtion of motion*
- القوة *force*
- الكتلة *mass*
- الوزن *weight*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.

و إذا كانت جـ ، ق تعبر عن القياس الجبرى لكل من $\overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{ق}$ على الترتيب،
فإن معادلة الحركة لجسم ثابت الكتلة تأخذ الصورة:

$$\boxed{ك\ جـ = ق}$$

حيث ك كتلة الجسم المتحرك، جـ عجلة الحركة، ق تعبر عن القياس الجبرى لمحصلة مجموعة القوى المؤثرة على الجسم، أى أن:

$$\boxed{ك\ جـ = \text{مجـ}\ ق}$$

اما إذا كانت كتلة الجسم ك متغيرة فإن معادلة حركة الجسم تأخذ الصورة

$$\boxed{\overleftarrow{ق} = \frac{ء}{ء ن}(ك\ \overleftarrow{ع})}$$

$\therefore$ مجـ ق $= \frac{ء}{ء ن}$ (ك ع)

حيث كل من ك ، ع دوال قابلة للاشتقاق فى ن

معادلة الحركة با ستخدام التفاضل

Use of calculus to determine the equation of motion

معادلة حركة جسم ثابت الكتلة ك تُعطى بالصورة

ق = ك جـ

فإذا كانت جـ $= \frac{ء ع}{ء ن}$ فإن ق $=$ ك $\frac{ء ع}{ء ن}$ $\therefore \int_{ن_1}^{ن_2} ق\ ء ن = ك \int_{ع_1}^{ع_2} ء ع$

أما إذا كانت جـ $=$ ع $\frac{ء ع}{ء ف}$ فإن ق $=$ ك ع $\frac{ء ع}{ء ف}$ $\therefore \int_{ف_1}^{ف_2} ق\ ء ف = ك \int_{ع_1}^{ع_2} ع\ ء ع$

وحدات القوة والكتلة

units of force and units of mass

عند استنتاج معادلة الحركة لجسم متحرك اخترنا وحدات محددة لكل من القوة والكتلة والعجلة، حتى يكون ثابت التناسب مساويًا للواحد الصحيح، وتصبح معادلة الحركة على الصورة ك جـ = ق، لذلك عند استخدام معادلة الحركة، فإننا نستخدم الوحدات المطلقة للقوة مثل النيوتن، الداين

ك × جـ = ق
١ كجم × ١ م/ ث^2 = ١ نيوتن
١جم × ١سم/ ث^2 = ١ داين

تذكر أن

١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن

١ ث جم = ٩٨٠ داين

الوزن والكتلة

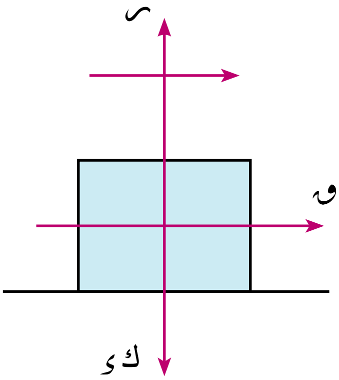
the weight and the mass

وزن الجسم هو قوة جذب الأرض للجسم، فإذا كان لدينا جسم كتلته ١ كجم، فإن وزنه طبقًا لمعادلة الحركة يساوى١ ث كجم

$\because$ ك جـ = ق $\qquad \therefore$ ١ × ٩,٨ = ق $\qquad$ ق = ٩,٨ نيوتن = ١ ث كجم

مثال

① أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن على جسم ساكن كتلته ٨ كجم، فحركته فى اتجاهها بعجلة منتظمة، احسب المسافة المقطوعة بعد ١٢ ث وسرعته عندئذ.



شكل (٢٠)

الحل

و = ١٠ نيوتن ، ع. = ٠

ك = ٨ كجم ، ن = ١٢ ث

معادلة حركة الجسم

ك جـ = و ∴ ٨ جـ = ١٠

جـ = $\frac{٥}{٤}$ م/ث

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ع = ٠ + $\frac{٥}{٤}$ × ١٢ = ١٥ م/ث

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} ∴ ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٤}$ × ١٤٤ = ٩٠ متر

حاول أن تحل

① فصلت العربة الأخيرة من قطار سكة حديد وكتلتها ٢٤,٥ طنًّا، عندما كانت سرعتها ٥٤ كم/ س، فتحركت بتقصير منتظم وتوقفت بعد ١٢٥ مترًا، أوجد مقدار المقاومة التى أثرت على العربة المنفصلة بثقل الكيلوجرام.


شكل (٢١)

مثال

② سقط جسم كتلته ٣ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٥سم، أوجد مقاومة الرمل للجسم بثقل الكيلو جرام بفرض ثبوتها علمًا بأن الجسم تحرك بعجلة منتظمة داخل الرمل

الحل

مرحلة السقوط الحر

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ى ف

ع^{٢} = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠

ع = ١٤ م/ث

مرحلة الغوص فى الرمل

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢جـ ف

٠ = (١٤)^{٢} + ٢جـ × ٠,٠٥

جـ = - ١٩٦٠ م/ث^{٢}

معادلة الحركة

ك جـ = ك ى - م

٣ × - ١٩٦٠ = ٣ × ٩,٨ - م

∴ م = ٣×٩,٨ + ٣ × ١٩٦٠

م = ٥٩٠٩,٤ نيوتن

م = ٦٠٣ ث كجم

؟ حاول أن تحل

٢) صندوق كتلته ١٠٠ كجم، يُرفع رأسيًا لأعلى بحبل بعجلة منتظمة قدرها ٢٥ سم/ث^{٢}. أوجد قوة الشد فى الحبل مع إهمال المقاومة.

مثال


شكل (٢٣)

٣) قطار كتلته ٢٢٠ طن، يتحرك فى طريق أفقى مستقيم بسرعة منتظمة مقدارها ٢٩,٤ م/ث ، وأثناء حركته انفصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ٢٤ طنًا ، وتحركت بتقصير منتظم فوقفت بعد دقيقة واحدة من لحظة انفصالها، أوجد:

أولًا: مقدار المقاومة لكل طن من كتلة القطار بفرض ثبوتها.

ثانيًا: مقدار قوة آلة جر القطار.

ثالثًا: المسافة بين الجزء الباقى من القطار والعربة المنفصلة لحظة سكون العربة المنفصلة علمًا بأن باقى القطار تحرك بعجلة منتظمة.

الحل

أولًا: دراسة حركة العربة المنفصلة:

ع. = ٢٩,٤ م/ث   ك = ٢٤ طن   ع = ع. + جـ ن

ن = ٦٠ ث   ع = ٠   ٠ = ٢٩,٤ + ٦٠ جـ

∴ جـ = - ٠,٤٩ م/ث^{٢}

من معادلة حركة العربة المنفصلة

ك جـ = - م   ٢٤ × ١٠٠٠ × - ٠,٤٩ = - م

م = ١١٧٦٠ نيوتن.   ∴ م = ١٢٠٠ ث كجم

م = ٥٠ ث كجم/طن

المسافة التى تحركتها العربة المنفصلة خلال دقيقة واحدة بعد الانفصال

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

= ٢٩,٤ × ٦٠ - $\frac{١}{٢}$ × ٠,٤٩ × (٦٠)^{٢}

ف = ٨٨٢ متر

ثانيًا: دراسة حركة القطار قبل الانفصال

∵ القطار كان متحركًا بسرعة منتظمة قبل الانفصال   ك = ٢٢٠ طن

∴ القوة المحركة = المقاومات الكلية   المقاومة/ طن = ٥٠ ث كجم

∴ ق = ٥٠ × ٢٢٠ = ١١٠٠٠ ث كجم

ثالثًا: دراسة حركة باقى القطار بعد انفصال العربة الأخيرة

معادلة الحركة

ك جـ = و - م

١٩٦ × ١٠٠٠ جـ = (١١٠٠٠ - ٥٠ × ١٩٦) × ٩,٨

جـ = $\frac{٣}{٥٠}$ م/ث^{٢}

ك = ١٩٦ طن

و = ١١٠٠٠ ث كجم

المقاومة/طن = ٥٠ ث كجم

من قوانين الحركة

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

= ٢٩,٤ × ٦٠ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٥٠}$ × (٦٠)^{٢}

ف = ١٨٧٢ متر

المسافة بين باقى القطار والعربة المنفصلة لحظة سكونها

= ١٨٧٢ - ٨٨٢

= ٩٩٠ متر

تفكير ناقد: ارسم منحنى يمثل المسافة بين باقى القطار والعربة المنفصلة منذ لحظة انفصالها حتى تتوقف، ثم من خلال المنحنى أوجد:

أ) متى تكون المسافة بينهما ١١٠ متر؟

ب) المسافة بينهما بعد ٤٠ ثانية من انفصال العربة.

حاول أن تحل

٣) منطاد كتلته ١٠٥ كجم، يتحرك رأسيًّا لأسفل بعجلة منتظمة مقدارها ٩٨ سم/ث^{٢}. أوجد مقدار قوة رفع الهواء المؤثرة على المنطاد بثقل الكيلو جرام، وإذا سقط من منطاد جسم كتلته ٣٥ كجم، عندما كانت سرعة المنطاد ٤٩٠ سم/ث، أوجد المسافة بين المنطاد والجسم المنفصل عنه بعد $\frac{٢٠}{٧}$ ثانية من لحظة الانفصال.

شكل (٢٤)

مثال

٤) يتحرك جسم كتلته الوحدة تحت تأثير القوى الثلاث $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = أ$\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − هـ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، فإذا كان متجه الإزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ن $\overleftarrow{\text{س}}$ + ($\frac{١}{٢}$ن^{٢} + ن) $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، هـ

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{ق}}$ = $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ + $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ + $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$ = (أ + ٢) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (ب + ٣) $\overleftarrow{\text{ص}}$ + (٣ − هـ) $\overleftarrow{\text{ع}}$

∵ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = ن $\overleftarrow{\text{س}}$ + ($\frac{١}{٢}$ن^{٢} + ن) $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

$\overleftarrow{\text{ع}}$ = $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + (ن + ١) $\overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{جـ} = \frac{د \overleftarrow{ع}}{د ن} = \overleftarrow{ص}$

∵ ك $\overleftarrow{جـ} = \overleftarrow{ق}$ ∴ $\overleftarrow{ص} = (أ + ٢)\ \overleftarrow{س} + (ب + ٢)\ \overleftarrow{ص} + (٣ - هـ)\ \overleftarrow{ع}$

أ + ٢ = ٠ ، ب + ٣ = ١ ، ٣ − هـ = ٠

أ = −٢ ، ب = −٢ ، هـ = ٣

٩ حاول أن تحل

٤ يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية هى $\overleftarrow{ق}_١ = أ\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = ٢\ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٣ = ٣\ \overleftarrow{س} + ب\ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overleftarrow{ف} = (ن^٢ + ١)\ \overleftarrow{س} + (٢ن^٢ + ٣)\ \overleftarrow{ص}$ ، عيِّن قيمة كل من أ ، ب.

مثال

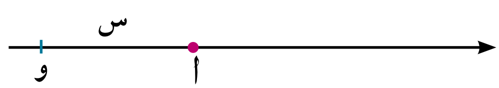
٥ أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ على جسم ساكن كتلته ١ كجم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت ق = ٥ س + ٦ حيث س بعد الجسم عن "و" مقيسة بالمتر، ق بالنيوتن.

أوجد:

أولا سرعة الجسم ع عندما س = ٤ متر

ثانيًا إزاحة الجسم عندما تكون ع = ٩م/ث

الحل



شكل (٢٥)

∵ ق = ٥ س + ٦

∴ ك جـ = ٥ س + ٦

∵ جـ = ع $\frac{د ع}{د س}$ ، ك = ١ كجم

أولًا:

∴ ع $\frac{د ع}{د س}$ = ٥ س + ٦

∴ $\int_٠^٤$ ع د ع = $\int_٠^٤$ (٥ س + ٦) د س

∴ $[\frac{١}{٢} ع^٢]_٠^٤ = [\frac{٥}{٢} س^٢ + ٦ س]_٠^٤$

∴ $\frac{١}{٢} ع^٢ = (\frac{٥}{٢} \times ١٦ + ٦ \times ٤) - ٠$

ع^٢ = ١٢٨

∴ ع = ± ٨ $\sqrt{٢}$ م/ث

ثانيًا:

∵ ع $\frac{د ع}{د س}$ = ٥ س + ٦

∴ $\int_٠^٩$ ع د ع = $\int_٠^س$ (٥ س + ٦) د س

∴ $[\frac{١}{٢} ع^٢]_٠^٩ = [\frac{٥}{٢} س^٢ + ٦ س]_٠^س$

∴ $\frac{٨١}{٢} = \frac{٥}{٢}$ س^٢ + ٦س − ٠

∴ ٥س^٢ + ١٢س − ٨١ = ٠

(٥س + ٢٧) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٣ ، س = $-\frac{٢٧}{٥}$

حاول أن تحل

٥) أثرت قوة ق على جسم كتلته ٣ كجم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا بسرعة قدرها ٢م/ث، وكانت $ق = \frac{٣}{٢ع + ١}$ حيث ع سرعة الجسم بعد زمن قدره ن، متى تكون سرعة الجسم ٦ م/ث.

مثال

٦) قوة تؤثر على جسم كتلته ٢٥٠ جم، يتحرك فى خط مستقيم مبتدئًا من السكون من نقطة أصل "و" على الخط المستقيم، وكانت $\overrightarrow{ق} = (٥ن - ٢)\overrightarrow{س} + ٤ن\overrightarrow{ص}$

إذا كانت ق مقيسة بوحدة النيوتن، ن بالثانية، أوجد كلًّا من السرعة $\overrightarrow{ع}$ ، الإزاحة $\overrightarrow{ف}$ بدلالة الزمن ن

الحل

$\because \overrightarrow{ق} = (٥ن - ٢)\overrightarrow{س} + ٤ن\overrightarrow{ص}$ $\qquad$ $\because \overrightarrow{ق} = ك\,\overrightarrow{جـ}$ $\qquad$ حيث $ك = \frac{١}{٤}$ كجم

$\therefore \frac{١}{٤}\overrightarrow{جـ} = (٥ن - ٢)\overrightarrow{س} + ٤ن\overrightarrow{ص}$ $\qquad$ $\therefore \overrightarrow{جـ} = (٢٠ن - ٨)\overrightarrow{س} + ١٦ن\overrightarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{جـ} = \frac{د\overrightarrow{ع}}{دن}$ $\qquad$ $\therefore \frac{د\overrightarrow{ع}}{دن} = (٢٠ن - ٨)\overrightarrow{س} + ١٦ن\overrightarrow{ص}$

$\therefore \int_{٠}^{ع} د\overrightarrow{ع} = \int_{٠}^{ن} [(٢٠ن - ٨)\overrightarrow{س} + ١٦ن\overrightarrow{ص}]\,دن$

$\therefore \overrightarrow{ع} = (١٠ن^{٢} - ٨ن)\overrightarrow{س} + ٨ن^{٢}\overrightarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{ع} = \frac{د\overrightarrow{ف}}{دن}$ $\qquad$ $\therefore \frac{د\overrightarrow{ف}}{دن} = (١٠ن^{٢} - ٨ن)\overrightarrow{س} + ٨ن^{٢}\overrightarrow{ص}$

$\therefore \int_{٠}^{ف} د\overrightarrow{ف} = \int_{٠}^{ن} [(١٠ن^{٢} - ٨ن)\overrightarrow{س} + ٨ن^{٢}\overrightarrow{ص}]\,دن$

$\therefore \overrightarrow{ف} = (\frac{١٠}{٣}ن^{٣} - ٤ن^{٢})\overrightarrow{س} + \frac{٨}{٣}ن^{٣}\overrightarrow{ص}$

حاول أن تحل

٦) قوة $\overrightarrow{ق}$ تؤثر على جسم ساكن كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم مبتدئًا حركته من نقطة ثابتة "و" على خط مستقيم، وكانت $\overrightarrow{ق} = (٤ن - ١)\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ حيث ن الزمن مقيسًا بالثانية، ق مقيسًا بالنيوتن ، أوجد عندما ن = ٢ ثانية، سرعة الجسم ، وبعده عن و.

مثال

٧) يتحرك جسم متغير الكتلة، كتلته ك = ٢ن + ١ فى خط مستقيم، وكان متجه إزاحته يُعطى بالعلاقة: $\overrightarrow{ف} = (\frac{١}{٢}ن^{٢} + ن)\overrightarrow{س}$ حيث $\overrightarrow{س}$ متجه وحدة موازٍ للخط المستقيم .

أوجد كمية حركة هذا الجسم واستنتج مقدار القوة المؤثرة عليه.

الحل

ك = ٢ ن + ١

متجه السرعة $\overrightarrow{ع} = \frac{د\overrightarrow{ف}}{دن} = \frac{د}{دن}(\frac{١}{٢}ن^{٢} + ن)\overrightarrow{س} = (ن + ١)\overrightarrow{س}$

متجه كمية الحركة $\overleftarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}$

$= (٢\text{ن} + ١)(\text{ن} + ١)\ \overleftarrow{\text{س}} = (٢\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ١)\ \overleftarrow{\text{س}}$

من القانون الثانى لنيوتن نجد أن :

$$\overleftarrow{\text{ق}} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}(\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}) = \frac{\text{د}\ \overleftarrow{\text{م}}}{\text{د ن}}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{د ن}}(٢\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ١)\ \overleftarrow{\text{س}} = (٤\text{ن} + ٣)\ \overleftarrow{\text{س}}$$

أى أن القوة المؤثرة على الجسم تكون فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ ويساوى مقدارها (٤ ن + ٣)

٩ حاول أن تحل

٧ كرة معدنية كتلتها ١٠٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٠م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت يساوى ٠,٦ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة.

تمـــاريـن ٢ – ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتي:

١ جسم كتلته ٥ كجم يكون وزنه:

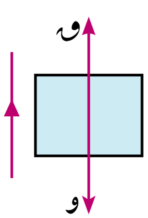
أ $\frac{٢٥}{٤٩}$ نيوتن.   ب ٥ نيوتن   ج ٤٩ نيوتن   د ٤٩ ث كجم

٢ جسم كتلته ك كجم يتحرك تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٣\ \overleftarrow{\text{س}} + ٤\ \overleftarrow{\text{ص}}$ ، حيث ق بالنيوتن، فإن مقدار عجلة الحركة بوحدة م/ث^٢:

أ ٣   ب ٤   ج ٥   د ٧

٣ جسم كتلته الوحدة يتحرك تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٥\ \overleftarrow{\text{ى}}$ فإذا كان متجه سرعته $\overleftarrow{\text{ع}} = (\text{أ}\text{ن}^٢ + \text{ب ن})\ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، فإن أ + ب

أ ٠   ب $\frac{٥}{٢}$ ج $\frac{٧}{٢}$ د ٥



شكل (٣٦)

٤ جسم كتلته ٨ كجم يتحرك رأسيًّا لأعلى بعجلة منتظمة جـ تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه الحركة مقدارها ١٢ ث كجم. فإن جـ بوحدة م/ ث^٢:

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٣}{٢}$ ج ٤,٩   د ١٤,٧

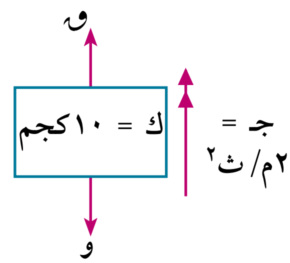
٥ أُطلقت رصاصة كتلتها ٧ جم أفقيًّا من فوهة مسدس بسرعة ٢٤٥ م/ث على حاجز رأسى من الخشب فغاصت فيه ١٢,٢٥ سم قبل أن تسكن. احسب مقاومة الخشب للرصاصة علمًا بأنها تحركت بتقصير.

أ ١٧,١٥ نيوتن   ب ١٧٥ نيوتن   ج ١٧٥ ث كجم   د ١٧١٥ ث كجم

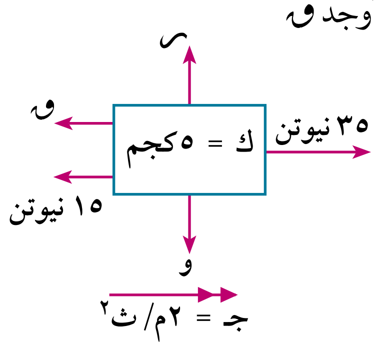
٦ إذا تحرك جسم كتلته (٢ن + ٣) كجم يتحرك فى خط مستقيم، وكان متجه إزاحته كدالة فى الزمن يُعطى بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ف}} = (\frac{٣}{٢}\text{ن}^٢ + ٢\text{ن})\ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، ف مقاسه بالمتر ، ن بالثانية فإن مقدار القوة المؤثرة عليه بالنيوتن هى :

أ ٢ن + ٣   ب ١٢ن + ٣   ج ١٢ن + ١٣   د ٦ن + ١٣

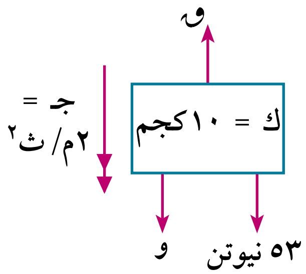
⑦ فى كل من الحالات الآتية، القوة ω تؤثر على الجسم الذى كتلته ك كجم، وتكسبه عجلة حركة منتظمة موضحة بالشكل مقدارًا واتجاهًا، أوجد ω



شكل (٢٧)

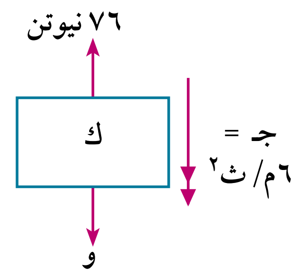


شكل (٢٨)

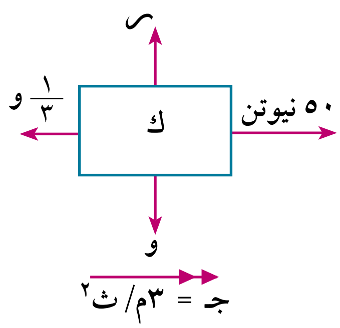


شكل (٢٩)

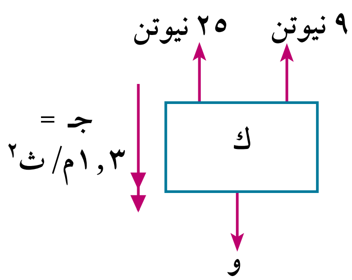
⑧ فى كل من الحالات الآتية القوة ق تؤثر على الجسم الذى كتلته ك كجم، وتكسبه عجلة حركة منتظمة موضحة بالشكل مقدارًا واتجاهًا، أوجد ك



شكل (٣٠)

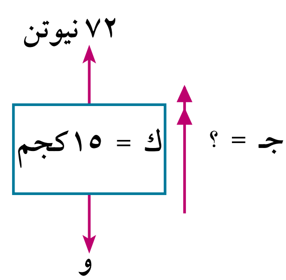


شكل (٣١)

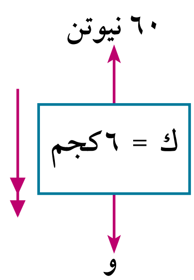


شكل (٣٢)

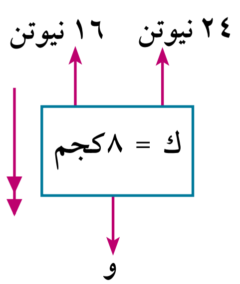
⑨ فى كل من الحالات الآتية، القوة ω تؤثر على الجسم الذى كتلته ك كجم، وتكسبه عجلة منتظمة جـ مقاسة بوحدة م/ث٢، أوجد جـ



شكل (٣٣)



شكل (٣٤)



شكل (٣٥)

⑩ جسم كتلته ١٥٠ جم، أثرت عليه قوة مقدارها ٤٥٠٠ داين، أوجد العجلة الناتجة.

⑪ كتلة مقدارها ٢٠ كجم موضوعة على مستوى أفقى أملس، أثرت عليها قوة أفقية مقدارها ω فحركتها بعجلة منتظمة مقدارها ٤٩ م/ث٢، أوجد ق.

⑫ سيارة ساكنة كتلتها ٤,٩ طن، أثرت عليها قوة فأصبحت سرعتها ٢٧ كم/ س خلال دقيقة واحدة، أوجد القوة التى أثرت على السيارة بثقل الكجم.

(١٣) إذا كانت قوة آلة قاطرة تساوى ٢,٥ ث طن، وكانت كتلة القطار والقاطرة ٢٠٠ طن، وبدأ القطار يتحرك من السكون، أوجد سرعة القطار بعد نصف دقيقة بفرض اهمال المقاومات.

(١٤) أوجد قوة مقاومة الفرامل لحركة قطار مقدرة بثقل الكيلوجرام لكل طن من كتلته، إذا كانت سرعته ٧٢ كم/س وأوقفته الفرامل بعد أن قطع ٢٥٠ مترًا، أوجد الزمن اللازم لذلك.

(١٥) دفع رجل سيارة ساكنة كتلتها ٩٨٠ كجم بقوة ثابتة، فأصبحت سرعتها ٤٥ سم/ث بعد ٥ ثوانٍ، أوجد بثقل الكيلوجرام القوة التى دفع بها الرجل السيارة إذا كانت المقاومة ٥٠ ث كجم.

(١٦) أوجد القوة الأفقية التى تُشد بها قاطرة قطار كتلته ٢٤٥ طنًّا لتزيد سرعته إلى ١٨ كم/س بعد أن قطع مسافة كيلومتر واحد على طريق أفقية إذا كانت قوة المقاومة ٤ ث كجم/ طن.

(١٧) أثرت قوة أفقية ثابتة مقدارها ١ ث طن على سيارة كتلتها ٤ أطنان تسير على طريق أفقى، فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون وبلغت سرعتها ٤,٩ م/ث فى ١٠ ثوانٍ، أوجد مقدار المقاومة التى أثرت على السيارة.

(١٨) جسم كتلته ٢ كجم تؤثر عليه القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢$\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = - $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث معيار ق بالنيوتن، أوجد معيار $\overleftarrow{\text{جـ}}$

(١٩) أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ على جسم كتلته ٥٠٠ جم، فأكسبته عجلة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ حيث $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢$\overleftarrow{\text{ص}}$ فإذا كانت جـ بوحدة م/ث٢، فأوجد مقدار $\overleftarrow{\text{ق}}$ بوحدة نيوتن.

(٢٠) أوجد متجه عجلة الحركة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ التى اكتسبها جسم كتلته ٢ كجم، إذا أثرت عليه القوى

$\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣$\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٤$\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥$\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$ إذا كانت ق بوحدة نيوتن.

(٢١) القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ا $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب$\overleftarrow{\text{ص}}$ + جـ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣$\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$ أثرت على جسم كتلته ٢ كجم، فأكسبته عجلة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، أوجد ا، ب، جـ، إذا كانت ق بوحدة نيوتن، جـ بوحدة م/ث٢.

(٢٢) يتحرك جسم كتلته ٣ كجم بتأثير ثلاث قوى مستوية $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ب$\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = ا $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_3$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢$\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهًا وحدة متعامدين فى مستوى القوى، فإذا كان متجه الإزاحة يُعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overleftarrow{\text{ف}}$ = (ن^2 + ١) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (٢ن^2 + ٣) $\overleftarrow{\text{ص}}$ عين الثابتين ا، ب.

(٢٣) جسم كتلته ك = (٢ ن + ٥) كجم ومتجه موضعه $\overleftarrow{\text{ر}}$ = ($\frac{1}{2}$ ن^2 + ن - ٥) $\overleftarrow{\text{ى}}$ حيث متجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ وحدة ثابت ، ر مقاسة بالمتر ، ن الزمن بالثانية . أوجد :

أولًا: متجهى السرعة والعجلة للجسم عند أى لحظة زمنية ن.

ثانيًا : مقدار القوة المؤثرة على الجسم عند ن = ١٠ ثانية

(٢٤) كرة معدنية كتلتها ١٥٠ جم تحركت بسرعة منتظمة ١٢م/ث وسط غبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت ٠,٥ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة بالداين المؤثرة عليها عند أى لحظة زمنية ن.

(٢٥) كرة معدنية كتلتها ١٠جم تتحرك فى خط مستقيم داخل وسط محمل بالغبار الذى يلتصق بسطحها بمعدل جرام واحد كل ثانية، فإذا كانت إزاحة هذه الكرة فى نهاية فترة زمنية ن هى $\overleftarrow{ف}$ = (ن^{٢} + ٣ن)$\overleftarrow{س}$ حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة فى اتجاه حركتها فأوجد القوة المؤثرة على الكرة عند أى لحظة ن واحسب معيارها عند ن = ٣ ثوانى إذا علم أن معيار الإزاحة يقاس بالسنتيمتر.

(٢٦) يتحرك جسم متغير الكتلة فى خط مستقيم وكانت كتلته عند أى لحظة زمنية ن تساوى ك = (٤ن +١) جرام وكان متجه إزاحته يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف}$ = (ن^{٢} + ٢ن) $\overleftarrow{س}$ حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة ثابت مواز للخط المستقيم ، ن الزمن بالثانية، ف المسافة بالسنتيمتر أوجد :

١ - متجه كمية الحركة لهذا الجسم ، ٢ - معيار القوة المؤثرة على الجسم عندما ن = ٤.

(٢٧) أثرت قوة ق = ٣ن + ١ على جسم ، ساكن كتلته ٤ كجم مبتدئًا حركته من نقطة أصل "و" على خط مستقيم.

أ أوجد ع عندما ن = ٢ ثانية.

ب أوجد ف عندما ن = ٢ ثانية. ، علمًا بأن ق بوحدة نيوتن.

(٢٨) أوجد أقل عجلة ينزلق بها رجل كتلته ٧٥ كيلوجرامًا على حبل النجاة من الحريق إذا كان الحبل لا يتحمل شدًّا يزيد عن ٥٠ ثقل كيلوجرام، ثم أوجد سرعة الرجل بعد أن يهبط ٣٠ مترًا، علمًا بأن عجلة الحركة منتظمة.

(٢٩) رصاصة كتلتها ٢٠ جرامًا اصطدمت بحاجز ثابت من الخشب عندما كانت سرعتها ٧٠٠ متر / ثانية، فغاصت فيه مسافة ٥ سم. احسب بثقل الكيلوجرام مقاومة الخشب بفرض أنها ثابتة.

(٣٠) سقط جسم كتلته ٢ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار نحو أرض رملية، فغاص فيها مسافة ٥ سم، احسب بثقل الكيلوجرام مقاومة الرمل بفرض ثبوتها.

(٣١) قطار كتلته ٢٤٥ طنًا (بمافى ذلك القاطرة) يتحرك بعجلة منتظمة مقدارها ١٥سم/ث^{٢} على طريق مستقيم أفقى فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك ٧٥ث.كجم لكل طن من كتلة القطار فأوجد بثقل الكيلو جرام قوة آلات القاطرة . و إذا انفصلت العربة الأخيرة وكتلتها ٤٩ طنًا بعد أن تحرك القطار من السكون لمدة ٤,٩ دقيقة فأوجد الزمن الذى تأخذه العربة المنفصلة حتى تقف.

القانون الثالث لنيوتن

Newton's Third law

سوف تتعلم

- الضغط ورد الفعل.
- حركة المصاعد.

المصطلحات الأساسية

- القانون الثالث لنيوتن *Newtons third law*
- الضغط *pressare*
- رد الفعل *reaction*
- حركة المصاعد *liltmotion*
- ميزان الزنبرك *spring scale*
- ميزان الضغط *pressare scale*
- ميزان معتاد *balance*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- ميزان معتاد
- ميزان زنبركى
- ميزان ضغط

عمل تعاونى


شكل (٣٦)

قم مع زميل لك بإحضار ميزان ضغط وضعه فى أرضية مصعد، ثم قف على الميزان والمصعد ساكن، ودع زميلك يسجل قراءة الميزان لدى وقوفك على ميزان الضغط، واجعل المصعد يتحرك لأعلى وزميلك يسجل أى تغير يحدث فى قراءة الميزان، ثم أوقف المصعد وسجل القراءة مرة أخرى، ثم اجعل المصعد يهبط لأسفل وزميلك يسجل قراءة الميزان عند حدوث أى تغير فى القراءة، ثم كرر التجربة بالتبادل مع زميلك.

سجل قراءة الميزان حال وقوف كل منكما على الميزان فى كل مرحلة من مراحل سكون المصعد أو الحركة لأعلى أو الحركة لأسفل.

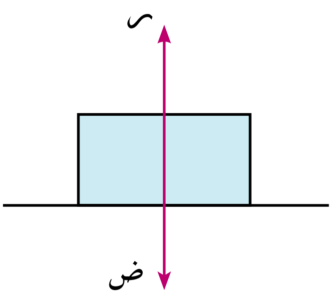
بماذا تفسر اختلاف قراءة الميزان فى كل الحالات؟

تعلم

١ - القانون الثالث لنيوتن: *Newtns third law*

لكل فعل رد فعل مساوٍ له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه.

٢ - الضغط ورد الفعل: *pressure and reaction*



شكل (٣٧)

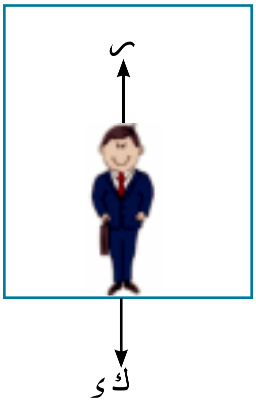
عندما نضع جسمًا كتلته ك على مستوى أفقى ساكن، فإن الجسم يؤثر على المستوى بقوة ضغط تساوى فى هذه الحالة وزن الجسم، وتنشأ عن ذلك قوة رد فعل للمستوى تؤثر على الجسم وهى تساوى تمامًا ضغط الجسم على المستوى والقوتان متضادتان فى الاتجاه، ولكنهما متساويتان فى المقدار تمامًا ، ويتغير ضغط الجسم على المستوى كلما تحرك المستوى صعودًا أو هبوطًا، ويعرف الضغط فى هذه الحالة بالوزن الظاهري.


شكل (٣٨)

حركة المصاعد: *Lift motion*

وتعتبر حركة المصاعد من أشهر تطبيقات الفعل ورد الفعل ، عندما يقف شخص كتلته ك داخل مصعد كتلته ك′ فإن هناك مجموعة من القوى المؤثرة على كل منهما.

القوى المؤثرة على الشخص داخل المصعد *the forces acting on the person inside the lift*



شكل (٣٩)

يؤثر على الشخص داخل المصعد قوتان.

١ - وزن الشخص = ك ء (ويؤثر رأسيًّا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - رد فعل المصعد على الشخص = ر

(ويؤثر رأسيًّا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد).

معادلة حركة الشخص: *equation of the motion of the person*

عندما يكون المصعد ساكنًا أو متحركًا حركة منتظمة (سرعة ثابتة لأعلى أو لأسفل)

فإن **ك ء = ر**

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة الشخص **ك جـ = ر − ك ء**

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة الشخص **ك جـ = ك ء − ر**

تفكير ناقد : ماذا تتوقع أن يكون رد فعل المصعد على الرجل إذا سقط المصعد بعجلة مساوية لعجلة الجاذبية؟

شكل (٤٠)

القوى المؤثرة على المصعد فقط و الشخص بداخله (شكل ٤٠)

The forces acting on the lift

يؤثر على المصعد ثلاث قوى عندما يكون الشخص بداخله:

١ - وزن المصعد فقط = ك/ ء (ويؤثر رأسيًّا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - ضغط الشخص على أرضية المصعد = ض

(ويؤثر رأسيًّا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٣ - الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد = ش

(ويؤثر رأسيًّا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

معادلة حركة المصعد *equation of the motion of the lift*

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد

ك/ جـ = ش - ض - ك/ ء

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد

ك/ جـ = ك/ ء + ض - ش

شكل (٤١)

القوى المؤثرة على المصعد و الرجل معًا (شكل ٤١) *the forces acting on the aysfem*

يؤثر على المصعد والرجل معًا قوتان:

١ - وزن المجموعة (الرجل والمصعد) = (ك + ك/) ء

(ويؤثر رأسيًّا لأسفل مهما كان اتجاه حركة المصعد)

٢ - الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد = ش

(ويؤثر رأسيًّا لأعلى مهما كان اتجاه حركة المصعد)

ملحوظة:

ضغط الرجل على أرضية المصعد يساوى ويضاد رد فعل المصعد على الرجل

معادلة حركة المجموعة: *equation of the motion of the aysfem*

عند الحركة لأعلى بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد (ك + ك/) جـ = ش - (ك + ك/)ء

عند الحركة لأسفل بعجلة قدرها جـ تكون معادلة حركة المصعد (ك + ك/) جـ = (ك + ك/) ء - ش

ميزان الزنبرك *Spring Scale*

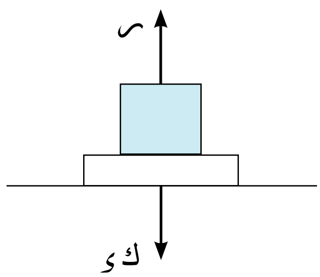
عندما يعلق جسم كتلته ك في سلك ميزان زنبرك مثبت في سقف مصعد،
فإن قراءة الميزان تعبر عن الشد الحادث في سلك الميزان.

شكل (٤٢)

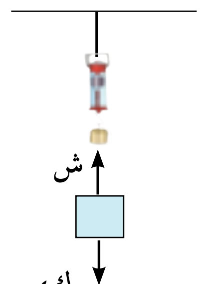
ميزان الضغط *pressure (health) scale*

عندما يوضع جسم كتلته ك على ميزان ضغط مثبت في أرضية مصعد،
فإن قراءة الميزان تعبر عن ضغط الجسم على الميزان.

شكل (٤٣)



شكل (٤٥)



شكل (٤٤)

١ - إذا كانت قراءة الميزان > الوزن الحقيقي   ش > ك ء ، ر > ك ء

فإن المصعد يكون صاعدًا لأعلى بعجلة موجبة أو هابطًا لأسفل بعجلة سالبة.

٢ - إذا كانت قراءة الميزان < الوزن الحقيقي   ش < ك ء ، ر < ك ء

فإن المصعد يكون هابطًا لأسفل بعجلة موجبة أو صاعدًا لأعلى بعجلة سالبة.

٣ - إذا كانت قراءة الميزان = الوزن الحقيقي   ش = ك ء ، ر = ك ء

فإن المصعد يكون ساكنًا أو متحركًا بسرعة منتظمة.

قراءة ميزان الضغط أو ميزان الزنبرك تسمى **الوزن الظاهري**.

لاحظ أن

إذا تحرك مصعد لأعلى بعجلة منتظمة وتحرك لأسفل بالعجلة نفسها،
فإن قراءة الميزان حال الصعود + قراءة الميزان حال الهبوط = ضعف الوزن الحقيقي.

الميزان المعتاد ذى الكفتين *balance*


شكل (٤٦)

الميزان المعتاد ذى الكفتين هو الوحيد الذى يقيس الوزن الحقيقى فى كل الظروف والأجواء

مثال

(١) رجل كتلته ٨٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

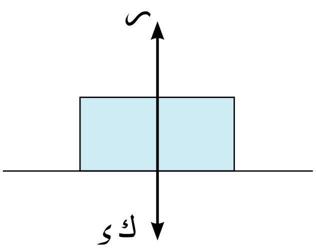
١ - صاعدًا بعجلة منتظمة قدرها ٤٩ سم/ ث^2.

٢ - متحركًا بسرعة منتظمة قدرها ٨٠ سم/ ث.

٣ - هابطًا بعجلة منتظمة قدرها ٩٨ سم/ ث^2.

الحل

ضغط الرجل على أرض المصعد يساوى فى المقدار رد فعل المصعد على الرجل



شكل (٤٧)

١ - المصعد يتحرك لأعلى بعجلة قدرها ٠,٤٩ م/ ث^2.

∴ ك جـ = ر - ك د

٨٠ × ٠,٤٩ = ر - ٨٠ × ٩,٨

∴ ر = ٨٠× ٠,٤٩ + ٨٠ × ٩,٨

ر = ٨٢٣,٢ نيوتن ر = ٨٤ ث كجم

٢ - المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.

∴ جـ = ٠

∴ ر = ك ء ر = ٨٠ ث كجم

٣ - المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة قدرها ٠,٩٨ م/ث^2.

ك جـ = ك ء - ر

٨٠ × ٠,٩٨ = ٨٠ × ٩,٨ - ر

ر = ٨٠ × ٩,٨ - ٨٠ × ٠,٩٨ ر = ٧٠٥,٦ نيوتن. ر = ٧٢ كجم

حاول أن تحل

(١) شخص كتلته ٦٠ كجم يقف داخل مصعد، احسب بثقل الكيلوجرام ضغط الرجل على أرضية المصعد فى كل من الحالات الآتية:

١ - إذا كان المصعد ساكنًا.

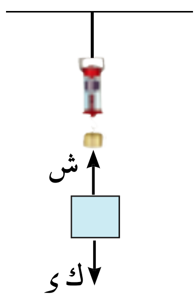
٢ - المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث^2.

٣ - المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٤٩ سم/ث^2.

مثال

② عُلق جسم بواسطة خيط فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد يتحرك رأسيًا، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط أثناء الصعود بعجلة منتظمة ٢,٤٥ م/ث^{٢} يساوى ٥٠ ث كجم.
أوجد كتلة الجسم، وإذا هبط المصعد بالعجلة نفسها فما مقدار الشد فى الخيط؟

الحل



شكل (٤٨)

أولا: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة ٢,٤٥ م/ث^{٢}

معادلة الحركة: ك جـ = ش - ك ى

ك × ٢,٤٥ = ٥٠ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

ك (٢,٤٥ + ٩,٨) = ٥٠ × ٩,٨ ك = ٤٠ كيلو جرام

ثانيًا: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة ٢,٤٥ م/ث^{٢}.

معادلة الحركة: ك جـ = ك ى - ش

٤٠ × ٢,٤٥ = ٤٠ × ٩,٨ - ش

ش = ٤٠ (٩,٨ - ٢,٤٥) ش = ٢٩٤ نيوتن ش = ٣٠ ث كجم

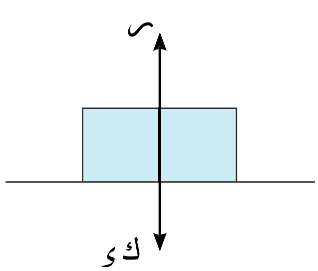
؟ حاول أن تحل

② جسم وزنه الحقيقى ٢٤٠ ث جم مُعلق فى سلك ميزان زنبركى مُثبت فى سقف مصعد، ووزنه الظاهرى ٢٧٦ ث جم كما يعينه الميزان الزنبركى ، بين أن عجلة الحركة للمصعد لها قيمتان ، فأوجدهما وعين اتجاه الحركة .

مثال

③ مصعد يتحرك رأسيًا لأعلى بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث^{٢}.
يقف رجل بداخل المصعد، وكان ضغطه على أرضية المصعد يساوى ٧٢ ث كجم.
احسب كتلة هذا الرجل ، ثم أوجد مقدار ضغطِهِ على أرضية المصعد حال هبوطه بنفس العجلة.

الحل



شكل (٤٩)

أولًا: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة جـ = ١,٤ م/ث^{٢}.

معادلة الحركة: ك جـ = ر - ك ى

ك × ١,٤ = ٧٢ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

∴ ك = ٦٣ كجم

ثانيًا: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة جـ = ١,٤ م/ث^{٢}.

معادلة الحركة : ك جـ = ك ى - ر

٦٣ × ١,٤ = ٦٣ × ٩,٨ - ر

ر = ٦٣ (٩,٨ - ١,٤) ∴ ر = ٥٢٩,٢ نيوتن

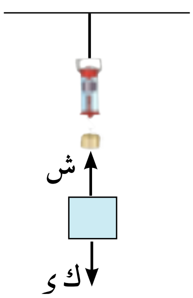
ر = ٥٤ ث كجم

حاول أن تحل

(٣) رجل كتلته ٧٠ كجم يقف على أرضية مصعد كهربى كتلته ٤٢٠ كجم فإذا تحرك المصعد رأسيًّا لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث٢.
أوجد بثقل الكجم مقدار كل من الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد وضغط الرجل على أرضية المصعد.

مثال

(٤) جسم معلق فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، لوحظ عند تحرك المصعد إلى أعلى بعجلة جـ م/ ث٢، أن قراءة الميزان ٨ ث كجم وعندما تحرك المصعد إلى أسفل بعجلة ٢ جـ م/ث٢ كانت قراءة الميزان ٥ ث كجم.
احسب جـ ، وإذا كان الحبل الصلب الذى يحمل المصعد لا يتحمل شدًّا أكثر من ١,٢ ث طن، فأوجد أقصى حمولة يمكن أن يحملها المصعد وهو صاعد بالعجلة جـ علمًا بأن كتلة المصعد وهو فارغ تساوى ٦٠٠ كجم.



شكل (٤٨)

الحل

أولا: المصعد يتحرك لأعلى بعجلة جـ

معادلة الحركة: ك جـ = ش - ك ء

ك جـ = ٨ × ٩,٨ - ك × ٩,٨

ك جـ = (٨ - ك) × ٩,٨ (١)

ثانيًا: المصعد يتحرك لأسفل بعجلة ٢ جـ

معادلة الحركة ك جـ = ك ء - ش

٢ ك جـ = ك × ٩,٨ - ٥ × ٩,٨

٢ ك جـ = (ك - ٥) × ٩,٨ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

(٢ ك جـ) / (ك جـ) = ((ك − ٥) × ٩,٨) / ((٨ − ك) × ٩,٨)

٢ / ١ = (ك − ٥) / (٨ − ك)

ك - ٥ = ١٦ - ٢ك   ٣ ك = ٢١

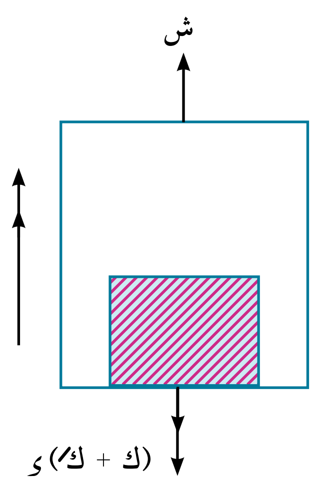
∴ ك = ٧ كجم

من (١) نجد أن

٧ جـ = ٩,٨   جـ = ١,٤ م/ث٢.

ثالثًا:

نفترض أن أقصى حمولة يمكن أن توضع فى المصعد كتلتها ك كجم
عندئذ يكون الشد فى الحبل الذى يحمل المصعد يساوى ١٢٠٠ ث كجم
معادلة الحركة: (ك + ك/) جـ = ش - (ك + ك/) ء



شكل (٥١)

مطابع الهدايه

$\therefore$ (ك + ٦٠٠) × ١٫٤ = ١٢٠٠ × ٩٫٨ - (ك + ٦٠٠) × ٩٫٨

$\therefore$ (ك + ٦٠٠) × ١١٫٢ = ١٢٠٠ × ٩٫٨

ك + ٦٠٠ = ١٠٥٠ ك = ٤٥٠ كجم

٩ حاول أن تحل

٤ عُلق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، فسجل القراءة ١٧ ث كجم، عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة ١,٥ جـ م/ ث^{٢}، وسجل القراءة ١٦ ث.كجم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة سالبة قدرها جـ م/ث^{٢}، أوجد كتلة الجسم ومقدار جـ.

تمـــاريـن ٢ – ٤

أكمل كلًّا مما يأتي:

١ جسم كتلته ٧٠ كجم موضوع على ميزان ضغط على أرضية مصعد متحرك بعجلة منتظمة ١,٤ م/ث^{٢} لأسفل، فإن قراءة الميزان .... ث كجم.

٢ عُلق جسم فى خطاف ميزان زنبركى معلق فى سقف مصعد فسجل القراءة ٣٩٠ ث جم عندما كان صاعدًا لأعلى:

إذا كانت عجلة الحركة - ٧٠ سم/ث^{٢}، فإن كتلة الجسم .... جم.

إذا كانت كتلة الجسم ٣٥٠ جم، فإن عجلة الحركة .... سم/ث^{٢}.

٣ شخص يقف على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، فسجل الميزان القراءة ٧٥ ث كجم، عندما كان متحركًا لأعلى بعجلة جـ م/ث^{٢}، وسجل القراءة ٦٩ ث كجم عندما كان متحركًا لأسفل بالعجلة نفسها، فإن وزن الشخص الحقيقي............ ث كجم.

٤ يقف طفل على ميزان ضغط داخل مصعد متحرك لأسفل بعجلة ١,٤ م/ث^{٢}.

إذا كانت قراءة الميزان ٣٠ ث كجم، فإن وزن الطفل = ...ث كجم

إذا كان وزن الطفل ٤٩ ث كجم، فإن قراءة الميزان .... ث كجم

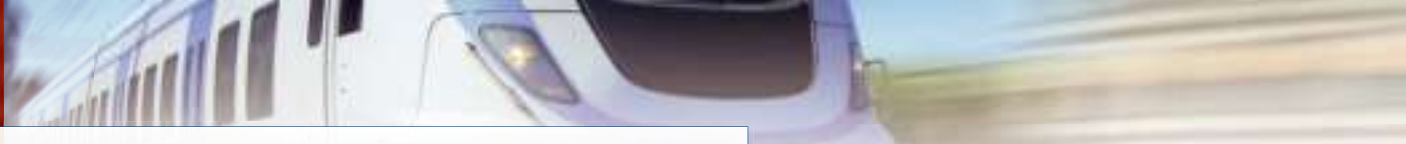
أجب عن الأسئلة الآتية:

٥ يقف شخص كتلته ٨٠ كجم على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، أوجد قراءة الميزان فى كل من الحالات الآتية:

أ المصعد يتحرك بسرعة منتظمة.

ب المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ٤٤,١ سم/ث^{٢}.

جـ المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ٢٩,٤ سم/ث^{٢}.



٦ جسم كتلته ك، معلق فى سلك ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد، أوجد ك فى كل من الحالات الآتية:

أ المصعد يتحرك لأعلى بعجلة منتظمة ٩٨ سم/ث^{٢}، قراءة الميزان ٤٤ ث جم

ب المصعد يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة ١٤٠ سم/ث^{٢}، قراءة الميزان ٢١٠ ث جم.

جـ المصعد ساكن وقراءة الميزان ١٠٠ ث جم.

٧ مصعد كهربائى يتحرك رأسيًا لأعلى حركة تقصيرية بعجلة منتظمة مقدارها جـ م/ث^{٢}، مثبت فى سقفه ميزان زنبركى يحمل جسمًا كتلته ٣٥ كجم، فإذا كان الوزن الظاهرى الذى يبينه الميزان قدره ٣٠ ث كجم، فأوجد قيمة جـ .

٨ وُضع جسم على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد، فسجل القراءة ١٤ ث كجم، عندما كان المصعد ساكنًا.

أوجد بثقل الكجم قراءة الميزان عندما يتحرك رأسيًّا لأعلى بعجلة منتظمة ٧٠ سم/ث^{٢}.

٩ جسم كتلته ٩٤,٥ كجم وضع فى صندوق كتلته ٥٢,٥ كجم، ثم رفع رأسيًّا إلى أعلى بواسطة حبل متحرك بعجلة قدرها ١,٤ م/ث^{٢}، أوجد مقدار ضغط الجسم على قاعدة الصندوق، ومقدار الشد فى الحبل الذى يحمل الصندوق، و إذا قُطع الحبل، فأوجد ضغط الجسم على قاعدة الصندوق عندئذ

١٠ مصعد كهربى وزنه ٣٥٠ ث كجم يهبط رأسيًا إلى أسفل بعجلة منتظمة سالبة مقدارها ٤٩سم/ث^{٢} وبه رجل وزنه ٧٠ ث كجم. أوجد مقدار كل من ضغط الرجل على أرضية المصعد والشد فى الحبل الذى يحمل المصعد بثقل الكجم.

١١ علق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجل الميزان القراءة ٧ ث كجم عندما كان المصعد ساكنًا ثم سجل القراءة ٨ ث كجم عندما تحرك المصعد رأسيًا بعجلة منتظمة. أوجد مقدار واتجاه العجلة التى يتحرك بها المصعد.

١٢ عُلق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجل القراءة ١٦ ث جم، عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة جـ سم/ث^{٢}، وسجل القراءة ١١ ث جم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة منتظمة ١,٥ جـ سم /ث^{٢}. أوجد كتلة الجسم والعجلة جـ، واحسب أيضًا قراءة الميزان عندما يكون المصعد هابطًا بعجلة منتظمة سالبة قدره $\frac{١}{٢}$ جـ سم/ث^{٢}.

حركة جسم على مستوى مائل أملس

Motion of a body on a smooth inclined plane

سوف تتعلم

- حركة جسم على مستوى مائل

المصطلحات الأساسية

- مستوى مائل inclined plane
- مستوى أملس Smooth plane

الأدوات المستخدمة

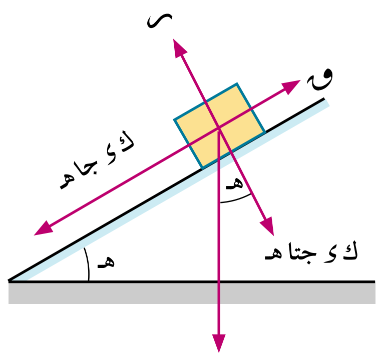
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

إذا وُضع جسم كتلته ك كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ، وأثرت عليه قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى، فحدد اتجاه حركة الجسم وعلى ما يتوقف اتجاه الحركة؟

حركة جسم على مستوٍ مائل أملس

إذا فرضنا أن جسمًا كتلته ك يتحرك على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ تحت تأثير قوة مقدارها ق تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى فإننا نلاحظ أن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير القوى الثلاث الآتية:



شكل (٥٢)

١ - القوة المعلومة وتؤثر فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى ومقدارها ق.

٢ - وزن الجسم ويؤثر رأسيًّا إلى أسفل ومقداره ك ى.

٣ - رد فعل المستوى و يؤثر فى اتجاه عمودى على المستوى إلى أعلى ومقداره ر

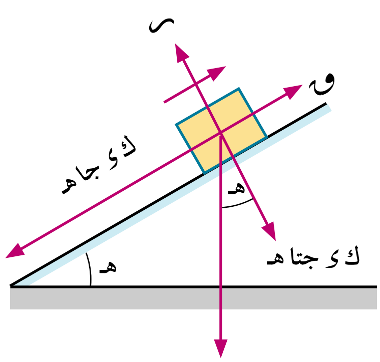
وبتحليل الوزن إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه المستوى لأسفل والأخرى فى الاتجاه العمودى عليه.

المركبة فى اتجاه المستوى = ك ى جا هـ

المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى = ك ى جتا هـ

وتكون لدينا ثلاث حالات تعتمد على المقارنة بين ق ، ك ى جا هـ بنفس الوحدة .

الحالة الأولى : إذا كانت ق > ك ى جا هـ



شكل (٥٣)

فإن الجسم يتحرك بعجلة منتظمة جـ لأعلى المستوى ، وتكون معادلة حركته

ك جـ = ق - ك ى جا هـ

و إذا أُبطل عمل القوة ق بعد مرور زمن ن من بداية الحركة فإن الجسم يتحرك لأعلى المستوى (نفس اتجاهه السابق) ولكن بعجلة تقصيرية جـ َ حيث جـ َ = - ى جا هـ

ويصل الجسم حتمًا إلى سكون لحظى ثم يغير اتجاه حركته لأسفل المستوى بعجلة تزايدية قدرها ى جا هـ.

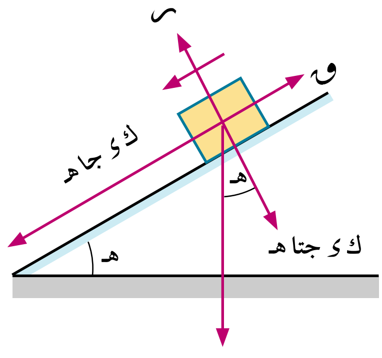
الحالة الثانية : إذا كانت ق < ك ى جا هـ

فإن الجسم يتحرك بعجلة منتظمة جـ لأسفل المستوى ، وتكون معادلة حركته

ك جـ = ك ى جا هـ - ق

الحالة الثالثة : إذا كانت ق = ك ى جا هـ

فإن الجسم يظل محتفظًا بحالة السكون على المستوى ، أما إذا أكسب الجسم سرعة منتظمه ع فى اتجاه المستوى لأعلى أو لأسفل فإن الجسم يتحرك على المستوى فى اتجاه $\overleftarrow{ع}$ بسرعة منتظمة طبقًا للقانون الأول لنيوتن.



شكل (٥٤)

مثال

(١) جسم كتلته ١٢ كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، أثرت عليه قوة مقدارها ٨٨,٨ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى، أوجد سرعة هذا الجسم بعد ١٤ ثانية من بدء الحركة، إذا أوقفت القوة المؤثرة على الجسم عند هذه اللحظة، أوجد المسافة التى يتحركها الجسم على المستوى بعد ذلك حتى يسكن

الحل

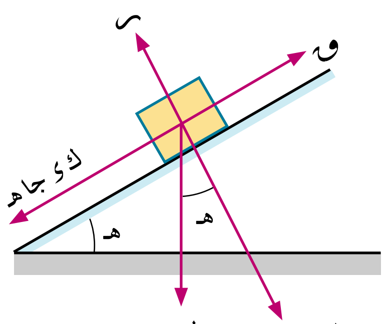
∵ ق = ٨٨,٨ نيوتن

∵ ك ى جا هـ = ١٢ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$

= ٥٨,٨ نيوتن

ق > ك ى جا هـ

∴ الجسم يتحرك لأعلى المستوى بعجلة منتظمة جـ



شكل (٥٥)

معادلة الحركة:

ك جـ = ق - ك ى جا هـ

١٢ جـ = ٨٨,٨ - ٥٨,٨

جـ = ٢,٥ م/ث^{٢}

∵ ع = ع. + جـ ن = ٠ + ٢,٥ × ١٤ = ٣٥ م/ث

بعد إيقاف تأثير القوة يتحرك الجسم فى نفس اتجاهه السابق بتقصير منتظم جـ/

معادلة الحركة:

ك جـ/ = - ك ى جا هـ

جـ/ = - ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ = - ٤,٩ م/ث^{٢}

يقطع الجسم مسافة ف حتى يصل لسكون لحظى حيث

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ/ ف

٠ = (٣٥)^{٢} - ٢ × ٤,٩ ف

ف = ١٢٥ متر

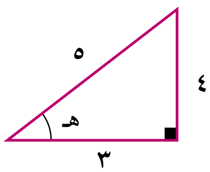
حاول أن تحل

(١) جسم كتلته ٣٢,٥ كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ، حيث جتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$، أثرت عليه قوة مقدارها ٨٣,٥ نيوتن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى، أوجد مقدار واتجاه عجلة الحركة، ثم أوجد سرعة الجسم بعد ٨ ثواني من بدء الحركة.

مثال

(٢) وُضع جسم كتلته ٢٥ كجم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ، حيث ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$، أثرت عليه قوة أفقية نحو المستوى مقدارها ٣٠ ث كجم، ويقع خط عملها في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى. أوجد العجلة الناشئة ومقدار قوة رد فعل المستوى.

الحل



ق جتا هـ = ٣٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٨ ث كجم   و جا هـ = ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٢٠ث كجم

∵ ق جتا هـ < و جا هـ

∴ الجسم يتحرك لأسفل المستوى بعجلة منتظمة جـ حيث

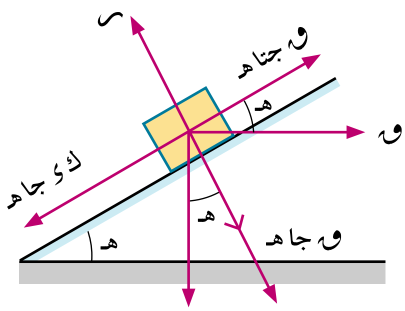
ك جـ = ك ء جا هـ - ق جتا هـ

٢٥ جـ = (٢٠ - ١٨) × ٩,٨

جـ = $\frac{٩٨}{١٢٥}$ م/ث^{٢}

ر = ق جا هـ + ك ء جتا هـ

= ٣٠ × $\frac{٤}{٥}$ + ٢٥ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٩ ث كجم



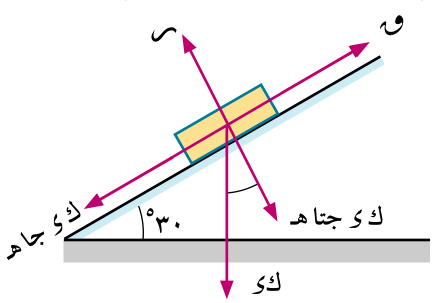
شكل (٥٦)

حاول أن تحل

(٢) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية ٦٠° تحت تأثير قوة مقدارها ١ ث كجم موجهة نحو المستوى، وتصنع مع الأفقي زاوية قياسها ٣٠° لأعلى، أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى على الجسم، وكذلك عجلة الحركة.

مثال

(٣) يتحرك جسم كتلته ٣٠ كجم إلى أعلى مستوى مائل املس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° تحت تأثير قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاه خط اكبر ميل لأعلى بعجلة مقدارها ١,٥ م/ث^{٢}. أوجد العجلة التى يتحرك بها هذا الجسم على نفس المستوى تحت تأثير قوة مقدارها $\frac{١}{٢}$ ق وتؤثر فى اتجاه خط اكبر ميل لأعلى .



الحل

معادلة الحركة فى الحالة الأولى

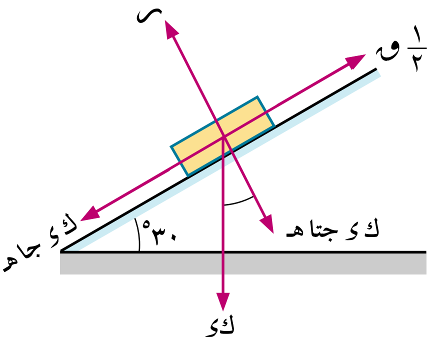
ك جـ = ق - ك ء جا هـ

∴ ٣٠ × ١,٥ = ق - ٣٠ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$

ومنها ق = ١٩٢ نيوتن

∴ $\frac{1}{2}$ ق = ٩٦ نيوتن ك ء جا هـ = ١٤٧ نيوتن

∴ $\frac{1}{2}$ ق < ك ء جا هـ ∴ الحركة لأسفل المستوى



معادلة الحركة فى الحالة الثانية

ك جـَ = $\frac{1}{2}$ ق - ك ء جا هـ

∴ ٣٠ جـَ = ٩٦ - ٣٠ × ٩,٨ × $\frac{1}{2}$

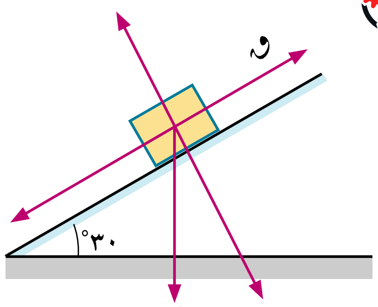
∴ جـَ = -١,٧ م/ث^2

٩ حاول أن تحل

(٣) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ كجم اعلى مستوى مائل املس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° تحت تأثير قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاه خط اكبر ميل لأعلى بعجلة مقدارها ٢م/ث^2 و إذا انقصت هذه القوة إلى النصف فأوجد مقدار واتجاه العجلة التى يتحرك بها هذا الجسم على نفس المستوى.

تمـــاريـن ٢ – ٥

أكمل كلاًّ مما يأتي:



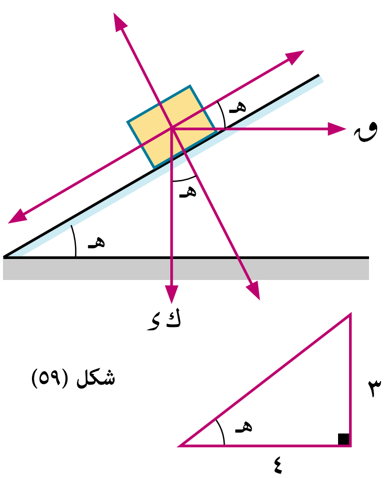
شكل (٥٨)

(١) **فى الشكل المرسوم:** الجسم الموضوع على المستوى الأملس كتلته ٢ كجم، بدأ حركته من السكون تحت تأثير القوة ق التى مقدارها ١,٥ ث كجم

أ) عجلة الحركة = ... م/ث^2 واتجاهها ....

ب) سرعة الجسم بعد ٤ ثوانٍ من بدء الحركة

جـ) رد فعل المستوى = ... ث كجم.



شكل (٥٩)

(٢) **فى الشكل المرسوم:** الجسم الموضوع على المستوى الأملس كتلته ك = ١٢ كجم، بدأ حركته من السكون تحت تأثير القوة ق التى مقدارها ٨ ث كجم.

أ) عجلة الحركة = ... م/ث^2، واتجاهها ....

ب) المسافة التى يقطعها الجسم على المستوى فى ٣ ثوانٍ من بدء الحركة .... متر

جـ) رد فعل المستوى = ... ث كجم

اختر من بين الإجابات الإجابة الصحيحة :

(٣) يسير راكب دراجة كتلته هو والدراجة ٨٥ كجم بعجلة منتظمة مقدارها ٠,٥م/ث^2 فإن القوة التى يستخدمها لاحداث هذه العجلة هى :

أ) ٤٢,٥ ث كجم ب) ٤٢,٥ نيوتن

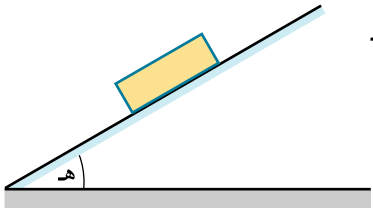
جـ) ١٧٠ ث كجم د) ١٧٠ نيوتن.

٤ تسير سيارة على طريق مهمل المقاومات بعجلة مقدارها ١,٤٧ م/ث^{٢} فإذا كانت قوة المحرك ١٥٠ ث كجم فإن كتلة السيارة تساوى :

أ ١٠٢ كجم   ب ١٠٠ كجم

جـ ١٠٠٠ كجم   د ٢٢٠,٥ كجم.

٥ إذا تحرك جسم على مستوى مائل املس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ تحت تأثير وزنه فقط فإن عجلة حركته تساوى :



أ ء   ب ء جتا هـ

جـ ء جا هـ   د صفر.

٦ إذا تحرك جسم على مستوى مائل أملس تحت تأثير وزنه فقط فإن عجلته تتوقف على :

أ كتلته   ب وزنه   جـ زاوية ميل المستوى   د رد فعل المستوى.

أجب عن الأسئلة الآتية:

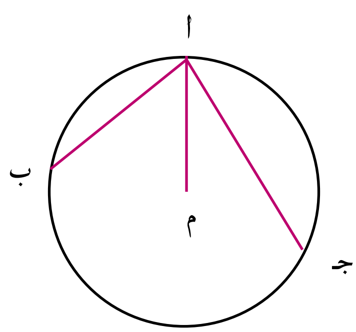
٧ وُضع جسم كتلته ١٠ كجم على مستوى أملس، يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$، أثرت قوة مقدارها ٨٠ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى. أوجد مقدار واتجاه العجلة الناشئة ومقدار رد الفعل العمودي.

٨ وضع جسم كتلته ١ كجم على مستوى أملس، يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، أثرت عليه قوة مقدارها ١٠ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى، أوجد عجلة الحركة ورد فعل المستوى على الجسم.

٩ وضع جسم كتلته ١٦ كجم على مستوى أملس، يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، أثرت قوة أفقية نحو المستوى ومقدارها ٢٤ نيوتن، ويقع خط عملها فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى، أوجد مقدار عجلة الحركة ورد فعل المستوى.

١٠ تفكير ابداعى :

في الشكل المقابل : $\overline{\text{أ م}}$ نصف قطر رأسى $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران يمثلان طريقين أملسين فى الدائرة حيث أ جـ > أ ب انزلقت خرزتان من السكون من نقطة أ احدهما على الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ فوصلت ب بعد زمن ن$_{١}$ والأخرى على الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$ فوصلت جـ بعد زمن ن$_{٢}$ أوجد قيمة النسبة ن$_{١}$: ن$_{٢}$.



الوحدة الثانية

٢ - ٦

حركة جسم على مستوى خشن

Motion of a body on a rough plane

سوف تتعلم

- الحركة على مستوى خشن.

المصطلحات الأساسية

- مستوى خشن Rough plane
- احتكاك ديناميكي Kinetic friction
- احتكاك استاتيكي static friction

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة:

علمت من دراستك السابقة لدرس الاحتكاك أنه عند محاولة تحريك جسم على مستوى خشن تظهر قوة الاحتكاك كقوة مقاومة، تعمل فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الحركة فيه، وتظل مساوية تمامًا للقوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم، وكلما ازدادت القوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم تزداد قوة الاحتكاك حتى تظل مساوية لها، إلى أن تصل إلى حد لا تتعداه، وتصل إلى أقصى قيمة لها وعندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة، فإذا ازدادت القوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم، واستطاعت تحريك الجسم تغيرت قوة الاحتكاك عندئذ، ونقصت قيمتها حال حركة الجسم، وتسمى قوة الاحتكاك عندئذ بالاحتكاك الحركى، ويكون معامل الاحتكاك فى هذه الحالة هو معامل الاحتكاك الحركى.

تعلم

الحركة على مستوى خشن Motion on a rough plane

إذا كان الجسم متزنًا على مستوى خشن تحت تأثير قوة تعمل على تحريكه فإن قوة الاحتكاك هى قوة الاحتكاك السكونى ، ومعامل الاحتكاك فى هذه الحالة هو معامل الاحتكاك السكونى $م_{س}$ ، أما إذا تحرك الجسم على مستوى خشن، فإن قوة الاحتكاك عندئذ هى قوة الاحتكاك الحركى ومعامل الاحتكاك عندئذ هو معامل الاحتكاك الحركى $م_{ك}$.

مثال

(١) مستوى مائل خشن طوله ٢٥٠ سم، وارتفاعه ١٥٠ سم، وُضع عليه جسم فى حالة سكون فانزلق الجسم إلى أسفل المستوى، وكانت عجلة الحركة تساوى ١٩٦ سم/ث^{٢}، أوجد معامل الاحتكاك الحركى، ثم أوجد سرعة الجسم بعد أن يقطع ٢٠٠ سم على المستوى.

الحل

ر = ك ء جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ك ء

∵ الجسم يتحرك لأسفل بعجلة منتظمة

ك جـ = ك ء جا هـ - $م_ك$ ر

١٩٦ ك = $\frac{٣}{٥}$ ك ء - $م_ك$ × $\frac{٤}{٥}$ ك ء

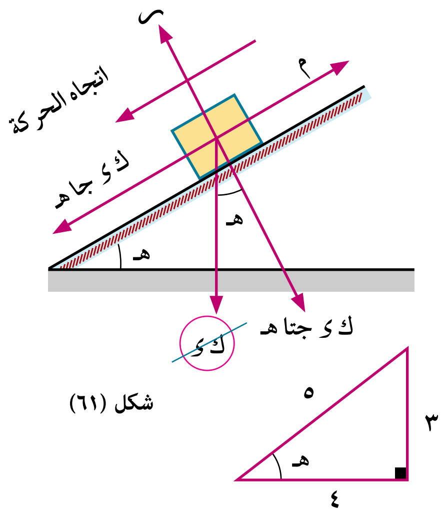
١٩٦ = $\frac{٣}{٥}$ × ٩٨٠ - $م_ك$ × $\frac{٤}{٥}$ × ٩٨٠

∴ $م_ك$ = $\frac{١}{٢}$

∵ $ع^٢$ = $ع_٠^٢$ + ٢ جـ ف

$ع^٢$ = ٠ + ٢ × ١٩٦ × ٢٠٠

∴ ع = ٢٨٠ سم/ث



شكل (٦١)

٩ حاول أن تحل

① تنقل الصناديق فى أحد المصانع بانزلاقها على مستوى مائل طوله ١٥ مترًا، وارتفاعه ٩ أمتار، أوجد سرعة الصندوق الذى بدأ حركته من السكون عند قمة المستوى، وذلك عند قاعدة المستوى إذا كان المستوى خشنًا، ومعامل الاحتكاك الحركى يساوى $\frac{١}{٤}$.

مثال

② جسم كتلته ١٢ كجم، موضوع على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ بينما معامل الاحتكاك الحركى يساوي $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ احسب القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة، ثم أوجد القوة التى تجعله يتحرك بعجلة قدرها $\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠}$ م/$ث^٢$ إذا كانت القوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°.

الحل

أولًا: القوة تجعل الجسم على وشك الحركة

ر + ق جا ٣٠ = و

ر = (١٢ - $\frac{١}{٢}$ق) ث كجم

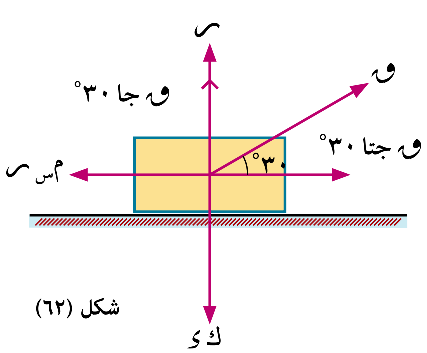
∵ ق جتا ٣٠ = $م_س$ ر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (١٢ - $\frac{١}{٢}$ق)

٣ق = ٢٤ - ق

٤ق = ٢٤

ق = ٦ ث كجم



شكل (٦٢)

ثانيًا: القوة تحرك الجسم بعجلة قدرها $\frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠}$ م/ث^{٢}

∵ ر = ك ى - و جا ٣٠ أى أن ر =(١٢ × ٩,٨ - $\frac{١}{٢}$ و) نيوتن

∵ ك جـ = و جتا ٣٠ - م$_{ك}$ ر

$١٢ \times \frac{٤٩\sqrt{٣}}{٢٠} = و \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(١٢ \times ٩,٨ - \frac{١}{٢} و\right)$

$١٢ \times \frac{٤٩\cancel{\sqrt{٣}}}{٢٠} = \frac{٥\cancel{\sqrt{٣}}}{٨} و - ٣\sqrt{٣} \times ٩,٨$ و = ٩٤,٠٨ نيوتن

حاول أن تحل

(١) فى المثال السابق احسب مقدار القوة و إذا كانت القوة المؤثرة على الجسم أفقية.

مثال

(٣) جسم وزنه ٨٠٠ نيوتن، موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥°، وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى ٠,٣٥، ومعامل الاحتكاك الحركى يساوى ٠,٢٥.

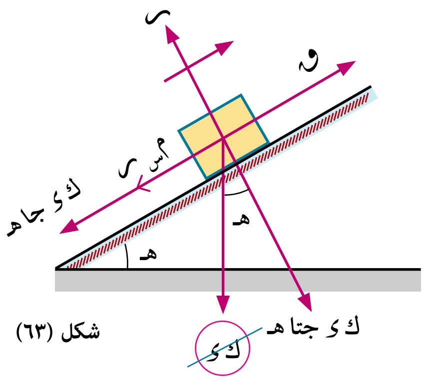
أوجد القوة ق التى تؤثر فى اتجاه خط اكبر ميل لأعلى المستوى فى كل من الحالات الآتية:

أ) و القوة التى تجعل الجسم يبدأ الحركة.

ب) و القوة التى تبقى الجسم متحركًا.

جـ) و تمنع الجسم من الانزلاق.

حيث و تؤثر فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى.



شكل (٦٣)

الحل

أ) القوة التى تجعل الجسم يبدأ الحركة هى نفسها القوة التى تجعله على وشك الحركة

، ر = ك ى جتا هـ

و = م$_{س}$ ر + ك ى جا هـ

= ٠,٣٥ × ك ى جتا هـ + ك ى جا هـ

= ٠,٣٥ × ٨٠٠ جتا ٢٥ + ٨٠٠ جا ٢٥

= ٥٩١,٨٦ نيوتن

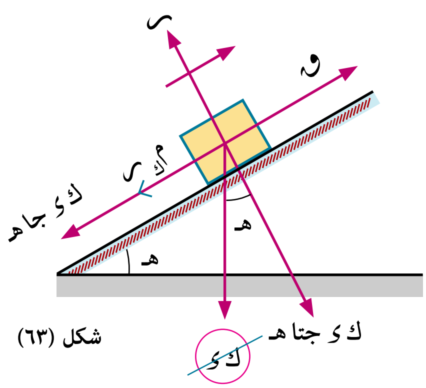
ب) القوة التى تبقى الجسم متحركًا هى القوة التى تحافظ على الحركة بعد بدايتها وتكون الحركة عندئذ منتظمة

و = م$_{ك}$ ر + ك ى جا هـ

= ٠,٢٥ × ك ى جتا هـ + ك ى جا هـ

= ٠,٢٥ × ٨٠٠ جتا ٢٥ + ٨٠٠ جا ٢٥

≃ ٥١٩,٣٦ نيوتن



شكل (٦٣)

مطابع الهدايه

ج القوة ق تمنع الجسم من الانزلاق

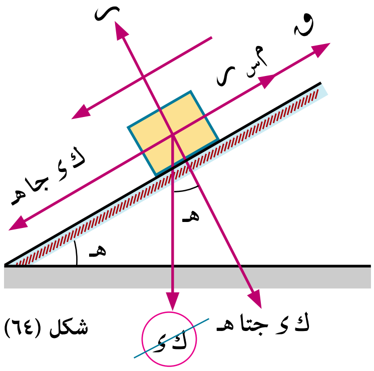
ر = ك ى جتا هـ

ق + م$_{س}$ ر = ك ى جا هـ

ق + ٠,٣٥ × ك ى جتا هـ = ك ى جا هـ

ق = ٨٠٠ جا ٢٥ - ٠,٣٥ × ٨٠٠ جتا ٢٥

ق = ٨٤,٣٣ نيوتن



شكل (٦٤)

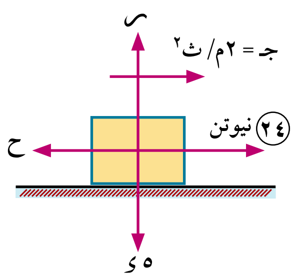
حاول أن تحل

(٢) فى المثال السابق احسب مقدار القوة ق إذا كانت أفقية فى جميع الحالات.

تمـــارين ٢ - ٦

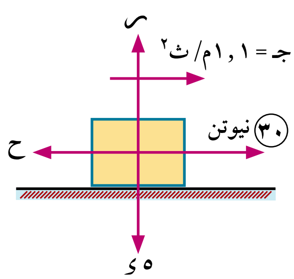
(١) فى كل من الأشكال الآتية جسم كتلته ٥ كجم موضوع على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك الحركى بينه وبين الجسم م$_{ك}$، احسب م$_{ك}$ فى كل حالة، ح قوة الاحتكاك الحركى.

أ



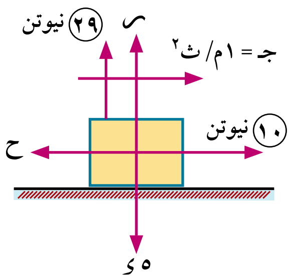
شكل (٦٥)

ب



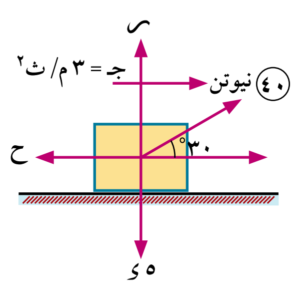
شكل (٦٦)

جـ



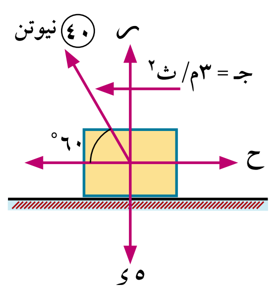
شكل (٦٧)

د



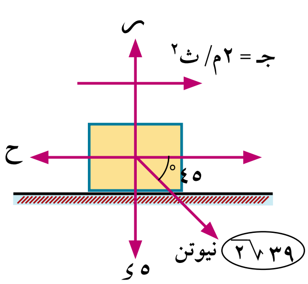
شكل (٦٨)

هـ



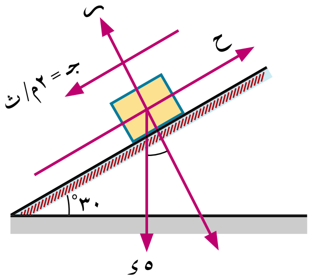
شكل (٦٩)

و



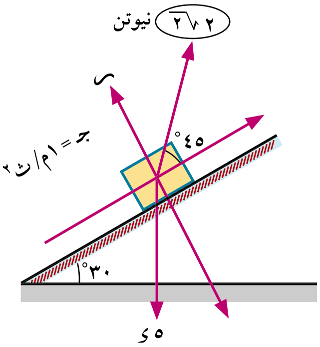
شكل (٧٠)

ز



شكل (٧١)

ح



شكل (٧٢)

٢ يراد سحب جسم كتلته ١ طن على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ بواسطة قوة توازى المستوى فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى، أوجد معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى إذا كانت أقل قوة تحرك الجسم على المستوى مقدارها ١٤٠٠ ث كجم.

٣ جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٢}$، أوجد القوة الأفقية التى تجعله يتحرك بعجلة منتظمة جـ حيث:

أ جـ = ٥م/ث٢

ب جـ = ١م/ث٢

٤ جسم وزنه ١٠ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن، أثرت عليه قوة أفقية قدرها ٣٧ نيوتن، فحركته على المستوى الأفقى بعجلة منتظمة قدرها $\frac{٥}{٤}$ م/ث٢، أوجد معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى.

٥ جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستوى مائل خشن، يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن نحو المستوى، فتحرك الجسم بسرعة منتظمة، أوجد معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى.

٦ ينزلق جسم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°، فإذا كان معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{٣}{٤}$. أثبت أن الزمن الذى يقطع فيه الجسم أى مسافة يساوى ضعف الزمن الذى يقطع فيه نفس المسافة لو أن المستوى كان أملسًا ، وبفرض أن الجسم بدأ الانزلاق من السكون فى الحالتين.

البكرات البسيطة

Simple pulley

سوف تتعلم

- البكرات البسيطة.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًا من طرف خيط يمر على بكرة ملساء.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على نضد أفقى أملس والآخر يتحرك رأسيًا.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على نضد أفقى خشن والآخر يتحرك رأسيًا.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على مستوى مائل أملس والآخر يتحرك رأسيًا.
- حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على مستوى مائل خشن والآخر يتحرك رأسيًا.

الأدوات المستخدمة

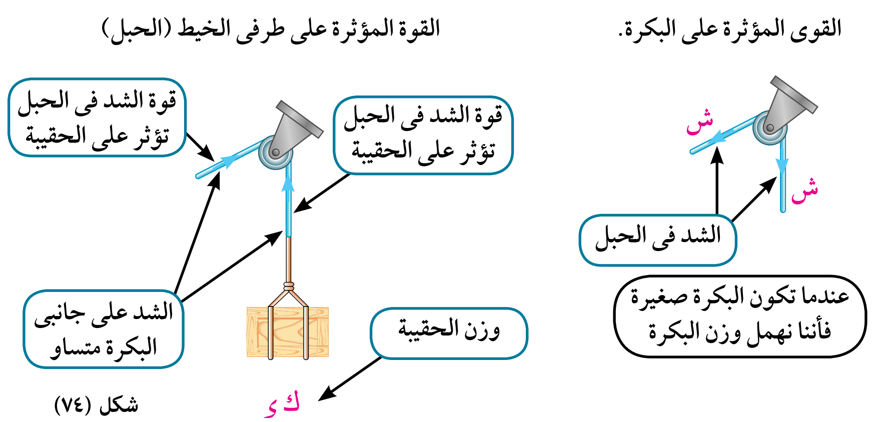
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة:

تستخدم البكرات فى أغراض عدة منها: تقليل القوة اللازمة لرفع جسم وتسهيل الحركة وتغيير اتجاه القوة، ومنها ما هو ثابت، ومنها ما هو متحرك، وفى هذا الدرس سنتناول نظام بكرات مكون من بكرة واحدة ثابتة.

وعندما تكون البكرة صغيرة وملساء يكون الشد على جانبى البكرة متساو.

والشكل الآتى يوضح القوى المؤثرة عند رفع حقيبة (جسم) باستخدام البكرة.



شكل (٧٤)

تعلم

حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيًا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء

Motion of system of two bodion connected by a string passing over a smooth pully

حركة جسمين مربوطين بخيط يمر على بكرة ملساء ويتدليان رأسيًا

إذا رُبط جسمان كتلتاهما $ك_١$، $ك_٢$ فى طرفى خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسيًا، وكانت $ك_١ > ك_٢$ فإن المجموعة تبدأ الحركة من السكون بعجلة منتظمة قدرها جـ.

معادلات الحركة

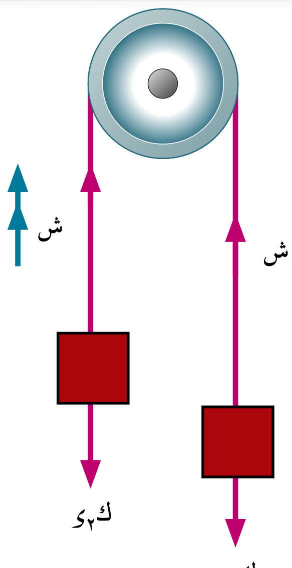
$ك_١ جـ = ك_١ ء - ش$

$ك_٢ جـ = ش - ك_٢ ء$

بجمع المعادلتين بحذف الشد، ومن ثم يمكن حساب عجلة الحركة

$(ك_١ + ك_٢) جـ = (ك_١ - ك_٢) ء$

وبالتالي من أي من المعادلتين نوجد الشد في الخيط ش



شكل (٧٥)

عند قطع الخيط :

إذا قطع الخيط الواصل بين الجسمين بعد زمن ن، فإن كلًّا من الجسمين يتحرك في اتجاهه السابق نفسه قبل قطع الخيط.

١) الكتلة $ك_١$ تتحرك لأسفل بسرعة ابتدائية ع (هي نفس السرعة لحظة قطع الخيط) وتحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية.

٢) الكتلة $ك_٢$ تتحرك لأعلى بسرعة ابتدائية ع (هي نفس السرعة لحظة قطع الخيط) إلى أن تصل لسكون لحظي، وذلك تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية، ثم تسقط سقوطًا حرًّا.

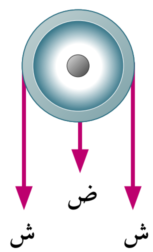
لاحظ أن

إذا بدأت المجموعة الحركة والكتلتين في مستوى أفقي واحد، وكانت المسافة المقطوعة بعد زمن قدره ن، تساوي ف وحدة طول، فإن المسافة الرأسية بين الكتلتين عند نفس الزمن تساوي ٢ ف وحدة طول.

الضغط على البكرة: *The pressure on the pulley*

عند تعليق الكتلتين من طرفي الخيط المار على البكرة يصبح الخيط مشدودًا ونتيجة للشد الحادث في الخيط تتولد قوة ضغط على محور البكرة تساوي محصلة قوتي الشد في الخيط.

$ض = ٢ش$



شكل (٧٦)

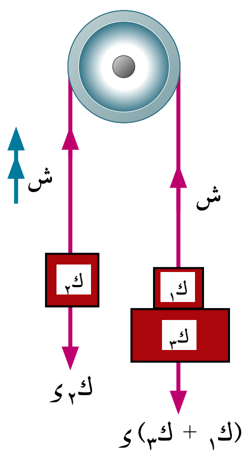
حالات مشابهة (١)

في الحالة المرسومة

إذا كان $(ك_١ + ك_٣) > ك_٢$، وكانت $ك_١ > ك_٢$ فإن معادلات الحركة

$(ك_١ + ك_٣) جـ = (ك_١ + ك_٣) ء - ش$

$ك_٢ جـ = ش - ك_٢ ء$



شكل (٧٧)

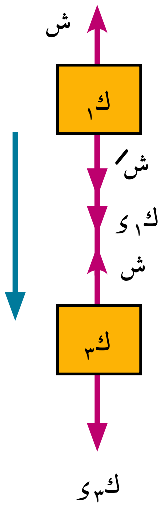
عند انفصال الكتلة الإضافية

وإذا انفصلت الكتلة $ك_٣$ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك في نفس اتجاهها السابق ، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تسكن لحظيًّا، ثم تغير اتجاه حركتها، ولإيجاد عجلة الحركة التقصيرية بعد انفصال الكتلة $ك_٣$ نوجد معادلات الحركة

$ك_١ جـ' = ك_١ ء - ش'$

$ك_٢ جـ' = ش' - ك_٢ ء$

والمجموعة بعد انفصال ك$_2$ الكتلة تتحرك بسرعة ابتدائية هى السرعة التى اكتسبتها لحظة الانفصال، وتصل إلى سكون لحظي، ثم تغير اتجاه حركتها، وترتد لتكون الكتلة ك$_2$ هى القائدة



شكل (٧٨)

الشد فى الخيط بين الكتلتين: *The tension of the string*

فى الشكل السابق إذا كانت الكتلتان ك$_1$ ، ك$_2$ مربوطتين بخيط آخر، فتكون الشدود كما هى موضحة فى شكل (٧٨) ومعادلات الحركة هي:

ك$_1$ جـ/ = ك$_1$ د + ش/ - ش

ك$_2$ جـ/ = ك$_2$ د - ش/

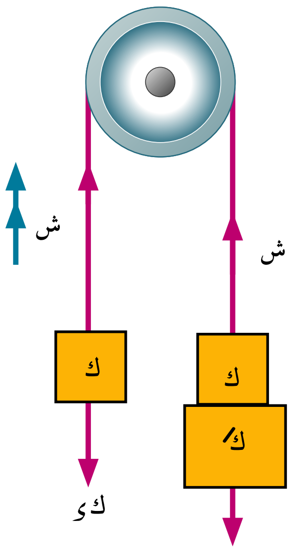
حالات مشابهة (٢)

إذا كانت ك$_1$ = ك$_2$ = ك شكل (٧٩)

أى أن الكتلتين متساويتان، وفى هذه الحالة لن تتحرك المجموعة، أما إذا أضيفت كتلة مقدارها ك/ إلى إحدى الكتلتين، فإن المجموعة تتحرك فى اتجاه الكتلتين (ك + ك/) ومعادلات الحركة

(ك + ك/) جـ = (ك + ك/) د - ش

ك جـ = ش - ك د

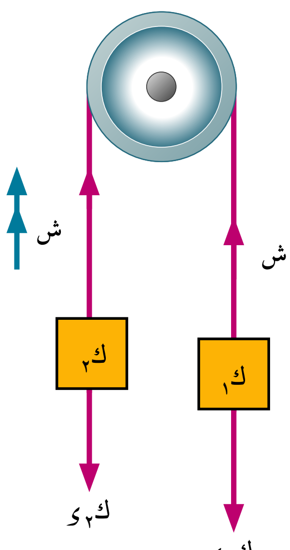


شكل (٧٩)

عند انفصال الكتلة الإضافية:

وإذا فُصلت الكتلة الإضافية ك/ بعد زمن قدره ن ثانية، فإن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق بسرعة منتظمة، هى السرعة التى اكتسبتها خلال ن ثانية (السرعة لحظة انفصال الكتلة ك/)

حالات مشابهة (٣) شكل (٨٠)



شكل (٨٠)

إذا عُلقت الكتلتان ك$_1$ ، ك$_2$ فى طرفى الخيط وكنا لا نعلم أيًا من الكتلتين أكبر من الأخرى، واكسبنا الكتلة ك$_1$ سرعة قدرها ع لأسفل وتحركت المجموعة فإننا أمام ثلاث حالات

١) إذا عادت المجموعة إلى موضعها الأصلى بعد زمن قدره ن، نستنتج من ذلك أن ك$_1$ < ك$_2$ ، وأن المجموعة تحركت بعجلة تقصيرية إلى أن سكنت لحظيًا، ثم غيرت اتجاه حركتها، ويمكن استنتاج عجلة الحركة من البيانات المعطاة حيث السرعة الابتدائية هى السرعة التى اكتسبتها الكتلة ك، السرعة النهائية = صفر، الزمن = $\frac{ن}{٢}$

٢) أما إذا تحركت المجموعة حركة منتظمة بسرعة ثابتة هى السرعة التى اكتسبتها الكتلة ك$_1$ نستنتج من ذلك أن الكتلتين متساويتان ك$_1$ = ك$_2$ ، وأن الحركة تتبع القانون الأول لنيوتن

٣) وإذا تحركت المجموعة بعجلة منتظمة تزايدية ، نستنتج من ذلك أن ك$_1$ > ك$_2$ ، ويمكن دراسة الحركة بإيجاد معادلات الحركة

ك$_1$ جـ = ك$_1$ د - ش

ك$_2$ جـ = ش - ك$_2$ د

مثال

(١) عُلق جسمان كتلتاهما $ك_{١}$، $ك_{٢}$، حيث $ك_{١} > ك_{٢}$ فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء، وكانا على ارتفاع واحد من سطح الأرض عند بدء الحركة، وبعد ثانية واحدة كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم، أوجد $ك_{١} : ك_{٢}$

الحل

عند بدء الحركة كانا الجسمان فى مستوى أفقى واحد وبعد ثانية كانت المسافة الرأسية بينهما ٢٠ سم.

$\therefore$ ف $= \frac{٢٠}{٢} = ١٠$ سم

$\because$ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

$١٠ = ٠ + \frac{١}{٢} \times$ جـ $\times ١$

جـ = ٢٠ سم/ث^{٢}

معادلات الحركة

$ك_{١}$ جـ = $ك_{١}$ ء - ش

$ك_{٢}$ جـ = ش - $ك_{٢}$ ء

بالجمع نجد أن

$(ك_{١} + ك_{٢})$ جـ = $(ك_{١} - ك_{٢})$ ء

$٢٠ (ك_{١} + ك_{٢}) = ٩٨٠ (ك_{١} - ك_{٢})$

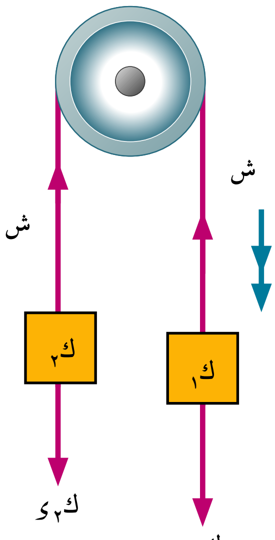
$ك_{١} + ك_{٢} = ٤٩ (ك_{١} - ك_{٢})$

$ك_{١} + ك_{٢} = ٤٩ ك_{١} - ٤٩ ك_{٢}$

$٥٠ ك_{٢} = ٤٨ ك_{١}$

$\frac{ك_{١}}{ك_{٢}} = \frac{٢٥}{٢٤}$

$ك_{١} : ك_{٢} = ٢٥ : ٢٤$



شكل (٨١)

حاول أن تحل

(١) عُلق جسمان كتلتاهما ٢١ جم، ٢٨ جم من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء، فإذا تحركت المجموعة من السكون، فأوجد عجلة المجموعة ومقدار الشد فى الخيط وسرعة المجموعة بعد ثانيتين من بدء الحركة.

مثال

(٢) جسمان كتلتاهما ١٠٥ جم، ٧٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف ثابت الطول، يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويتدليان رأسيًا، فإذا بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كانت الكتلتان فى مستوى أفقى واحد، فأوجد مقدار عجلة حركة المجموعة، وإذا اصطدم الجسم الأول بالأرض بعد أن قطع مسافة ٥٠ سم، فأوجد الزمن الكلى الذى يستغرقه الجسم الثانى من بدء الحركة حتى يسكن لحظيًّا.

الحل

معادلات الحركة:

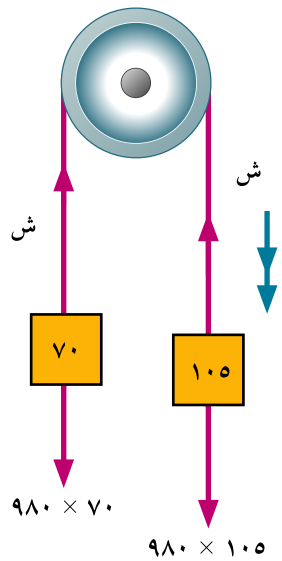
١٠٥ جـ = ١٠٥ × ٩٨٠ - ش

٧٠ جـ = ش - ٧٠ × ٩٨٠

بجمع المعادلتين نجد أن

١٧٥ جـ = ٣٥ × ٩٨٠

جـ = ١٩٦ سم/ث^{٢}



شكل (٨٢)

عند لحظة اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض يكون استغرق زمنا ن$_{١}$

ع^{٢} = ع$_{٠}^{٢}$ + ٢ جـ ف

ع^{٢} = ٠ + ٢ × ١٩٦ × ٥٠

ع = ١٤٠ سم/ث

ع = ع$_{٠}$ + جـ ن

١٤٠ = ٠ + ١٩٦ ن

ن = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

عند اصطدام الجسم ١٠٥ جم بالأرض، فإن الجسم ٧٠ جم، يتحرك رأسيًا لأعلى بعجلة الجاذبية مبتدئًا بالسرعة ع$_{٠}$ = ١٤٠سم/ ث. فيسكن لحظيًا بعد زمن ن$_{٢}$

∵ ع = ع$_{٠}$ + ء ن

∴ ٠ = ١٤٠ - ٩٨٠ ن

ن = $\frac{١}{٧}$ ثانية

∴ الجسم ٧٠ جم يستغرق من بدء الحركة زمنًا قدره ن حتى يصل إلى سكون لحظي

حيث ن = ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ = $\frac{٥}{٧}$ + $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٦}{٧}$ ثانية

حاول أن تحل

(٢) خيط خفيف يمر على بكرة مثبتة ملساء، ويتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٩٠ جم، ومن الطرف الآخر جسم كتلته ٧٠ جم، وبدأت المجموعة حركتها من السكون عندما كانت الكتلة ٩٠ جم على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض:

أ) أوجد الزمن الذى يمضى حتى تصل الكتلة ٩٠ إلى سطح الأرض.

ب) أوجد الزمن الذى يمضى بعد ذلك حتى يصبح الخيط مشدودًا مرة أخرى.

مثال

(٣) جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم مربوطان فى طرفى خيط خفيف، يمر على بكرة ملساء، بدأت المجموعة حركتها من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد على ارتفاع ٢٤٥ سم من سطح الأرض، وبعد ثانية واحدة من بدء الحركة قُطع الخيط، أوجد عجلة الحركة وسرعة كل من الجسمين عند وصوله للأرض.

الحل

معادلات الحركة:

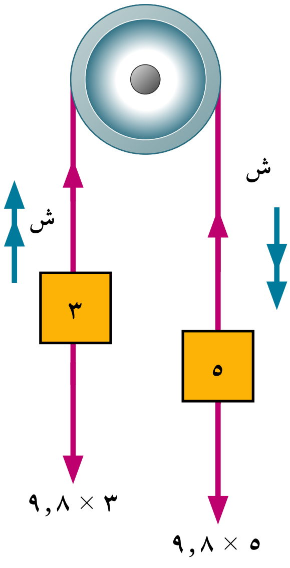
٥ جـ = ٥ × ٩,٨ - ش (١)

٣ جـ = ش - ٣ × ٩,٨ (٢)

بالجمع نجد أن

٨ جـ = ٢ × ٩,٨

∴ جـ = ٢,٤٥ م/ث^{٢}



شكل (٨٣)

عند لحظة قطع الخيط

ع = ع. + جـ ن

= ٠ + ٢,٤٥ × ١ = ٢,٤٥ م/ث

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

= ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٢,٤٥ × ١ = ١,٢٢٥ متر

بعد قطع الخيط

الجسم ٥ كجم يتحرك رأسيًّا لأسفل

ع. = ٢,٤٥ م/ث ، ى = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ف = ٢,٤٥ - ١,٢٢٥ = ١,٢٢٥ متر

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ى ف

∴ ع^{٢} = (٢,٤٥)^{٢} + ٢ × ٩,٨ × ١,٢٢٥

∴ ع = $\frac{٤٩\sqrt{٥}}{٢٠}$ م/ث

الجسم ٣ كجم يتحرك رأسيًّا لأعلى حرا من نقطة على بعد ف من سطح الأرض ليصل إلى سكون لحظى ثم يعود مارًا بنقطة بدء الحركة الحرة ثم إلى سطح الأرض.

ع. = ٢,٤٥ م/ث ، ى = -٩,٨ م/ث^{٢} ، ف = - (٢,٤٥ + ١,٢٢٥) = - ٣,٦٧٥

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ى ف

= (٢,٤٥)^{٢} + ٢ × -٩,٨ × -٣,٦٧٥

ع = $\frac{٤٩\sqrt{١٣}}{٢٠}$ م/ث

؟ حاول أن تحل

(٣) يمر خيط خفيف ثابت الطول على بكرة صغيرة ملساء مثبتة، ويحمل من طرفيه كتلتين ٢٠، ١٢ جم تتدليان رأسيًّا، أوجد عجلة حركة المجموعة والشد فى الخيط، وإذا كانت المجموعة قد بدأت حركتها من السكون، وقُطع الخيط بعد مرور ثانيتين من لحظة بدء الحركة، عين أقصى ارتفاع تصل إليه الكتلة ١٢ جم عن موضعها الأصلى عند بدء الحركة.

مثال

(٤) خيط خفيف يمر على بكرة رأسية ملساء، علق فى أحد طرفيه، جسم كتلته ٤٠ جم، وفى الطرف الآخر

جسمان كتلة كل منهما ٣٠ جم، تُركت المجموعة لتتحرك من سكون، وبعد ثانية واحدة من بدء الحركة، انفصلت إحدى الكتلتين الصغيرتين عن المجموعة، أوجد المسافة التى تصعدها الكتلة ٤٠ جم من بدء الحركة حتى تصل لسكون لحظي.

الحل

معادلات الحركة:

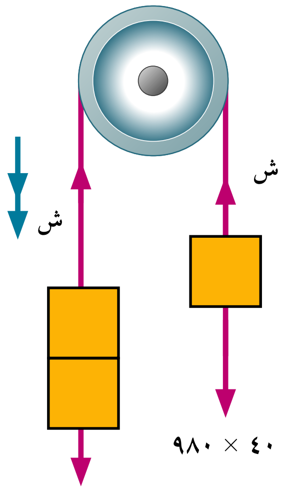
٦٠ جـ = ٦٠ × ٩٨٠ - ش

٤٠ جـ = ش - ٤٠ × ٩٨٠

بجمع المعادلات نجد أن

١٠٠ جـ = ٢٠ × ٩٨٠

جـ = ١٩٦ سم/ث^{٢}



شكل (٨٤)

لحظة انفصال الكتلة الصغرى

ع = ع. + جـ ن

= ٠ + ١٩٦ × ١ = ١٩٦ سم/ث

ف$_{١}$ = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

= ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ١٩٦ × ١ = ٩٨ سم

بعد انفصال الكتلة الصغرى معادلات الحركة

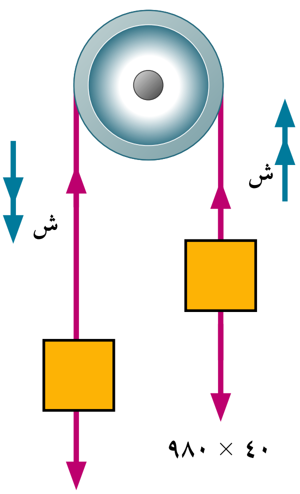
٤٠ جـ/ = ش/ - ٤٠ × ٩٨٠

٣٠ جـ/ = ٣٠ × ٩٨٠ - ش/

بجمع المعادلات نجد أن

٧٠ جـ = - ١٠ × ٩٨٠

جـ = - ١٤٠ سم/ث٢



شكل (٨٥)

أى أن المجموعة تتحرك فى نفس اتجاهها السابق قبل انفصال الكتلة الصغرى، ولكن بعجلة تقصيرية إلى أن تصل لسكون لحظى بعد أن تقطع مسافة ف$_{٢}$ ثم تغير اتجاه حركتها.

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف

٠ = (١٩٦)^{٢} - ٢ × ١٤٠ ف$_{٢}$ ∴ ف$_{٢}$ = ١٣٧,٢ سم

∴ الكتلة ٤٠ جم تصعد مسافة ف قبل أن تسكن لحظيًّا؛ حيث ف = ف$_{١}$ + ف$_{٢}$ = ٢٣٥,٢سم

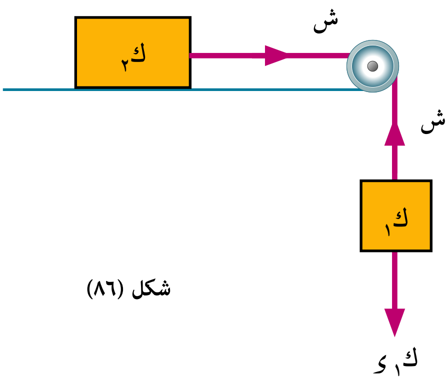
٩ حاول أن تحل

٤) خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، ويحمل فى أحد طرفيه ثقلين ٢٣٥، ٢٠ جم متصلين بخيط بحيث كان الثقل ٢٠ أسفل الثقل ٢٣٠، وفى الطرف الآخر ثقل قدره ٢٣٥ جم، احسب العجلة المشتركة إذا تحركت المجموعة من سكون. وإذا قطع الخيط الذى يحمل الثقل ٢٠ جم بعد أن قطعت المجموعة مسافة ٤٥ سم، وكان الثقل ٢٣٥ جم الهابط على مسافة ٩٠سم من سطح الأرض عندئذ، فاحسب الزمن الذى يأخذه هذا الثقل حتى يصل إلى سطح الأرض.

حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على نضد أفقى والآخر يتحرك رأسيًا لأسفل

Motion of system of two bodies connected by astring, one of which is hanging free and the other lying an a smooth horizontal plane

إذا رُبط جسمان كتلتاهما $ك_{١}$، $ك_{٢}$ فى طرفى خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء بحيث كان الجسم $ك_{٢}$ موضوع على مستوى أفقى والجسم $ك_{١}$ يتدلى رأسيًّا.



شكل (٨٦)

أولاً: المستوى الأفقى أملس: *Smooth horizontal plane*

معادلات الحركة

$$ك_{١} \, جـ = ك_{١} \, ء - ش$$

$$ك_{٢} \, جـ = ش$$

بجمع المعادلتين يحذف الشد، ومن ثم يمكن حساب عجلة الحركة

$$(ك_{١} + ك_{٢}) \, جـ = ك_{١} \, ء$$

وبالتالى من أى من المعادلتين نُوجِد الشد فى الخيط ش.

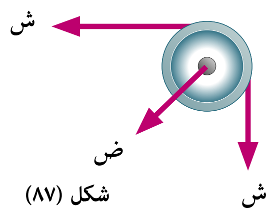
عند قطع الخيط

إذا قُطع الخيط الواصل بين الجسمين بعد زمن ن، فإن كلًّا من الجسمين يتحرك فى نفس اتجاهه السابق قبل قطع الخيط.

١- الكتلة $ك_{١}$ تتحرك لأسفل بسرعة ابتدائية ع (هى السرعة نفسها لحظة قطع الخيط)، وتحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية

٢- الكتلة $ك_{٢}$ تتحرك على المستوى بسرعة منتظمة ع (هى السرعة نفسها لحظة قطع الخيط).

الضغط على البكرة

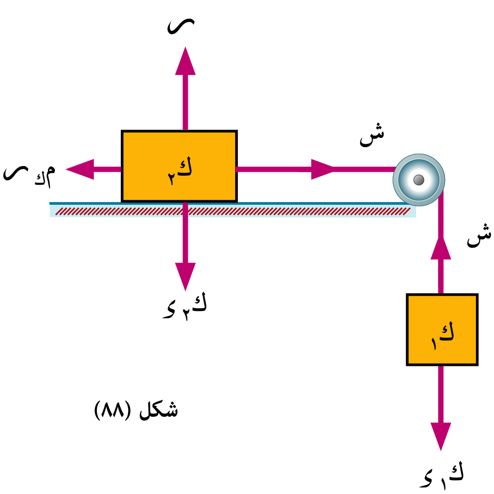


شكل (٨٧)

عند تعليق الكتلتين من طرفى الخيط المار على البكرة يصبح الخيط مشدودًا ونتيجة للشد الحادث فى الخيط تتولد قوة ضغط على محور البكرة تساوى محصلة قوتى الشد فى الخيط.

$$\text{الضغط على البكرة} = \sqrt{٢} \, ش$$

ثانيًا: المستوى الأفقى خشن *Rough horizontal plane*



شكل (٨٨)

إذا كان $م_{ك}$ هو معامل الاحتكاك الحركى فإن

$$ر = ك_{٢} \, ء$$

معادلات الحركة

$$ك_{١} \, جـ = ك_{١} \, ء - ش$$

$$ك_{٢} \, جـ = ش - م_{ك} \, ر$$

بجمع المعادلتين بحذف الشد، ومن ثم يمكن حساب عجلة الحركة

$$(ك_{١} + ك_{٢}) \, جـ = ك_{١} \, ء - م_{ك} \, ر$$

وبالتالى من أى من المعادلتين نُوجِد الشد فى الخيط ش

عند قطع الخيط.

إذا قُطع الخيط الواصل بين الجسمين بعد زمن ن، فإن كلًّا من الجسمين يتحرك فى نفس اتجاهه السابق قبل قطع الخيط.

١ الكتلة $ك_١$ تتحرك لأسفل بسرعة ابتدائية ع (هى نفس السرعة لحظة قطع الخيط) وتحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية.

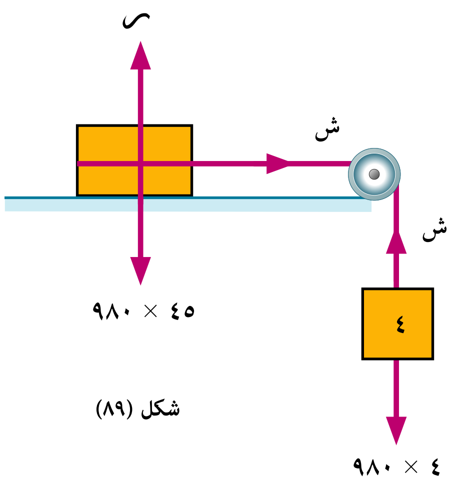
٢ الكتلة $ك_٢$ تتحرك على المستوى بسرعة ابتدائية ع (هى نفس السرعة لحظة قطع الخيط) وبتقصير منتظم إلى أن تسكن، ويمكن استنتاج عجلة الحركة التقصيرية من معادلة الحركة.

$ك_٢ جـ' = -م_ك ر$

مثال

٥ جسم كتلته ٤٥ جرامًا موضوع على نضد أفقى أملس، ومربوط بخيط يتصل طرفه الآخر بجسم كتلته ٤ جرامات يتدلى رأسيًّا، ويمر الخيط على بكرة ملساء عن حافة النضد، أوجد العجلة المشتركة للمجموعة والشد فى الخيط والضغط على البكرة.

الحل



شكل (٨٩)

معادلات الحركة

٤ جـ = ٤ × ٩٨٠ - ش (١)

٤٥ جـ = ش (٢)

بجمع المعادلتين نجد أن

٤٩ جـ = ٤ × ٩٨٠

جـ = ٨٠ سم/ث^٢

من (٢) ش = ٤٥ × ٨٠ داين

∴ ش = ٣٦٠٠ داين

الضغط على البكرة = $\sqrt{٢}$ ش

= ٣٦٠٠ $\sqrt{٢}$ داين

حاول أن تحل

٥ جسم كتلته ٤٠٠ جرام، موضوع على نضد أفقى أملس، ثم وصل بخيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء عن حافة النضد، وحمل فى طرفه جسمًا آخر كتلته ٩٠ جرامًا يتدلى رأسيًّا، أوجد العجلة المشتركة للجسمين والشد فى الخيط والضغط على البكرة.

مثال

٦ جسم كتلته ٦٠ جم موضوع على مستوى أفقى خشن، ومربوط بخيط يمر على بكرة ملساء عند حافة المستوى ومعلق بالطرف الخالص للخيط جسم كتلته ٣٨ جم، فإذا تحركت المجموعة من السكون وقطعت مسافة ٧٠ سم فى ثانية واحدة، فاحسب معامل الاحتكاك الحركى، وإذا قُطع الخيط عندئذ، فاحسب المسافة التى تتحركها الكتلة الأولى بعد ذلك على المستوى حتى تسكن.

الحل

∵ ف = ع.ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

∴ ٧٠ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × جـ × ١

جـ = ١٤٠ سم/ث^{٢}

ر = ٦٠ × ٩٨٠ داين

معادلات الحركة

٣٨ جـ = ٣٨ ء - ش

٣٨ × ١٤٠ = ٣٨ × ٩٨٠ - ش (١)

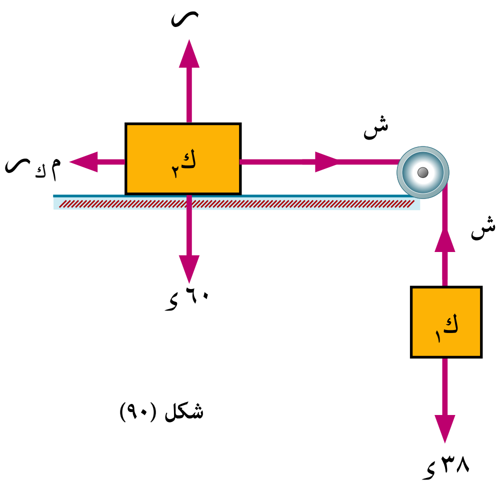
٦٠ جـ = ش - م$_{ك}$.ر

٦٠ × ١٤٠ = ش - م$_{ك}$ × ٦٠ × ٩٨٠ (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع نجد أن

٩٨ × ١٤٠ = ٣٨ × ٩٨٠ - م$_{ك}$ × ٦٠ × ٩٨٠

∴ م$_{ك}$ = $\frac{٢}{٥}$



شكل (٩٠)

عند لحظة قطع الخيط

ع = ع. + جـ ن

= ٠ + ١٤٠ × ١

ع = ١٤٠ سم/ث

بعد قطع الخيط

الكتلة ٦٠ جم، تتحرك بعجلة تقصيرية على المستوى الخشن حتى تسكن.

معادلة الحركة

ك جـ/ = - م$_{ك}$ر

٦٠ جـ/ = - $\frac{٢}{٥}$ × ٦٠ × ٩٨٠

جـ/ = - ٣٩٢ سم /ث٢

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف

∴ ٠ = (١٤٠)^{٢} - ٢ × ٣٩٢ ف

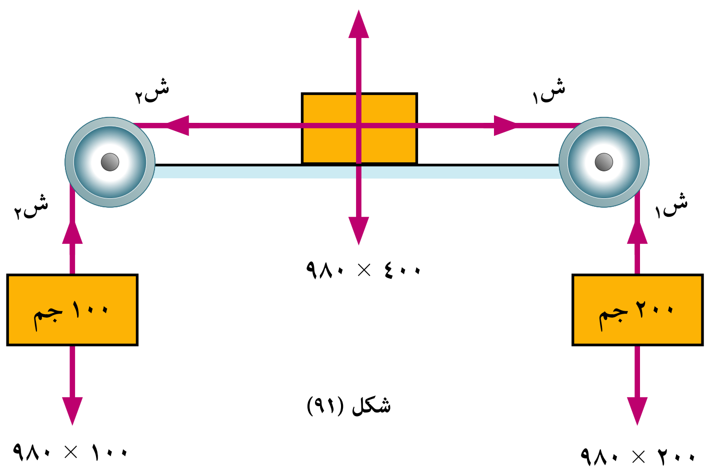
∴ ف = ٢٥ سم

حاول أن تحل

٦ وُضع جسم كتلته ٦٣ جم على نضد أفقى خشن، ورُبط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ورُبط فى الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٣٥ جم على ارتفاع ٢٨٠ سم من سطح الأرض، فإذا كان معامل الاحتكاك الديناميكى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{١}{٣}$ ، فأوجد السرعة التى تصل بها الكتلة ٣٥ جم إلى سطح الأرض والمسافة التى تتحركها الكتلة ٦٣ جم حتى تسكن.

مثال

⑦ جسم كتلته ٤٠٠ جرام موضوع على نضد أفقى أملس ومربوط من جهتيه بخيطين يمر أحدهما على بكرة ملساء مثبتة فى حافة النضد التى تبعد عن الجسم مسافة ١٥٠ سم ومدلى منه رأسيًا إلى أسفل جسم كتلته ٢٠٠ جرام. ويمر الخيط الثانى على بكرة ملساء عند حافة المستوى المقابله والتى تبعد عن الجسم بمقدار ٨٠سم، ويتدلى منه رأسيًّا جسم كتلته ١٠٠ جم، بحيث كانت البكرتان والجسم بينهما على استقامة واحدة، وبدأت المجموعة الحركة من السكون، ثم قُطع الخيط الذى يحمل الكتلة ٢٠٠ جم بعد ثانية واحدة من بدأ الحركة، فأوجد متى تصل الكتلة ٤٠٠ جم إلى حافة النضد.



شكل (٩١)

الحل

معادلات الحركة

٢٠٠ جـ = ٢٠٠ × ٩٨٠ - ش١

٤٠٠ جـ = ش١ - ش٢

١٠٠ جـ = ش٢ - ١٠٠ × ٩٨٠

بجمع المعادلات نجد أن

٧٠٠ جـ = ١٠٠ × ٩٨٠

جـ = ١٤٠ سم/ث٢

عند لحظة قطع الخيط

ع = ع. + جـ ن

= ٠ + ١٤٠ × ١ = ١٤٠ سم/ث

ف = ع.ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن٢

= ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠ × ١ = ٧٠ سم

أى أن الكتلة ٤٠٠ جم قد أصبحت على بعد ١٥٠ - ٧٠ = ٨٠ سم من حافة النضد.

بعد قطع الخيط تتحرك المجموعة بعجلة تقصيرية، يمكن استنتاجها من معادلات الحركة الجديدة وهي

٤٠٠ جـَ = - ش٢

١٠٠ جـَ = ش٢ - ١٠٠ × ٩٨٠

∴ ٥٠٠ جـَ = - ١٠٠ × ٩٨٠

جـَ = - ١٩٦ سم/ث٢

∵ ع٢ = ع.٢ + ٢ جـ ف

∴ ٠ = (١٤٠)٢ - ٢ × ١٩٦ ف

ف = ٥٠سم

ع = ع. + جـ ن

٠ = ١٤٠ - ١٩٦ن

ن٢ = $\frac{١٤٠}{١٩٦}$ = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

أى أن الكتلة ٤٠٠ جم تسكن لحظيًّا بعد $\frac{٥}{٧}$ ثانية من لحظة قطع الخيط، وهى على بعد قدره ٨٠ - ٥٠ = ٣٠ سم من الحافة وعلى بعد قدره ٨٠ + ٧٠ + ٥٠ = ٢٠٠ سم من الحافة الأخرى.

والآن تغير المجموعة اتجاه حركتها وتتحرك فى الاتجاه المضاد بعجلة مبتدئة من السكون.

∵ ف = ع.ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

∴ ٢٠٠ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ١٩٦ ن^{٢}　　∴ ن$_{٣}$ = $\frac{١٠}{٧}$

∴ الكتلة ٤٠٠ تصل للحافة بعد زمن قدره ١ + $\frac{٥}{٧}$ + $\frac{١٠}{٧}$ = $\frac{٢٢}{٧}$ ثانية

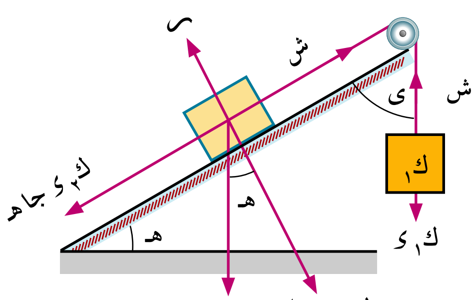
حاول أن تحل

(٧) جسم كتلته ١٤ كجم موضوع على مستوى أفقى خشن، معامل الاحتكاك الحركى بينهما $\frac{١}{٧}$، رُبط الجسم من جهتيه بخيطين خفيفين، يمر أحدهما على بكرة ملساء عند حافة المستوى، و يتدلى منه رأسيًّا جسم كتلته ٣٥ كجم، و يمر الخيط الثانى على بكرة ملساء أخرى عند حافة المستوى المقابلة، و يتدلى منه رأسيًّا جسم كتلته ٢١ كجم، بحيث كانت البكرتان والجسم بينهما على استقامة واحدة، فإذا تحركت المجموعة من سكون وجميع أجزاء الخيط مشدودة عندما كانت الكتلة ٣٥ كجم على ارتفاع ٢١ سم من سطح الأرض، فأوجد سرعتها عندما تصطدم بالأرض.

حركة جسمين مربوطين بخيط يمر على بكرة ملساء أحدهما على مستو مائل والآخر يتدلى رأسيًّا

Motion of system of two bodies connected by a string one of which is hanging free and the other lying on inclined plane

إذا رُبط جسمان كتلتاهما ك$_{١}$، ك$_{٢}$ فى طرفى خيط خفيف غير مرن، يمر على بكرة صغيرة ملساء، بحيث كان الجسم ك$_{٢}$ موضوعًا على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ، والجسم الآخر يتدلى رأسيًّا، فإذا كان ك$_{١}$ > ك$_{٢}$ فإن الجسم الموضوع على المستوى يتحرك لأعلى المستوى، وتكون معادلات الحركة



شكل (٩٢)

ك$_{١}$ جـ = ك$_{١}$ ى - ش

ك$_{٢}$ جـ = ش - ك$_{٢}$ ى جاهـ

وبجمع المعادلات يحذف الشد، و يمكن الحصول على عجلة الحركة جـ ومن ثم يمكن إيجاد الشد فى الخيط. عند قطع الخيط الواصل بين الجسمين، تتحرك الكتلة ك$_{١}$ رأسيًّا لأسفل بعجلة الجاذبية الأرضية مبتدئة بالسرعة لحظة قطع الخيط. أما الكتلة ك$_{٢}$ فإنها تتحرك على المستوى المائل فى نفس اتجاه حركتها السابق بعجلة تقصيرية مبتدئة بالسرعة لحظة قطع الخيط حتى تسكن لحظيًّا، ثم تغير اتجاه حركتها.

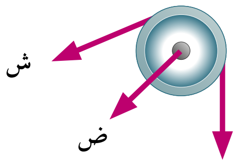
المسافة الرأسية بين الكتلتين:

إذا بدأت المجموعة حركتها، وكانت الكتلتان ك$_{١}$، ك$_{٢}$ فى مستوى أفقى واحد، وقطعت المجموعة مسافة ف، فإن المسافة الرأسية بين الكتلتين تساوى ف (١ + جا هـ) حيث هـ زاوية ميل المستوى على الأفقي

الضغط على البكرة.

إذا كان الشد في الخيط ش، وكانت هـ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي، فإن الضغط على محور البكرة هو محصلة الشدين المتساويين في الخيط

$$\text{ض} = ٢\,\text{ش}\,\text{جتا}\,\frac{\text{ى}}{٢} = ٢\,\text{ش}\,\text{جتا}\left(\frac{٩٠ - \text{هـ}}{٢}\right) = \sqrt{٢ + ٢\,\text{جا هـ}}\;\text{ش}$$



شكل (٩٣)

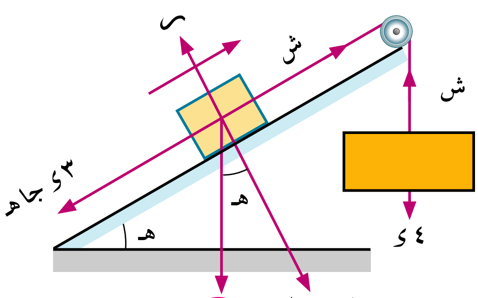
مثال

٨ جسم كتلته ٣ كجم، موضوع عند أسفل نقطة في مستوى مائل أملس، طوله ٢١٠سم وارتفاعه ١٤٠ سم، يتصل هذا الجسم بجسم آخر كتلته ٤ كجم بواسطة خيط طوله ٢١٠سم منطبق على خط أكبر ميل للمستوى، ويتدلى الجسم الآخر عند حافة المستوى العليا، وبدأت المجموعة حركتها من السكون حتى وصلت الكتلة الكبرى إلى الأرض، واستقرت على حالة السكون. أوجد المسافة التي تتحركها الكتلة الصغرى على المستوى قبل أن تقف بفرض أن حركتها لم تتأثر بتصادم الكتلة الكبرى مع الأرض.

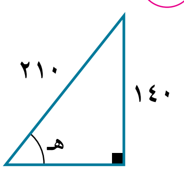
الحل

$\because$ ٤ ء > ٣ ء جا هـ

$\therefore$ اتجاه الحركة كما هو موضح على الرسم شكل (٩٤)



شكل (٩٤)



معادلات الحركة للمجموعة:

$$٤\,\text{جـ} = ٤\,\text{ء} - \text{ش}$$

$$٣\,\text{جـ} = \text{ش} - ٣\,\text{ء جا هـ}$$

بجمع المعادلتين نجد أن

$$٧\,\text{جـ} = \left(٤ - ٣ \times \frac{١٤٠}{٢١٠}\right) \times ٩{,}٨$$

$$\text{جـ} = ٢{,}٨\ \text{م/ث}^٢$$

نحسب سرعة وصول الجسم ٤ كجم لسطح الأرض

$$\text{ع}^٢ = \text{ع}_\circ^٢ + ٢\,\text{جـ ف}$$

$$= ٠ + ٢ \times ٢{,}٨ \times ١{,}٤$$

$$\text{ع} = ٢{,}٨\ \text{م/ث}$$

بعد وصول الجسم ٤ كجم لسطح الأرض يتحرك الجسم ٣ك على المستوى بعجلة تقصيرية.

معادلة حركة الجسم المتحرك على المستوى المائل

$$٣\,\text{جـ}' = -\,٣\,\text{ء جا هـ}$$

$$\therefore \text{جـ}' = -\,\frac{٩٨}{١٥}\ \text{م/ث}^٢$$

نوجد المسافة التي يتحركها على المستوى حتى يسكن.

$$\text{ع}^٢ = \text{ع}_\circ^٢ + ٢\,\text{جـ ف}$$

$$٠ = (٢{,}٨)^٢ - ٢ \times \frac{٩٨}{١٥}\,\text{ف}$$

$$\text{ف} = ٠{,}٦\ \text{متر}$$

$\therefore$ الكتلة ٣ كجم تسكن لحظيًّا على بعد مترين من قاعدة المستوى المائل.

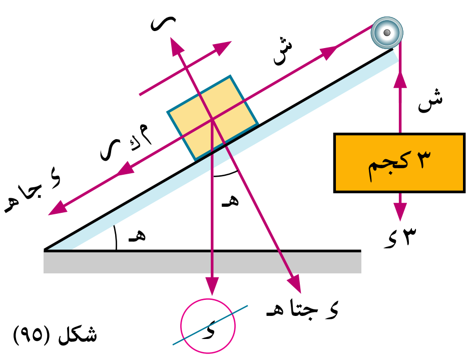
حاول أن تحل

٨) مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٢}{٣}$، وُضع عليه جسم كتلته ٢١٠ جم، ورُبط بخيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى، ويحمل فى طرفه الآخر كفة ميزان كتلتها ٧٠ جم، وعليها جسم كتلته ٢١٠ جم، إذا بدأت المجموعة حركتها من السكون، فأوجد الشد فى الخيط والضغط على الكفة مقدرين بوحدة ثقل جرام، وإذا أبعد الجسم من الكفة بعد ٧ ثوانٍ من بدء الحركة، فأثبت أن المجموعة تسكن لحظيًّا بعد مضى ٨ ثوانٍ أخرى.

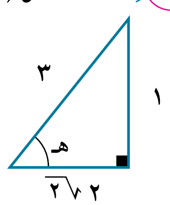
مثال

٩) وضع جسم كتلته كيلوجرام واحد على مستوى مائل خشن، يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{١}{٣}$، ومعامل الاحتكاك الديناميكى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، ربط الجسم بخيط ينطبق على خط أكبر ميل للمستوى، ويمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى، ويتدلى رأسيًّا حاملًا فى نهايته جسم كتلته ٣ كجم، أوجد الضغط على محور البكرة، وإذا بدأت المجموعة حركتها من السكون وبعد أن قطعت الكتلة ١ كجم مسافة ١,٨ متر على المستوى قُطع الخيط الواصل بين الكتلتين.
أوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكتلة ١ كجم على المستوى قبل أن تسكن لحظيًّا.

الحل



شكل (٩٥)



∵ ٣ ى > ى جا هـ

∴ اتجاه الحركة كما هو موضح على الرسم شكل (٩٥)

ر = ى جتا هـ

$= ٩,٨ \times \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

$= \frac{٩٨\sqrt{٢}}{١٥}$ نيوتن

معادلات الحركة

٣ جـ = ٣ ى - ش (١)

جـ = ش - م ك ر - ى جا هـ (٢)

بجمع المعادلتين نجد أن

٤ جـ = ٣ ى - م ك ر - ى جا هـ

$٤\text{ جـ} = ٣ \times ٩,٨ - \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{٩٨\sqrt{٢}}{١٥} - ٩,٨ \times \frac{١}{٣}$

جـ = ٤,٩ م/ث^٢

من (١) نجد أن ش = ١٤,٧ نيوتن

ض = $\sqrt{٢}$ ش $\sqrt{١ + \text{جا هـ}}$ = $١٤,٧\sqrt{٢} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٤٩\sqrt{٦}}{٥}$ نيوتن

عند لحظة قطع الخيط

ع^٢ = ع.^{٢} + ٢ جـ ف = ٠ + ٢ × ٤,٩ × ١,٨

ع = ٤,٢ م/ث

بعد قطع الخيط الجسم المتحرك على المستوى يتحرك بعجلة تقصيرية إلى أن يسكن لحظيًّا.

معادلة حركة الجسم المتحرك على المستوى المائل.

$\text{ك جـ} = -\,\text{م}_{\text{ك}}\,\text{ر} - \text{ك ى جا هـ}$

$١ \times \text{جـ}' = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{٩٨\sqrt{٢}}{١٥} - ١ \times ٩,٨ \times \frac{١}{٣}$

$\text{جـ}' = -٩,٨\ \text{م/ث}^٢$

$\text{ع}^٢ = \text{ع}_٠^٢ + ٢\,\text{جـ ف}$

$\because\ ٠ = (٤,٢)^٢ - ٢ \times ٩,٨\,\text{ف}$ $\quad\therefore\ \text{ف} = ٠,٩$ متر

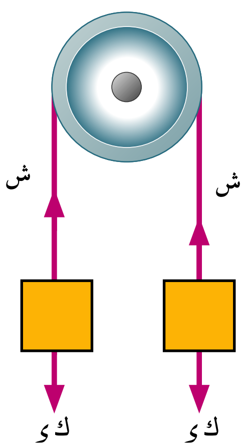
$\therefore$ الكتلة تقطع مسافة قدرها ١,٨ + ٠,٩ = ٢,٧ متر حتى تسكن لحظيًّا

٩ حاول أن تحل

٩ جسم كتلته كيلوجرام واحد موضوع على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ، حيث جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ومربوط بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء فى قمة المستوى، حيث يتدلى من الطرف الآخر للخيط كفة ميزان كتلتها ٤٠٠ جرام موضوع بها كتلة مقدارها ١٠٠ جرام، فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{١}{٣}$ ، وتركت المجموعة للحركة من سكون والخيط منطبق على خط أكبر ميل للمستوى. فأوجد ضغط الكتلة على الكفة، وإذا وضعت بالكفة كتلة أخرى مقدارها ١٠٠ جرام بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، فأوجد الضغط على الكفة عندئذ والمسافة التى تتحركها المجموعة فى الثوانى الثلاث التالية:

تمـــارين ٢ – ٧

أكمل مايأتى :



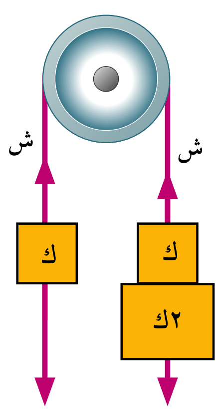
شكل (٩٦)

١ جسمان كتلة كل منهما ٣ كجم، مربوطان فى طرفى خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء، إذا اكسبت المجموعة سرعة قدرها ٢ م/ث فإن :

أ عجلة الحركة جـ = ...

ب الشد فى الخيط ش = ... ث كجم

جـ المسافة التى قطعتها إحدى الكتلتين خلال ثانية واحدة من بدء الحركة .... مترًا.



شكل (٩٧)

٢ **فى الشكل المقابل** : إذا تحركت المجموعة من السكون فإن:

أ عجلة المجموعة = ... م/ث^٢

ب سرعة المجموعة بعد ٢ ث = ... م/ث

جـ إذا انفصلت الكتلة ٢ ك عن المجموعة بعد ٢ ثانية فإن المجموعة تتحرك بعد ذلك بعجلة = ...

د المسافة التى قطعتها الكتلة ك فى ٥ ثوانٍ من بداية الحركة = ...

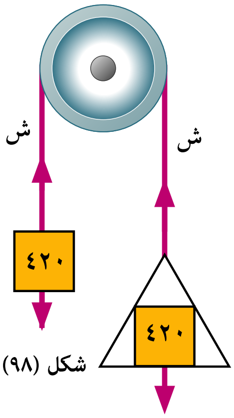
٣ كتلتان مقدار كل منهما ٤٢٠ جم إحداهما موضوعة فى كفة ميزان كتلتها ١٤٠ جم. وتحركت المجموعة من السكون فان:

أ عجلة الحركة = ... سم/ث^{٢}

ب الشد فى الخيط = ... ث جم

جـ الضغط على محور البكرة = ... ث جم

د الضغط على كفة الميزان = ... ث جم



شكل (٩٨)

شكل (٩٨)

٤ فى الشكل المقابل: جسمان كتلتاهما ك، ٢ ك مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء وتحركت المجموعة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد.

أ عجلة الحركة = ... م/ث^{٢}

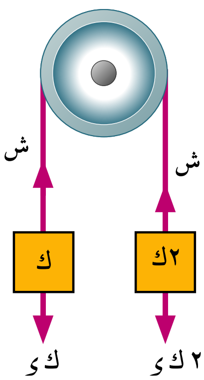
ب الضغط على البكرة = ... ث كجم

جـ سرعة المجموعة بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة = ... م/ث

د المسافة الرأسية بين الجسمين بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة = ... متر.

هـ إذا قُطع الخيط بعد $\frac{٣}{٢}$ ثانية من بدء الحركة فإن الكتلة ك تصل للسكون اللحظى بعد زمن قدره .... ثانية

و إذا كانت المسافة بين الجسمين بعد زمن ن ثانية بعد قطع الخيط أصبحت ١٢,٢٥ مترًا فإن ن = ... ثانية



شكل (٩٩)

٥ **فى الشكل المقابل: إذا كان المستوى الأفقى أملس والمجموعة تحركت من السكون**

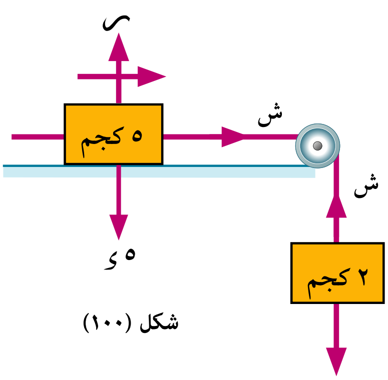
أ جـ = ... م/ث^{٢}

ب ش = ... ث كجم

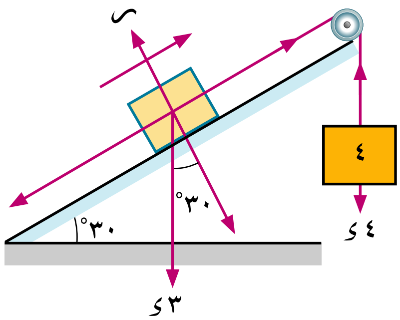
جـ الضغط على البكرة = ... ث كجم

د المسافة المقطوعة بعد ٢ ثانية = ...متر

هـ سرعة المجموعة بعد ٢ ثانية = ... م/ث



شكل (١٠٠)



شكل (١٠١)

٦ فى الشكل المقابل:

الجسم ٣ كجم موضوع على المستوى المائل والأملس ومتصل بخيط بالجسم ٤ كجم المتدلى رأسيًّا . أكمل:

أ عجلة المجموعة = ... م/ث٢

ب الشد فى الخيط = ... نيوتن

جـ الضغط على البكرة = ... نيوتن

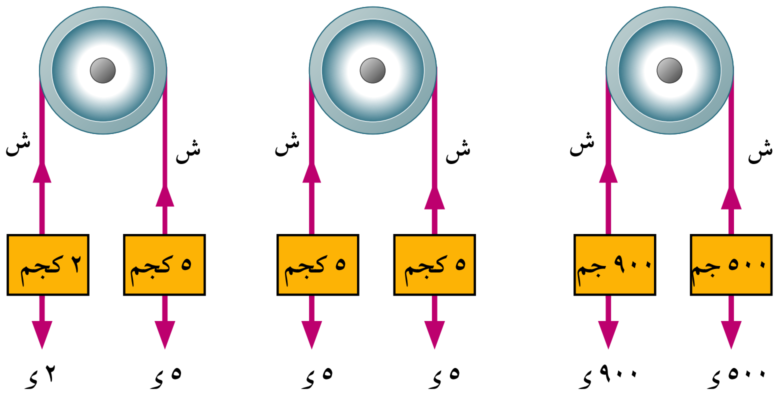
أجب عن الأسئلة الآتية :

٧ فى كل من الأشكال الآتية أوجد :

أ عجلة الحركة.

ب الشد فى الخيط.

جـ الضغط على البكرة.



شكل (١٠٤) شكل (١٠٣) شكل (١٠٢)

٨ رُبط جسمان كتلتاهما ٥ كجم، ٣ كجم فى نهايتى خيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزءا الخيط رأسيان إذا تركت المجموعة لتتحرك فأوجد مقدار عجلتها والضغط على البكرة، عين كذلك سرعة الجسم الذى كتلته ٥ كجم عندما يكون قد هبط ٤٠ سم.

٩ عُلق جسمان كتلتاهما ك$_١$، ك$_٢$ حيث ك$_١$ > ك$_٢$ فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء ، إذا كانت المجموعة تتحرك بعجلة ١٩٦ سم/ث٢ فأوجد ك$_١$: ك$_٢$

١٠ رُبطت كتلتان ٣ ك ، ك جرام فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزءا الخيط رأسيان ، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون عندما كانت المسافة الرأسية بين الكتلتين ١٦٠ سم والكتلة ك أسفل الكتلة ٣ ك. أوجد الزمن الذى تصبح فيه الكتلتان فى مستوى أفقى واحد.

١١ عُلقت كفتا ميزان كتلة كل منهما ٢١٠ جم فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء و يتدليان رأسيًّا، وضع فى إحدى الكفتين جسم كتلته ٧٠٠ جم وفى الكفة الأخرى جسم كتلته ٨٤٠ جم. أوجد عجلة الحركة للمجموعة والضغط على كل من الكفتين .

⑫ رُبطت كتلتان ٥ ك ، ٢ ك كجم فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء وحفظت المجموعة فى حالة اتزان، وجزءا الخيط رأسيان ، فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون. فأوجد عجلة حركة المجموعة، وإذا كان الضغط على محور البكرة يساوى ١١٢ نيوتن، فأوجد قيمة ك.

⑬ جسمان كتلتاهما ٤٢٠ جم، ٥٦٠ جم مربوطان فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء، بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد، وبعد مرور ثانية واحدة قُطع الخيط الواصل بينهما، فاحسب المسافة بين الكتلتين بعد مرور ثانية أخرى من قطع الخيط.

⑭ جسم كتلته ٤ كجم موضوع على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويتصل بخيط يمر على بكرة صغيرة ملساء عند أعلى المستوى ويتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ك، فإذا تحركت الكتلة ٤ كجم من سكون على المستوى إلى أعلى مسافة ٥٦٠ سم فى ٢ ثانية . فأوجد مقدار ك علمًا بأن معامل الاحتكاك الديناميكى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وأيضًا أوجد مقدار الضغط على محور البكرة.

⑮ جسم كتلته ٤٠٠ جم، موضوع على نضد أفقى أملس، تم وُصِلَ بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة فى حافة النضد، ويحمل فى طرفه جسمًا آخر كتلته ٩٠ جم ، أوجد عجلة المجموعة والشد فى الخيط والضغط على البكرة.

⑯ أ ، ب جسمان كتلتاهما ٢٠٠ جم، ٤٥ جم على الترتيب، وُضع الجسم أ على نضد أفقى أملس ارتفاعه ٩٠ سم وعلى بعد ٢٧٠ سم من حافة النضد ووصل بخيط خفيف طوله ٢٧٠ سم يمر على بكرة صغيرة مثبتة عند كافة النضد ووصل الجسم ب بالطرف الآخر للخيط عند حافة النضد، فإذا أُزيح الجسم ب بهدوء ليسقط من حافة النضد، فأوجد الزمن الذى يستغرقه أ بعد ذلك ليصل إلى حافة النضد.

⑰ وضع جسم كتلته ٢٠٠ جم على نضد أفقى خشن معامل الاحتكاك الديناميكى بينهما $\frac{١}{٢}$ ، ثم رُبط بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٢٠٠ جم على ارتفاع متر واحد من سطح الأرض، فإذا بدأت المجموعة الحركة من سكون فاحسب:

أ الضغط على البكرة بالنيوتن.

ب سرعة اصطدام الكتلة المدلاة بسطح الأرض.

ج المسافة التى تتحركها الكتلة الموضوعة على النضد حتى تسكن.

ملخص الوحدة

١ **كمية حركة جسم** عند لحظة ما هى كمية متجهة مقدارها يساوى حاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى سرعته عند هذه اللحظة واتجاهها هو اتجاه السرعة نفسه

$$\therefore \overrightarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ع}}$$

٢ **التغير فى كمية حركة جسم** = $\text{ك}\,(\overrightarrow{\text{ع}}_2 - \overrightarrow{\text{ع}}_1)$

$$\triangle \text{م} = \text{ك} \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2} \text{جـ}\ \text{د ن}$$

إذا كانت العجلة جـ دالة فى الزمن ن

٣ **القانون الأول لنيوتن :** كل جسم يحتفظ بحالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حالته،

٤ **مبدأ القصور الذاتى :** كل جسم قاصر أو عاجز بذاته عن تغيير حالته من حيث السكون أو الحركة المنتظمة فى خط مستقيم.

٥ **القوة :** القوة هى المؤثر الذى يغير أو يعمل على تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة فى خط مستقيم.

٦ **القانون الثانى لنيوتن:** معدل التغير فى كمية الحركة يتناسب مع القوة المحدثة له و يحدث فى اتجاهها.

٧ **معادلة حركة جسم** كتلته ك و يتحرك بعجلة منتظمة جـ

$$\text{ك}\ \overrightarrow{\text{جـ}} = \Sigma\ \overrightarrow{\text{ق}}$$

حيث $\Sigma\ \overrightarrow{\text{ق}}$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم

- إذا كانت جـ = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ فإن معادلة الحركة تأخذ الصورة :

$$\int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2} \text{ق}\ \text{د ن} = \text{ك} \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{د ع}$$

- إذا كانت جـ = ع $\frac{\text{د ع}}{\text{د ف}}$ فإن معادلة الحركة تأخذ الصورة:

$$\int_{\text{ف}_1}^{\text{ف}_2} \text{ق}\ \text{د ف} = \text{ك} \int_{\text{ع}_1}^{\text{ع}_2} \text{ع}\ \text{د ع}$$

- إذا كانت الكتلة متغيرة فإن معادلة الحركة تأخذ الصورة:

$$\text{ق} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\,(\text{ك ع})$$

٨ **الوحدات المستخدمة مع معادلة الحركة**

ك (كجم) .جـ (م/ث^2) = ق (نيوتن)

ك (جم) جـ (سم/ث^2) = ق (داين)

٩ **القانون الثالث لنيوتن**

لكل فعل رد فعل مساوٍ له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه.

١٠ حركة المصاعد

القوى المؤثرة على الشخص داخل المصعد

شكل (١٠٥)

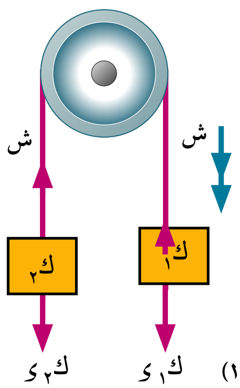
القوى الموثرة على المصعد والشخص بداخله

شكل (١٠٦)

القوى الموثرة على المصعد والشخص معًا

شكل (١٠٧)

البكرات البسيطة:



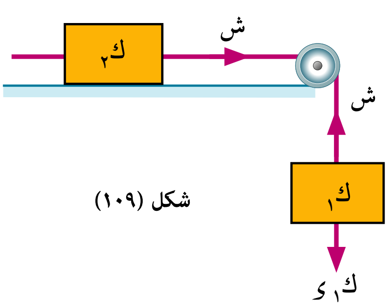
شكل (١٠٨)

- معادلات الحركة

$\text{ك}_{١}\,\text{جـ} = \text{ك}_{١}\,\text{ى} - \text{ش}$

$\text{ك}_{٢}\,\text{جـ} = \text{ش} - \text{ك}_{٢}\,\text{ى}$

الضغط على البكرة = ٢ ش



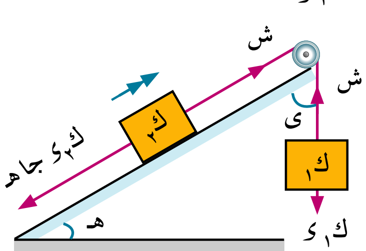
شكل (١٠٩)

- معادلات الحركة

$\text{ك}_{١}\,\text{جـ} = \text{ك}_{١}\,\text{ى} - \text{ش}$

$\text{ك}_{٢}\,\text{جـ} = \text{ش}$

الضغط على البكرة = ش $\sqrt{٢}$



شكل (١١٠)

- معادلات الحركة

$\text{ك}_{١}\,\text{جـ} = \text{ك}_{١}\,\text{ى} - \text{ش}$

$\text{ك}_{٢}\,\text{جـ} = \text{ش} - \text{ك}_{٢}\,\text{ى}\ \text{جا هـ}$

الضغط على البكرة = ٢ ش جتا $\frac{\text{ى}}{٢}$ = ش $\sqrt{٢ + ٢\,\text{جا هـ}}$

تمارين عامة

أكمل ما يأتى:

(١) جسم كتلته ٤٠ كجم يكون وزنه:

أ) بثقل الكيلوجرام ....

ب) بالنيوتن ....

(٢) جسم يتحرك بسرعة قدرها ١٣٥ كم/س فإنه يقطع فى الثانية الواحدة .... مترًا.

(٣) مستوى مائل طوله ٢٠٠سم وارتفاعه ١٥٠سم يكون جيبا زاوية ميله على الأفقى ....

(٤) جسم كتلته ٨ أطنان يتحرك بسرعة منتظمة وكانت المقاومة التى يلاقيها لكل طن من الكتلة ٤,٥ ث كجم فإن القوة المحركة بالنيوتن..................

(٥) جسم كتلته ٣٥ كجم، موضوع على ميزان ضغط مثبت فى أرضية مصعد يتحرك بسرعة قدرها ٤ م/ث وكانت قراءة الميزان ٣٤٣ نيوتن فإن المسافة التى يقطعها المصعد فى ٧ ثوانٍ .. متر

(٦) ١٤٧ نيوتن = ... ث كجم

(٧) ١ ث كجم = ... نيوتن

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٨) كرة من المطاط كتلتها ٢٠٠ جم قُذفت أفقيًّا بسرعة ٣٠ م/ث اصطدمت بحائط رأسى فارتدت بسرعة ٢٦ م/ث فأوجد التغير الحادث فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم بوحدة كجم . م/ث

(٩) سيارة كتلتها ٦ أطنان تتحرك تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع السرعة فإذا كانت المقاومة ٥ ث كجم لكل طن عندما كانت سرعتها ٣٦ كم/س أوجد قوة محرك السيارة إذا كانت أقصى سرعة لهذه السيارة ٤٠ م/ث.

(١٠) قطار كتلته ١٦٠ طنًّا ، بدأ من السكون من إحدى المحطات وكانت قوة المحرك تزيد بمقدار ٤ ث طن عن المقاومة الكلية لحركة القطار وعندما بلغت سرعته ٤٤,١ كم/س استمر يسير بهذه السرعة مدة من الزمن ثم ضغط على الفرامل فأكسبته تقصيرًا مقداره ١٧,٥ سم/ث^2، ووقف القطار فى المحطة التالية التى تبعد ٤٩٩٨ متر عن المحطة التى تحرك منها القطار، أوجد الزمن المستغرق فى قطع المسافة بين المحطتين.

(١١) يمر خيط خفيف على بكرة صغيرة ملساء ، ويتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٨٠٠ جم ومن الطرف الآخر ميزان زنبركى كتلته ٤٠٠ جم، معلق به جسم كتلته ك جم . إذا تحركت المجموعة من السكون وكانت قراءة الميزان أثناء الحركة ١٦٠ ث جم، فأوجد قيمة ك .

١٢ كتلتان ١٣٠٠، ٦٠٠ جم موضوعتان على مستوى أفقى أملس ومتصلتان بخيط مشدود بينهما طوله ٥٠ سم، ثم ربطت الكتلة ٦٠٠ جم بخيط آخر على استقامة الأول يمر على بكرة ملساء مثبتة فى حافة المستوى القريب من الكتلة الثانية وعُلق فى الطرف الآخر للخيط كتلة قدرها ١٠٠ جم تتدلى رأسيًا أوجد مقدار عجلة المجموعة ومقدار الشد فى كل من الخيطين، و إذا قُطع الخيط الواصل بين الجسمين الأولين بعد ٢ ث من بدء الحركة، فما المسافة بين الجسمين بعد ١ ث من لحظة قطع الخيط؟

١٣ جسمان كتلتاهما ٣٥٠ جم،ك جم مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء و يتدليان رأسيًا، بدأت المجموعة الحركة من سكون عندما كانت الكتلتان فى مستوى أفقى واحد، وكان الضغط على محور البكرة ٢٠٠ ث/جم

أوجد ك والمسافة الرأسية بين الجسمين بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

١٤ عُلق جسمان كتلة كل منهما ك كجم من طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة رأسيًا، وكان جزءا الخيط يتدليان رأسيًا وعند إضافة جسم كتلته ٢ كجم لأحد الجسمين أصبحت قيمة الشد فى الخيط $\frac{٨}{٧}$ قيمته فى الحالة الأولى ، أوجد ك.

١٥ خيط خفيف ثابت الطول يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبت فى أحد طرفيه جسم كتلته ٦٠ جم وفى الطرف الآخر جسمان كتلتاهما ٤٠ جم، ٥٠ جم ، إذا بدأت المجموعة الحركة من سكون فأوجد عجلة الحركة والشد فى الخيط الذى يصل الكتلتين ٤٠ جم، ٥٠ جم إذا انفصل الجسم الذى كتلته ٥٠ جم بعد ثانيتين من بدأ الحركة فأثبت أن المجموعة تسكن لحظيًا بعد ثانيتين من لحظة الانفصال.

١٦ جسمان كتلتاهما ٢٦٠ جم، ٢٣٠ جم، مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء ويتدليان رأسيًا، بدأت المجموعة الحركة من سكون عندما كانت الكتلة الكبرى على ارتفاع ٢٧٠ سم من سطح الأرض، أوجد عجلة المجموعة والشد فى الخيط والزمن الذى يمضى حتى تصل الكتلة الكبرى للأرض .

١٧ جسمان كتلتاهما ٢٦٠ جم، ٢٣٠ جم، مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء و يتدليان رأسيًا فى مستوى أفقى واحد على ارتفاع ٧٠ سم من سطح الأرض، فإذا بدأت المجموعة حركتها من السكون وقطع الخيط بعد ثانية واحدة من بدء الحركة فاحسب السرعة التى يصل بها كل من الجسمين إلى سطح الأرض.

الوحدة الثالثة - الدفع والتصادم

Impulse and Collisiom

الوحدة
٣

مقدمة الوحدة

سبق أن درسنا بعض الكميات الفيزيائية التى بواسطتها نستطيع أن نصف حركة الأجسام، مثل السرعة والتسارع ، الكتلة . وفى هذه الوحدة سوف نتعرف على كميات أخرى تشارك فى وصف حركة الأجسام.

فى بعض الأحيان ، نلاحظ مثلًا أن هناك سهولة فى أن نوقف حركة خرزة صغيرة تتدحرج، عن أن نوقف كرة بولينج، بالرغم من أن الجسمين يتحركان بالسرعة نفسها . فنجد أن كلًا الجسمين يتحرك حركة انسحابية فى خط مستقيم.

وهناك ملاحظة اخرى ، وهى أن الشاحنة الكبيرة تبذل جهدًا كبيرًا لكى يوقف الشاحنة فجأة، بالرغم من أن سرعتها قد لا تكون كبيرة فى حين يستطيع سائق السيارة الصغيرة أن يوقف سيارته خلال مسافة أقل رغم أن سرعتها قد تكون كبيرة.

من الملاحظتين السابقتين يتضح أن السرعة والكتلة مرتبطتان معًا أرتباطًا وثيقًا وهو ما يعرف بكمية الحركة، ونظرا لثبوت كتلة الجسم فى معظم الحالات فإن السرعة هى التى تتغير ، والتغير فى السرعة يعنى حدوث تسارع للحركة، والتسارع يعنى أن هناك قوة محصلة وعليه ، فإن أى تغير فى السرعة يغير كمية الحركة.

كما أن هناك عامل آخر مهم وهو الفترة الزمنية التى تؤثر خلالها القوة فى الجسم المتحرك ثم أن القوة والزمن عاملان ضروريان لإحداث تغير فى كمية الحركة ، ويكون حاصل ضربهما هو ما يعرف بالدفع . Impulse.

ويعتبر تصادم الاجسام تطبيقا عمليًا لكمية الحركة؛ فحينما يتصادم جسمان فى غياب أى مؤثر خارجى نجد أن محصلة كمية الحركة لكل من الجسمين قبل التصادم وبعده متساوية وعليه فإن محصلة كمية الحركة قبل التصادم تساوى محصلة كمية الحركة بعد التصادم.

وهناك صور عديدة للتصادم فهنالك تصادم مرن وآخر غير مرن ، وذلك سوف نتعرف عليه من خلال دراستنا لهذه الوحدة.

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الدفع
- يستنتج العلاقة بين الدفع والتغير فى كمية الحركة.
- يتعرف التصادم المرن.
- يستنتج أن مجموع كميتى الحركة لجسمين قبل التصادم يساوى مجموع كميتى الحركة لنفس الجسمين بعد التصادم

المصطلحات الأساسية

- الدفع *Impulse*
- كمية الحركة *Momentum*
- القوى الدفعية *Impulsive forces*
- التصادم المرن *Elastic*
- تصادم الكرات الملساء *Collision smooth balls*

دروس الوحدة

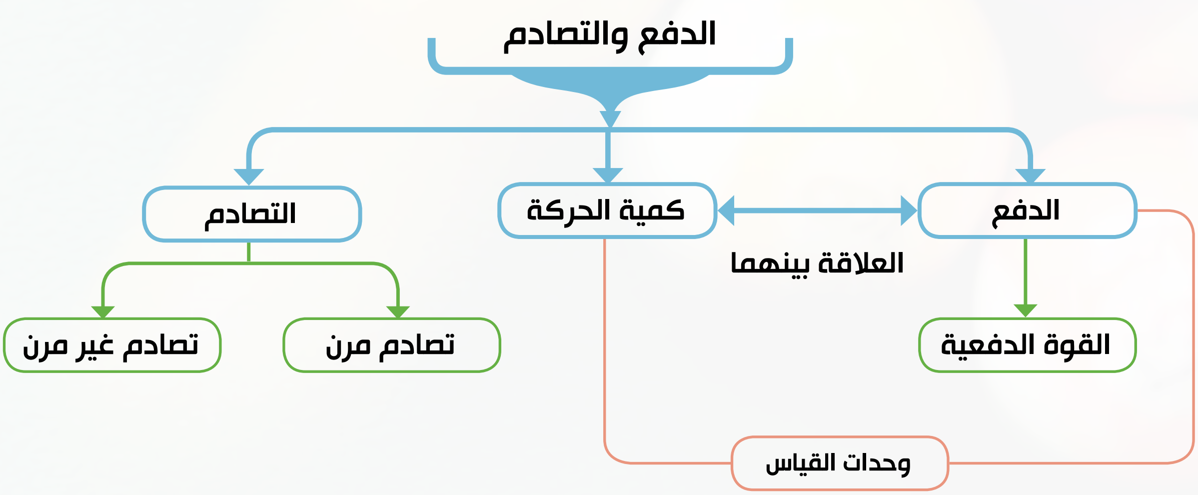
(٣ - ١): الدفع Impulse.

(٣ - ٢):التصادم collision

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

مخطط تنظيمي للوحدة



الدفع

Impulse

سوف تتعلم
- يتعرف مفهوم الدفع
- يستنتج العلاقة بين الدفع والتغير فى كمية الحركة

المصطلحات الأساسية
- الدفع Impulse
- كمية الحركة Momentum
- القوى الدفعية Impulsive forces

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

تمهيد: ماذا تلاحظ عند:
- قذف كرة فى اتجاه حائط رأسى.
- تصادم السيارات على الطرق السريعة.
- تصادم عجلات الطائرات بأرض المطار أثناء الهبوط.

فى مثل هذه الحالات تكون دراسة حركة الأجسام عملية شاقة للغاية نتيجة تشابك العوامل المؤثرة عليها ولصغر الفترات الزمنية المتناهية . وسوف ندرس فى هذا الدرس بعض المعلومات الخاصة بذلك لربط حالة الجسم قبل وبعد حدوث التغير فى متجه سرعته من خلال هذا النشاط.

نشاط

الأدوات: مسطرة خشبية طويلة يزيد طولها عن متر، مجموعة من الكرات المختلفة مثل كرة جولف، كرة تنس ، كرة بلياردو، كرة من الصلصال، ...

العمل: قم بإسقاط هذه الكرات تباعًا من ارتفاع ثابت وليكن ٢ متر على أرضية غرفة من الرخام أو السيراميك وسجل الارتفاع الذى ترتد إليه كل كرة.

نوع الكرة	الارتفاع	أقصى ارتداد
كرة زجاجية	٢ متر	....
كرة بلياردو	٢ متر	....
كرة تنس	٢ متر	....
كرة خشبية	٢ متر	....
كرة جولف	٢ متر	....
كرة بولينج	٢ متر	....
كرة طاولة	٢ متر	....
كرة صلصال	٢ متر	....

الملاحظة والاستنتاج: هل لاحظت أختلافًا فى الارتفاعات التى ترتد إليها الكرات المختلفة؟

هل يمكنك ترتيب الكرات حسب مسافة الارتداد لكل منها ترتيبًا تنازليًا؟

يرجع اختلاف مسافة الارتداد إلى عدة عوامل منها التغير فى كمية حركتها نتيجة تصادم الكرة بالأرض.

ابحث فى شبكة المعلومات الدولية عن كل من الدفع وكمية الحركة.

أولًا: الدفع

إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ ثابتة المقدار على جسم خلال فترة زمنية ن فإن دفع هذه القوة، ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{د}$ يعرف بأنه حاصل ضرب متجه القوة فى زمن تأثيرها أى أن:

$$\overleftarrow{د} = \overleftarrow{ق}\ ن$$

يتضح من هذا التعريف أن الدفع $\overleftarrow{د}$ كمية متجهة لها نفس اتجاه متجه القوة $\overleftarrow{ق}$

ويمكن كتابة العلاقة بين القياس الجبرى للدفع د والقياس الجبرى للقوة ق كالآتى:

$$د = ق ن$$

وحدات قياس مقدار الدفع:

من تعريف الدفع نجد أن:

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الزمن

ففى النظام الدولى للوحدات يقاس مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث ويمكن أيضًا أن يقاس بحاصل ضرب أى وحدة قوة فى أى وحدة زمن.

كما يمكن التعبير عن وحدات قياس مقدار الدفع بطريقة اخري بملاحظة أن:

كجم.م/ث ، جم.سم/ث ، ...

لذلك نجد أن: إذا كانت الكتلة بالكيلو جرام و السرعة متر/ثانية فإن وحدة مقدار الدفع تكون كجم.م/ث وهى نفس الوحدة نيوتن.ث

وعندما تكون الكتلة بالجرام والسرعة سم/ث فإن وحدة مقدار الدفع تكون جم.سم/ث وهى نفس الوحدة داين.ث

مثال على تعريف الدفع

(١) أثرت قوة مقدارها ٢٥ ث كجم على جسم لفترة زمنية قدرها $\frac{١}{١٠}$ ثانية ، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

الحل

الدفع = ق • ن

$= ٢٥ \times ٩{,}٨ \times \frac{١}{١٠} = ٢٤{,}٥$ نيوتن . ث

حاول أن تحل

(١) أثرت قوة مقدارها $١٠^{١٢}$ داين على جسم لفترة زمنية $١٠^{-٥}$ ثانية، أوجد دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث

مثال إيجاد مقدار الدفع

(٢) أثرت القوى $\overleftarrow{ق_١} = ٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٤\,\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع}$ على جسم لفترة زمنية قدرها ٥ ثوان ، أوجد مقدار دفع القوى على الجسم إذا كان مقدار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

الحل

$\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣}$

$= (٤\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ع}) + (\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ع}) + (٤\,\overleftarrow{ص} - \overleftarrow{ع})$

$= ٥\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٢\,\overleftarrow{ع}$ ،

$\because \overleftarrow{د} = \overleftarrow{ق} \times ن$

$= ٥(٥\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٢\,\overleftarrow{ع})$

مقدار الدفع $= \sqrt{(٢٥)^٢ + (٥)^٢ + (١٠)^٢}$

$= ٥\sqrt{٣٠}$ نيوتن . ث

حاول أن تحل

٢ أثرت القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_٢ = \overrightarrow{\text{ص}} - ٥\,\overrightarrow{\text{س}}$ على جسم لمدة ثانية واحدة، أوجد مقدار دفع القوة على الجسم إذا كان معيار القوة يقاس بوحدة نيوتن.

ثانيًا: الدفع وكمية الحركة

تذكر أن

$\because$ ع = ع. + جـ ن

$\therefore$ ع − ع. = جـ ن

حيث أن دفع قوة ثابتة المقدار ق على جسم لفترة زمنية ن يساوى ق ن ومن القانون الثانى لنيوتن نجد أن :

الدفع = ك جـ • ن

$\therefore$ الدفع = ك (ع - ع.)

حيث ع.، ع هما القياسان الجبريان لمتجهى السرعة الابتدائية والسرعة بعد زمن ن على الترتيب أى أن الدفع يساوى التغير فى كمية الحركة.

أما إذا كانت القوة متغيرة فإن الدفع يعطى بالتكامل الآتى :

$$\text{الدفع} = \int_{٠}^{\text{ن}} \text{ق}\ \text{د ن}$$

$$\therefore \int_{٠}^{\text{ن}} \text{ق د ن} = \int_{٠}^{\text{ن}} \text{ك جـ د ن}$$

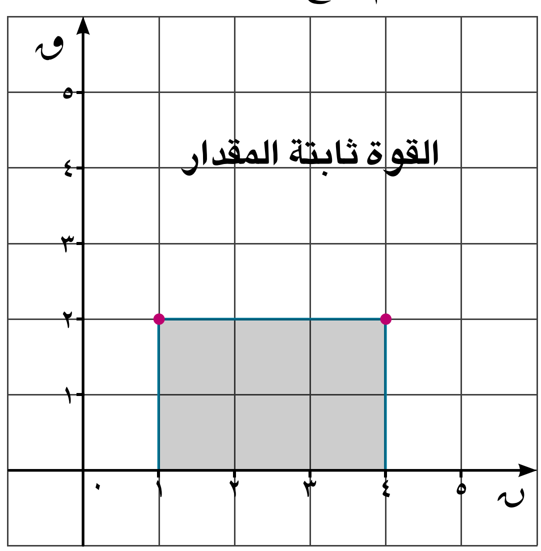
$$\int_{٠}^{\text{ن}} \text{ق د ن} = \text{ك} \int_{٠}^{\text{ن}} \left(\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\right) \text{د ن}$$

$$= \text{ك} \int_{\text{ع.}}^{\text{ع}} \text{د ع}$$

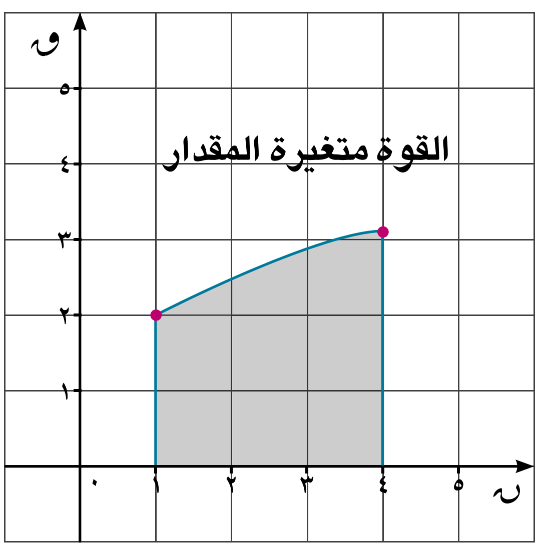
$$\int_{٠}^{\text{ن}} \text{ق د ن} = \text{ك} \left[\text{ع}\right]_{\text{ع.}}^{\text{ع}}$$

$$\int_{٠}^{\text{ن}} \text{ق د ن} = \text{ك} (\text{ع} - \text{ع.})$$

على وجه العموم الدفع يساوى التغير فى كمية الحركة

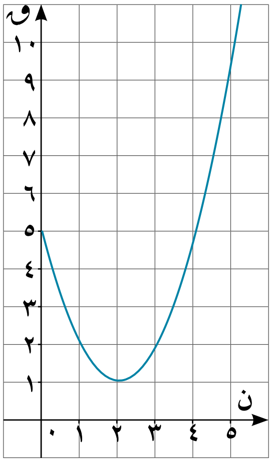


$\text{الدفع} = \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_٢} \text{ق د ن}$



$\text{الدفع} = \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_٢} \text{ق د ن}$

مثال



③ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن حيث ق = ١ + (ن -٢)^{٢} أوجد :

أ دفع القوة ق خلال الثوانى الثلاث الأولى .

ب دفع القوة ق فى الثانية الخامسة.

الحل

حيث مقدار القوة ق بالنيوتن ، الزمن ن بالثانية

ق = ١ + (ن -٢) ^{٢}

ق = ن^{٢} - ٤ن + ٥

أ الدفع خلال الثوانى الثلاث الأولى $= \int_{٠}^{٣}$ ق ء ن

$= \int_{٠}^{٣}$ (ن^{٢} - ٤ن +٥) ء ن

$= [\frac{١}{٣}$ ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٥ن$]_{٠}^{٣}$

= ٦ نيوتن . ث

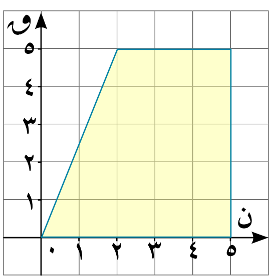
ب الدفع خلال الثانية الخامسة $= \int_{٤}^{٥}$ ق ء ن

$= \int_{٤}^{٥}$ (ن^{٢} - ٤ ن + ٥) ء ن

$= [\frac{١}{٣}$ ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٥ ن$]_{٤}^{٥}$

$= \frac{٢٢}{٣}$ نيوتن . ث

حاول أن تحل



③ الشكل المقابل يمثل منحنى القوة - الزمن أوجد مستخدمًا التكامل .

أ دفع القوة ق خلال الثانية الأولى

ب دفع القوة ق خلال الثوانى الخمسة الأولى حيث مقدار القوة ق بالنيوتن ، الزمن ن بالثانية .

القوى الدفعية

القوى الدفعية هى قوة كبيرة جدا تؤثر لفترة زمنية صغيرة للغاية وتحدث تغيرًا هائلًا فى كمية حركة الجسم دون أن تحدث تغيرًا يذكر فى موضعه والحركة الناتجة عند تأثير هذه القوى تسمى حركة دفعية كمثال على ذلك كرة البيسبول عندما تُضرب فإن زمن التلامس بين المضرب والكرة صغيرًا للغاية مع أن متوسط القوة المؤثرة على الكرة كبير جدًا ويكون الدفع كبيرًا بما يكفى ليغير كمية حركة الكرة دون تغير يذكر فى موضع الكرة عند تأثير قوة دفعية على جسم يكون ك ع$_{١}$ + ق . ن = ك ع$_{٢}$ حيث ن فترة زمنية صغيرة للغاية.

مثال — الدفع و كمية الحركة

④ جسم ساكن كتلته ٤ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس ، أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٥ نيوتن لمدة ٨ ثانية. أوجد مقدار الدفع على الجسم ومقدار سرعة الجسم بعد ٨ ثانية.

الحل

∵ الدفع = ق . ن

∴ الدفع = ٥ × ٨ = ٤٠ نيوتن . ث

∵ الدفع = التغير فى كمية الحركة

٤٠ = ك (ع - ع.)

٤٠ = ٤ (ع - ٠)

ع = ١٠ م/ث

حاول أن تحل

④ أثرت قوة ثابتة مقدارها ق على جسم كتلته ك لمدة $\frac{١}{٤٩}$ ثانية، فغيرت سرعته من ٣م/ث إلى ٥٤ كم/س فى اتجاه القوة، وكان دفع القوة يساوى ٤,٨ نيوتن. ث فأوجد كتلة الجسم ومقدار القوة بثقل الكجم.

مثال — التعبير عن الدفع و كمية الحركة باستخدام المتجهات

⑤ أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$ على جسم كتلته ٥ كجم لمدة ١٠ ثانية عندما كان متجه سرعته $\overrightarrow{\text{ع}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، أوجد سرعته بعد تأثير القوة إذا كان مقدار القوة بوحدة نيوتن، السرعة بوحدة م/ث.

الحل

∵ الدفع = التغير فى كمية الحركة

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}$ • ن = ك ($\overrightarrow{\text{ع}}$ - $\overrightarrow{\text{ع.}}$)

∴ ١٠ (٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٥ ($\overrightarrow{\text{ع}}$ - $\overrightarrow{\text{ع.}}$)   ∴ $\overrightarrow{\text{ع}}$ - $\overrightarrow{\text{ع.}}$ = ٢ (٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

∴ $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٢ (٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$) + ($\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

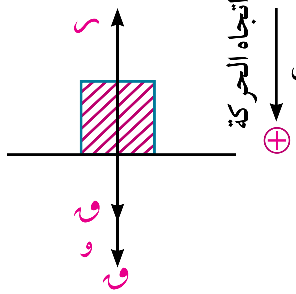
∴ $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$

∴ || $\overrightarrow{\text{ع}}$ || = $\sqrt{\text{٢٥ + ١٤٤}}$ = ١٣ م / ث

حاول أن تحل

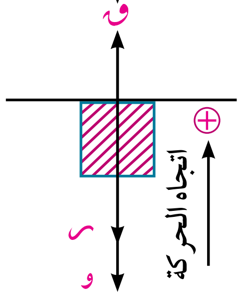
⑤ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك بسرعة $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، أثرت عليه قوة ثابتة لمدة زمنية ن وكان دفع القوة على الجسم يساوى ٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، أوجد سرعة الجسم بعد تأثير القوة إذا كانت السرعة بوحدة م/ث، مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث.

لاحظ أن



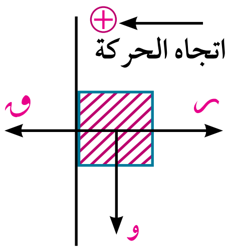
- عند سقوط جسم وزنه «و» رأسيًا على سطح الأرض فإنه عند لحظة التلامس **يكون:**

ضغط الجسم على الأرض = رد فعل الأرض على الجسم = ق + و



- عند قذف جسم وزنه « و » رأسيًا وأصطدامه بسقف حجرة **فإن:**

ضغط الجسم على السقف = رد فعل السقف على الجسم = ق - و



- عند قذف جسم وزنه « و » أفقيًا وأصطدامه بحائط رأسى **فإن:**

ضغط الجسم على الحائط = رد فعل الحائط على الجسم = ق

حيث ق هو مقدار القوة الدفعية فى كل من الحالات السابقة

مثال — الحركة الرأسية

(٦) سقطت كرة من المطاط كتلتها $\frac{١}{٤}$ كجم من ارتفاع ١٠ متر عن سطح الأرض فارتدت بعد اصطدامها بالأرض إلى ارتفاع ٢,٥ متر ، أوجد الدفع الناتج عن تصادم الكرة على الأرض وعين رد فعل الأرض على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع الأرض $\frac{١}{١٠}$ ثانية.

الحل

دراسة مرحلة السقوط	دراسة مرحلة الارتداد
∵ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ ء ف$	∵ $ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ء ف$
∴ $ع_١^٢ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠$	∴ $٠ = ع_٢^٢ - ٢ × ٩,٨ × ٢,٥$
∴ $ع_١ = ١٤$ م/ث	∴ $ع_٢ = ٧$م / ث
وهى سرعة الكرة قبل ملامستها للأرض مباشرة.	∴ سرعة الارتداد = ٧م / ث رأسيا إلى أعلى

الدفع = التغير فى كمية الحركة = ك $(ع_٢ - ع_١)$

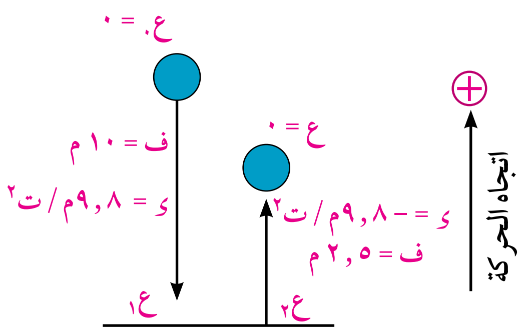
$= \frac{١}{٤} [٧ - (-١٤)] = ٥,٢٥$ كجم . م/ث

∵ الدفع = ق . ن ∴ $٥,٢٥ = ق × \frac{١}{١٠}$

∴ ق = ٥٢,٥ نيوتن

رد فعل الأرض على الكرة = القوة الدفعية + وزن الكرة

$= ٥٢,٥ + \frac{١}{٤} × ٩,٨ = ٥٤,٩٥$ نيوتن



حاول أن تحل

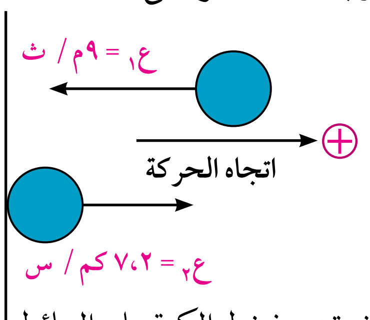
(٦) جسم كتلته ٣٠٠ جم قذف رأسيًا لأعلى بسرعة ٨٤٠ سم/ث من نقطة تقع أسفل سقف حجرة بمقدار ١١٠ سم فاصطدم بالسقف وارتد إلى أرض الحجرة بعد $\frac{1}{2}$ ثانية من الارتداد. أوجد دفع السقف للجسم علمًا بأن ارتفاع السقف ٢٧٢,٥ سم ، وإذا كان زمن تلامس التلامس $\frac{1}{10}$ ثانية فأوجد القوة الدفعية.

تفكير ناقد:

كرة من الصلصال كتلتها ١ كجم سقطت من ارتفاع ٤٠سم على ميزان ضغط وكان زمن الصدمة $\frac{1}{7}$ ثانية فأوجد قراءة الميزان علمًا بأن الكرة لم ترتد بعد الصدمة.

مثال — الحركة الأفقية

(٧) كرة كتلتها ١٠٠ جم تتحرك أفقيًا بسرعة ٩م / ث. أصطدمت بحائط رأسي وارتدت بسرعة قدرها ٧,٢ كم/ س فإذا كان زمن تلامس الكرة مع الحائط $\frac{1}{10}$ من الثانية فأوجد دفع الحائط للكرة ثم أوجد ضغط الكرة على الحائط.



الحل

باعتبار أن اتجاه الأرتداد هو الإتجاه الموجب للحركة

∴ ع$_1$ = - ٩م/ث ، ع$_2$ = ٧,٢ × $\frac{5}{18}$ = ٢م/ث

∵ د = ك (ع$_2$ - ع$_1$)

∴ د = $\frac{100}{1000}$ [٢ - (-٩)] = ٠,١١ كجم.م/ث

∵ د = ق × ن   ∴ ٠,١١ = ق × $\frac{1}{10}$ ∴ ق = ١,١ نيوتن = ضغط الكرة على الحائط

حاول أن تحل

(٧) كرة تنس كتلتها ٤٠جم تتحرك أفقيًا بسرعة ٥٠ سم / ث أصطدمت بالمضرب فارتدت فى الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠سم/ث . أوجد مقدار دفع المضرب على الكرة. وإذا كان زمن تماس الكرة مع المضرب $\frac{1}{49}$ من الثانية فما مقدار قوة دفع المضرب على الكرة؟

تمارين ٣ - أ

أولا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا أثرت قوة مقدارها ١٦ ث كجم على جسم لمدة ربع ثانية فإن مقدار دفع القوة على الجسم بوحدة نيوتن . ث تساوى.

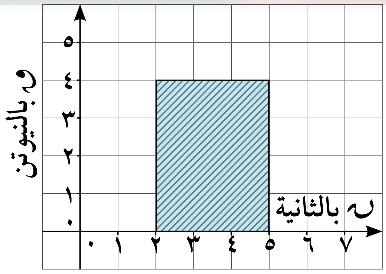
أ ٤   ب ٣٩,٢   ج ٤٩   د ٦٤

(٢) إن كان مقدار دفع قوة ق على جسم لمدة ١٠$^{-4}$ ثانية يساوى ١٠ نيوتن . ث فإن مقدار ق يساوى:

أ ١٠^{3} داين   ب ١٠^{5} داين   ج ١٠^{3} نيوتن   د ١٠^{5} نيوتن

(٣) إذا أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_1}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ + ٧ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ - ٢ $\overrightarrow{ع}$ مقدرتان بوحدة النيوتن على جسم لفترة زمنية قدرها ٢ ثانية فإن مقدار دفع القوى بوحدة نيوتن . ثانية يساوى:

أ ٥$\sqrt{2}$ ب ١٠$\sqrt{2}$ ج ٥٠$\sqrt{2}$ د ١٠٠$\sqrt{2}$



(٤) إذا أثرت قوة ثابتة المقدار على جسم لفترة زمنية كما هو معطى فى الشكل فإن مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ثانية تساوى.

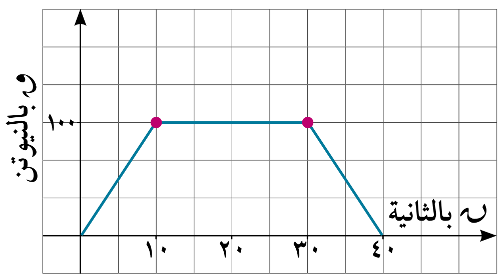
أ ٨ ب ١٢
ج ٢٠ د ٥٠

(٥) إذا أثرت قوة مقدارها ٩٠ نيوتن على جسم كتلته ١٠ كجم لمدة ٥ ثوان ، فإن مقدار التغير فى سرعة الجسم فى اتجاه القوة نفسه يساوى.

أ ٤٥م/ث ب ٥٠م/ث ج ٩٠م/ث د ١٢٠ م/ث

(٦) جسم كتلته ٢٠ كجم موضوع على مستوى أفقى أملس فإذا تحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة اتجاهها ثابت و يتغير مقدارها مع الزمن كما هو موضح بالشكل فإن مقدار الدفع لهذه القوة بعد ٤٠ ثانية بوحدة نيوتن. ثانية يساوى:

أ ١٠٠٠ ب ٢٠٠٠
ج ٣٠٠٠ د ٤٠٠٠



ثانيا : اجب عن الأسئلة الآتية :

(٧) أطلقت رصاصة كتلتها ٢٠جم من بندقية أفقيا، فإذا إستمر مسارها داخل البندقية لمدة ٠,٥ ثانية وكان مقدار قوة دفع البندقية عليها ٢٠ نيوتن أوجد سرعة خروج الرصاصة من فوهة البندقية.

(٨) مدفع سريع الطلقات يطلق الرصاصات رأسيا لأعلى ، كتلة الواحدة منها ٥٠٠جم فإذا كان متوسط قوة دفع الغاز فى إسطوانة المدفع على الرصاصة هو ٢٥٠ نيوتن وتؤثر على الرصاصة لمدة ٠,٢ ثانية حتى لحظة خروج الرصاصة من فوهة المدفع احسب سرعة خروج الرصاصة من فوهة المدفع.

(٩) سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠جم من إرتفاع ٦,٤ متر من سطح الأرض فارتدت رأسيًا إلى أعلى فإذا كان متوسط القوة التى تبذلها الأرض على الكرة ١٨٢ × ١٠^{٤} داين وأن زمن تلامس الكرة بالأرض ٠,٠٢ من الثانية فأوجد.

أ مقدار دفع الأرض للكرة ب أقصى إرتفاع وصلت إليه الكرة بعد إرتدادها

(١٠) تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جرام فى خط مستقيم على أرض أفقية ملساء بسرعة ١٠م/ث فإذا إصطدمت الكرة بحائط رأسى أملس وارتدت بسرعة ٤م/ث أوجد:

أ مقدار دفع الحائط على الكرة

ب مقدار قوة دفع الحائط للكرة إذا كان زمن تلامس الكرة على الحائط ٠,٠٥ من الثانية.

(١١) عربة سكة حديد كتلتها ١٠ طن تسير بسرعة ١٨ كم/س صدمت حاجز الأصطدام وارتدت بسرعة ٩ كم/ س أوجد مقدار دفع الحاجز للعربة.

(١٢) عربة ساكنة كتلتها ١طن دفعت فى اتجاه حركتها بقوة ٢٠٠ ث كجم لمدة ٥ ثوان ثم تركت العربة وشأنها فعادت إلى حالة السكون مرة أخرى بعد ١٥ ثانية أوجد مقدار المقاومة بفرض ثبوتها فى الحالتين وكذلك أقصى سرعة وصلتها العربة مستخدما العلاقة بين الدفع وكمية الحركة.

(١٣) قذفت كرة كتلتها ١ كجم رأسيا لأعلى وباتجاه سقف يرتفع عن نقطة القذف مسافة ٣٦٠ سم بسرعة مقدارها ١٤ م / ث فإذا إصطدمت الكرة بالسقف وارتدت بسرعة ١٠ م/ث أوجد مقدار قوة دفع السقف على الكرة إذا كان زمن تلامس الكرة مع السقف٠,٠٢ من الثانية.

(١٤) مدفع سريع الطلقات يطلق أفقيًا ٦٠٠ رصاصة فى الدقيقة . كتلة كل واحدة منها ٣٩,٢ جرام بسرعة ١٢٦٠ كم/س إحسب قوة رد الفعل المؤثر على المدفع بثقل الكيلو جرام.

(١٥) كرة كتلتها ١٥٠٠ جرام سقطت من إرتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة وقطعت مسافة ٧٠ سم فى ٠,٢ من الثانية احسب مقدار دفع السائل على الكرة.

(١٦) أثرت القوى $\overleftarrow{ق}_{١} = أ\,\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢} = ٣\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٣} = أ\,\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$ على جسم لمدة $\frac{١}{٢}$ ثانية وكان دفع هذه القوى على الجسم يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{د} = ٢\,\overleftarrow{س} + ٤\,\overleftarrow{ص}$ أوجد قيمة أ ، ب.

(١٧) جسم كتلته ٢٠جم سقط من ارتفاع ٤٠ سم عن سطح بركة من الماء فغاص فى الماء وقطع مسافة ٢١٠ سم خلال ثانية واحدة بعجلة ٢,١م / ث^{٢} أوجد مقدار دفع الماء على الجسم نتيجة لتصادمه بسطح الماء.

الوحدة الثالثة

٣ - ٢

التصادم

Collision

سوف تتعلم

المصطلحات الأساسية

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة :

يعتبر تصادم الأجسام تطبيقًا عمليًا لكمية الحركة، فحين يتصادم جسمان فى غياب أى مؤثر خارجى، فإن كل جسم سيغير كمية حركة الجسم الآخر وطبقا لقانون نيوتن الثالث فإن القوتين متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الأتجاه ونتيجة لتصادمهما فإن التغير فى حركة الجسمين يبقى ثابتًا وهذا ما يعرف بقانون الحفاظ على كمية الحركة. وبأعتبار أن التصادم لحظيًا «**أى أنه استغرق وقتًا متناهيًا فى الصغر**» فإن دفع الجسم الأول على الثانى يكون مساويًا فى المقدار ومضاد فى الاتجاه لدفع الجسم الثانى على الأول.

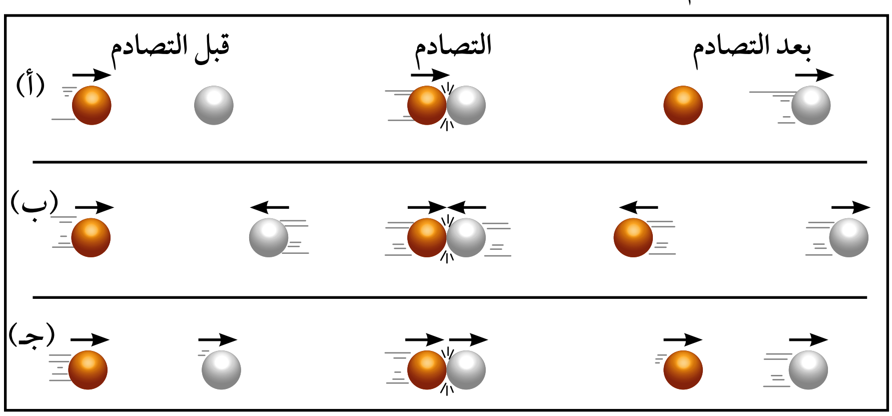
وهناك صورًا عديدة للتصادم منها التصادم المرن والآخر غير المرن.

أولاً: التصادم المرن *Elastic Collision*

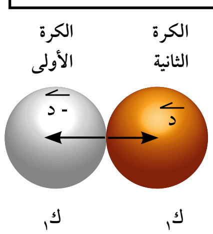
إذا لم يحدث تشوه أو توليد حرارة نتيجة تصادم جسمين (لم يحدث فقد فى طاقة الحركة) ، يقال أن هذا التصادم مرن، فمثلًا عندما تصطدم كرة بلياردو متحركة بكرة ساكنة لها الكتلة نفسها نجد أن الكرة الأولى تصبح ساكنة فى حين تتحرك الكرة الثانية بسرعة ابتدائية تساوى سرعة الكرة الأولى الابتدائية من هذا المثال ، نلاحظ أن كمية الحركة قد أنتقلت كليًا من الكرة الأولى إلى الكرة الثانية.

تصادم الكرات الملساء: *Collision smooth balls*

يلاحظ أنه خلال عملية التصادم بين الأجسام ، أن المجموع الأتجاهى لكميات الحركة قبل التصادم وبعده ، يكون متساويًا.



فى الشكل المقابل:



باعتبار أن كتلة الكرة الأولى $ك_1$ وكتلة الثانية $ك_2$ وأن $\overleftarrow{د}$ هو دفع الكرة الأولى على الثانية فيكون $-\overleftarrow{د}$ هو دفع الكرة الثانية على الأولى.

مطابع الهدايه

ونفرض أن $\overrightarrow{ع_{١}}$ ، $\overrightarrow{ع_{٢}}$ هما متجها سرعة الكرتين قبل التصادم مباشرة ، $\overrightarrow{ع'_{١}}$ ، $\overrightarrow{ع'_{٢}}$ هما متجها سرعة الكرتين بعد التصادم مباشرة.

أضف إلى معلوماتك

التصادم المباشر تكون فيه السرعتان قبل التصادم مباشرة توازيان خط المركزين عند لحظة التصادم.

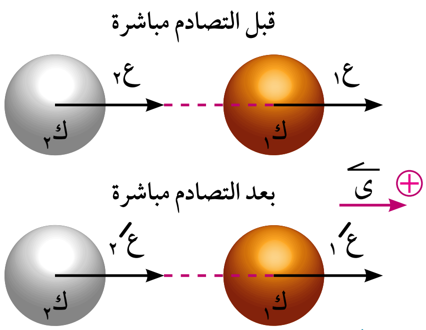
بالنسبة للكرة الأولى:

∵ التغير فى كمية حركة الكرة = الدفع المؤثر عليها

∴ $ك_{١}\overrightarrow{ع'_{١}} - ك_{١}\overrightarrow{ع_{١}} = -\overrightarrow{د}$ (١)

∵ المتجهين $\overrightarrow{ع'_{١}}$ ، $-\overrightarrow{د}$ يوازيان خط المركزين (لأن التصادم مباشر)

∴ المتجه $\overrightarrow{ع'_{١}}$ يوازى خط المركزين أيضا.



بالنسبة للكرة الثانية:

∵ التغير فى كمية حركة الكرة = الدفع المؤثر عليها

∴ $ك_{٢}\overrightarrow{ع'_{٢}} - ك_{٢}\overrightarrow{ع_{٢}} = \overrightarrow{د}$ (٢)

∵ المتجهين $\overrightarrow{ع'_{٢}}$ ، $\overrightarrow{د}$ يوازيان خط المركزين (لأن التصادم مباشر)

∴ المتجه $\overrightarrow{ع'_{٢}}$ يوازى خط المركزين أيضا ، بجمع (١) ، (٢) :

∴ $(ك_{١}\overrightarrow{ع'_{١}} - ك_{١}\overrightarrow{ع_{١}}) + (ك_{٢}\overrightarrow{ع'_{٢}} - ك_{٢}\overrightarrow{ع_{٢}}) = \overrightarrow{٠}$

∴ $ك_{١}\overrightarrow{ع'_{١}} + ك_{٢}\overrightarrow{ع'_{٢}} = ك_{١}\overrightarrow{ع_{١}} + ك_{٢}\overrightarrow{ع_{٢}}$ (٣)

أى أن: مجموع كميتى الحركة بعد التصادم مباشرة = مجموع كميتى الحركة قبل التصادم مباشرة وبالتالى فإنه إذا تصادمت كرتان ملساوان فإن مجموع كميتى حركتهما لا يتغير نتيجة للتصادم.

استخدام القياسات الجبرية:

يمكن استخدام القياسات الجبرية لمتجهات السرعة والدفع وعلى ذلك فإنه يمكن إعادة صياغة العلاقات الثلاث السابقة على النحو الآتى:

$$ك_{١}ع'_{١} - ك_{١}ع_{١} = -د$$

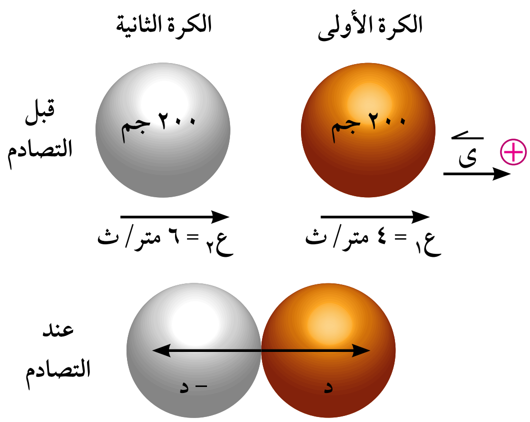
$$ك_{٢}ع'_{٢} - ك_{٢}ع_{٢} = د$$

$$ك_{١}ع'_{١} + ك_{٢}ع'_{٢} = ك_{١}ع_{١} + ك_{٢}ع_{٢}$$

مثال

١) تتحرك كرتان ملساوان كتلة كل منهما ٢٠٠ جم فى خط مستقيم على مستو أفقى أملس الأولى بسرعة ٤ متر / ث والثانية بسرعة ٦ متر/ث فى نفس اتجاه الأولى فإذا تصادمت الكرتان فعين سرعة كل منهما بعد التصادم مباشرة علما بأن مقدار دفع الكرة الثانية على الأولى يساوى ٥ × ١٠^٤ داين . ثانية.

الحل



نتخذ متجه وحدة ثابت $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه السرعتين قبل التصادم مباشرة ونعتبره الاتجاه الموجب.

∵، دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى يكون فى الاتجاه الموجب.

∴ د = ٥ × ١٠^٤ داين . ث

، دفع الكرة الأولى على الثانية يكون فى الاتجاه السالب.

∴ د = - ٥ × ١٠^٤ داين.ث

بالنسبة للكرة الأولى:

∵ د = ك$_١$ (ع$'_١$ - ع$_١$)　　∴ ٥ × ١٠^٤ = ٢٠٠ (ع$'_١$ - ٤٠٠)

∴ ٢٥٠ = ع$'_١$ - ٤٠٠　　∴ ع$'_١$ = ٦٥٠ سم/ث = ٦,٥ متر/ث

بالنسبة للكرة الثانية:

∵ د = ك$_٢$ (ع$'_٢$ - ع$_٢$)　　∴ - ٥ × ١٠^٤ = ٢٠٠ (ع$'_٢$ - ٦٠٠)

∴ - ٢٥٠ = ع$'_٢$ - ٦٠٠　　∴ ع$'_٢$ = ٣٥٠ سم/ث = ٣,٥ متر/ث

أى أن الكرتين تتحركان بعد التصادم فى نفس اتجاههما: الأولى بسرعة ٦,٥ متر/ث والثانية بسرعة ٣,٥متر/ث

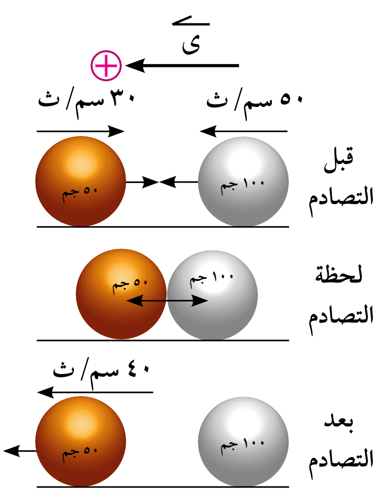
٩ حاول أن تحل

(١) تتحرك كرتان ملساوان كتلة كل منهما ٢٠٠جم فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية الأولى بسرعة ٥ متر/ث والثانية بسرعة ٩ متر/ث فى نفس اتجاه الأولى. فإذا تصادمت الكرتان فعين سرعة كل منهما بعد التصادم مباشرة علما بأن مقدار دفع الكرة الثانية على الأولى يساوى ٠,٦ × ١٠^٥ داين . ث

مثال　(تصادم الكرات)

(٢) كرتان كتلتاهما ١٠٠ جرام ، ٥٠ جرام تتحركان فى خط مستقيم أفقى واحد فى اتجاهين متضادين. تصادمت الكرتان عندما كانت سرعة الكرة الأولى مقدارها ٥٠سم/ث وسرعة الكرة الثانية مقدارها ٣٠سم/ث فإذا إرتدت الكرة الثانية عقب التصادم مباشرة بسرعة ٤٠سم/ث أوجد مقدار واتجاه سرعة الكرة الأولى بعد التصادم مباشرة ومقدار دفع أى من الكرتين على الآخرى.

الحل



أولا:

نعتبر أن أتجاه سرعة الكرة الأولى قبل التصادم فى اتجاه متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموع كميتى الحركة بعد التصادم

∴ ك$_١$ع$_١$ + ك$_٢$ع$_٢$ = ك$_١$ع$'_١$ + ك$_٢$ع$'_٢$

١٠٠ × ٥٠ - ٥٠ × ٣٠ = ١٠٠ ع$'_١$ + ٥٠ × ٤٠

ع$'_١$ = ١٥ سم/ث فى اتجاه متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ نفسه

ثانيًا:

نوجد دفع الكرة الأولى على الكرة الثانية

دفع الكرة الأولى على الكرة الثانية = التغير فى كمية حركة الكرة الثانية

د = ك (ع$'_{2}$ - ع$_{2}$)

د = ٥٠ (٤٠ - (٣٠٠)) = ٣٥٠٠ جم. سم/ث

ثانيًا: التصادم غير المرن: *Inelastic collision*

يقصد بالتصادم غير المرن ، أن يحدث تشوه أو تتولد حرارة أو تلتحم الأجسام ، نتيجة لعملية التصادم (يحدث فقد فى طاقة الحركة).

وبالرغم من كل هذا فإن كمية الحركة قبل التصادم وبعده، تبقى كما هى دون تغير.

وتكون معادلة الأحتفاظ بكمية الحركة على الصورة: (فى حالة إلتحام الكتلتين)

ك$_{1}$ $\overleftarrow{ع_{1}}$ + ك$_{2}$ $\overleftarrow{ع_{2}}$ = (ك$_{1}$ + ك$_{2}$) $\overleftarrow{ع}$ **(باستخدام المتجهات)**

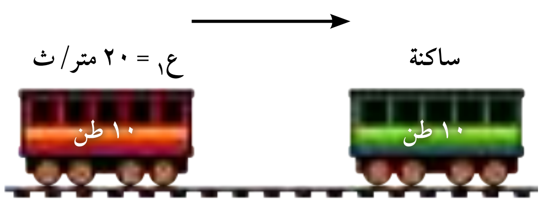
ك$_{1}$ ع$_{1}$ + ك$_{2}$ ع$_{2}$ = (ك$_{1}$ + ك$_{2}$) ع **(باستخدام القياسات الجبرية)**

ومن الأمثلة العملية للتصادم غير المرن تصادم عربات القطار وتصادم المطرقة التى تسقط على وتد يستعمل فى حفر الأساس عند البناء.

مثال تصادم عربات القطار

③ عربة قطار كتلتها ١٠ طن تسير بسرعة ٢٠ م/ث إصطدمت بعربة قطار أخرى ساكنة كتلتها ١٠طن فإذا سارت العربتان بعد التصادم مباشرة كجسم واحد إحسب سرعتهما المشتركة حينئذ

الحل



نفرض أن كتلة العربة المتحركة ك$_{1}$

فيكون ك$_{1}$ = ١٠ طن = ١٠٠٠٠ كجم وسرعتها ع$_{1}$

حيث : ع$_{1}$ = ٢٠ م/ث

وكتلة العربة الساكنة ك$_{2}$

ك$_{2}$ = ١٠ طن = ١٠٠٠٠ كجم وسرعتها ع$_{2}$ = صفر.

نعتبر أن اتجاه سرعة الجسم الأول قبل التصادم موجبا وأن السرعة المشتركة للجسمين بعد التصادم مباشرة ع

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموع كميتى الحركة بعد التصادم

ك$_{1}$ع$_{1}$ + ك$_{2}$ع$_{2}$ = (ك$_{1}$ + ك$_{2}$) ع

١٠٠٠٠ × ٢٠ + ١٠٠٠٠ × صفر = (١٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠) × ع

٢٠٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠ع ∴ ع = ١٠م/ث فى إتجاه حركة العربة الأولى نفسه

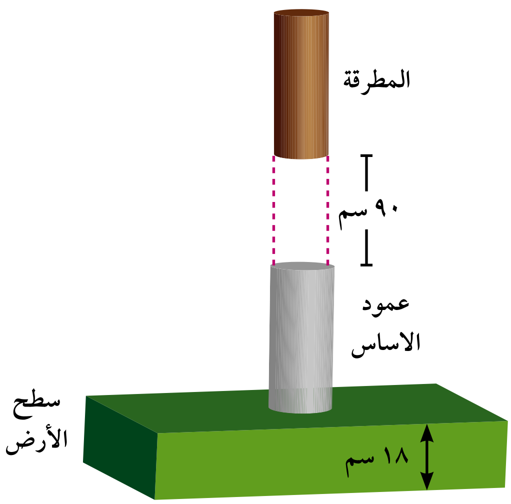
حاول أن تحل

② عربة قطار كتلتها ٦ طن تسير بسرعة ٢٥ م/ث إصطدمت بعربة قطار أخرى ساكنة كتلتها ٣ طن فإذا سارت العربتان بعد التصادم مباشرة كجسم واحد إحسب سرعتها المشتركة حينئذ.

مثال

(٤) تسقط مطرقة من الحديد كتلتها ٢١٠ كجم من إرتفاع ٩٠سم على عمود من أعمدة الأساس كتلته ١٤٠ كجم فتدفعه فى الأرض مسافة ١٨ سم فإذا تحركت المطرقة والعمود كجسم واحد بعد التصادم مباشرة أوجد السرعة المشتركة لهما ثم أوجد بثقل الكيلو جرام متوسط مقاومة الأرض بفرض أنها ثابتة.

الحل



أولا: سرعة وصول المطرقة لعمود الأساس

ع^{2} = ع$_{.}^{2}$ + ٢ ء ف

ع^{2} = ٢ × ٩,٨ × ٠,٩

ع = ٤,٢ م/ث

ثانيا: لحظة التصادم

ك$_{1}$ع$_{1}$ + ك$_{2}$ع$_{2}$ = (ك$_{1}$ + ك$_{2}$) ع

٢١٠ × ٤,٢ + ١٤٠ × صفر = ٣٥٠ ع

∴ ع = ٢,٥٢ م/ث

ثالثا: بعد التصادم

الجسمان يكونان جسما واحدا يتحرك بعجلة جـ مسافة ٠,١٨م سرعته الأبتدائية ع$_{.}$ = ٢,٥٢ م/ث ، سرعته النهائية = صفر   ع^{2} = ع$_{.}^{2}$ + ٢ جـ ف   ∴ صفر = (٢,٥٢)^{2} + ٢ × جـ × ٠,١٨

جـ = - ١٧,٦٤ م/ث^{2}

لايجاد متوسط مقاومة الأرض:

(ك$_{1}$ + ك$_{2}$) ء - م = ك جـ

٣٥٠ × ٩,٨ - م = ٣٥٠ × -١٧,٦٤

م = ٣٥٠ × ٩,٨ + ٣٥٠ × ١٧,٦٤

∴ م = ٩٦٠٤ نيوتن   ∴ م = ٩٨٠ ث كجم

حاول أن تحل

(٣) تسقط مطرقة من الحديد كتلتهما ٢,١ طن من إرتفاع ١,٦ متر على عمود من أعمدة الأساس كتلته ٣٥٠ كجم فتدفعه فى الأرض مسافة ١٢ سم فإذا تحركت المطرقة والعمود بعد التصادم كجسم واحد رأسيًا إلى أسفل أحسب مقدار السرعة المشتركة لهما بعد التصادم ثم إحسب مقدار مقاومة الأرض بفرض أنها ثابتة.

تمــارين ٣ - ٢

أولاً: أكمل:

١) إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ثابت الكتلة خلال فترة زمنية ن فإن دفع هذه القوة يساوى ....

٢) إذا أثرت قوة ثابتة على جسم لفترة زمنية متناهية فى الصغر فإن التغير فى كمية حركة الجسم خلال هذه الفترة يساوى ....

٣) إذا قيست الكتلة بالكيلو جرام ومقدار السرعة بالمتر/ثانية فإن وحدة مقدار الدفع تقاس بـ .... أو ....

٤) إذا تصادمت كرتان ملساوان وكانت سرعتاهما قبل التصادم مباشرة توازيان خط المركزين عند لحظة التصادم فإن هذا التصادم يسمى ....

٥) إذا تصادمت كرتان ملساوان فإن مجموع كميتى حركتهما قبل التصادم يساوى ....

ثانيًا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦) مقدار الدفع بوحدة (داين .ث) الذى تؤثر به قوة على جسم كتلته ٢٠جم لتغير سرعته من ١٠سم/ث إلى ١٨سم/ث فى نفس الاتجاه يساوى :

أ ٨٠ ب ١٦٠ ج ٢٨٠ د ٥٦٠

٧) إذا أثرت قوة مقادرها ٨ نيوتن على جسم ساكن كتلته ٤ كيلو جرام، فإن السرعة التى يكتسبها الجسم فى نهاية ٥ ثوان من بدأ الحركة يساوى:

أ ٦,٤ م/ث ب ١٠ م/ث ج ٢٠م/ث د ٤٠ م/ث

٨) إذا أثرت قوة على جسم كتلته ٧٠٠ جم فغيرت سرعته من ٣٠ سم /ث إلى ٦٥ سم/ث فى نفس الاتجاه وكان زمن تأثيرها ١٠ ثوان فإن مقدار هذه القوة بوحدة ثقل الجرام تساوى :

أ ٢,٥ ب ٢٥ ج ١٢٢٥ د ٢٤٤٥

٩) جسم كتلته ٤٠٠جم، إثرت عليه قوة فغيرت سرعته من ٢٥سم/ث إلى ٥٥سم /ث فى نفس الاتجاه أوجد مقدار دفع هذه القوة.

١٠) أثرت قوة على جسم كتلته ١٥٠ جم يتحرك بسرعة ٢٠سم/ث فغيرت سرعته إلى ١٠سم/ث فى عكس اتجاه حركته الأولى . أوجد مقدار دفع هذه القوة على الجسم.

١١) سقطت كرة كتلتها ٨٠٠جم من ارتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة مقدارها ٢م/ث. أحسب دفع السائل على الكرة.

١٢ تتحرك كرة ملساء كتلتها ٣٠٠جم فى خط مستقيم على أرض أفقية بسرعة ٨م/ث فإذا اصطدمت هذه الكرة بحائط رأسى أملس وارتدت بسرعة ٥م / ث. أوجد مقدار دفع الحائط على الكرة ، وإذا كان زمن التلامس الكرة مع الحائط $\frac{١}{٢٠}$ من الثانية. فما مقدار قوة دفع الحائط للكرة.

١٣ تتحرك كرتان كتلتاهما ٣٠ جرام، ٩٠ جرام فى خط مستقيم على نضد أفقى وفى إتجاهين متضادتين فاصطدمت الكرتان عندما كانت سرعتاهما ٥٠سم/ث ، ع سم/ث على الترتيب وكونا جسما واحدا تحرك بعد التصادم مباشرة بسرعة ١٠سم/ث فى اتجاه الكرة الكبرى احسب مقدار ع واذا كانت مقاومة الحركة للجسم الجديد هى ٣٠٠ داين أوجد المسافة التى يقطعها قبل أن يسكن

١٤ سقطت مطرقة كتلتها طن واحد من إرتفاع ٤,٩ متر رأسيا على عمود من أعمدة الأساس كتلته ٤٠٠كجم فدكته رأسيا فى الأرض مسافة ١٠سم فاذا تحركت المطرقة والعمود كجسم واحد بعد التصادم مباشرة أوجد سرعتهما المشتركة ثم أوجد مقاومة الأرض بفرض ثبوتها بثقل الكيلوجرام.

١٥ إصطدمت كرتان تتحركان فى خط مستقيم أفقى فى إتجاهين متضادين الأولى كتلتها ٥ كجم وسرعتها ٤٠سم/ث والثانية كتلتها ٦ كجم وسرعتها ٥٠سم/ث فإذا تحركت الكرة الأولى فى عكس إتجاه حركتها بسرعة ٢٠سم/ث فأثبت أن الكرة الثانية تسكن بعد التصادم مباشرة وما مقدار دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى.

١٦ كرتان ملساوتان كتلة الأولى ٥٠ جرام وكتلة الثانية ٤٠جرام وإزاحة الأولى $\overleftarrow{\text{ف}}_{١}$ = ٣٠٠ن $\overleftarrow{\text{س}}$ وإزاحة الثانية $\overleftarrow{\text{ف}}_{٢}$ = - ١٥٠ن $\overleftarrow{\text{س}}$ حيث ف مقيسة بالسنتيمتر والزمن بالثانية فإذا تصادمت الكرتان وكونتا جسمًا واحدا عقب التصادم مباشرة احسب السرعة المشتركة لهذا الجسم ثم إحسب قوة التضاغط بين الكرتين إذا كان زمن التصادم $\frac{١}{٦}$ من الثانية.

١٧ تتحرك كرة صغيرة كتلتها ٣٠جرام فى خط مستقيم بسرعة منتظمة مقدارها ١٣ م/ث وبعد ٤ ثوان من مرورها بموضع معين تحركت كرة أخرى كتلتها ١٠جرام من هذا الموضع وفى نفس إتجاه حركة الكرة الأولى بسرعة إبتدائية ٤م/ث وبعجلة ٢م/ث^{٢} فإذا كونتا جسما واحدا بعد التصادم مباشرة إحسب السرعة المشتركة للجسم واذا لاقى هذا الجسم مقاومة ثابتة على المستوى الأفقى مقدارها ٤ ثقل جرام احسب متى يسكن هذا الجسم؟

١٨ جسم كتلته ١ كجم موضوع على سطح أفقى أملس أثرت عليه قوة مقدارها ٨ نيوتن لمدة $\frac{١}{٢}$ ثانية وأثناء إنقطاع تأثير القوة إصطدم هذا الجسم بجسم آخر ساكن كتلته ٢ كجم فإذا إرتد الجسم الأول بسرعة ٢م/ث أوجد سرعة الجسم الثانى بعد التصادم مباشرة.

ملخص الوحدة

١ الدفع:

إذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم ثابت الكتلة خلال فترة زمنية ن فإن دفع هذه القوة،
ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{د}}$ يعرف بأنه حاصل ضرب متجه القوة فى زمن تأثيرها أى أن: $\overrightarrow{\text{د}} = \overrightarrow{\text{ق}}\ \text{ن}$

٢ وحدات قياس مقدار الدفع:

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الزمن
ففى النظام الدولى للوحدات يقاس مقدار الدفع بوحدة نيوتن . ث ويمكن أيضًا أن يقاس بأى وحدة قوة فى وحدة زمن.
الدفع وكمية الحركة : الدفع = التغير فى كمية الحركة أى أن $\text{ق} \times \text{ن} = \text{ك}\,(\text{ع}_2 - \text{ع}_1)$
منحنى القوة - الزمن:
يمكن تمثيل الدفع بالمساحة أسفل منحنى القوة - الزمن ويتحدد بالعلاقة الدفع $= \int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2} \text{ق}\ \text{ء}\text{ن}$

٣ القوى الدفعية

القوى الدفعية هى قوة كبيرة جدا تؤثر لفترة زمنية صغيرة للغاية وتحدث تغيرًا هائلًا فى كمية حركة الجسم دون أن تحدث تغيرًا يذكر فى موضعه والحركة الناتجة عند تأثير هذه القوى تسمى حركة دفعية كمثال على ذلك كرة البيسبول عندما تُضرب فإن زمن التلامس بين المضرب والكرة صغيرً للغاية مع أن متوسط القوة المؤثرة على الكرة كبير جدًا ويكون الدفع كبيرًا بما يكفى ليغير كمية حركة الكرة دون تغير يذكر فى موضع الكرة .

٤ التصادم المرن :

لايحدث تشوه أو توليد حرارة نتيجة أصطدام جسمين ولايحدث فقد فى طاقة الحركة

$$\text{ك}_1\overrightarrow{\text{ع}'_1} + \text{ك}_2\overrightarrow{\text{ع}'_2} = \text{ك}_1\overrightarrow{\text{ع}_1} + \text{ك}_2\overrightarrow{\text{ع}_2}$$

أى أن: مجموع كميتى الحركة بعد التصادم مباشرة = مجموع كميتى الحركة قبل التصادم مباشرة وبالتالى فإنه إذا تصادمت كرتان ملساوان فإن مجموع كميتى حركتهما لا يتغير نتيجة للتصادم.
ويمكن استخدام القياسات الجبرية علي النحو الآتى :

$$\text{ك}_1\text{ع}'_1 - \text{ك}_1\text{ع}_1 = -\text{د} \qquad \text{ك}_2\text{ع}'_2 - \text{ك}_2\text{ع}_2 = \text{د} \qquad \text{ك}_1\text{ع}'_1 + \text{ك}_2\text{ع}'_2 = \text{ك}_1\text{ع}_1 + \text{ك}_2\text{ع}_2$$

حيث د القياس الجبرى لدفع الكرة الثابتة على الأولى ع_1 ، ع_2 القياس الجبرى للسرعة قبل التصادم $\text{ع}'_1$ ، $\text{ع}'_2$ السرعة بعد التصادم.
التصادم المباشر : تكون فيه السرعتان قبل التصادم مباشرة توازيان خط المركزين لحظة التصادم.

٥ التصادم غير المرن: Inelastic collision

يقصد بالتصادم غير المرن ، أن يحدث تشوه أو تتولد حرارة أو تلتحم الأجسام ، نتيجة لعملية التصادم ويحدث فقد فى طاقة الحركة ويكون:

$\text{ك}_1\overrightarrow{\text{ع}_1} + \text{ك}_2\overrightarrow{\text{ع}_2} = (\text{ك}_1 + \text{ك}_2)\,\overrightarrow{\text{ع}}$ (باستخدام المتجهات) (حالة الإلتحام)

$\text{ك}_1\text{ع}_1 + \text{ك}_2\text{ع}_2 = (\text{ك}_1 + \text{ك}_2)\,\text{ع}$ (باستخدام القياسات الجبرية)

تمارين عامة

أولا :

١) عرف كلًا من الدفع وكمية الحركة واذكر العلاقة بينهما

٢) عرف كلًا من التصادم المرن والتصادم غير المرن وأعط مثالًا لكل منهما.

٣) وضح كيف يمكن بواسطة استخدام مفهوم كمية الحركة، الأقلال من حوادث المرور.

ثانيا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

٤) إذا قيست الكتلة بالكيلوجرام والسرعة بالمتر/ث فإن وحدة قياس الدفع تكون :

أ) كيلو جرام.ث　　ب) نيوتن.ث　　جـ) داين.ث　　د) نيوتن. متر/ث.

٥) الدفع هو:

أ) التغير فى القوة المؤثرة على الجسم　　ب) فترة تأثير القوة على الجسم.

جـ) التغير فى سرعة الجسم　　د) التغير فى كمية حركة الجسم.

٦) تُعرف كمية الحركة بأنها حاصل ضرب كلًا من:

أ) كتلة الجسم وسرعته　　ب) كتلة الجسم وعجلة حركته

جـ) كتلة الجسم وزمن تأثير القوة　　د) كتلة الجسم والمسافة التى قطعها.

٧) إذا أثرت قوة على جسم كتلته ٣٠٠جم، فغيرت سرعته من ٢٠سم/ث إلى ٤٥سم/ث فى نفس الإتجاه فإن مقدار دفع هذه القوة للجسم بوحدة جم . سم /ث يساوى:

أ) $٧,٥ \times ١٠^{٢}$　　ب) $٧,٥ \times ١٠^{٣}$　　جـ) $٢,٧ \times ١٠^{٥}$　　د) $٢,٩٤ \times ١٠^{٦}$

٨) اصطدمت كرة كتلتها ٣٠٠ جم ومتحركة على أرض أفقية بسرعة ٦٠سم/ث تصادمًا مباشرًا بحائط رأسى فأثر عليها بدفع مقداره ٤٨٠٠٠ داين . ث فما سرعة ارتداد الكرة من الحائط بوحدة سم/ث؟

أ) ١٠٠　　ب) ١٢٠　　جـ) ٢٢٠　　د) ٥٠٠

٩) إذا أثرت القوتان $\overleftarrow{ق}_{١} = ٢\,\overleftarrow{س} - ١٤\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢} = ٣\,\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$ وكل من $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ بوحدة النيوتن على جسم لفترة زمنية مقدارها $\frac{١}{٢}$ ثانية فإن مقدار دفع القوى بوحدة نيوتن . ثانية يساوى:

أ) $٦\frac{١}{٢}$　　ب) $٧\frac{١}{٢}$　　جـ) ٩　　د) ١٣

ثالثًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠) كرة من المطاط كتلتها ٥٠٠جم تتحرك أفقيا فى خط مستقيم اصطدمت بحائط رأسى وارتدت بسرعة ١٥٠سم/ث على نفس المستقيم فإذا كان متوسط القوة بينها وبين الحائط ١٠ث كجم وزمن التلامس بينهما $\frac{١}{٥٠}$ ثانية فأوجد سرعة الكرة قبل لحظة اصطدامها بالحائط مباشرة.

١١) سقطت كرة من المطاط كتلتها ٢٠٠ جم من ارتفاع ٣,٦ مترا عن سطح الأرض فارتدت بعد الصدمة إلى ارتفاع ٢,٥ مترا. أوجد مقاومة الأرض للكرة بثقل الكيلو جرام إذا علم أن زمن الصدمة بالأرض $\frac{١}{٧}$ ثانية.

تمارين عامة

(١٢) سقطت كرة من المطاط كتلتها ١ كيلو جرام من ارتفاع ٤,٩متر على سطح أرض أفقية صلبة فارتدت إلى أقصى ارتفاع لها وهو ٢,٥ متر احسب مقدار التغير فى كمية حركتها نتيجة اصطدامها بالأرض ، ثم أوجد مقدار رد فعل الأرض على الكرة بالنيوتن إذا كان زمن تلامسها بالأرض٠,١ ثانية.

(١٣) كرة كتلتها ٤٠٠جم تتحرك بسرعة ٧٠سم/ث ، صدمت كرة أخرى ساكنة كتلتها ٨٠٠جم، فبدأت تتحرك عقب الصدمة مباشرة بسرعة ٣٥سم/ث فى نفس اتجاه حركة الأولى. أثبت أن الكرة الأولى تسكن عقب الصدمة ، ثم أوجد قوة الصدمة على أى من الكرتين مقدرة بثقل الجرام إذا كان زمن الصدمة $\frac{١}{٧}$ ثانية

(١٤) كرتان كتلتاهما ١٠٠جم، ٥٠ جم تتحركان فى خط مستقيم أفقى فى اتجاهين متضادين، تصادمت الكرتان عندما كانت سرعة الكرة الأولى مقدارها ٥٠سم/ث وسرعة الكرة الثانية مقدارها ٣٠سم./ث، فإذا ارتدت الكرة الثانية عقب التصادم مباشرة بسرعة مقدارها ٤٠سم/ث. أوجد مقدار واتجاه سرعة الكرة الأولى عقب التصادم مباشرة، ثم أوجد مقدار دفع أى من الكرتين للأخرى.

(١٥) أطلقت رصاصة كتلتها ٢٠ جم بسرعة أفقية مقدارها ٥٠,٥م/ث على قطعة خشبية كتلتها ٢كجم موضوعة على نضد أفقى فاستقرت فيها وكونتا جسمًا واحدًا أوجد سرعة هذا لجسم بعد التصادم مباشرة، وإذا أرتد هذا الجسم بسرعة ٢سم/ث بعد اصطدامه بحاجز ثابت على النضد وعمودى على اتجاه الحركة فاوجد دفع الحاجز على الجسم علما بأن المقاومة الكلية تساوى ١,٠١ نيوتن وأن الحاجز يبعد ٢٤سم عن موضع القطعة الخشبية قبل إطلاق الرصاصة.

(١٦) تسقط مطرقة من الحديد كتلتها ٢١٠ كجم من ارتفاع ٩٠ سم على عمود من أعمدة الأساس كتلته ١٤٠كجم فتدفعه فى الأرض مسافة ١٨سم، فإذا تحركت المطرقة والعمود كجسم واحد بعد التصادم مباشرة فأوجد السرعة المشتركة لهما ثم أوجد بثقل الكيلو جرام متوسط مقاومة الأرض بفرض أنها ثابتة.

(١٧) يتحرك جسم أ كتلته ١٠ جم رأسيا إلى أسفل ، صدم جسم آخر ب كتلته ٤ جم متحرك رأسيا إلى أعلى عندما كانت سرعة أ هى ٢٠٠سم/ث وسرعة ب هى ٨٠٠سم/ث، فارتد الجسم ب رأسيا إلى أسفل بسرعة ١٠٠سم/ث بينما ارتد أ رأسيا إلى أعلى وبعد $\frac{١}{٧}$ ثانية اصطدم الجسم أ بجسم آخر جـ كتلته ١٠٠جم متحرك رأسيا إلى أسفل بسرعة ١٣سم/ث وكونا جسما واحدا. أوجد السرعة المشتركة للجسمين أ ، جـ بعد التصادم.

(١٨) $\overline{\text{أ ب}}$ خط أكبر ميل لمستوى مائل أملس طوله ٩,٨ متر يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°، أ هى أعلى نقطة فى المستوى ، ب أسفل نقطة فيه. وضعت كرة ملساء عند أ كتلتها ٧٠٠ جم لتتحرك من سكون على $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ فاصطدمت بحاجز رأسى عمودى أملس عند ب فأثر عليها بدفع مقدارها ١١,٧٦ نيوتن. ثانية فارتدت الكرة. احسب أقصى مسافة تصعدها الكرة على $\overleftarrow{\text{ب أ}}$.

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

(١) إذا قذفت جسم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث.
أوجد زمن وصوله إلى أقصى أرتفاع والمسافة التى وصل اليها.

(٢) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٥ كم/س. فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٣٥ كم/س. أوجد السرعة النسبية للدراجة بالنسبة للسيارة فى كل من الحالتين.
أولا: الدراجة تتحرك فى اتجاه السيارة نفسه **ثانيا:** الدراجة تتحرك عكس إتجاه حركة السيارة.

(٣) قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٨ كم/س ثم عاد على نفس الطريق فقطع ٢٠ كم فى الأتجاه المضاد بسرعة ١٥ كم/س . أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

(٤) تحرك جسيم من السكون بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت فبلغت سرعته ٣٦ كم/س فى نهاية ٢٠ثانية. أوجد مقدار عجلته بالمتر / ث^{٢}.

(٥) إذا كان متجه موضع جسيم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة : $\overleftarrow{ر} = (ن^{٣} + ٢)\ \overleftarrow{ى}$. فأوجد متجهات الإزاحة والسرعة والعجلة ثم أثبت أن الحركة تكون متسارعة عند أى لحظة زمنية ن > ٠ متى يكون معيار العجلة مساويًا ١٢ وحدة؟

(٦) قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة $\overleftarrow{ع_{.}}$. أكتب القانون الذى يعطى سرعته بدلالة الزمن ثم استنتج أن معدل تغير كمية حركته بالنسبة للزمن هو متجه ثابت وأوجد معياره.

(٧) يتحرك جسيم كتلته الوحدة تحت تأثير القوتين: $\overleftarrow{ق_{١}} = أ\ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = ٢\ \overleftarrow{س} + ب\ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها الوحدة الأساسيان، أ ، ب ثابتان ، فإذا علم أن متجه إزاحة الجسيم كدالة فى الزمن هو : $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{س} + (ن^{٢} + ن)\ \overleftarrow{ص}$ فأوجد الثابتين أ ، ب.

(٨) مصعد بقاعدته ميزان ضغط وقف رجل على الميزان فسجل ٧٥ث كجم عندما كان المصعد صاعدًا بعجلة منتظمة مقدارها جـ. وسجل الميزان ٦٠ث كجم عندما كان المصعد هابطًا بعجلة منتظمة مقدارها ٢جـ. أوجد مقدار كل من العجلة جـ ، كتلة الرجل.

(٩) علق جسمان كتلتاهما ١٢٥ ، ١٢٠ جم على الترتيب من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء . عين عجلة المجموعة والضغط على محور البكرة ، و إذا بدأت المجموعة الحركة من سكون والجسمان فى مستوى أفقى واحد، فما المسافة الرأسية بينهما بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة؟

(١٠) مستوى مائل خشن طوله ٤,٥ متر وارتفاعه ٢,٧متر وضع جسم عند قمة المستوى وبدأ الجسم الحركة من السكون. أحسب سرعة الجسم عند وصوله إلى قاعدة المستوى والزمن اللازم لذلك حيث معامل الأحتكاك = $\frac{١}{٢}$.

(١١) سيارة أ كتلتها ٤ طن تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها ٥ م/ث فى خط مستقيم على مستوى أفقى أملس صدمت سيارة أخرى ب ساكنة كتلتها ٣ طن وبعد التصادم مباشرة كانت سرعة السيارة ب بالنسبة للسيارة أ هى ٢م/ث.
أوجد مقدار السرعة الفعلية لكل من السيارتين بعد التصادم.

الشغل ، القدرة ، الطاقة

Work , Power & Energy

الوحدة

٤

مقدمة الوحدة

فى دراستنا للوحدات السابقة وجدنا أنه عندما تؤثر محصلة عدة قوى على جسم فإنه يتحرك بشكل أو بآخر، وإذا تساءلنا الآن ما الفائدة من حركة وتحريك الأجسام؟ تأتى الإجابة فى شقين؛ أولهما أن الإنسان بفضوله الدائم يسعى لتفسير الظواهر الطبيعية وأسبابها وما ينتج عنها. وثانيها أن الإنسان يريد الأستفادة مما أنعم الله عليه وسخره لنا، فهو يريد سيارة تنقله من مكان لآخر ومصابيح كهربائية لإنارة المدن والقرى وغير ذلك، وبالطبع فإن كل ذلك لن يتحقق ما لم نعرف كيف نتحكم بالأشياء ونستفيد من حركاتها سواءً أكانت أجهزة كهربائية والكترونية أو وسائل مواصلات مختلفة أو أجسام كونية تسبب دوران الأرض وتعاقب الليل والنهار.

لذلك سوف ندرس فى هذه الوحدة حركة الأجسام فنتعرف على الشغل وكيف نستفيد من تحريك الأجسام ثم نتعرف على طاقة الحركة وطاقة الوضع ثم نربط بين هذه الكميات القياسية (غير المتجهة) وحدات قياسها المختلفة والعلاقة بينها ونتعرف بعد ذلك على القوى التى تحافظ على الطاقة وتلك التى لا تحافظ عليها وصولًا لمبدأ الشغل والطاقة ثم نتعرف على أبسط الآلات التى استخدمها الأنسان ونقارن بينها بحساب القدرة الناتجة عن كل واحدة ومردوداتها المختلفة فى الحياة اليومية.

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف الشغل المبذول بواسطة قوة ووحدات قياس الشغل.
- يتعرف مفهوم القدرة ووحدات قياسها.
- يتعرف طاقة حركة الجسيم ووحدات قياسها.
- يتعرف مبدأ الشغل والطاقة.
- يتعرف طاقة الوضع ووحدات قياسها وتطبيقاتها.

المصطلحات الأساسية

- الشغل — Work
- قوة ثابتة — Constant force
- كمية قياسية — Scalar quantaty
- متجه إزاحة — Displacement vector
- متجه موضع — Position vector
- جول — Joule
- قوة متغيرة — Variable force
- إرج — Erg
- طاقة الحركة — Kinetic energy
- طاقة لوضع — potential energy
- التغير في طاقة الوضع — change in potential energy
- مبدأ الشغل والطاقة — the work – energy principle
- ثبات الطاقة
- القدرة — Power
- قوة الحصان — Horse power

دروس الوحدة

(٤ – ١): الشغل

(٤ – ٢): طاقة الحركة

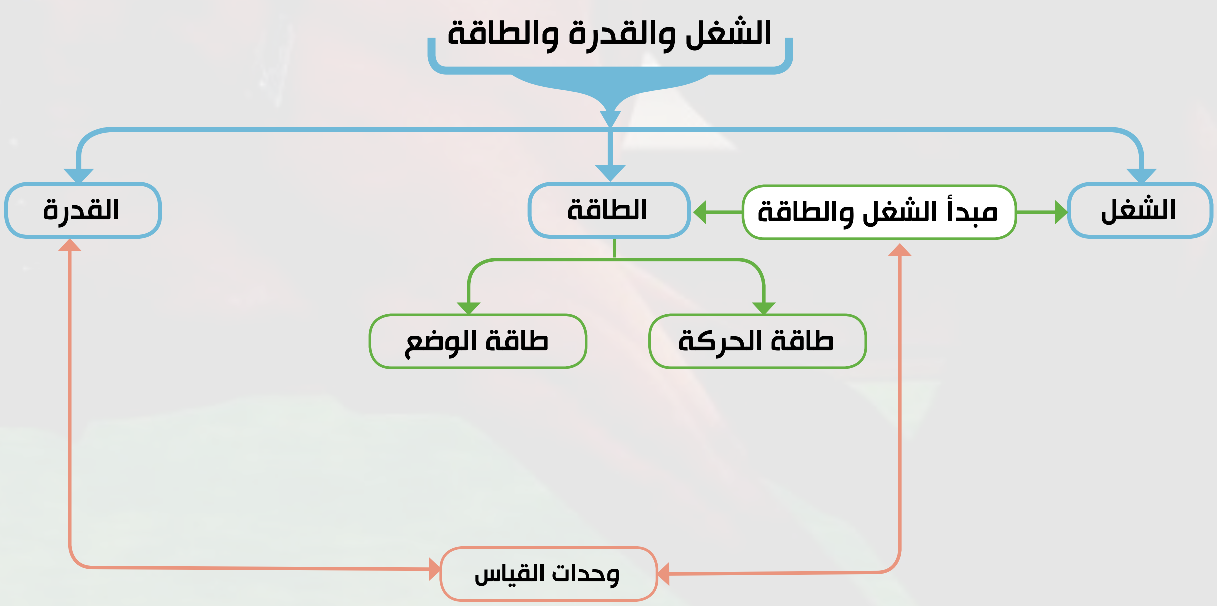
(٤ – ٣): طاقة الوضع

(٤ – ٤): القدرة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية .

مخطط تنظيمى للوحدة



الشغل
Work

مقدمة:
إن مفهوم الشغل من الأمور الهامة فى علم الكيناتيكا (Kinetic) لأنه يعتمد على مفاهيم القوة التى وضعها نيوتن فى القوانين الثلاثة، ويجدر بالذكر أن الشغل والطاقة كميات قياسية وبالتالى فإن التعامل معها سيكون أسهل من استخدام قوانين نيوتن للحركة خصوصًا عندما يكون متجه القوة متغيرًا وبالتالى فإن متجه العجلة سيكون متغيرًا كذلك.
وفى هذا الدرس سوف نوضح مفهوم الشغل الذى هو حلقة الوصل ما بين القوة والطاقة.
والشغل قد يكون ناتجا من قوة ثابتة Constant force أو من قوة متغيرة Varying force .
وسوف ندرس كلًا من النوعين فى هذا الدرس.

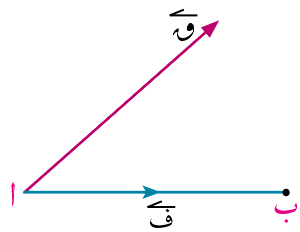
سوف تتعلم
- الشغل المبذول من قوة ثابتة.
- بعض الحالات المختلفة لمتجهى القوة والإزاحة.
- وحدات قياس الشغل.
- الشغل المبذول من قوة متغيرة.

المصطلحات الأساسية
- الشغل *Work*
- قوى ثابتة *Constant force*
- كمية قياسية *Scalar quantaty*
- متجه إزاحة *Displacement vector*
- متجه موضع *Position vector*
- جول *Joule*
- إرج *Erg*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

أولًا: الشغل المبذول من قوة ثابتة: *Work done by a constant force*

باعتبار أن جسما يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة $\overrightarrow{\text{ق}}$ وأنه أنتقل من الموضع أ إلى الموضع ب وكان متجه إزاحته $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ف}}$ كما فى شكل (١)



شكل (١)

تعريف
يعرف الشغل المبذول بواسطة القوة الثابتة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى تحريك جسم من موضع إبتدائى إلى موضع نهائى ويرمز له بالرمز (ش) على أنه يساوى حاصل الضرب القياسى لمتجه القوة فى متجه الإزاحة بين الموضعين

$$\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$$

يتضح إذاً أن الشغل هو كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر تبعا لاتجاه ومقدار كل من المتجهين $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ف}}$

مثال
(١) تحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٦ \overrightarrow{\text{س}} + ٨ \overrightarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (٣ ، -٤) إلى النقطة ب (٧ ، ٢) إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

الحل
متجه الأزاحة $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٧ \overrightarrow{\text{س}} + ٢ \overrightarrow{\text{ص}}) - (٣ \overrightarrow{\text{س}} - ٤ \overrightarrow{\text{ص}})$

$\overrightarrow{\text{ف}} = ٤ \overrightarrow{\text{س}} + ٦ \overrightarrow{\text{ص}}$

نطبق تعريف الشغل مع ملاحظة أن القوة المعطاة ثابتة

ش = و⃖ • ف⃖

ش = (٦ س⃖ + ٨ ص⃖) • (٤ س⃖ +٦ ص⃖) = ٦ × ٤ + ٨ × ٦ = ٧٢ وحدة قياس شغل

حاول أن تحل

① تحرك جسم على خط مستقيم تحت تأثير القوة و⃖ = ٥ س⃖ + ٢ ص⃖ من النقطة أ (٥، ٢) إلى النقطة ب (٣ ، ١)
إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة

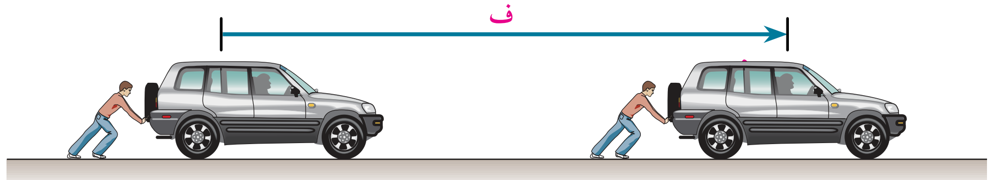
بعض الحالات المختلفة لمتجهى القوة والإزاحة

وحيث أنه يمكن إعادة كتابة معادلة تعريف الشغل ش = و⃖ • ف⃖ بصورة أخرى وهى ش = || و⃖ || || ف⃖ || جتا هـ حيث هـ قياس أصغر زاوية بين متجه القوة و⃖ ومتجه الإزاحة ف⃖ باعتبارهما خارجين من نقطة واحدة.

أ إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها موازٍ لإتجاه الأزاحة أى أن ق (هـ^) = صفر عندئذ يصبح الشغل
ش = || و⃖ || || ف⃖ || جتا صفر = || و⃖ || || ف⃖ ||

ويكتب: ش = و × ف

وشكل (٢) يوضح ذلك

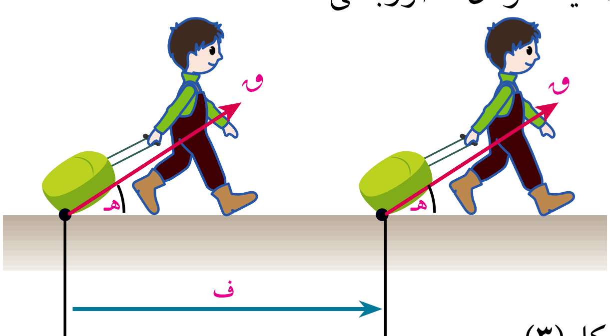


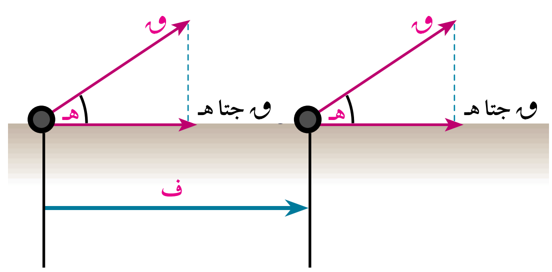
شكل (٢)

ب إذا كانت القوة ثابتة وإتجاهها يميل على اتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أقل من ٩٠ عندئذ يصبح الشغل

ش = || و⃖ || || ف⃖ || جتا هـ

ويكون الشغل فى هذه الحالة يساوى المركبة الأفقية للقوة و مضروبًا فى المسافة ف.



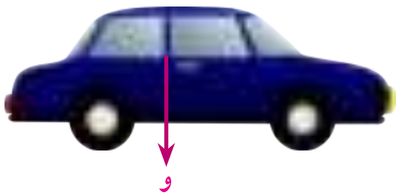


شكل (٣)

ج إذا كانت القوة ثابتة و إتجاهها عمودى على إتجاه الأزاحة أى أن و (هـ) = ٩٠° عندئذ يصبح الشغل

ش = || $\overleftarrow{و}$ || || $\overleftarrow{ف}$ || جتا ٩٠ = صفر

وشكل (٤) يوضح ذلك.



فالسيارة المتحركة افقياً وزنها لا يقوم بأى شغل في مسار الحركة

د اذا كانت القوة ثابتة و إتجاهها يميل على إتجاه الأزاحة بزاوية قياسها أكبر من ٩٠° عندئذ يصبح الشغل

ش = || $\overleftarrow{و}$ || || $\overleftarrow{ف}$ || جتا هـ

و يكون الشغل سالبا و يسمى شغلاً مقاومًا ومثال ذلك الشغل الذى تبذله قوة المقاومة أو قوة الأحتكاك.

مثال

٢ تحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{و}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$ من النقطة أ (١، ٠) إلى النقطة ب (٣، ٣) حيث ينسب التحليل إلى مجموعة محاور ديكارتية متعامدة $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$. عين الشغل المبذول

الحل

يبين شكل (٥) موضع كل من النقطتين أ ، ب بالنسبة للمحاور.

لحساب متجه الإزاحة $\overleftarrow{ف}$:

$\overleftarrow{ف}$ = $\overleftarrow{وب}$ - $\overleftarrow{وأ}$ (قاعدة طرح المتجهات)

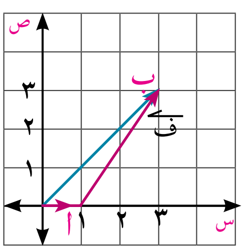
∴ $\overleftarrow{ف}$ = (٣ - ١) $\overleftarrow{س}$ + (٣ - ٠) $\overleftarrow{ص}$

= ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$

∵ ش = $\overleftarrow{و}$ • $\overleftarrow{ف}$ (تعريف الشغل)

= (٥ $\overleftarrow{س}$ -٣ $\overleftarrow{ص}$)•(٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$)

= ٥ × ٢ + (-٣) × (٣) = ١ وحدة قياس شغل.



شكل (٥)

حاول أن تحل

٢ يتحرك جسيم تحت تأثير القوتين $\overleftarrow{و}_١$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{و}_٢$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ من النقطة أ (٢، ١) إلى النقطة ب (٣، ٠) حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها الوحدة الأساسية. احسب الشغل المبذول.

تفكير ناقد:

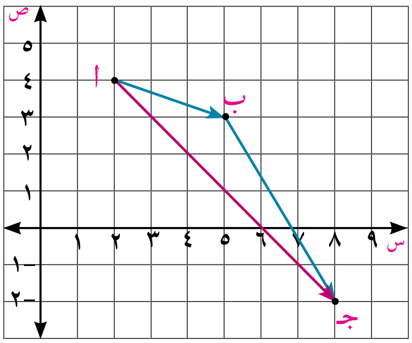
أثبت أنه إذا حدث للجسم إزاحتان متتاليتان تحت تأثير قوة ما، فإن الشغل المبذول خلال الإزاحة المحصلة يساوى مجموع الشغلين خلال كل من الإزاحتين.

مثال

(٢) أثرت القوة $\overleftarrow{ق} = ٣\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٢، ٤) على خط مستقيم إلى النقطة ب (٥، ٣) ثم إلى النقطة جـ (٨، -٢) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

الحل

أولًا: متجه الأزاحة الأولى $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$ = (٥، ٣) - (٢، ٤) = (٣، -١)



الشغل المبذول خلال الأزاحة الأولى

$ش_١ = \overleftarrow{ق} \cdot \overleftarrow{ف_١} = (٣\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص}) \cdot (٣\,\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص})$

$ش_١ = ٩ - ٥ = ٤$ وحدة قياس شغل

متجه الأزاحة الثانية $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{ب}$ = (٨، -٢) - (٥، ٣) = (٣، -٥)

الشغل المبذول خلال الأزاحة الثانية

$ش_٢ = \overleftarrow{ق} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = (٣\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص}) \cdot (٣\,\overleftarrow{س} - ٥\,\overleftarrow{ص})$

$ش_٢ = ٩ - ٢٥ = -١٦$ وحدة قياس شغل

الشغل المحصل = مجموع الشغلين

$ش = ش_١ + ش_٢ = ٤ - ١٦ = -١٢$ وحدة قياس شغل

ثانيا: الأزاحة المحصلة $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{أ}$ = (٨، -٢) - (٢، ٤) = (٦، -٦)

∴ **الشغل خلال الأزاحة المحصلة**

$ش = \overleftarrow{ق} \cdot \overleftarrow{ف} = (٣\,\overleftarrow{س} + ٥\,\overleftarrow{ص}) \cdot (٦\,\overleftarrow{س}، -٦\,\overleftarrow{ص})$

$ش = ١٨ - ٣٠ = -١٢$ وحدة قياس الشغل

حاول أن تحل

(٣) أثرت القوة $\overleftarrow{ق} = ٥\,\overleftarrow{س} - ٧\,\overleftarrow{ص}$ على جسم فحركته من النقطة أ (٥، -١) على خط مستقيم إلى النقطة ب (-١، ٣) ثم إلى النقطة جـ (٤، ٦) إحسب الشغل بواسطة هذه القوة خلال كل من الأزاحتين ثم حقق أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول خلال الأزاحة المحصلة.

تعبير شفهى: إذا تحرك جسيم على خط مستقيم من موضع ما ثم عاد إلى نفس هذا الموضع تحت تأثير نفس القوة فما مقدار الشغل المبذول خلال هذا المسار؟

مثال

٤ أثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} + ٣\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسيم فكان متجه موضع الجسيم عند لحظة زمنية ن تتعين من العلاقة: $\overleftarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = (\text{ن} + ٥)\overleftarrow{\text{س}} + (\text{ن}^{٢} + ٤)\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسيين، احسب الشغل المبذول من القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

الحل

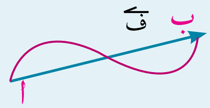
الإزاحة الحادثة من ن = ١ إلى ن = ٥ هى

$\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{ر}}_{٥} - \overleftarrow{\text{ر}}_{١}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}} = (٥\overleftarrow{\text{س}} + ٢٥\overleftarrow{\text{ص}}) - (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) = ٤\overleftarrow{\text{س}} + ٢٤\overleftarrow{\text{ص}}$

$\because \text{ش} = \overleftarrow{\text{ق}} \cdot \overleftarrow{\text{ف}}$ (من تعريف الشغل)

$\therefore \text{ش} = (٢ ، ٣) \cdot (٤ ، ٢٤) = ٨ + ٧٢ = ٨٠$ وحدة شغل.



لاحظ أن

لا يتوقف الشغل على المسار الذى يسلكه الجسم من الموضع أ إلى الموضع ب بل يتوقف على الإزاحة $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان متجه موضع جسيم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة: $\overleftarrow{\text{ر}}(\text{ن}) = (\text{ن} + ٤)\overleftarrow{\text{س}} + (\text{ن}^{٢} + ٣)\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسية. أثرت على الجسم قوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٣\overleftarrow{\text{س}} + ٢\overleftarrow{\text{ص}}$ أحسب الشغل المبذول من القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ من ن = ١ إلى ن = ٣

وحدات قياس الشغل:

من تعريف الشغل نستنتج ان:

وحدة قياس الشغل = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الإزاحة

ومن وحدات قياس الشغل:

- **الجول:** يعرف الجول بأن مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها نيوتن واحد في تحريك جسم ما مسافة متر واحد .

فإذا أخذنا $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = ١$ نيوتن ، $\|\overleftarrow{\text{ف}}\| = ١$ متر فإن:

الجول = ١ نيوتن × ١ متر أى الجول = نيوتن . متر

الجول هو الوحدة الدولية لقياس الشغل

- **الإرج:** يعرف الإرج على أنه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها داين واحد فى تحريك جسم ما مسافة سنتيمتر واحد.

فإذا أخذنا $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = ١$ داين ، $\|\overleftarrow{\text{ف}}\| = ١$ سم فإن:

الإرج = ١ داين × ١ سم أى الإرج = داين . سم

ث كجم.متر: هو مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها ١ ث كجم فى تحريك جسم ما مسافة متر واحد.

فإذا أخذنا $||\overrightarrow{\text{ق}}||$ = ١ ث كجم ، $||\overrightarrow{\text{ف}}||$ = ١ متر فإن ث كجم. متر = ١ ث كجم × ١ متر

ويمكن التحويل بين وحدات الشغل على النحو الآتى:

١ ث كجم. متر = ١ ث كجم × ١ متر	١ جول = ١ نيوتن × ١ متر
= ٩,٨ نيوتن . متر	= 10^5 داين × ١٠٠ سم
ث كجم.متر = ٩,٨ جول	= 10^7 داين × سم
	جول = 10^7 إرج

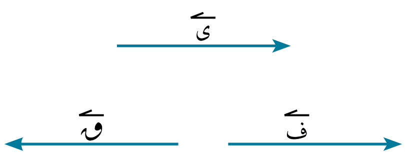
مثال

(٥) يتحرك جسيم على خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ١٠٠ نيوتن. أحسب الشغل الذى تبذله هذه القوة خلال أزاحة معيارها ٣٠٠ متر.

الحل

بما أن القوة هى مقاومة. إذن فهى تعمل عكس اتجاه متجه الإزاحة، وإذا كان $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه الإزاحة، فإنه يمكن التعبير عن كل من الإزاحة والقوة بالقياسات الجبرية.

$\overrightarrow{\text{ف}}$ = ف $\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = -ق $\overrightarrow{\text{ى}}$



(شكل ٦)

فى حالتنا:

ف = +٣٠٠ متر ، ق = ١٠٠ نيوتن

من شكل (٦) ش = -ق ف

= (-١٠٠) × (٣٠٠)

= -٣ × 10^4 نيوتن . متر

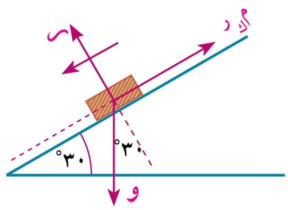
= -٣ × 10^4 جول

مثال

شغل الوزن ورد الفعل العمودى والأحتكاك

(٦) ينزلق جسم كتلته ١٠ كجم مسافة ٦ متر على مستو خشن معامل الأحتكاك الحركى بينهما ٠,٢ ويميل هذا المستوى على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد بوحدة ث كجم.متر الشغل الذى تبذله كلًا من:

أولًا: قوة وزن الجسم **ثانيا:** رد الفعل العمودى على المستوى **ثالثًا:** قوة الأحتكاك



الحل

أولًا: الشغل المبذول من قوة الوزن

وزن الجسم (و) = ك ء

∴ و = ١٠ × ٩,٨ = ٩٨ نيوتن

∵ الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ف}$ تساوى ٦٠°

ومن تعريف الشغل:

ش = و × ف جتا ٦٠°

∴ ش = ٩٨ × ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٩٤ جول = ٣٠ ث كجم. متر

حل آخر:

يمكن إيجاد مركبة الوزن التى تعمل فى نفس اتجاه الإزاحة ويكون الشغل المبذول ش = ك ء جا هـ × ف

∴ ش = ١٠ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٢٩٤ جول = ٣٠ ث كجم. متر

ثانيًا:

∵ قوة رد الفعل العمودى على المستوى (ر) تكون دائمًا عمودية على المستوى الذى يتحرك عليه الجسم لذا تكون الزاوية بين ر ، ف مساوية ٩٠°.

∴ الشغل المبذول من ر = ٠ .

ثالثًا: الشغل المبذول من قوة الأحتكاك:

نعلم أن قوة الأحتكاك الحركى $م_{ك}$ ر (حيث $م_{ك}$ معامل الأحتكاك الحركى)

∴ $م_{ك}$ ر = ٠,٢ × ١٠ × ٩,٨ × جتا ٣٠° = ٤٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∵ الشغل المبذول من قوة الاحتكاك = -$م_{ك}$ ر × ف

∴ ش = -٤٩ $\sqrt{٣}$ × ٦ = -٢٩٤ $\sqrt{٣}$ جول = -٣٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم.متر

حاول أن تحل

٥ سيارة كتلتها ٦ طن تصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٩٨}$ ضد مقاومات تعادل ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة فاكتسبت سرعة ٥٤ كم / س خلال ٣٠ ثانية ، فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون فأحسب بالجول مقدار الشغل المبذول من:

أولًا: قوة محرك السيارة

ثانيًا: قوة المقاومة

ثالثًا: وزن السيارة

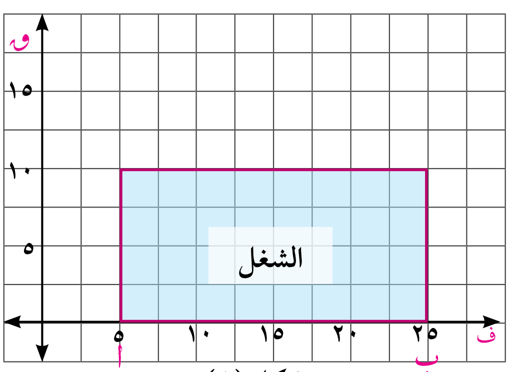
ثانيًا: الشغل المبذول من قوة متغيرة *Work done by a varying force*

سبق أن استخدمنا مفهوم الشغل فى التعامل مع الحركة - عندما تكون القوة منتظمة ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى:

مثال توضيحى:

باعتبار أن قوة ثابتة مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر على جسم ليتحرك من أ إلى ب كما هو موضح فى شكل (٨)

وبالتالى تكون الازاحة من أ إلى ب = ٢٠ متر ولتمثيل ذلك بيانيًا نرسم محور القوة ومحور الإزاحة كما هو مبين فى الشكل وبالتالى تكون القوة ممثلة على مستقيم أفقى يوازى محور الإزاحة ف.

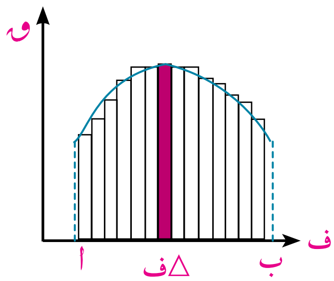


شكل (٨)

الشغل = ق ف = ١٠ (٢٥-٥) = ٢٠٠ جول

وهو عبارة عن المساحة أسفل المنحنى وتمثل بمساحة المستطيل الذى عرضه ١٠ نيوتن وطوله ٢٠ متر.

أما حالة أن تكون القوة متغيرة خلال الإزاحة كما هو موضح فى شكل (٩) فتكون المساحة تحت المنحنى تتحدد من العلاقة:



شكل (٩)

$$\text{ش} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق ء ف}$$

وفى هذه الحالة نأخذ إزاحة صغيرة قدرها△ف حتى تكون القوة المؤثرة لهذه الإزاحة منتظمة و يكون الشغل المبذول عندها يعطى بالعلاقة:

$$\triangle \text{ش} = \text{ق}_{\text{ف}} \triangle \text{ف}$$

و إذا قسمنا منحى القوة إلى إجزاء صغيرة وحسبنا الشغل المبذول خلال كل جزء وأوجدنا مجموعهم ، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة:

$$\text{ش} = \sum_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}_{\text{ف}} \triangle \text{ف}$$

وعندما تكون الإزاحة△س أصغر ما يمكن (أى تؤول إلى الصفر) لكى نحصل على قيم أدق فى المعادلة السابقة فإن المعادلة السابقة تتحول إلى :

$$\text{ش} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}_{\text{ف}} \text{ ء ف}$$

وهذه هى الصورة العامة للشغل (لاحظ أن: $\text{ق}_{\text{ف}} = \text{ق جتا}\theta$ (تمثل مركبة القوة فى اتجاه الإزاحة)

$$\text{ش} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}_{\text{ف}} \text{ ء ف}$$

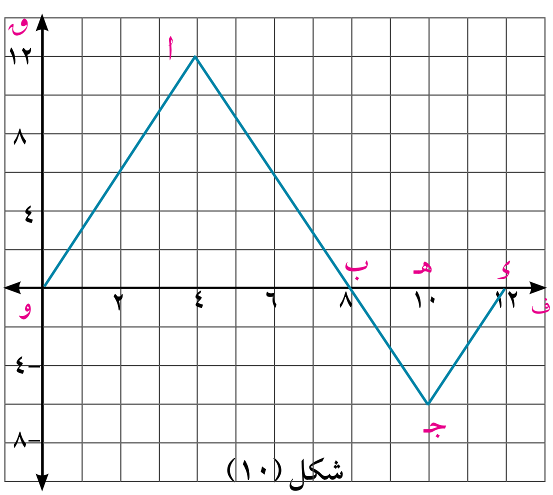
مثال

٧ شكل (١٠) يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل المبذول بالإرج بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية حيث مقدار القوة بالداين، ف بالسنتيمتر:

أولًا: عندما يتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ٨

ثانيًا: عندما يتحرك الجسم من ف = ٨ إلى ف = ١٢

ثالثًا: عندما يتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ١٢



شكل (١٠)

الحل

أولًا: ش$_١$ = $\int_{٠}^{٨}$ و ى ف = المساحة تحت المنحنى من ف = ٠ إلى ف = ٨

= مساحة سطح △ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢ = ٤٨ ارج

ثانيًا: ش$_٢$ = $\int_{٨}^{١٢}$ و ى ف = - المساحة تحت المنحى من ف = ٨ إلى ف = ١٢

= -مساحة سطح △ ب جـ ى = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ = - ١٢ ارج

ثالثًا: ش$_٣$ = $\int_{٠}^{١٢}$ و ى ف = المساحة تحت المنحنى = $\int_{٠}^{٨}$ و ى ف + $\int_{٨}^{١٢}$ و ى ف

= مساحة سطح△و أ ب - مساحة سطح△ب جـ ى

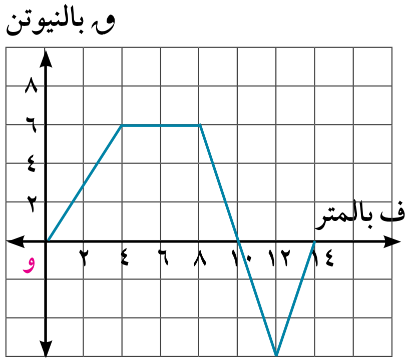
= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢ - $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ = ٣٦ ارج

؟ حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يوضح تأثير قوة متغيرة على جسم احسب الشغل الكلى المبذول بواسطة هذه القوة فى الحالات الآتية:

أولًا: من ف = ٠ إلى ف = ١٠

ثانيًا: من ف = ٨ إلى ف = ١٤



شكل (١١)

مثال

٨ أثرت قوة متغيرة و (مقيسة بالنيوتن) على جسم حيث و = ٣ف^٢ - ٤، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقيسة بالمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٢ متر إلى ف = ٥ متر؟

الحل

∵ و = ٣ف^٢ - ٤ ، ش = $\int_{١}^{ب}$ و ى ف

∴ ش = $\int_{٢}^{٥}$ (٣ف^٢ - ٤) ى ف = $[$ف^٣ - ٤ف$]_{٢}^{٥}$

∴ ش = [(١٢٥ - ٢٠) - (٨ - ٨)] = ١٠٥ جول

؟ حاول أن تحل

٧ أثرت قوة متغيرة و (مقاسة بالداين) على جسيم حيث و تعطى بالعلاقة:

و = ٤ف^٣ - ٢ف +١ ، ف القياس الجبرى للإزاحة ومقيسة بالسنتيمتر أوجد الشغل المبذول من هذه القوة فى الفترة من ف = ٠ إلى ف = ٤

تمـــارين ٤ – ١

أولًا: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

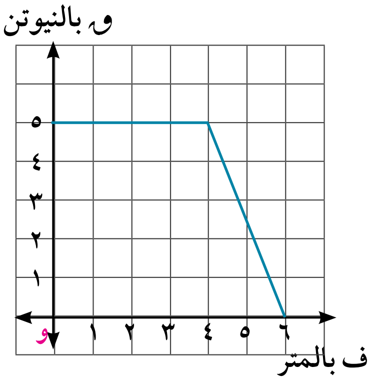
(١) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة أ (٣ ، ٢) تحت تأثير القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ - ٥ $\overleftarrow{ص}$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = ... وحدة شغل .

أ -٤ ب -١ ج صفر د ١

(٢) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم من النقطة أ (-٣، ٢) إلى النقطة ب (٥، -٣) تحت تأثير القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة = ... وحدة شغل

أ صفر ب -٤٠ ج ٤٠ د ٨٠

(٣) الشكل المقابل يوضح تأثير قوة (ق) على جسم يتحرك مسافة (ف) فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة ليتحرك الجسم من ف = ٠ إلى ف = ٦ متر يساوى .... جول



أ صفر ب ٤٠
ج ٨٠ د ٢٥

(٤) الشغل المبذول فى رفع كتلة مقدارها ٢٠٠ جرام موضوعة على سطح الأرض مسافة ١٠ أمتار عن سطح الأرض يساوى .... جول

أ صفر ب ٩,٨ ج ١٩,٦ د ٢٩,٤

(٥) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ٤٠٠ نيوتن فإن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال إزاحة $\overleftarrow{ف}$ حيث || $\overleftarrow{ف}$ ||= ٣٥٠ متر يساوى ...... جول

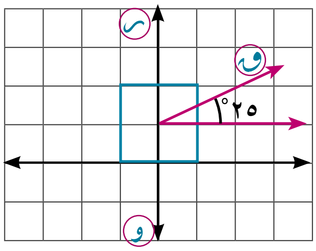
أ -١٤×١٠^{٤} ب -٧×١٠^{٤} ج ٧×١٠^{٤} د ١٤×١٠^{٤}

ثانيا: أكمل:

(٦) رجل يتسوق فى متجر (سوبر ماركت) يدفع عربة تسوق بقوة مقدارها ٣٥ نيوتن تميل هذه القوة على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° لتتحرك العربة مسافة ٥٠ متر فإن الشغل المبذول بواسطة الرجل = ... جول

(٧) الشغل المبذول فى تحريك كتلة مقدارها ٦٠٠ جرام مسافة ٤ أمتار بعجلة مقدارها ٢٠ سم / ث^{٢} يساوى .... إرج

٨ الشكل المقابل يوضح قوة مقدارها ١٦ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° تؤثر على جسم كتلته ٢,٥ كجم ليتحرك على نضد أفقى أملس مسافة ٢٢٠ سم فإن:



أ الشغل المبذول بواسطة القوة = ... جول

ب الشغل المبذول بواسطة رد فعل النضد = ...

جـ الشغل المبذول بواسطة وزن الجسم = ...

د الشغل الكلى بواسطة القوى المؤثرة على الجسم = ...جول

ثالثا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩ تحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (-١ ، ٢) إلى النقطة ب (٣ ، ٤) حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الأساسيان إحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة.

١٠ أثرت القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ = ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ - $\overrightarrow{\text{ص}}$ على جسم فانتقل من النقطة أ (٢ ، ٣) إلى النقطة ب (٤ ، ٤) أحسب الشغل المبذول من محصلة هذه القوى خلال الأزاحة $\overrightarrow{\text{أب}}$

١١ يتحرك جسم كتلته ١ كجم ومتجه إزاحته $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (٣ن^2) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (٣ن^2+ن) $\overrightarrow{\text{ص}}$ ما هى القوة المحركة احسب الشغل المبذول من القوة المحركة خلال ٥ ثوان من بدء الحركة علما بأن ف مقيسة بالمتر ، ق بالنيوتن ، ن بالثانية.

١٢ متجه موضع جسيم كتلته ٣ كجم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ن^2 + ٢) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (٤ن^2+٣) $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان فى المستوى أثبت أن الجسيم يتحرك تحت تأثير قوة ثابتة ثم إحسب الشغل المبذول من هذه القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

١٣ عربة ترام ساكنة شدت بحبل يصنع مع شريط الترام زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت قوة الشد ٥٠٠ث. كجم وتحركت العربة بعجلة ٥سم/ث^2 لمدة ٣٠ ثانية احسب الشغل الذى بذلته قوة الشد.

١٤ عامل بناء كتلته ٧٠ كجم يحمل على كتفه كمية من الطوب صاعدًا أعلى سلم إرتفاع قمته عن سطح الأرض ١٢ متر فإذا بذل شغلا قدره ١١٧٦٠ جول حتى بلوغه قمة السلم أوجد كتلة الطوب.

١٥ أثرت قوة على جسم ساكن كتلته ٥٠ كجم فاكسبته عجلة منتظمة ٠,٧م/ث^2 فحركته مسافة ف فى اتجاهها فإذا كان الشغل المبذول بواسطة هذه القوة يساوى ٣٥٠ث . كجم . متر أوجد المسافة التى تحركها الجسم.

١٦ قذف حجر كتلته ٤ كجم رأسيا لأعلى من على سطح الأرض فإذا كان الشغل المبذول ليصل إلى أقصى إرتفاع ١١٧٦ جول أوجد أقصى إرتفاع وصل إليه الحجر.

١٧ أحسب بالجول مقدار الشغل اللازم بذله لرفع ٥ متر مكعب من الماء لأرتفاع ١٠ أمتار.

(١٨) سيدة تدفع أمامها عربة بها طفل من حالة سكون علي طريق أفقى بقوة قدرها ٢ ث كجم وتميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٦٠° ضد مقاومات قدرها ٠,٩٥ ث كجم، فإذا كانت كتلة العربة والطفل ١٨ كجم فأوجد بثقل كجم.متر مقدار الشغل المبذول خلال دقيقة واحدة من :

(أ) وزن العربة والطفل

(ب) قوة السيدة

(جـ) مقاومة الطريق.

(١٩) قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ بسرعة ثابتة فإذا كان الشغل المبذول من آلات القطار يساوى ١٥ × ١٠^٥ ث. كجم متر حتى وصل إلى أعلى المنحدر والشغل المبذول ضد المقاومات ٥ × ١٠^٥ ث. كجم متر أوجد:

أولا: طول المنحدر

ثانيا: المقاومة لكل طن من كتلة القطار

(٢٠) سيارة كتلتها ٤ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ضد مقاومات تعادل ٥ث. كجم لكل طن من كتلة القطار فاكتسبت سرعة ٥٤ كم/س خلال $\frac{١}{٢}$ دقيقة فإذا بدأت السيارة حركتها من السكون احسب بالجول الشغل المبذول من:

أولا: قوة محرك السيارة　　　　**ثانيا:** قوة المقاومة

ثالثا: من وزن السيارة　　　　**رابعا:** ضد وزن السيارة

(٢١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة ق(نيوتن) حيث ق = ٠,٤ ف ، ف مقاسة بالمتر . أحسب الشغل المبذول من القوة ق عندما يتحرك الجسيم من :

(أ) ف = ٠ حتى ف = ١٠

(ب) ف = ١ حتى ف = ٥

(٢٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير القوة ق(نيوتن) حيث ق = جا ٢ ف حيث ف مقاسة بالمتر، أحسب الشغل المبذول من القوة ق عندما يتحرك الجسيم من :

(أ) ف = ٠ حتى ف = $\frac{\pi}{٢}$

(ب) ف = $\frac{-\pi}{٤}$ حتى ف = $\frac{\pi}{٤}$

(جـ) ف = $\frac{\pi}{٤}$ حتى ف = $\frac{٣\pi}{٤}$

الوحدة الرابعة
٤ - ٢

طاقة الحركة
Kinetic energy

سوف تتعلم
- طاقة الحركة
- وحدات قياس طاقة الحركة
- مبدأ الشغل والطاقة

المصطلحات الأساسية
- طاقة الحركة *Kinetic energy*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية

تمهيد

فى الدرس السابق علمنًا بأن القوة هى المسبب الأساسى للحركة، وفى هذا الدرس سوف ندرس المصدر الذى تستمد منه القوة فى تحريك الأجسام وهذا المصدر هو الطاقة وبالتالى يمكن تعريف الطاقة بأنها مقياس قدرة الجسم على بذل شغل.
وتظهر الطاقة فى حياتنا العملية فى عدة صور منها الطاقة الميكانيكية والطاقة الحرارية والطاقة الكهربائية والطاقة الضوئية .... ألخ
وسوف ندرس من هذه الصور الطاقة الميكانيكية المتمثلة فى حركة الأجسام وهى نوعان طاقة الحركة وطاقة الوضع.

طاقة الحركة *Kinetic energy*

طاقة حركة جسم هى الطاقة التى يكتسبها الجسم بفضل سرعته وتقدر عند لحظة ما بنصف حاصل ضرب كتلة هذا الجسم فى مربع سرعته عند هذه اللحظة و يرمز لها بالرمز ط.
فإذا كانت ك كتلة الجسيم، $\overline{ع}$ متجه سرعته، ع القياس الجبرى لهذا المتجه فإن:

$$ط = \frac{1}{2} ك \|\overline{ع}\|^2 = \frac{1}{2} ك ع^2 \qquad (1)$$

وبما أن $\|\overline{ع}\|^2 = \overline{ع} \odot \overline{ع}$ ، فإنه يمكن التعبير عن طاقة الحركة كالآتى:

$$ط = \frac{1}{2} ك (\overline{ع} \cdot \overline{ع}) \qquad (2)$$

يتضح من التعريف أن طاقة حركة الجسيم هى كمية قياسية غير سالبة، وتنعدم فقط عندما ينعدم متجه السرعة. كما يبين التعريف أن طاقة حركة الجسيم قد تتغير من لحظة زمنية لأخرى أثناء حركته تبعًا لمقدار سرعته.

وحدات قياس طاقة الحركة:

حيث أن الشغل هو صورة من صور الطاقة فإن :

وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الشغل

فمثلًا ، إذا قيست الكتلة بالكيلوجرام والسرعة بالمتر/ ثانية فإن:

وحدة قياس طاقة الحركة = كجم × $\frac{متر}{ث}$ × $\frac{متر}{ث}$ = كجم $\frac{متر}{ث^2}$ × متر = نيوتن. متر

وإذا قيست الكتلة بالجرام والسرعة بالسنتيمتر / ثانية فإن:

وحدة قياس طاقة الحركة = جم × $\frac{سم}{ث}$ × $\frac{سم}{ث}$ = جم × $\frac{سم}{ث^٢}$ × سم = داين × سم = إرج

مثال

(١) يتحرك جسم كتلته ١٠٠جم بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث، احسب طاقة حركة هذا الجسم **أولا**: بالأرج **ثانيا**: بالجول

الحل

نوجد معيار السرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$

|| $\overleftarrow{ع}$ || = $\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢}$ = ١٣سم/ث ∴ || $\overleftarrow{ع}$ ||^٢ = ١٦٩

أولا: **طاقة حركة الجسم** = $\frac{١}{٢}$ ك || $\overleftarrow{ع}$ ||^٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ × ١٦٩ = ٨٤٥٠ إرج

ثانيا: **طاقة الحركة** = $\frac{٨٤٥٠}{١٠^٧}$ = ٨,٤٥ × ١٠$^{-٤}$ جول

حاول أن تحل

(١) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٦٠ $\overleftarrow{س}$ - ٨٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث احسب طاقة حركة هذا الجسم

أولا: بالأرج **ثانيا**: بالجول.

مثال

(٢) قذف جسم كتلته ١ كجم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث، أوجد

(أ) طاقة حركة الجسم بعد ٦ ثانية من قذفه

(ب) طاقة حركة الجسم عندما يصبح على ارتفاع ١٠٢,٩ متر من نقطة القذف

الحل

(أ) ∵ ع = ع. + ء ن ∴ ع = ٤٩ - ٩,٨ × ٦ = -٩,٨م/ث

∴ الجسم يكون هابطًا بسرعة مقدارها ٩,٨ م/ث^٢ ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^٢ = $\frac{١}{٢}$×١×(٩,٨)^٢ = ٤٨,٠٢ جول

(ب) ∵ ع^٢ = ع.^{٢} + ٢ ء ف ∴ ع^٢ = (٤٩)^٢ - ٢ × ٩,٨ × ١٠٢,٩

∴ ع^٢ = ٣٨٤,١٦ ط = $\frac{١}{٢}$ك ع^٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ٣٨٤,١٦ = ١٩٢,٠٨ جول

حاول أن تحل

(٢) سقط جسم كتلته ٥٠٠جم رأسيًا إلى أسفل من أرتفاع ٧٨,٤ متر عن سطح الأرض، أوجد :

(أ) طاقة حركة الجسم بعد ٢ ثانية من سقوطه

(ب) طاقة حركة الجسم لحظة ملامسته لسطح الأرض.

مثال

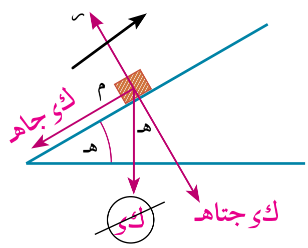
٣ قذف جسم كتلته ٢٠٠ جم بسرعة ٢٨٠سم/ث على خط أكبر ميل لمستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٤٠}$ ولأعلى المستوى ، أوجد طاقة حركة هذا الجسم بوحدة الإرج فى كل ممايأتى:

أ بعد نصف دقيقة من قذفه.

ب عندما يكون على بعد ٢٤,٥ متر من نقطة قذفه.

الحل

معادلة حركة الجسم المتحرك



ك جـ = - ك ء جا هـ

∴ جـ = $-٩٨٠ \times \frac{١}{١٤٠} = -٧$ سم/ث^{٢}

أ ع = $ع_{.}$ + جـ ن

ع = ٢٨٠ - ٧ × ٣٠ = ٧٠ سم/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢} \times ٢٠٠ \times (٧٠)^{٢} = ٤٩ \times ١٠^{٤}$ إرج

ب ع^{٢} = $ع_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف

ع^{٢} = $(٢٨٠)^{٢} - ٢ \times ٧ \times ٢٤٥٠ = ٤٤١٠٠$

ع = ± ٢١٠ سم/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢} \times ٢٠٠ \times (٢١٠)^{٢} = ٤٤١ \times ١٠^{٤}$ إرج

حاول أن تحل

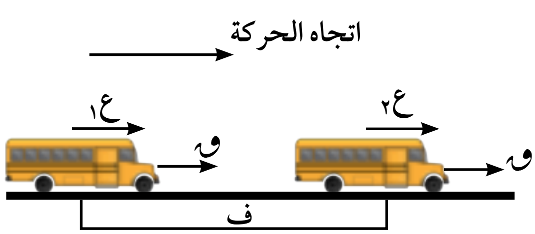
٣ سيارة كتلتها ١ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠}$ أبطل محركها ووقفت بعد أن قطعت مسافة ٢٠ مترا من لحظة إبطال المحرك فإذا كان قوة مقاومة المنحدر $\frac{١}{٥}$ وزن السيارة إحسب طاقة حركة السيارة بوحدة الجول.

مبدأ الشغل والطاقة: *Principle of work and energy*

إذا كانت ق ثابتة :

باعتبار أن جسمًا كتلته (ك) يتحرك مسافة (ف) تحت تأثير محصلة القوى (ق) بحيث تتغير سرعته من $(ع_{١})$ إلى $(ع_{٢})$ فيكون: الشغل المبذول بواسطة محصلة هذه:

ش = ق × ف



شكل (١)

∵ ع^{٢} = $ع_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف وباعتبار أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ هما السرعتان الأبتدائية والنهائية على الترتيب

∴ $ع_{٢}^{٢} - ع_{١}^{٢}$ = ٢ جـ ف بضرب طرفى العلاقة فى $\frac{١}{٢}$ ك

$\frac{١}{٢}$ ك $(ع_{٢}^{٢} - ع_{١}^{٢})$ = ك جـ ف

∴ $\frac{١}{٢}$ ك $(ع_٢^٢ - ع_١^٢)$ = ق . ف حيث ق قوة ثابتة المقدار

∴ التغير فى طاقة الحركة يساوى الشغل المبذول

إذا كانت ق قوة متغيرة ،

∵ ط = $\frac{١}{٢}$ ك $ع^٢$

∴ $\frac{ى}{ى ن}$ (ط) = ك ع $\frac{ى ع}{ى ن}$ $\frac{ى}{ى ن}$(ط) = ك جـ ع

$\frac{ى}{ى ن}$ (ط) = ق $\frac{ى ف}{ى ن}$

∴ $\int_{ط.}^{ط}$ ى (ط) = $\int_{ف.}^{ف}$ ق ى ف   أى أن ط - ط. = ش

∴ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

تعبر العلاقة الأخيرة عن مبدأ الشغل والطاقة والذى ينص على الآتى:

«التغير فى طاقة حركة الجسيم عند انتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه خلال الإزاحة بين هذين الموضعين».

ويلاحظ أنه عند استخدام العلاقات السابقة يجب أن تكون وحدات قياس طاقة الحركة هى نفسها وحدات قياس الشغل.

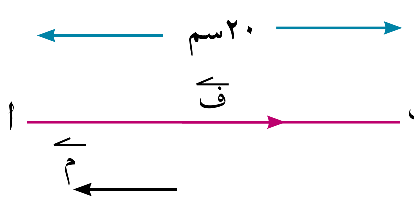
تفكير ناقد:

أثبت أنه إذا بدأ جسيم حركته من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع، فإن طاقة حركته النهائية تساوى طاقة حركته الابتدائية ، ثم استنتج من ذلك أنه فى حركة المقذوف الرأسى تحت تأثير الجاذبية الأرضية الثابتة تكون سرعة المقذوف أثناء مرحلة الصعود عند نقطة ما تساوى سرعته أثناء مرحلة الهبوط عند النقطة نفسها.

مثال

(٤) اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠جم بسرعة ٤٠٠متر/ث على حاجز سميك فاستقرت فيه على عمق ٢٠سم، أوجد مقدار قوة مقاومة مادة الحاجز لحركة الرصاصة باعتبار هذه القوة ثابتة.

الحل



شكل (٦)

ليكن أ موضع دخول الرصاصة إلى داخل الحاجز ، ب الموضع الذى أستقرت فيه، م قوة المقاومة مقدَّرة بوحدة الداين لدينا أ ب = ٢٠ سم، بما أن قوة المقاومة تعمل فى عكس اتجاه الازاحة.

فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة يكون سالبًا و يحسب كالآتى:

ش = -أ ب × م = -٢٠م

طاقة حركة الرصاصة عند الدخول إلى الحاجز :

ط = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ × $(٤٠٠ × ١٠٠)^٢$ = ١,٦ × $١٠^{١١}$ إرج

(لاحظ تحويل السرعة إلى وحدة سم/ ث).

طاقة حركة الرصاصة عند الموضع ب : $ط_ب$ = صفر لأن الرصاصة ساكنة فى هذا الموضع.

التغير فى طاقة حركة الرصاصة : $ط_ب - ط_م = -١,٦ \times ١٠^{١١}$ ارج

∵ $ط_ب - ط_م$ = ش

∴ $- ١,٦ \times ١٠^{١١} = -٢٠$م

∴ م = $\frac{-١,٦ \times ١٠^{١١}}{-٢٠} = ٨ \times ١٠^{٩}$ داين

حاول أن تحل

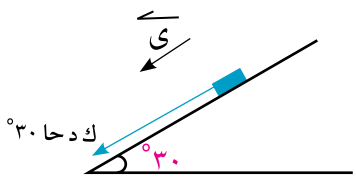
٤ أطلقت رصاصة على هدف سمكه ٩سم وخرجت من جانبه الأخر بنصف سرعتها التى دخلت بها. فما هو أقل سمك لازم لهدف من نفس المادة حتى لا تخرج منه نفس الرصاصة لو أطلقت عليه بسرعتها السابقة نفسها.

مثال

٥ ترك جسم كتلته ٢٠ كجم ليهبط على خط أكبر ميل لمستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° . أوجد سرعة الجسم بعد أن يكون قد قطع مسافة ٥ أمتار على المستوى باستخدام مبدأ الشغل والطاقة.

الحل

القوة الوحيدة التى تبذل شغلا هى مركبة قوة الوزن الموازية لخط أكبر ميل الذى تحدث عليه الحركة، وتكون هذه القوة موجهة لأسفل المستوى ومقدارها ك ى جا ٣٠ حيث ك كتلة الجسم، ى مقدار عجلة الجاذبية الأرضية شكل (٧).



شكل (٧)

الشغل الذى تبذله هذه القوة أثناء الازاحة المعطاة:

ش = (ك ى جا ٣٠°) × ف

$= (٢٠ \times ٩,٨ \times \frac{١}{٢}) \times ٥ = ٤٩٠$ جول

∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

∴ $\frac{١}{٢}$ ك $ع^٢$ - صفر = ش

∴ $\frac{١}{٢} \times ٢٠ \times ع^٢ = ٤٩٠$

∴ $ع^٢ = ٤٩$

∴ ع = ٧ متر / ث   **وهى سرعة الجسم بعد أن يكون قد قطع ٥ أمتار من موقعة الابتدائى.**

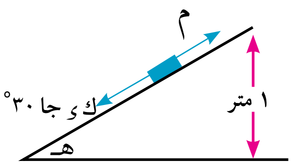
حاول أن تحل

٥ قذف جسم كتلته ٢ كجم بسرعة ٣ متر/ث إلى أسفل على خط أكبر ميل لمستوى أملس طوله ١٠ أمتار وأرتفاعه ٢ متر أوجد طاقة حركة هذا الجسم عند وصوله إلى قاعدة المستوى.

مثال

٦ وضع جسم كتلته ٣٠٠جم عند قمة مستوى مائل ارتفاعه ١متر. أحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة يساوى ١,٥٩جول.

الحل



شكل (٨)

ليكن ف طول المستوى مقيسًا بالمتر ، هـ قياس زاوية ميله على الأفقي، تؤثر على الجسم قوتان توازيان اتجاه الحركة؛ مركبة الوزن، وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك ى جا هـ وقوة مقاومة المستوى لحركة الجسم عليه وتعمل فى خط أكبر ميل لأعلى وليكن مقدارها م.

الشغل المبذول أثناء حركة الجسم من قمة المستوى حتى قاعدته:

ش = (ك ى جا هـ - م) × ف

= $(٠,٣ \times ٩,٨ \times \frac{١}{ف} - م) \times ف$ = ٠,٣ × ٩,٨ - م ف

ولكن م ف = ١,٥٩ جول هو الشغل المبذول ضد المقاومة.

∴ ش = ٠,٣ × ٩,٨ - ١,٥٩ = ١,٣٥ جول

∴ ط - ط. = ش

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٠,٣ ع^{٢} - صفر = ١,٣٥

∴ ع^{٢} = ٩ ∴ ع = ٣ متر/ ث

حاول أن تحل

(٦) وضع جسم كتلته ٢٠٠ جرام عند قمة مستوى مائل إرتفاعه ٣ أمتار. إحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى للحركة ٤,٤٨ جول.

مثال

(٧) جسم كتلته ١ كجم يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ١٢م/ث، أثرت عليه قوة مقاومة فى اتجاه مضاد لاتجاه حركته مقدارها ٦س^{٢} (نيوتن) حيث س المسافة التى يقطعها الجسم تحت تأثير المقاومة (بالمتر).

(أ) أوجد الشغل الذى تبذله المقاومة عندما س = ٤ (ب) أوجد سرعة الجسم وطاقة حركته عندما س = ٢

الحل

(أ) ش = $\int_{٠}^{٤}$ م ى س

= $\int_{٠}^{٤}$ - ٦س^{٢} ى س = [-٢س^{٣}]$_{٠}^{٤}$

= -١٢٨ جول

(ب) ∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

$\frac{١}{٢}$ ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) = $\int_{٠}^{٢}$ م ى س

$\frac{١}{٢}$ × ١ (ع^{٢} - ١٤٤) = $\int_{٠}^{٢}$ - ٦س^{٢} ى س

$\frac{١}{٢}$ (ع^{٢} - ١٤٤) = [-٢س^{٣}]$_{٠}^{٢}$

$\frac{١}{٢}$ (ع^{٢} - ١٤٤) = -١٦

ع^{٢} = ١١٢

ع = ٤$\sqrt{٧}$ م/ث

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١١٢ = ٥٦ جول

تمارين ٤ – ٢

أولًا: أكمل :

١) طاقة حركة قذيفة كتلتها $\frac{١}{٣}$ كجم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر/ث يساوى .... جول.

٢) طاقة حركة جسم كتلته ٤٠ جرام يتحرك بسرعة ٢٠متر/ث يساوى .... جول

٣) سيارة كتلتها ١,٥ طن وطاقة حركتها ١٦٨٧٥٠ جول فإن سرعة السيارة .... م/ث

٤) جسم كتلته ٢٠٠ جرام يتحرك بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٣٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقيس بوحدة سم/ث فإن طاقة حركة هذا الجسم = ... إرج

٥) جسم يتحرك بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٥٠ $\overleftarrow{س}$ + ١٠٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{ع}$ مقيس بوحدة سم/ث ، $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى إتجاهى $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ وكانت طاقة حركة هذا الجسم تساوى ٣,٩ جول فإن كتلة الجسم = ... جرام.

٦) إذا ترك جسم كتلته ٣٠ جرام ليسقط من إرتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض فإن طاقة حركة هذا الجسم = ... جول عندما يكون وشك الإرتطام بالأرض.

ثانيًا:

٧) إصطدمت رصاصة كتلتها $\frac{٣}{٢}$ جرام وسرعتها ٤٠٠ م/ث بقالب خشبى فسكنت بعد أن قطعت داخل القالب مسافة ٥سم إحسب الزمن الذى تستغرقه الرصاصة داخل القالب (مستخدما مبدأ الشغل والطاقة).

٨) أطلقت رصاصة كتلتها ٢٥جم بسرعة أفقية على قطعة خشبية كتلتها ١,٣٥ كجم موضوعة على نضد أفقى خشن فاستقرت فيها وكونتا جسما واحدًا تحرك مسافة ١٠سم نتيجة للتصادم. احسب سرعة انطلاق الرصاصة مستخدمًا مبدأ الشغل والطاقة إذا كان معامل الاحتكاك الحركى بين قطعة الخشب والنضد يساوى $\frac{١}{٤}$.

٩) قوة مقدارها ١٢ نيوتن ثابتة الأتجاه تقوم ببذل شغل على جسم تحرك فإذا كانت إزاحته تعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ - ٤ $\overleftarrow{ص}$ حيث ف بالمتر إحسب قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ف}$ إذا كان التغير فى طاقة الحركة للجسم.

أولا: يساوى ٣٠ جول

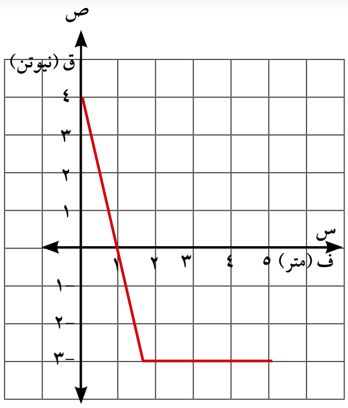
ثانيا: يساوى -٣٠ جول

١٠) **الشكل المقابل** يوضح تأثير مركبة قوة فى الأتجاه الموجب إتجاه لمحور السينات على جسم كتلته ٢ كجم فإذا كانت سرعة الجسم عند س = ٠ يساوى ٤ م/ث

أولا: أوجد التغير فى طاقة حركة بين س = ٠ ، س = ٥ متر.

ثانيا: احسب مقدار طاقة حركة الجسم عند س = ٣

ثالثا: عند أى قيمة لـ س يكون مقدار طاقة الحركة ٨ جول



(١١) ترك جسم كتلته ٢٠٠ جرام ليتحرك من سكون من قمة مستوى أملس طوله ٢٥ متر و يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ أوجد طاقة حركة هذا الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى.

(١٢) قذف جسيم كتلته ٥ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ، ولأعلى بسرعة ٤ متر/ث. إحسب التغير الذى يطرأ على طاقة حركة هذا الجسيم بعد إنقضاء ثانية واحدة على لحظة قذفه ثم عندما يعود إلى موضع القذف.

(١٣) مستوى مائل خشن طوله ٢٠ متر و إرتفاعه ٥ أمتار أوجد أصغر سرعة يقذف بها جسم من أسفل نقطة فى المستوى المائل وفى اتجاه خط أكبر للمستوى لكى يصل بالكاد إلى أعلى نقطة فى المستوى علما بأن الجسم يلاقى مقاومات تساوى $\frac{١}{٤}$ وزنه.

(١٤) أطلقت قذيفة مدفع بسرعة $\overleftarrow{ع} = ١٠٥ \overleftarrow{س} + ٣٦٠ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة م/ث، فإذا كانت طاقة الحركة للقذيفة تساوى $١,١٢٥ \times ١٠^{٦}$ جول فأوجد كتلة القذيفة بالكيلو جرام.

(١٥) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير القوى $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣} = ٣ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$ مقدرة كل منها بالنيوتن حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين فإذا كان متجه الأزاحة كدالة فى الزمن يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف} = أ ن^{٢} \overleftarrow{س} - ب (ن^{٢} - ن) \overleftarrow{ص}$ ومعيار الأزاحة بالمتر أوجد:

اولًا: قيمة كل من الثابتين أ ، ب

ثانيًا: الشغل المبذول من هذه القوة بعد ٢ ثانية من بدء الحركة

ثالثًا: طاقة الحركة فى نهاية زمن قدره ٢ ثانية

(١٦) أطلقت رصاصة أفقيًا بسرعة ٥٤٠ كم/س على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٢٠ سم، فإذا أطلقت نفس الرصاصة بنفس السرعة على هدف ثابت من نفس نوع الخشب سمكه ١٥سم، فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الهدف بفرض ثبوت المقاومة.

(١٧) هدف رأسى مكون من طبقتين من معدنين مختلفين، سمك الأول ٧سم وسمك الثانى ١٤سم فإذا أطلقت رصاصتان متساويتان فى الكتلة فى إتجاهين متضادين وعموديين على الهدف وبسرعة واحدة فأخترقت الرصاصة الأولى الطبقة الأولى وسكنت فى الثانية بعد أن غاصت فيها مسافة ٥سم وأخترقت الرصاصة الثانية الطبقة الثانية وأستقرت فى الطبقة الأولى بعد أن غاصت مسافة ١ سم أوجد النسبة بين مقاومة المعدنين.

١٨ كرتان ملساويتان كتلتاهما ١٠٠جرام، ٢٠٠جرام تتحركان فى خط مستقيم فى إتجاهين متضادتان تصادمت الكرتان عندما كانت سرعتاهما ٨م/ث ، ١٢م/ث على الترتيب فإذا إرتدت الكرة الأولى بعد التصادم مباشرة بسرعة ٢م/ث إحسب طاقة الحركة المفقودة نتيجة التصادم بالجول.

١٩ سقطت كرة كتلتها ١٠٠ جرام من إرتفاع ٣,٦ متر على أرض أفقية فاصطدمت بها وأرتدت رأسيا إلى أعلى فإذا بلغ النقص فى طاقة حركة الكرة نتيجة إصطدامها بالأرض ١,٩٦ جول. احسب المسافة التى إرتدتها الكرة عقب تصادمها بالأرض .

٢٠ سقط جسم مطاطى من السكون من قمة برج فبلغت كمية حركته قبل التصادم مباشرة ١٠٩٢جم . متر/ث ، طاقة حركته ١٠١٤ث جم. متر احسب كتلة هذا الجسم وارتفاع البرج و إذا إرتد الجسم بعد إصطدامه بالأرض مسافة ٤,٩ متر فأوجد مقدار دفع الأرض للجسم.

٢١ سقطة جسم (أ) كتلته ١,٨ كجم من السكون من أرتفاع ما عن سطح الأرض ، وفى نفس اللحظة قذف جسم (ب) كتلته ١,١٤ كجم رأسيًا من سطح الأرض لأعلى بسرعة ٤٩م/ث ليصطدم بالجسم (أ) ويكونا معًا جسمًا واحدًا، إذا علم أن سرعة الجسم (أ) قبل التصادم مباشرة ٢٨م/ث فاحسب:

اولًا: السرعة المشتركة للجسمين بعد التصادم مباشرة.

ثانيًا: طاقة الحركة المفقودة بالتصادم . ثالثًا: الدفع الواقع على الجسم (أ)

٢٢ سقطت مطرقة كتلتها ٨٠٠كجم من أرتفاع ٦,٤متر رأسيًا على عمود من أعمدة الأساس كتلته ٣٢٠ كجم فتدكه رأسيًا فى الأرض لمسافة ١٠سم. أوجد :

اولًا: السرعة المشتركة للمطرقة والجسم بعد التصادم مباشرة.

ثانيًا: طاقة الحركة المفقودة نتيجة للتصادم .

ثالثًا: مقاومة الأرض للجسم مقدرة بثقل الكيلو جرام.

الوحدة الرابعة ٤ - ٣

طاقة الوضع

Potential energy

سوف تتعلم
- طاقة الوضع.
- العلاقة بين الشغل والتغير في طاقة الوضع.
- مبدأ الشغل والطاقة – ثبات الطاقة.
- طاقة وضع جسم تؤثر عليه قوة متغيرة.

المصطلحات الأساسية
- طاقة الوضع *potential energy*
- التغير في طاقة الوضع *change in potential energy*
- مبدأ الشغل والطاقة *the work – energy principle*
- ثبات الطاقة

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تمهيد:

لقد درست فيما سبق طاقة الجسم المرتبطة بحركته، والتي تسمى بطاقة الحركة، وفي هذا الدرس سوف ندرس طاقة وضع الجسم التي ترتبط بمكان وجوده، ويمكن تعريف عدة أنواع من طاقة الوضع بحيث يرتبط كل نوع بقوة ما، وتعد طاقة وضع جذب الأرض للأجسام من أكثر طاقات الوضع شيوعًا.

تعلم

طاقة الوضع *potential energy*

عندما يتحرك جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة توازى هذا الخط فإن طاقة وضع الجسيم $\text{ط}_\text{و}$ عند لحظة ما هى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة لجسيم لو أنها حركته من موضعه إلى موضع أخر ثابت على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ كما فى الشكل المجاور.

إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ توازى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وكانت (و) هى الموضع الثابت ، أ ، ب وضعين مختلفين للجسم على هذا الخط فإن :

طاقة الوضع عند $\text{صـ}_\text{أ} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أ و}}$ ، طاقة الوضع عند $\text{صـ}_\text{ب} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ب و}}$ ،

وباستخدام الرمز صـ للتعبير عن طاقة الوضع نجد أن :

- طاقة الوضع عند (و) = ٠ لأن طاقة الوضع عند و $= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\cdot} =$ صفر
- باعتبار أن أ ، ب هما الموضعان الابتدائى والنهائى للجسم المتحرك ، $\text{صـ}_\text{أ}$، $\text{صـ}_\text{ب}$ هما طاقتى الوضع عند أ ، ب علي الترتيب فإن :

$$\text{صـ}_\text{ب} - \text{صـ}_\text{أ} = (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ب و}}) - (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أ و}})$$

$$= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب و}} - \overrightarrow{\text{أ و}}) = (\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ب أ}})$$

$$= - \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أ ب}} \qquad (١)$$

ولكن : $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أ ب}} = \text{ش}$ (٢) من (١) (٢)

$$\text{صـ}_\text{ب} - \text{صـ}_\text{أ} = -\text{ش}$$

مطابع الهدايه

أي أن: التغير في طاقة وضع الجسم عند إنتقاله من موضع ابتدائي إلى موضع نهائي يساوى سالب الشغل المبذول بواسطة القوة خلال الحركة.

بقاء الطاقة

إذا أنتقل جسم من موضع أ إلى موضع آخر ب دون أن يلاقى أى مقاومة فإن مجموع طاقتى الحركة والوضع عند أ يساوى مجموع طاقتى الحركة والوضع عند ب .

من مبدأ الشغل والطاقة نجد أن $\quad ط_ب - ط_م = ش$

ومن العلاقة السابقة التى تربط الشغل بطاقة الوضع نجد أن:

$ص_ب - ص_م \quad = - ش$

$\therefore \quad ط_ب - ط_م \quad = - [ص_ب - ص_م]$

$\therefore \quad ط_ب + ص_ب \quad = ط_م + ص_م$

مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتًا أثناء الحركة

وحدات قياس طاقة الوضع: من تعريف طاقة الوضع نجد أن وحدات قياسها هى نفسها وحدات قياس الشغل وطاقة الحركة

مثال

(١) أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٦\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى بالعلاقة : $\overrightarrow{ر} = (٣ن^٢ + ٢)\,\overrightarrow{س} + (٢ن^٢ + ١)\,\overrightarrow{ص}$ احسب التغير فى طاقة الوضع للجسم حيث معيار $ق$ مقيس بالنيوتن، معيار $ر$ بالمتر ، ن بالثانية.

الحل

$\because \quad \overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_.} \quad = (٣ن^٢ + ٢)\overrightarrow{س} + (٢ن^٢ + ١)\,\overrightarrow{ص} - (٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص})$

$= ٣ن^٢\,\overrightarrow{س} + ٢ن^٢\,\overrightarrow{ص} = \overrightarrow{أب}$

$\therefore$ التغير في طاقة الوضع $= \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ب أ} = -(\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{أب})$

$= -(٦، ٢) \cdot (٣ن^٢ ، ٢ن^٢)$

$= -(١٨ن^٢ + ٤ن^٢) = -٢٢ن^٢$

$= -٢٢ \times ٤ = -٨٨$ جول

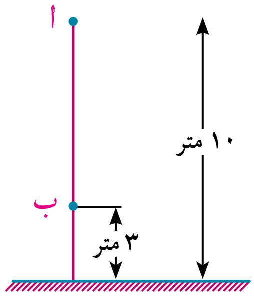
٩ حاول أن تحل

(١) أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\,\overrightarrow{ص}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية ، وكان متجه الموضع للجسيم يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $ر = (٢ن^٢ + ٣)\overrightarrow{س} + (٤ن + ١)\overrightarrow{ص}$. احسب التغير فى طاقة الوضع للجسيم حيث معيار $ق$ مقيس بالنيوتن ، معيار $ر$ بالمتر ، ن بالثانية.

مثال

(٢) جسم كتلته ٣٠٠ جم موضوع على ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، و إذا سقط الجسم رأسيًا فأوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه. ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون علي ارتفاع ٣ متر عن سطح الأرض.

الحل



طاقة وضع الجسم عند أ:

طاقة وضع الجسم عند أ = ك ى × ل

= ٠,٣ × ٩,٨ × ١٠ = ٢٩,٤ جول

∵ الجسم ساكن عند أ ∴ طاقة حركته = صفر

∴ $ط_{أ}$ + $ص_{أ}$ = ٢٩,٤ جول

∵ مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتًا أثناء الحركة

∴ مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عن أى لحظة أثناء سقوطه = ٢٩,٤ جول

طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:

∴ طاقة وضع الجسم = ك ى × ل

= ٠,٣ × ٩,٨ × ٣ = ٨,٨٢ جول

∵ $ط_{ب}$ + $ص_{ب}$ = $ط_{أ}$ + $ص_{أ}$

∴ $ط_{ب}$ + ٨,٨٢ = ٢٩,٤ ∴ $ط_{ب}$ = ٢٩,٤ - ٨,٨٢ = ٢٠,٥٨ جول

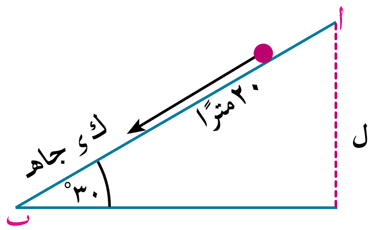
حاول أن تحل

(٢) سقط جسيم كتلته ١٠٠ جم من ارتفاع ٤ متر عن سطح الأرض . أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع للجسم عند أى لحظة أثناء سقوطه، ثم أوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع مترً واحدً من سطح الأرض.

مثال

(٣) جسم كتلته ٣ كجم موضوع عند أ أعلى نقطة من مستوى مائل أملس طوله ٢٠ متر و يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°. احسب طاقة وضع الجسم ، و إذا هبط الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى . أحسب سرعة الجسم لحظة وصوله إلى أسفل نقطة فى المستوى .

الحل



طاقة الحركة الجسم عند ب:

$ص_{أ}$ = ك ى × ل

= ٣ × ٩,٨ (٢٠ جا ٣٠°)

= ٢٩٤ جول

$ط_{أ}$ + $ص_{أ}$ = ٠ + ٢٩٤ = ٢٩٤ جول (لأن الجسم ساكن عند أ)

طاقة الحركة وطاقة الوضع عند ب:

$ط_ب + ص_ب$ = ٢٩٤ جول

$\frac{1}{2}$ ك $ع^2$ + ٠ = ٢٩٤ ∴ $\frac{1}{2}$ × ٣ × $ع^2$ = ٢٩٤

∴ $ع^2 = \frac{٢٩٤ \times ٢}{٣}$ = ١٩٦ ∴ ع = ١٤ متر/ث

٩ حاول أن تحل

(٣) أ، ب نقطتان علي خط أكبر ميل فى مستوى مائل خشن بحيث ب أسفل أ ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من نقطة أ ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى مترًا واحدًا وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤م/ث. أوجد بالجول :

أولاً: طاقة الوضع المفقودة **ثانيًا:** الشغل المبذول من المقاومات

مثال

(٤) بندول بسيط يتكون من قضيب خفيف طوله ٨٠سم و يحمل فى طرفه جسمًا كتلته ٤ جم يتدلى رأسيًا و يتذبذب فى زاوية قياسها ١٢٠° . أوجد :

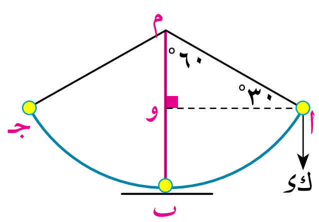
أولاً: زيادة طاقة الوضع في نهاية المسار عنها في منتصف المسار

ثانيًا: سرعة الجسم عند منتصف المسار.

الحل

من هندسة الشكل:

الكتلة تتحرك فى قوس دائرى مركزه النقطة م ونصف قطره = ٨٠ سم.



∵ ق(∠أ م جـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ م ى) = ٦٠°

∵ المثلث أ و م ثلاثيني ستيني

∴ م و = ٤٠ سم ، ب و = ٤٠ سم

زيادة طاقة الوضع عند أ عنها عن ب:

$ص_أ - ص_ب$ = ك ى $ل_١$ - ك ى $ل_٢$ = ك ى ($ل_١ - ل_٢$) = ك ى × ب و

= ٤ × ٩٨٠ × ٤٠ = ١٥٦٨٠٠ إرج

لإيجاد سرعة الجسم عند منتصف المسار:

من مبدأ ثبات الطاقة $ط_ب + ص_ب = ط_أ + ص_أ$

∴ $\frac{1}{2}$ × ٤ × $ع^2$ + ٠ = ٠ + ١٥٦٨٠٠

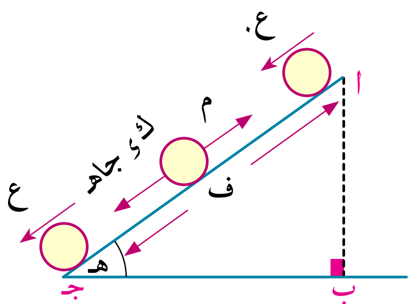
∴ $ع^2$ = ٧٨٤٠٠ ∴ ع = ٢٨٠ سم/ث

motion on rouph inclined plane

الحركة على مستوى مائل خشن

إذا هبط جسم على مستوى مائل خشن تحت تأثير وزنه فقط من الموضع أ إلى الموضع جـ

فإن التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.



الإثبات:

نفرض أن المسافة التي تحركها الجسم على المستوى (ف)

فتكون المسافة الرأسية أ ب التي هبطها الجسم أب = ف جا هـ

التغير في طاقة الحركة من أ إلى ب =

الشغل المبذول بواسطة (ك ى جا هـ – م)

$\frac{1}{2}$ ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) = (ك ى جا هـ - م) × ف $\qquad$ $\frac{1}{2}$ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) = ك ى جا هـ × ف - م × ف

$\frac{1}{2}$ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) = ك ى × أ ب - م × ف $\qquad$ ك ى × أ ب = $\frac{1}{2}$ ك (ع^{٢} - ع.^{٢}) + م × ف

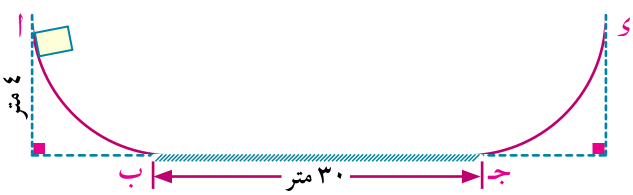
التغير في طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل المبذول ضد المقاومات.

لاحظ أن: يمكن تعميم القاعدة السابقة سواء كانت الحركة رأسية أو على مستوى مائل كالآتي:

إذا سقط أو قذف جسم رأسيًّا في وسط به مقاومة أو هبط على مستوى مائل خشن فإن:

التغير فى طاقة الوضع = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات.

مثال — الحركة على مستوى خشن



٥ في الشكل المقابل مكعب من الخشب عند أ كتلته ٢ كيلو جرام، ينزلق على سطح (كما هو مبين بالشكل) حيث $\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{جـ ى}$ سطحان أملسان. السطح الأفقي ب جـ خشن، طوله ٣٠ متر، معامل الاحتكاك الحركى بين المكعب والسطح الأفقى $\frac{1}{٥}$ فإذا بدأ مكعب الخشب الحركة من سكون وهو على ارتفاع ٤ متر، على أي مسافة على $\overline{ب جـ}$ يسكن مكعب الخشب؟

الحل

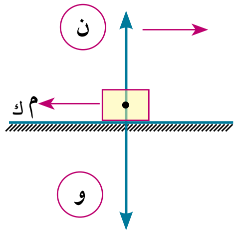
المكعب ينزلق على القوس $\overset{\frown}{أب}$

وتبعًا لمبدأ ثبات الطاقة $\qquad$ ط$_{١}$ + ص$_{١}$ = ط$_{ب}$ + ص$_{ب}$

صفر + ٢ × ٩,٨ × ٤ = ط$_{ب}$ + صفر

∴ ط$_{ب}$ = ٧٨,٤ جول.

وحيث إن المكعب يتحرك على المستوى $\overline{بجـ}$ خشن.



التغير في طاقة وضع الجسم = التغير في طاقة الحركة + الشغل ضد المقاومات

صفر = (٠ - ٧٨,٤) + م ك ر × ف

$\frac{١}{٥}$ × ٩,٨ × ٢ × ف = ٧٨,٤ ∴ ف = ٢٠ متر

حاول أن تحل

٤) تهبط عربة من السكون أسفل منحدر، طوله ١٨٠ متر، ارتفاعه ١٠ متر، فإذا علم أن $\frac{٣}{٤}$ طاقة الوضع فقدت نظير التغلب على المقاومات ضد الحركة، وأن هذه المقاومات ظلت ثابتة طوال حركة العربة، فأوجد سرعة العربة بعد قطعها مسافة ١٨٠ متر السابقة.

تمـــارين ٤ – ٣

أولًا: أكمل:

١) سقط جسم كتلته ٠,٢ كجم من أرتفاع ٥ أمتار عن سطح الأرض.

أ) طاقة وضع الجسم لحظة سقوطه = ...

ب) طاقة حركة الجسم لحظة سقوطه = ...

جـ) مجموع طاقتي الحركة والوضع لحظة وصوله لسطح الأرض = ...

٢) جسم كتلته ٣٥٠ كجم على ارتفاع ٢٠ متر من سطح الأرض، فإن طاقة وضع الجسم = ... جول.

٣) طائرة عمودية وزنها ٣٥٠٠ ث كجم تهبط رأسيًا لأسفل من ارتفاع ٢٥٠ متر إلى ارتفاع ١٥٠ متر من سطح الأرض فإن مقدار الفقد في طاقة وضعها = ... جول.

٤) جسم وزنه ٢ ث كجم صعد مسافة ٢٠٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°، فإن الزيادة في طاقة وضعه = ... جول

٥) وضع جسم عن قمة مستو مائل أملس أرتفاعه ٩٠سم فإن سرعته عندما يصل إلى قاعدة المستوى = ... متر/ث

٦) يتحرك جسم من الموضع أ (٢، ٣) إلى الموضع ب (٧، ٦) تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ فإن التغير في طاقة وضع الجسم = ... ارج؛ حيث ف بالسنتيمتر، $\overrightarrow{ق}$ مقاسة بالداين.

٧) أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب في زمن ٢ ثانية، وكان متجه الموضع للجسم يعطى كدالة في الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{ر}$ =(٢ ن^{٢}+٣) $\overrightarrow{س}$ + (٤ ن+١) $\overrightarrow{ص}$ فإن التغير في طاقة الوضع للجسم = ... جول؛ حيث ق بالنيوتن، || $\overrightarrow{ر}$ || بالمتر، ن بالثانية

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨ جسم كتلته ٣٠٠ جرام موضوع على ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض، أوجد طاقة وضع الجسم، و إذا سقط الجسم رأسيًّا، فأوجد طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع ٣ متر من سطح الأرض.

٩ قذف جسم كتلته ١٤٠ جرام رأسيًّا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٥ مترًا عن سطح الأرض، احسب التغير في طاقة حركة الجسم من لحظة قذفه حتى وصوله إلى سطح الأرض مقدرًا بالجول.

١٠ قذف جسم كتلته ٢ كجم من سطح الأرض رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٧٠ مترً/ثانية أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع بعد ٥ ثوان ، و إذا كانت طاقة حركته بعد زمن ما هو ١٢٥,٤٤ جول فأوجد هذا الزمن وأوجد طاقة وضعه عندئذ.

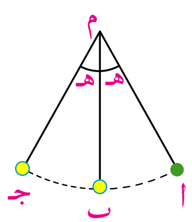
١١ جسم كتلته ١٠٠ جم سقط من ارتفاع ٥ أمتار على أرض رخوة فغاص فيها ٢٠ سم أوجد :
أولًا: مقدار ما فقد من طاقة الوضع بالجول قبل لحظة اصطدامه بالأرض مباشرة.
ثانيًا: متوسط مقاومة الأرض بثقل الكيلو جرام.

١٢ تحرك رجل كتلته ٧٢ كيلو جراما صاعدًا طريقًا يميل علي الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٦}$ فقطع ١٢٠ مترًا . أحسب التغير فى طاقة وضع الرجل

١٣ احسب السرعة التى يصل بها جسم كتلته ٣٠٠جم موضوع عند قمة مستوٍ مائل أرتفاعه ٢ متر إلى قاعدة المستوى إذا كان مقدار الشغل المبذول ضد المقاومة يساوى ٢,١٣ جول.

١٤ أ ، ب نقطتان على خط أكبر ميل لمستوى مائل خشن بحيث ب أسفل أ ، بدأ جسم كتلته ٥٠٠ جم الحركة من السكون من نقطةأ ، فإذا كانت المسافة الرأسية تساوى مترًا واحدًا وسرعة الجسم عندما يصل إلى ب تساوى ٤م/ث. أوجد بالجول :
اولًا: طاقة الوضع المفقودة.
ثانيًا: الشغل المبذول من المقاومات .

١٥ فى الشكل المجاور : بندول بسيط طول خيطه ١٣٠سم، يبدأ البندول الحركة من السكون من النقطة أ و يتحرك حرًا ليتذبذب فى زاوية قياسها ٢هـ حيث طا هـ =$\frac{٥}{١٢}$.
أوجد سرعة الكرة عند منتصف المسار.



١٦ حلقة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم، تنزلق على عمود أسطواني رأسي خشن، فإذا كانت سرعتها ٦,٣ متر/ث بعد أن قطعت مسافة ٤,٨ متر من بدء حركتها باستخدام مبدأ الشغل والطاقة، احسب الشغل المبذول من المقاومة أثناء الحركة.

القدرة

Power

سوف تتعلم

- القدرة.

المصطلحات الأساسية

- القدرة Power
- الحصان Horse power

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.

فكر و ناقش

إذا بذلت آلة شغلًا قدره ٢٠٠ ثقل كجم.متر فى ٤ دقائق وبذلت آلة أخرى شغلًا قدره ١٠٠ ثقل كجم.متر فى دقيقة واحدة.

فأى من الآلتين أقدر (آكفأ) من الأخرى؟

قد يبدو لك أن الآلة الأولى هى الأقدر من الآلة الثانية لأنها بذلت شغلًا أكثر. ولكن ما بذلته الآلة الأولى فى الدقيقة الواحدة = $\frac{٢٠٠}{٤}$ = ٥٠ ثقل كجم.متروما بذلته الآلة الثانية فى الدقيقة الواحدة = ١٠٠ ثقل كجم.متر من ذلك نستنتج أنه لقياس قدرة آلة لابد من معرفة ما تبذله هذه الآلة من شغل فى وحدة الزمن

تعريف القدرة : هى المعدل الزمنى لبذل شغل

ويصاغ هذا التعريف أيضًا كالآتى:

«القدرة هى الشغل المبذول فى وحدة الزمن»

$$\text{القدرة} = \frac{ء}{ءن}\,(\text{ش})$$

$$\because \text{ش} = \int \vec{\text{ق}} \cdot ء\,\vec{\text{ف}}$$

$$\therefore \frac{ء}{ءن}\,(\text{ش}) = \frac{ء}{ءن} \int \vec{\text{ق}} \cdot ء\,\vec{\text{ف}}$$

$$= \frac{ء}{ءن} \int \left(\vec{\text{ق}} \cdot \frac{ء\,\vec{\text{ف}}}{ءن}\right) ءن$$

$$= \frac{ء}{ءن}\,(\text{ش}) = \frac{ء}{ءن} \int \left(\vec{\text{ق}} \cdot \vec{\text{ع}}\right) ءن$$

$$\therefore \frac{ء}{ءن}\,(\text{ش}) = \vec{\text{ق}} \cdot \vec{\text{ع}}$$

$$= \vec{\text{ق}} \cdot \vec{\text{ع}} = \text{ق ع جتا هـ}$$

وإذا كانت $\vec{\text{ع}}$ لها نفس اتجاه القوة $\vec{\text{ق}}$ فإن القدرة = ق ع

من ذلك نجد أن القدرة كمية قياسية تتعين عند كل لحظة زمنية بمعلومية ق، ع وتحدد قيمتها بالمعدل الزمنى لبذل الشغل عند هذه اللحظة .

لاحظ أن القدرة تتعين لحظيًا (عند لحظة معينة) خلافًا للشغل الذى يحسب دائمًا بين لحظتين زمنيتين.

القدرة المتوسطة:

إذا بذلت القوة شغلًا قدرة شـ خلال فترة زمنية $\triangle$ن = ن$_٢$ - ن$_١$ فإن:

$$\text{القدرة المتوسطة} = \frac{\text{شـ}}{\triangle \text{ن}} = \frac{\text{شـ}}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١}$$

استخدام التكامل فى إيجاد الشغل

$\because$ القدرة $= \frac{ء}{ء\text{ن}}(\text{شـ})$ ، $\therefore$ شـ $= \int_{\text{ن}_١}^{\text{ن}_٢} (\text{القدرة})\, ء\text{ن}$

القدرة المتغيرة وأقصى قدرة

عند ثبوت مقدار القوة ق فإن مقدار القدرة يتغير طرديًا مع مقدار سرعة الجسم ع ويكون ق ثابت التغير حيث

القدرة = ق ع ، القدرة $\propto$ ع عند ثبوت ق

وكلما تغير مقدار السرعة تغير مقدار القدرة ونحصل على أقصى قدرة عند ما تصبح السرعة أقصى مايمكن ويطلق على القدرة فى هذه الحالة قدرة الآلة (بوجه عام)

وحدات قياس القدرة:

بما أن القدرة تساوى المعدل الزمنى لبذل الشغل.

$\therefore$ وحدة قياس القدرة $= \frac{\text{وحدة قياس الشغل}}{\text{وحدة قياس الزمن}} =$ وحدة قياس القوة $\times$ وحدة قياس السرعة

ومن وحدات قياس القدرة : الوات (نيوتن. م/ ث)، ث كجم .م/ ث – ارج / ث، الحصان

- **النيوتن – متر/ ثانية (نيوتن . متر/ ث):** يعرف النيوتن - متر/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره نيوتن - متر واحد فى كل ثانية.
  ويطلق أيضا على وحدة النيوتن - متر / ثانية (جول/ثانية) إسم «الوات»
- **ثقل كيلوجرام . متر/ ثانية (ث. كجم. متر/ ث):** يعرف ثقل كيلوجرام. متر/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره كيلو جرام - متر واحد فى كل ثانية.
- **الإرج/ ثانية (إرج/ ث):** يعرف الإرج/ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمني ثابت مقداره إرجا واحدا فى كل ثانية.
- **الحصان:** يعرف الحصان على أنه قدرة الآلة التى تبذل شغلًا قدره ٧٥ ث كجم. م كل ثانية.

فيمايلى قواعد التحويل بين مختلف وحدات القدرة.

- ١ ث كجم. متر/ث = ٩٫٨ نيوتن. متر/ث
- ١ نيوتن. متر/ث = ١ وات = $١٠^{٧}$ إرج/ث

كما أن هناك وحدات أخرى للقدرة مثل الكيلو وات والحصان.

- ١ كيلو وات = ١٠٠٠ وات = ١٠٠٠ نيوتن. متر/ث = $١٠^{١٠}$ إرج/ث
- ١ حصان = ٧٥ ث كجم. متر/ث

= ٧٥ × ٩,٨ نيوتن. متر/ث

= ٧٣٥ نيوتن. متر/ث (وات)

= ٠,٧٣٥ كيلو وات

مثال

(١) شخص كتلته ٥٠ كجم يصعد سلم برج إرتفاع البرج ٤٤١ متر فى زمن قدره ١٥ دقيقة إحسب القدرة المتوسطه له بوحدة الوات.

الحل

القوه (ق) = ك ى = ٥٠ × ٩,٨ = ٤٩٠ نيوتن

سرعة الرجل المتوسطة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٤٤١}{١٥ \times ٦٠} =$ ٠,٤٩ م/ث

القدرة المتوسطة = القوة × السرعة = ق × ع = ٤٩٠ × ٠,٤٩ = ٢٤٠,١ وات

حاول أن تحل

(١) محرك طائرة يعطى قوة مقدارها ٣٢,٢ × $١٠^{٤}$ نيوتن عندما تكون سرعة الطائرة ٩٠٠ كم/س إحسب قدرة المحرك بالحصان

مثال

(٢) سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ١٠٨ كم/س ضد مقاومات تعادل ١٥ ث.كجم لكل طن من الكتلة إحسب قدرة آلتها بالحصان.

الحل

الجسم يتحرك بسرعة منتظمة «تبعا للقانون الأول لنيوتن فتكون ق = م = ١٥ × ٢ = ٣٠ ثقل كيلوجرام

سرعة السيارة = ١٠٨ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٣٠ م/ث

∴ القدرة = ق × ع = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ ث كجم. م/ث

∴ القدرة = $\frac{٩٠٠}{٧٥}$ = ١٢ حصان

حاول أن تحل

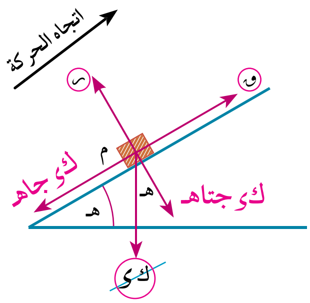
(٢) شاحنة كتلتها ٦ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س عندما تكون قدرة محركها ٣٠ حصان ، احسب مقاومة الطريق بثقل الكيلوجرام لكل طن من الكتلة.

مثال

③ سيارة كتلتها ٩ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٢٥}$ بأقصى سرعة مقدارها ٤٥ كم/س ضد مقاومات تعادل ٢٠ ثقل كيلوجرام لكل طن من الكتلة ، إحسب قدرة محركها بالحصان

الحل

الحركة لأعلى المستوى



$$\text{معادلة الحركة}\quad \text{ق} = \text{م} + \text{ك ء جا هـ}$$

$$\text{ق} = ٢٠ \times ٩ \times ٩{,}٨ + ٩ \times ١٠^{٣} \times ٩{,}٨ \times \frac{١}{١٢٥} \text{ نيوتن}$$

$$\text{ق} = ٢٥٢ \text{ ث.كجم}$$

أقصى سرعة تصعد بها السيارة على المنحدر

$$\text{ع} = ٤٥ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٥}{٢} \text{ م/ث}$$

$$\therefore \text{أقصى قدرة للسيارة} = \text{ق} \times \text{ع} = \frac{٢٥٢ \times \frac{٢٥}{٢}}{٧٥} = ٤٢ \text{ حصان}$$

حاول أن تحل

③ فى المثال السابق إذا هبطت السيارة بعد ذلك على نفس المستوى بعد تحميلها ببضائع كتلتها ٣ طن، أحسب أقصى سرعةللهبوط بالكم/س علما بأن المقاومة عن كل طن من الكتلة لم تتغير .

لاحظ أن: اذا كان معدل بذل الشغل منتظمًا (ثابتًا) فإن :

$$\text{القدرة} = \frac{\text{الشغل}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{القوة} \times \text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

مثال

④ عامل وظيفته تحميل صناديق على شاحنة كتلة الصندوق الواحد ٣٠ كجم فاذا كان إرتفاع الشاحنة ٠٫٩ متر احسب عدد الصناديق التى يستطيع العامل تحميلها فى زمن قدره ١ دقيقة اذا كانت قدرته المتوسطة تساوى ٠٫٦ حصان.

الحل

$$\text{القدرة} = \frac{\text{الشغل الكلى}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{عدد الصناديق} \times \text{الشغل اللازم لتحميل صندوق واحد}}{\text{الزمن}}$$

$$\therefore \text{عدد الصناديق اللازم تحميلها فى زمن قدرة ١ ث} = \frac{\text{القدرة} \times \text{الزمن}}{\text{الشغل للصندوق الواحد}}$$

$$\text{عدد الصناديق} = \frac{٠{,}٦ \times ٧٣٥}{٣٠ \times ٩{,}٨ \times ٠{,}٩} = \frac{٥}{٣} \text{ صندوق لكل ثانية}$$

$$\text{عدد الصناديق} = \frac{٥}{٣} \times ٦٠ = ١٠٠ \text{ صندوق لكل دقيقة}$$

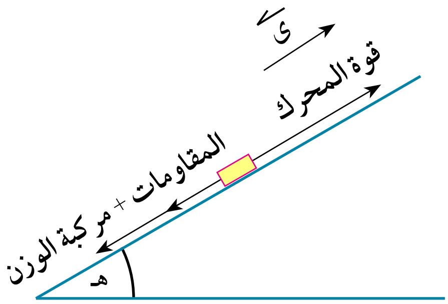
حاول أن تحل

٤ في المثال السابق احسب عدد الصناديق اذا كانت قدرة العامل ٣٥٢,٨ وات

مثال

٥ قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ بسرعة منتظمة مقدارها ٢٧ كم/س ضد مقاومات للحركة موازية لاتجاه خط أكبر ميل للمستوى بمعدل ١٨ ثقل كجم لكل طن من الكتلة. فما قدرة القاطرة بالحصان؟ و إذا هبط القطار على المنحدر بنفس السرعة فكم تكون قدرة القاطرة فى هذه الحالة بفرض ثبوت مقاومات الحركة فى الحالتين؟

الحل



أولًا: عندما يكون القطار صاعدًا المنحدر:

نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ في اتجاه الحركة أى إلى أعلى المستوى

∴ مقاومات الحركة = ٢٠٠ × ١٨ = ٣٦٠٠ ثقل كجم

مركبة وزن القطار في اتجاه المستوى = ٢٠٠ × ١٠٠٠ × $\frac{١}{٢٠٠}$

= ١٠٠٠ ثقل كجم

∵ القطار يصعد بسرعة منتظمة

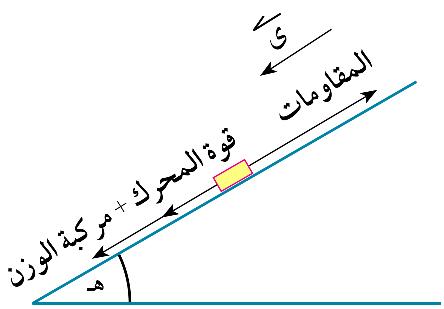
∴ قوة المحرك = المقاومات + مركبة الوزن = ٣٦٠٠ + ١٠٠٠ = ٤٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = ق$_١$ع حيث ق$_١$ قوة المحرك ، ع السرعة

∴ القدرة = ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ ثقل كجم . متر/ث

= ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٤٦٠ حصان

ثانيًا: عندما يكون القطار هابطًا المنحدر:



نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة أى إلى أسفل المستوى

∵ القطار يهبط بسرعة منتظمة

∴ قوة المحرك + مركبة الوزن= المقاومات

∴ قوة المحرك + ١٠٠٠ = ٣٦٠٠

∴ قوة المحرك = ٢٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = ق$_٢$ع حيث ق$_٢$ قوة المحرك ، ع السرعة (لأنها لم تتغير)

∴ القدرة = ٢٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٢٦٠ حصان

حاول أن تحل

٥ قاطرة كتلتها ٢٨ طن تجر عربة كتلتها ٥٦ طن بعجلة ثابتة أسفل منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ولما بلغت قدرة محركها ٨٤ حصان أصبحت سرعتها ٢١ م/ث احسب عجلة الحركة اذا علمًا بأن المقاومة ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة

مثال

(٦) يتحرك جسيم كتلته ١ كجم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ بحيث كانت إزاحته $\overrightarrow{\text{ف}}$ كدالة فى الزمن تعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}}$ = ٣ ن^{٢} $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ ن $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدين أوجد الشغل المبذول من القوة ثم أوجد القدرة عندما ن = ٢ ثانية إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف مقيسه بالمتر، ن بالثانية .

الحل

∵ ش = $\overrightarrow{\text{ق}}$ • $\overrightarrow{\text{ف}}$

∴ ش = (٣، ٤) • (٣ن^{٢} ، ٦ن) = ٩ن^{٢} + ٢٤ ن

∵ القدرة = $\dfrac{\text{ى}}{\text{ى ن}}$ (ش) ∴ القدرة = ١٨ ن + ٢٤

عندما ن = ٢ ثانية القدرة = ٦٠ وات

حاول أن تحل

(٦) أثرت قوة ثابتة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسيم بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}}$ = (٣ن^{٢} +ن) $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٤ ن $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدين . أوجد $\overrightarrow{\text{ق}}$ إذا كانت قدرة القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تساوى ٧٥ إرج/ث عندما ن = ٤ ثانية، وكانت قدرة القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تساوى ١٦٥ إرج/ث عندما ن = ٩ ثانية علمًا بأن ف مقيسة بالسنتيمتر ، ق مقيسة بوحدة داين.

مثال

(٧) إذا كانت قدرة آلة عند أى زمن ن مقاسًا بالثوانى يساوى (٩ن^{٢} + ٤ن) فأوجد الشغل المبذول من الآلة خلال الثوانى الثلاث الأولى ثم أوجد الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة.

الحل

∵ القدرة = $\dfrac{\text{ى ش}}{\text{ى ن}}$

∴ ش = $\int_{\text{ن}_1}^{\text{ن}_2}$ (القدرة) ى ن

الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى = $\int_{٠}^{٣}$ (٩ن^{٢} + ٤ن) ى ن

= [٣ن^{٣} + ٢ن^{٢}]$_{٠}^{٣}$

= ٩٩ وحدة شغل

الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة = $\int_{٣}^{٤}$ (٩ن^{٢} + ٤ن) ى ن

= [٣ن^{٣} + ٢ن^{٢}]$_{٣}^{٤}$

= ١٢٥ وحدة شغل

مثال

(٨) أوجد الزمن الذى تستغرقه سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم لتصل سرعتها إلى ١٢٦ كم/س من السكون إذا كانت قدرة المحرك ثابتة وتساوى ١٢٥ حصان.

الحل

∵ ش = $\int_{٠}^{ن}$ (القدرة) ء ن ∴ ش = $\int_{٠}^{ن}$ (١٢٥ × ٧٣٥) ء ن

ش = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∵ الشغل = التغير فى طاقة الحركة ∴ $\frac{١}{٢}$ ك (ع^{٢} - ع$_{.}^{٢}$) = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠٠ ((١٢٦ × $\frac{٥}{١٨}$)^{٢} - ٠) = ١٢٥ × ٧٣٥ ن

∴ ٧٣٥ × ١٠٠٠ = ١٢٥ × ٧٣٥ ن ∴ ن = ٨ ث

حاول أن تحل

(٧) إذا كانت قوة محرك سيارة تبذل شغلًا بمعدل يعطى خلال الفترة الزمنية ن ∋ [٠ ، ٥] بالعلاقة ١٤٤ ن - ٢٦ ن^{٢} مقدرة بالحصان ، و إذا كانت كتلة السيارة ٩٨٠ كجم وسرعتها فى نهاية الثانية الثالثة ٩٠ كم/س فأوجد سرعتها فى نهاية الثانية الرابعة.

تمارين ٤ – ٤

أكمل

(١) جسيم يتحرك تحت تأثير قوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ بحيث كانت إزاحته $\overleftarrow{ف}$ = ن $\overleftarrow{س}$ + (ن^{٢} + ن) $\overleftarrow{ص}$ فإن قدرة القوة $\overleftarrow{ق}$ عند اللحظة ن = ٣ ثانية تساوى .... داين. سم/ث حيث ق بالداين ، ف بالسنتيمتر.

(٢) قطار كتلته ٣٧٥ طن وقدرة محركه ٦٢٥ حصان يتحرك على أرض أفقية بأقصى سرعة ك وقدرها ٩٠ كم/س فإن المقاومة التى يلاقيها عن كل طن من كتلة القطار = ... ث كجم

(٣) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن وقدرة محركها ١٠ حصان فى خط مستقيم علي أرض أفقية فكانت أقصى سرعة لها ٧٥ كم/س فإن مقدار مقاومة الطريق لحركة السيارة = ... ث كجم

(٤) قطار كتلته ١٠٨ طن يتحرك بسرعة منتظمة على طريق أفقى بسرعة ٣٠ كم/ساعة فإذا كانت المقاومات تعادل ١٠,٥ ثقل كجم لكل طن من كتلته فأوجد قدره القاطرة بالحصان عندئذ.

(٥) قطار قدرة آلته ٥٠٤ حصان وكتلته ٢١٦ طن يتحرك على طريق أفقى بأقصى سرعة له ضد مقاومات تعادل ٥ ثقل كجم لكل طن من الكتلة ، أوجد أقصى سرعة له بالكيلو متر/ساعة

(٦) يتحرك قطار أفقيًا تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعته، فإذا كانت المقاومة تعادل ٨٠٠ ثقل كجم عندما كانت سرعته ٢٠ كم/ساعة وكانت قدرة القطار ٢٠٠ حصان عندما يتحرك بأقصى سرعة له. فأوجد هذه السرعة بالكم/ساعة

٧ تتحرك سيارة كتلتها ١٥٠٠ كجم وقدرة محركها ١٢٠ حصان على طريق مستقيم أفقى بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س. ما هى أقصى سرعة يمكن لهذه السيارة أن تصعد بها طريقًا مستقيما منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ علمًا بأن المقاومة واحده على الطريقين؟

٨ سيارة كتلتها ٣ طن تسير على طريق أفقى بسرعة منتظمة قدرها ٣٧,٥ كم/ساعة وعندما وصلت إلى قمة منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها ٠٣, أوقف السائق المحرك وتحركت السيارة أسفل المنحدر بسرعتها السابقة نفسها فإذا كانت مقاومة المنحدر $\frac{٢}{٣}$ مقاومة الطريق الأفقى فأوجد:

أولا: مقاومة المنحدر بثقل الكيلو جرام. **ثانيا:** قدرة محرك السيارة على الطريق الأفقى.

٩ تحركت سيارة كتلتها ٦ طن. بأقصى سرعة وقدرها ٢٧ كم/س صاعدة طريقًا منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ، عادت السيارة وهبطت على الطريق نفسه بأقصى سرعة لها وقدرها ١٣٥ كم/س. عين مقدار قوة مقاومة الطريق للحركة بفرض أنه لم يتغير طوال الوقت ثم أوجد قدرة محرك السيارة.

١٠ طائرة قدرة محركها ١٣٥٠ حصانًا عندما تتحرك أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ٢٧٠ كم/س أوجد مقاومة الهواء لحركة الطائرة عندئذ. و إذا كانت مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعتها، أوجد قدرة المحرك عندما تطير أفقيًا بسرعة ثابتة قدرها ١٨٠ كم/ساعة.

١١ تجر قاطرة قدرة آلتها ٤٠٠ حصان قطارًا بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س على أرض أفقية . إحسب المقاومة لحركة القطار، إذا كانت كتلة القطار والقاطرة معًا ٢٠٠ طن، أوجد أقصى سرعة يصعد بها القطار طريقًا منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ على فرض أن مقاومة الطريق للحركة لم تتغير.

١٢ راكب دراجة كتلته مع دراجته ٨٠ كجم، وأكبر قدره له $\frac{٤}{٥}$ حصان فإذا كانت أقصى سرعة له على طريق أفقى هى ١٨ كم/ساعة، فاحسب مقاومة الطريق بثقل كجم، واذا علم أنه صعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٤٠}$ بأقصى سرعة له فإحسب هذه السرعة بالكم/ساعة.

١٣ عربة نقل كتلتها ٥ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة قدرها ١٤٤ كم/س، عندما كانت قدرة آلتها ١٢٠ حصان . أوجد مقاومة الطريق لكل طن من الكتلة بثقل كجم، و إذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة، فأوجد قدرة المحرك بالحصان عندما تصعد العربة منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٢٠٠}$ بسرعة منتظمة قدرها ٩٦ كم/س

١٤ هبطت شاحنة كتلتها ٢ طن على طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ من موقع (أ) الى موقع (ب) بأقصى سرعة وقدرها ٩٠ كم/س. إحسب قدرة محرك السيارة إذا علمت أن مقاومة الطريق لحركتها تقدر بنسبة ١٣٪ من وزن السيارة، حملت السيارة عند وصولها إلى الموقع (ب) شحنة كتلتها $\frac{١}{٢}$ طن ثم تحركت صاعدة الطريق الى موقع (أ) بأقصى سرعة، أوجد هذه السرعة إذا ظلت المقاومة على نفس نسبتها من الوزن.

١٥ قطار كتلته (ك) طن يتحرك على طريق أفقى بأقصى سرعة له وقدرها ٦٠ كم/س. فصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ١٥ طن، فزادت أقصى سرعة له بمقدار ٧,٥ كم/س. أوجد قدرة الآلة بالحصان. وكذلك كتلة القطار، علمًا بأن المقاومة تساوى ٩ ثقل كجم عن كل طن من الكتلة.

١٦ جسيم يتحرك تحت تأثير القوة $\overrightarrow{ق} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ وكان متجه إزاحته $\overrightarrow{ف}$ يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = ن\overrightarrow{س} + (\frac{١}{٢}ن^{٢} + ن)\overrightarrow{ص}$ ، أوجد إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، ن بالثانية.

أ الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى

ب متوسط القدرة خلال الثوانى الثلاث الأولى

جـ قدرة القوة $\overrightarrow{ق}$ عند ن = ٣ ث

١٧ يتحرك جسيم تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق} = (٢ن - ١)\overrightarrow{س} + (٥ن + ٢)\overrightarrow{ص}$ بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة $\overrightarrow{ف} = (٣ن^{٢} + ن)\overrightarrow{س} + ٤ن\overrightarrow{ص}$ ، أوجد إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف بالمتر، ن بالثانية.

أ قدرة القوة عند ن = ٥ ث

ب الشغل المبذول خلال الثوانى الثالثة والرابعة والخامسة

جـ القدرة المتوسطة خلال الثوانى الثالثة والرابعة والخامسة.

١٨ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق}$ وكان متجه موضع الجسم عند أى لحظة زمنية ن يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{س}(ن) = ن^{٣}\overrightarrow{س} + ن^{٢}\overrightarrow{ص}$ حيث س مقيسة بالمتر، ق بالنيوتن، ن بالثانية . أوجد :

أ القوة المؤثرة $\overrightarrow{ق}$ بدلالة ن

ب أوجد قدرة القوة $\overrightarrow{ق}$ بدلالة الزمن ن.

جـ أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ خلال الفترة الزمنية $٠ \leqslant ن \leqslant ٢$

١٩ إذا كانت قدرة آلة (بالحصان) تساوى $(٦ن - \frac{١}{٢٠}ن^{٢})$ حيث ن الزمن بالثوانى ، ن ∈ [٠، ١٢٠] أوجد :

أ قدرة الآلة عندما ن = ٩٠ ث.

ب الشغل المبذول خلال الفترة الزمنية [٠، ٣٠].

جـ أقصى قدرة للآلة .

٢٠ جسم كتلته ٥ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق}$ بحيث كان متجه موضعه عند الزمن ن يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{س}(ن) = ن\overrightarrow{س} + ن^{٢}\overrightarrow{ص}$ إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، س بالمتر . فأوجد :

- مستخدمًا التكامل الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ فى الفترة الزمنية [٠، ٢].

٢١ جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق}$ بحيث كان متجه سرعته $\overrightarrow{ع}$ يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{ع} = (١ - جا ٢ن)\overrightarrow{س} + (-١ + جتا ٢ن)\overrightarrow{ص}$ إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن ، ع بوحدة م/ث فأوجد:

أ القوة $\overrightarrow{ق}$ بدلالة الزمن ن.

ب طاقة الحركة ط عند الزمن ن.

جـ أثبت أن معدل تغير ط يساوى القدرة الناتجة عن القوة $\overrightarrow{ق}$.

تمارين عامة

١) قذف جسيم كتلته ٢٠٠جم إلى أعلى مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٨}{٤٩}$ وفى اتجاه خط اكبر ميل بسرعة ٣٠سم/ث. أحسب التغير الذى يطرأ على طاقة وضع هذا الجسيم عندما تصبح سرعته ١٨سم/ث.

٢) أثرت قوة مقدارها ٤٨ ث جم على جسم ساكن موضوع على مستوى أفقى لفترة زمنية ما، فاكتسب الجسم فى نهايتها طاقة حركة قدرها ١٨٩٠٠ ث جم.سم وبلغت كمية حركته عندئذ ١٧٦٤٠٠ جم.سم/ث ، ثم رفعت القوة فعاد الجسم إلى السكون مرة أخرى بعد أن قطع مسافة ١٠,٥ متر من لحظة رفع القوة. أوجد كتلة الجسم ومقدار مقاومة المستوى لحركته بغرض ثبوتها. كذلك أوجد زمن تأثير القوة.

٣) سيارة كتلتها ١٨٠٠ كجم تسير على طريق أفقى بسرعة ثابتة قدرها ٥٤ كم/س، فإذا كان مقدار المقاومة لحركة السيارة يعادل ٠,٢٥ من وزن السيارة فأوجد قدرة الآلة فى هذه الحالة بالحصان.

٤) تسقط مطرقة كتلتها طن واحد مسافة ٤,٩ متر رأسيًا على جسم حديدى كتلته ٤٠٠ كجم فتدكه رأسيًا فى الأرض لمسافة ١٠ سم عين السرعة المشتركة للمطرقة والجسم بعد الاصطدام مباشرة . عين طاقة الحركة المفقودة بالتصادم ومقدار مقاومة الأرض بفرض ثبوتها.

٥) مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٩٨}$ قذف عليه جسم كتلته ٢ كجم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وإلى أعلى بسرعة ١,٤م/ث . أحسب الشغل المبذول من الوزن حتى يسكن لحظيًا.

٦) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير قوة ثابتة $\overrightarrow{ق}$ حيث $\overrightarrow{ق}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ حيث ق مقيسة بالنيوتن، فإذا بدأ الجسم حركته من السكون من نقطة متجه الموضع عندها ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، فأوجد متجه موضع الجسم بعد ٣ ثوان، وأوجد أيضًا مقدار الشغل الذى بذلته هذه القوة خلال هذه الفترة الزمنية، وأوجد القدرة المتولدة عندما ن = ٣ ث.

٧) راكب دراجة كتلته هو والدراجة ٩٨ كجم يتحرك على أرض أفقية خشنة من السكون فبلغت سرعته أقصى قيمة لها وقدرها ٧,٥ م/ث بعد زمن قدره دقيقة واحدة. وعندما أوقف حركة قدميه على بدالة الدراجة سكنت الدراجة بعد أن قطعت مسافة قدرها ١٥ مترًا أحسب أقصى قدرة لهذه الرجل خلال هذه الرحلة بالحصان.

٨) يهبط جسم كتلته ٦٠ كجم من السكون على خط أكبر ميل لمستوى مائل طوله ٢٠ مترًا وارتفاعه ١٢ مترًا. فإذا بدأ الجسم الحركة من أعلى نقطة فى المستوى وكان معامل الأحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى $\frac{٣}{١٦}$ فأوجد طاقة حركة الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى.

٩) وضع جسم كتلته ٥ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ وأثرت عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى فحركته لأعلى المستوى بسرعة منتظمة مسافة ٧٥سم فإذا كان معامل الاحتكاك الحركى بين الجسم والمستوى هو $\frac{٥}{١٢}$ فأوجد :

أ) مقدار الشغل المبذول ضد مقاومة المستوى.

ب) مقدار الشغل المبذول من القوة.

١٠ محرك سيارة تبذل شغلًا بمعدل ثابت قدره ٥ كيلو وات وكتلة السيارة ١٢٠٠ كجم فإذا كانت السيارة تسير فى طريق أفقى ضد مقاومة ثابتة مقدارها ٣٢٥ نيوتن فأوجد :

أ مقدار عجلة حركة السيارة عندما تكون سرعتها ٨م/ث.

ب أقصى سرعة للسيارة.

١١ تتحرك سيارة كتلتها ٥ طن بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س صاعدة طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٤٠}$ ضد مقاومة تعادل ٢,٥٪ من وزن السيارة. أوجد قدرة محرك السيارة عندئذ بالحصان، وإذا زادت قدرة المحرك فجأة إلى ٥٠ حصانًا فأوجد مقدار عجلة السيارة بعدها مباشرة.

١٢ يتحرك قطار بسرعة ثابتة قدرها ٧٢ كم/س ، فصلت العربة الأخيرة وكتلتها ١٦طن فزادت سرعة القطار إلى ٩٦ كم/س. إذا كانت قدرة آلات القطار ثابتة فأوجد قدرة الآلة وكتلة القطار علمًا بأن القطار يلاقى مقاومة ثابتة قدرها ٦ث كجم لكل طن من الكتلة المتحركة.

١٣ جسيم يتحرك فى خط مستقيم تحت تأثير قوة متغيرة و حيث و = $\frac{١}{٥}$ س (نيوتن) حيث س بالمتر هو بعد الجسيم عن نقطة أصل ثابتة على خط المستقيم ، أوجد الشغل المبذول من و فى كل من الحالات الآتية :

أ عندما يتحرك الجسيم من س = ٠ حتى س = ١٠.

ب عندما يتحرك الجسيم من س =١ حتى س = ٥.

١٤ سقط جسم كتلته ١ كجم من السكون رأسيًا إلى أسفل تحت تأثير عجلة الجاذبية ضد مقاومات قدرها $\frac{٢٤}{٢٥}$ س (نيوتن) حيث س بعد الجسم عن نقطة السقوط بالمتر عند أى لحظة . أوجد الشغل المبذول من الجسم ضد المقاومة منذ لحظة السقوط حتى يقطع مسافة ١٠ متر أسفل نقطة السقوط وأوجد سرعته عند هذه اللحظة.

١٥ قوة ثابتة مقدارها ق (نيوتن) تميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ تجر سيارة معطلة كتلتها ١٤٠٠ كجم بسرعة منتظمة قدرها ٢٢,٥ م/ث على طريق أفقى خشن معامل الاحتكاك بين الطريق والسيارة ٠,٣ أوجد :

أ قدرة القوة فى هذه الحالة.

ب الشغل المبذول من القوة لتحريك السيارة لمدة دقيقة واحدة.

أولا: الاستاتيكا

الاختبار الأول

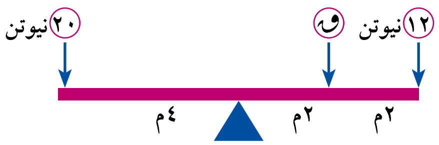
اجب عن السؤال الآتى:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ اذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى:

أ ظا θ ب جا θ ج جتا θ د ظتا θ

٢ الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن ق =



أ ٢٨ نيوتن   ب ١٦ نيوتن

ج ٢ نيوتن   د ٤ نيوتن

٣ قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (-١ ، ١) فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الاصل يساوى:

أ -٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ب ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ج ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$ د -٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

٤ قوتان تكونان ازدواج، مقدار احدهما ١٥ نيوتن وعزم الازدواج المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن البعد العمودى بينهما يساوى

أ ٦٧٥سم   ب ٦٠سم   ج ٣سم   د ٣٠سم

٥ اذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها حول أى نقطة فى المستوى يساوى:

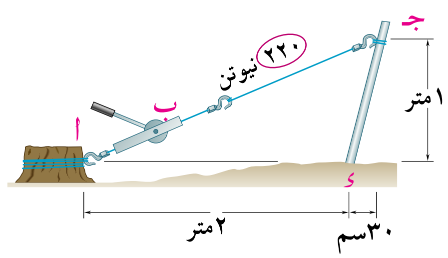
أ ثابت غير صفرى   ب صفر   ج محصلة هذه القوى   د الواحد الصحيح

٦ مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ نيوتن، ٦ نيوتن والمسافة بينهما ١٥سم يبعد عن الجسيم ٣ نيوتن مسافة .... سم

أ ٥   ب ١٠   ج ٧,٥   د ٩

ثانيا: أجب عن ثلاثة أسئلة مما يأتى:

السؤال الثانى



١ الشكل المقابل يوضح شداد أ ب يؤثر على عمود مائل جـ ء . اوجد معيار عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة ء

٢ وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو (ل) فاوجد مقدار واتجاه القوة تجعل الجسم على وشك الحركة الى اعلى.

السؤال الثالث

(١) قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٧٥سم. اوجد محصلة القوتين.

(٢) أب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أب = أ جـ = ١٣سم ، ب جـ = ١٠سم اثرت قوى مقاديرها ٦٥، ق، ٦٥ نيوتن فى أب ، ب جـ ، جـ أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج فما قيمة ق ومعيار عزم الازدواج

السؤال الرابع

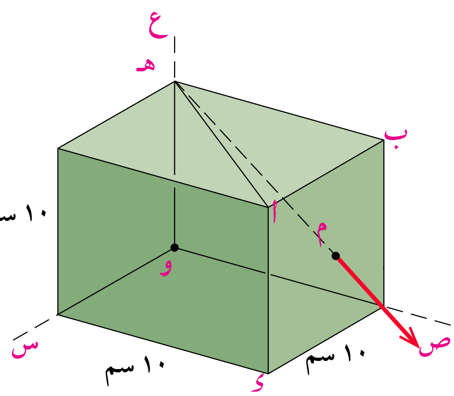
(١) أ ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب بخطين يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠°، ٦٠° على الترتيب. علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من أ يساوى ١/٥ ل، ٦/٥ ل.
اوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الافقى.

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ١٠سم اثرت الاوزان ٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه . عين موضع مركز ثقل المجموعة.

السؤال الخامس

(١) فى الشكل المقابل

قوة ٢٥√٦ نيوتن تؤثر فى هـ م . اوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الاحداثيات.



(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ ى فيه أب = ٥سم، ب جـ = ١٢ سم ، هـ ∈ أى بحيث أهـ = ٥سم. ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع ب هـ حتى انطبق أب على ب جـ تماماً. عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة الى جـ ب، جـ ى

الاختبار الثانى

أولا: اجب عن السؤال الآتى:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) يؤثر على الجسم ازدواجان، الأول مقدار احدى قوتيه ٢٠ث كجم وذراع العزم ½ متر واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة والثانى مقدار احدى قوتيه ٣٠ث كجم وذراع العزم ١ متر واتجاه دورانه فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الازدواج المحصل يساوى :

أ) ٢٠ ث كجم. م واتجاه دورانه فى اتجاه دوران عقارب الساعة

ب) ٢٠ كجم.م واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

ج ٤٠ث كجم.م واتجاه دورانه فى اتجاه دوران عقارب الساعة.

د ٤٠ث كجم.م واتجاه دورانه فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة.

٢ زاوية الاحتكاك هى:

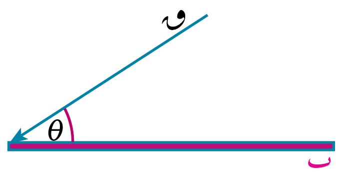
أ الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل.

ب النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى.

ج النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى ومعامل الاحتكاك الحركى.

د الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل.

٣ الشكل المقابل يوضح تأثير قوة مقدارها ق على طرف قضيب. قياس الزاوية θ التى تولد اكبر عزم حول نقطة ب هو:



أ ٠° ب ٩٠°

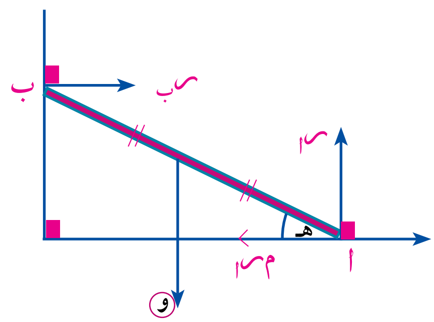
ج ٤٥° د ٣٠°

٤ قوتان متوازيتان ومتضادان فى الاتجاه مقدار احدهما ٧ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن مقدار القوة الاخرى يساوى.

أ ٣ نيوتن ب ١٧ نيوتن ج ٢٧ نيوتن د ٦ نيوتن

٥ فى الشكل المقابل:

اذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الارض والقضيب فإن ظا هـ . ظا ل =



أ ٢ ب $\frac{١}{٢}$

ج ١ د ٣

٦ تؤثر الكتلة ٥ كجم فى النقطة (٢ ، -١) وتؤثر الكتلة ٧ كجم فى النقطة (١ ، ٢) فإن مركز ثقل الكتلتين يؤثر فى النقطة....

أ (١٧ ، ٩) ب $(\frac{١٧}{١٢} ، \frac{٣}{٤})$ ج (١٩ ، ١٣) د $(\frac{١٩}{١٢} ، \frac{١}{٤})$

ثانيًا : أجب عن ثلاثة اسئلة ممايأتى :

السؤال الثانى

١ اذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$ تؤثر في نقطة أ (١ ، ٢ ، -١) اوجد:

أولًا: عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الاصل.

ثانيًا: طول العمود المرسوم من نقطة الاصل على خط عمل $\overleftarrow{ق}$.

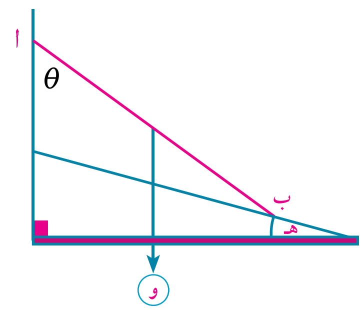
٢ برهن أن: اذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الافقى.

السؤال الثالث

(١) وضعت ثلاثة اجسام أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث كجم على قضيب خفيف . عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقيًا.

(٢) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم، هـ ∈ ب جـ ، و ∈ أ ء بحيث ب هـ = ء و = ٦سم اثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٥، ٧ ، ٧ ، ق ، ق ث كجم في اتجاهات أ ب ، جـ ء ، ب جـ ، ء أ ، هـ أ ، و جـ، على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ث كجم. سم في اتجاه جـ ب أ ء اوجد ق.

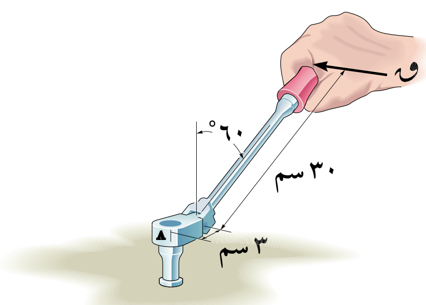
السؤال الرابع



(١) في الشكل المقابل ترتكز احدى نهايتي سلم منتظم وزنه (و) على حائط رأسي أملس وترتكز النهاية الاخرى على أرض خشنة تميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم على وشك الانزلاق وهو في مستوى رأسي عمودي على خط تقاطع الحائط مع الارض. اثبت أن السلم يميل على الرأسي بزاوية قياسها ف حيث ظا θ = ٢ θ (ى - هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك

(٢) ثنى قضيب منتظم أ جـ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث أ ب = ٥ل بحيث ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° وعلق القضيب من الطرف أ تعليقًا حرًا. فإثبت أن ب جـ يميل على الافقي بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

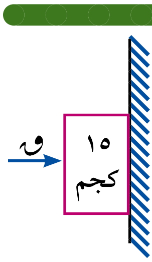
السؤال الخامس



(١) في الشكل المقابل:
اذا كان عزم القوة ق العمودية على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة أ يساوي ٦٢٠ نيوتن. سم . اوجد ق

(٢) أب جـ مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٢٠سم، م نقطة تقاطع متوسطاته ء نقطة منتصف ب جـ ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠، ٧٥، ٤٥ في النقط أ ، ب ، ء ، جـ ، م على الترتيب . عين مركز ثقل هذه المجموعة . واذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

الاختبار الثالث



أولاً: اجب عن السؤال الآتى:

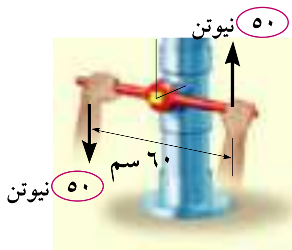
السؤال الأول: اكمل ما يأتى

(١) مقدار اقل قوة أفقية ق لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ث كجم على حائط رأسي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي $\frac{١}{٥}$ يساوي .... ث كجم

(٢) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى ....

(٣) اذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، || $\overleftarrow{ق_٢}$ ||= ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة فإن $\overleftarrow{ق_٢}$ = ...

(٤) فى الشكل المقابل: عزم الازدواج الناتج من القوتين ٥٠ ، ٥٠ يساوى..............



(٥) عندما يوضع قضيب داخل إناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن..............

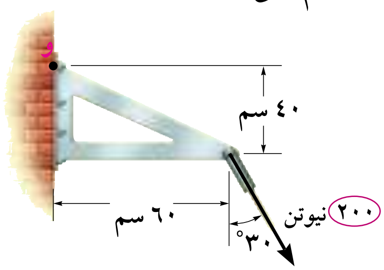
(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

ثانيًا: أجب عن ثلاثة اسئلة ممايأتى :

السؤال الثانى

(١) وضع جسم وزنه $٦٦\frac{٢}{٣}$ نيوتن على مستوى افقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{٣}{٤}$. اثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقى بزاوية قياسها θ حيث θ حادة فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ

(٢) فى الشكل المقابل اوجد عزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و



السؤال الثالث

(١) (أ) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع افقى على حاملين عند جـ ، ء حيث أ جـ = ٢٠سم، ب ء = ١٠سم. اذا كان اكبر ثقل يمكن تعليقه من نقطة أ أو من نقطة ب دون أن يختل توازن القضيب هو ٥ ، ٤ ث كجم على الترتيب. اوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره.

(٢) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠سم. اثرت قوى مقاديرها ٢، ٥، ٤، ٦، ١، ٣ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـء}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـو}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ على الترتيب. اوجد مقدار واتجاه القوة التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس حتى تؤول المجموعة الى ازدواج ثم عين عزمه

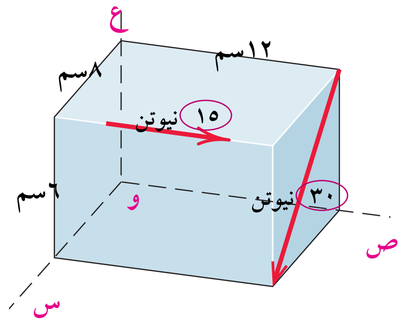
السؤال الرابع

(١) أ ب قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز بأحدى طرفيه أ على أرض أفقية ملساء وبطرفه الآخر ب على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها يساوى ضعف قياس زاوية ميل القضيب على الافقى فى وضع الاتزان. حفظ توازن القضيب بواسطة خيط مربوط إحدى طرفيه فى طرف القضيب المستند على الأرض الأفقية والطرف الآخر للخيط فى نقطة على خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الافقى اوجد مقدار الشد فى الخيط وردى الفعل عند طرفى القضيب عندما يميل القضيب على الافقى بزاوية قياسها ٣٠°.

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع ضلعه ل . هـ ، و . ن منتصفات الاضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ على الترتيب ثنى المثلث أ هـ و حول الضلع $\overline{\text{هـو}}$ بحيث انطبقت أ على مركز المربع ى. وثنى المثلث ب هـ ن على الضلع $\overline{\text{هـن}}$ بحيث انطبق الرأس ب على مركز المربع ى. عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد .

السؤال الخامس

① فى الشكل المقابل اوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و



② اوجد مركز ثقل التوزيع الآتى:

$و_{١}$ = ٢٠نيوتن يؤثر فى (٢، ١) ، $و_{٢}$ = ١٥ نيوتن

يؤثر فى (-٣ ، ١) $و_{٣}$= ٢٥ نيوتن يؤثر فى (١، -١)

الاختبار الرابع

أولاً: أجب عن السؤال الآتى:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

① معامل الاحتكاك يتوقف على :

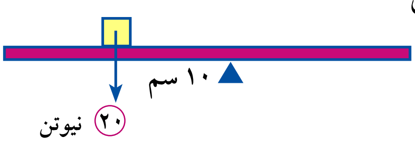
أ مساحة سطح التلامس بين الجسمين

ب شكل الجسمين

جـ طبيعة السطحين

د كل ما سبق

② الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه. وضع عليه جسم كما بالشكل أى من القوى الآتية تحدث توازن للقضيب



أ قوة مقدارها ١٠ نيوتن لاعلى تؤثر على بعد ٢٠سم على يمين منتصف القضيب

ب قوة مقدارها ١٠ نيوتن لاسفل تؤثر على بعد ٢٠سم على يمين منتصف القضيب

جـ قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لاعلى تؤثر على بعد ٥سم على يسار منتصف القضيب

د قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لاسفل تؤثر على بعد ٥سم على يسار منتصف القضيب

③ اثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = $\text{ق}_{\text{س}}\overleftarrow{\text{س}} + \text{ق}_{\text{ص}}\overleftarrow{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{ع}}\overleftarrow{\text{ع}}$ فى نقطة ا متجة موضعها بالنسبة لنقطة الاصل هو $\text{ا}_{\text{س}}\overleftarrow{\text{س}} + \text{ا}_{\text{ص}}\overleftarrow{\text{ص}} + \text{ا}_{\text{ع}}\overleftarrow{\text{ع}}$ فإنه مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول محور س هى :

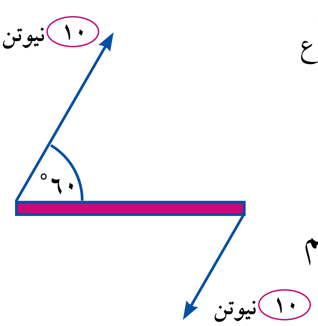
أ $\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ا}_{\text{ع}} - \text{ق}_{\text{ع}} \times \text{ا}_{\text{س}}$

ب $\text{ق}_{\text{ص}} \times \text{ا}_{\text{ع}} + \text{ق}_{\text{ع}} \times \text{ا}_{\text{ص}}$

جـ $\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ا}_{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{ص}} \times \text{ا}_{\text{س}}$

د $\text{ق}_{\text{ص}} \times \text{ا}_{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{ع}} \times \text{ا}_{\text{ع}}$

④ عزم الازدواج المقابل يساوى:

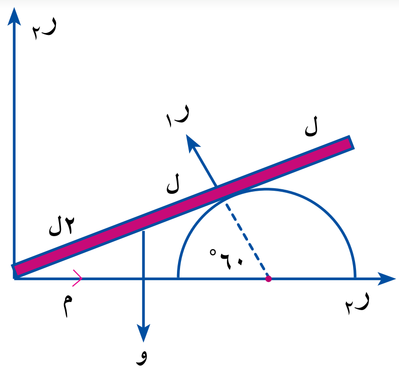


أ ٨٠٠ نيوتن . سم

ب ٨٠٠ نيوتن .سم

جـ $٤٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

د $٤٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم



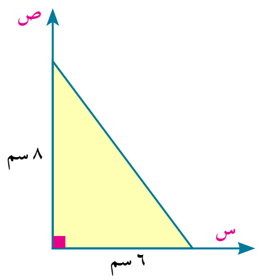
٥ فى الشكل المقابل

اذا كان القضيب على وشك الانزلاق فإن

ر١ = ... ر٢= ....

أ و ب $\frac{1}{2}$ و

جـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و د $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و



٦ مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل المقابل هو:

أ (٣ ، ٤) ب (٤، ٣)

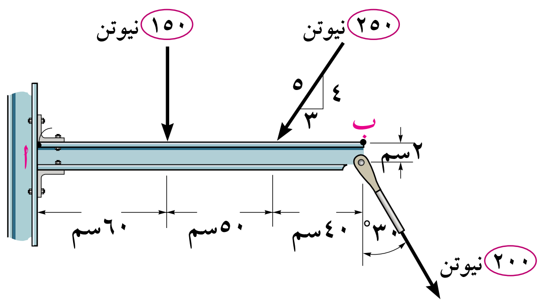
جـ (٦ ، ٨) د (٨، ٦)

ثانيًا: أجب عن ثلاثة اسئلة ممايأتى :

السؤال الثانى:

١ وضع جسم وزنه ١٦ث كجم على مستوى يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، اثرت على الجسم قوة تعمل فى خط ا كبر ميل للمستوى ولاعلى مقدارها ١٠ نيوتن فإذا كان الجسم متزنًا عين قوة الأحتكاك وبين ما اذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا؟

٢ فى الشكل المقابل: ثلاث قوى مستوية تؤثر فى قضيب $\overline{أ ب}$. اوجد القياسات الجبرية لمجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين أ ، ب



السؤال الثالث:

١ قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه وعلى بعد ١ ، ١,٥ متر من منتصفه على الترتيب وعلق ثقلان ٥ ، و فى النصف الآخر وعلى بعد $\frac{1}{2}$ ، ٢ متر من منتصفه على الترتيب. فإذا اتزن القضيب فما قيمة و .

٢ أ ب جـ صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٣٠ $\sqrt{3}$ سم ووزنها ٥٠ ث جم. علقت الصفيحة من مسمار افقى من ثقب بالقرب من الرأس أ فاتزنت رأسيًا . اثر على الصفيحة ازدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه $\overline{أ ب}$ أفقيًا. اوجد عزم الازدواج المؤثر ورد فعل المسمار.

السؤال الرابع:

(١) أ ب قضيب منتظم طرفه أ مثبت فى مفصل فى حائط رأسى وطرفه الاخر ب مربوط بأحد طرفى خيط وربط الطرف الاخر للخيط فى نقطة فى المستوي الافقي المار بالمفصل بحيث يميل كل من القضيب والخيط على الافقى بنفس الزاوية θ فإذا كان (و) وزن القضيب . بين أن رد فعل المفصل عند أ يساوى $\frac{\text{و}}{\text{٤}}\sqrt{\text{٨} + \text{قتا}^{\text{٢}}\theta}$.

(٢) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ٢٠سم ، وضعت أربع كتل متساوية فى المقدار عند رؤوسه:

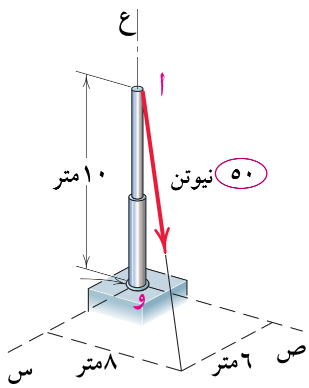
أولا: عين مركز ثقل المجموعة

ثانيًا: اذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه فاين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

السؤال الخامس:

(١) أ ب جـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الاضلاع كتلتها ٣ كجم، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢، ٢، ١١ كجم الرؤس أ، ب، جـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{\text{م جـ}}$

(٢) فى الشكل المقابل تؤثر قوة مقدارها ٥٠ نيوتن فى نقطة أ اوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و.



الاختبار الخامس

أولاً: اجب عن السؤال الآتى

السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

(١) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

(٢) اذا اثرت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ فى النقطة أ ، متجه موضعها $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب، متجه موضعها $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ يساوى ....

(٣) قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه مقدار احدهما ضعف مقدار الاخرى ومقدار محصلتهما ٣١ نيوتن فإن مقدار اصغرهما يساوى ....

(٤) اذا كونت القوتان $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٢}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ب $\overrightarrow{\text{ص}}$ ازدواج فإن أ + ب = ...

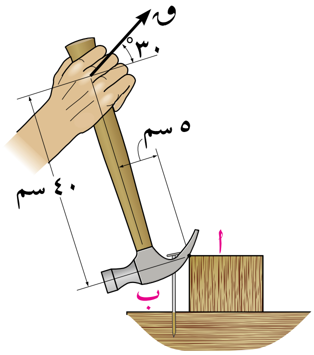
(٥) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....

(٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًا على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

ثانيًا : أجب عن ثلاثة أسئلة مما يأتى :

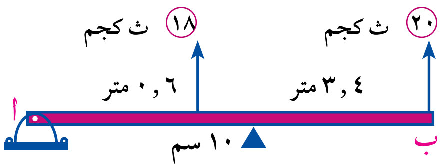
السؤال الثانى:

① وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الافقى بزاوية قياسها θ فإذا كان اقل واكبر قوة موازية لخط اكبر ميل وتجعل الجسم متزنا على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب. اوجد معامل الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الافقى



② الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب . اذا كان معيار عزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن. سم اوجد معيار القوة ق.

السؤال الثالث



① اذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب أ ب مهمل الوزن فى الشكل المقابل هى ١٣,٦ ث كجم وتؤثر لأعلى فى نقطة تبعد ٣ متر على يمين أ . اوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة الثالثة.

② أ ب جـ ى مستطيل فيه أ ب = ١٢سم، ب جـ = ٩سم، م $\in$ ب جـ بحيث ب م = ٤سم. اثرت قوى مقاديرها ق١، ٨√١٠ ، ٢٦، ق٢، ١٨ نيوتن فى الاتجاهات ب أ ، أ م ، م ى ، ى جـ ، ى أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فاوجد قيمتى ق١ ، ق٢.

السؤال الرابع

① أ ب سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم. يستند بطرفه أ على حائط رأسى املس وبطرفه ب على ارض افقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{1}{4}$ وكان الطرف ب على بعد ٣ متر من الحائط. اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة. ثم اوجد اصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه وبين الارض $\frac{1}{5}$ بحيث اذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق.

② سلك منتظم طوله ١٠٠سم ثنى على هيئة خمسة اضلاع من مسدس منتظم أ ب جـ ى هـ و بدأ من نقطة أ . عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس. واذا علق السلك تعليقًا حرًا من طرفه أ . فعين قياس زاوية ميل أ ب على الرأس فى وضع الاتزان.

السؤال الخامس

① أ ب قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ٥ نيوتن، جـ ، ى نقطتى تثليثه من جهة أ علق اوزان مقدارها ١ ، ٢، ٣ ، ٤ نيوتن فى النقط أ ، جـ ، ى ، ب على الترتيب عين مركز ثقل المجموعة.

② قوتان ق١ = ٢ س - ص ، ق٢ = ص - ٢ س تؤثران فى النقطتين أ(١، ١) ، ب(٠، -٤) على الترتيب أوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى .

ثانيًا: الديناميكا

الاختبار السادس

أولاً: اجب عن السؤال الآتى

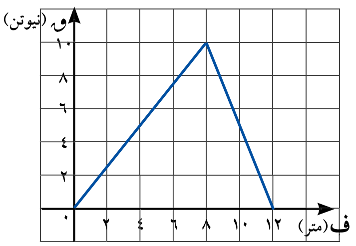
السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

(١) كمية حركة جسم كتلته ٧٠٠ جرام يتحرك فى خط مستقيم مبتدئا بسرعة مقدارها ١٥م/ث وبعجلة منتظمة ٢,٥ م/ث^{٢} فى نفس إتجاه سرعته الإبتدائية بعد مرور ١٢ث من بدء الحركة يساوي .... كجم.م/ث

(٢) جسم كتلته الوحدة يتحرك تحت تأثير القوة $\overleftarrow{ق}$ = (أ + ٣)$\overleftarrow{س}$ + ب$\overleftarrow{ص}$ فإذا كان متجه إزاحته $\overleftarrow{ف}$ = ن^{٢} $\overleftarrow{س}$ + $\frac{١}{٢}$ن^{٢} $\overleftarrow{ص}$ فإن أ = ... ، ب = ...

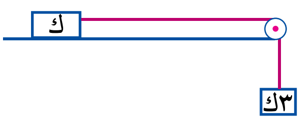
(٣) إذا وقف طفل كتلته ٣٥ كيلو جرام على ميزان ضغط فى داخل مصعد متحرك لأسفل بعجلة مقدارها ١,٤م/ث^{٢} فإن قراءة الميزان = ... ث . كجم

(٤) الشكل المقابل يوضح العلاقة بين القوة $\overleftarrow{ق}$ التى يؤثر بها طفل أفقيا على صندوق كتلته ١٠ كجم والإزاحة الحادثة فى إتجاه القوة فيكون الشغل المبذول بواسطة $\overleftarrow{ق}$ على الصندوق من ف = ٠ إلى ف= ٨ يساوى ....
الشغل المبذول بواسطة $\overleftarrow{ق}$ على الصندوق من ف = ٨ إلى ف = ١٢يساوى ....



(٥) قذف جسم أفقيا بسرعة ٢,٨م/ث على مستوى أفقى خشن معامل الأحتكاك بينه وبين الجسم $\frac{١}{١٠}$ فإن المسافة التى يقطعها الجسم على المستوي قبل أن يسكن يساوى .... متر

(٦) فى الشكل المقابل البكرة صغيرة ملساء والمستوى أملس فإذا تحركت المجموعة من السكون فإن مقدار عجلة حركة المجموعة = ...م/ث^{٢}



ثانيًا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى

السؤال الثانى:

(١) قاطرة كتلتها ٣٠ طن بدأت الحركة من السكون على مستوى أفقى بعجلة منتظمة ضد مقاومات $\frac{١}{١٠٠}$ من وزنها وعندما بلغت سرعتها ٩٠ كم/س **كانت** قدرتها ٤٤١ كيلو وات . أوجد :

أ) قوة آلات القاطرة بثقل الكيلو جرام.**بفرض ثبوتها.**

ب) مقدار العجلة المنتظمة

(٢) أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن ويصنع إتجاهها زاوية حادة جيبها $\frac{٣}{٥}$ مع الرأسى إلى أسفل على جسم كتلته ٢ كجم موضوع على نضد أفقى أملس أوجد عجلة الجسم الناشئة عن هذا التأثير وكذلك مقدار رد الفعل العمودى للنضد.

السؤال الثالث:

(١) جسمان كتلتاهما ٤٠ جرام، ٦٠ جرام يتحركان فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى سرعة كل منهما ٥٠سم/ث، ٣٠سم.ث على الترتيب فإذا تحرك الجسمان بعد التصادم مباشرة كجسم واحد أوجد سرعتهما المشتركة حينئذ اذا كان الجسمان يسيران فى اتجاهين متضادين ثم إحسب مقدار قوة التضاغط بين الجسمين بثقل الجرام اذا كان زمن التصادم $\frac{١}{٤٩}$ من الثانية

(٢) صخرة كتلتها ٢٠ كجم تتحرك على مستوي أفقى خشن بسرعة ٨ م/ث وتوقفت نتيجة الأحتكاك وكان معامل الأحتكاك الحركى بين الصخرة والسطح $\frac{١}{٥}$ إحسب الشغل الناتج عن الاحتكاك حتى تتوقف الصخرة.

السؤال الرابع:

(١) خيط خفيف غير مرن يمر على بكرة ملساء و يتدلى من أحد طرفيه ميزان زنبركى كتلته ١٥٠ جرام ومعلق به جسما كتلته ٢٥٠جرام و يتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٦٠٠ جرام فإذا بدأت المجموعة الحركة من السكون أوجد الشد فى الخيط بثقل الجرام وقراءة الميزان بثقل الجرام

(٢) حقيبة كتلتها ٥ كجم تتزلق على مستوى يميل على الأفقى بزاوية ٢٤° لأسفل مسافة ١,٥ متر فإذا كان معامل الأحتكاك = $\frac{٣١}{١٠٠}$ إحسب الشغل المبذول بواسطة كل من الأحتكاك ، الوزن، رد الفعل و إذا كانت سرعة الحقيبة ٢,٢م/ث إحسب سرعتها بعد مسافة ١,٥ متر.

السؤال الخامس:

(١) وضع جسم عند قمة مستوى مائل أملس طوله ٤٠ مترا وارتفاعه ١٠ أمتار أوجد سرعته عند قاعدة المستوى. و إذا كان المستوى خشنا وكانت المقاومة لحركته $\frac{١}{٥}$ وزن الجسم أوجد سرعته عند قاعدة المستوى «مستخدمًا مبدأ ثبات الطاقة»

(٢) جسم كتلته ١٦ كجم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت $\overleftarrow{جـ}$ = (٣ن^{٢} - ٨ن) $\overleftarrow{ى}$ حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه الوحدة فى اتجاه الحركة اذا كان معيار $\overleftarrow{ف}$ بوحدة المتر، ن بالثانية أوجد التغير فى كمية الحركة للجسم فى فترات الازمنة الاتية :

أولًا: [٢ و ٤]　　　　ثانيًا: [٥ ، ٨]

الاختبار السابع

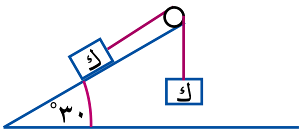
أولاً: اجب عن السؤال الآتى

السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

(١) اذا تحرك جسم كتلته الوحدة فى خط مستقيم بحيث كانت عجلة حركة الجسم تعطى بالعلاقة جـ = ٤ن + ٢ حيث مقاسة بوحدة م/ث^{٢}، ن بالثانية فان التغير فى كمية حركة الجسم فى الفترة الزمنية [٢، ٦] يساوى .... كجم م/ث

٢) قذف جسم كتلته ٥٠٠ جرام رأسيا لأعلى من نقطة على سطح الأرض، سرعته ١٤,٧م/ث فإن طاقة وضعه بعد مرور ثانية واحدة من قذيفة = ... جول

٣) يتحرك جسم بسرعة منتظمة فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ = ٢ أ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ = ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_3$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فإن أ = ...، ب = ...



٤) فى الشكل المقابل المستوى أملس والبكرة ملساء، عند تحريك هذه المجموعة فإن عجلة المجموعة = ... م/ث٢

٥) اذا كان الشغل المبذول من القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = م $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ خلال إزاحة نقطة تأثيرها $\overleftarrow{\text{ف}}$ = -٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + (م+١) $\overleftarrow{\text{ص}}$ يساوى ٠,٠٥ جول ، || $\overleftarrow{\text{ف}}$ || بالسم حيث م ثابت فإن قيمة م = ...

٦) علق جسم فى خطاف ميزان زنبركى مثبت بسقف وصعد يتحرك رأسيا إلى أعلى فكان الوزن الظاهري للجسم ضعف الوزن الحقيقى فإن عجلة الحركة جـ = ...م/ث٢

أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى

السؤال الثانى:

١) صعد رجل وزنه ٧٢ث. كجم طريقا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{4}$ فقطع ١٠٠ متر إحسب التغير فى طاقة وضع الرجل

٢) قاطرة كتلتها ٣٠ طن وقوة آلاتها ٥٦ ثقل طن تجر عددًا من العربات التى كتلة كل منها ١٠طن لتصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° بعجلة منتظمة ٤٩سم/ث٢ فإذا كانت المقاومة لحركة القاطرة والعربات ١٠ث كجم لكل طن من الكتلة المتحركة فما هو عدد العربات؟

السؤال الثالث:

١) عامل بمصنع يدفع صندوق كتلته ٣٠ كجم مسافة قدرها ٤,٥متر بسرعة ثابتة على سطح أفقى فإذا كان معامل الأحتكاك بين الصندوق والسطح $\frac{1}{4}$ إحسب الشغل المبذول بواسطة العامل على الصندوق ثم احسب الشغل المبذول بواسطة رد الفعل.

٢) وضع جسم كتلته ٣٥جرام على نضد أفقى أملس وربط بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة فى حافة النضد و يحمل طرفه الآخر جسما كتلته ١٤ جرام رأسيا أوجد

أولا: العجلة المشتركة للمجموعة والشد فى الخيط وكذلك الضغط على محور البكرة بوحدة الثقل جرام

ثانيا: إذا قطع الخيط بعد $1\frac{1}{2}$ ثانية من بدء الحركة أوجد المسافة التى قطعها كل من الجسمين بعد $\frac{1}{2}$ ثانية من لحظة قطع الخيط

السؤال الرابع:

(١) هبطت عربة سكة حديد كتلتها ٢٠ طن من السكون على منحدر يصنع مع الأفقي زاوية جيبها $\frac{١}{٧٠}$ ضد مقاومات مقدارها ١٤ ث كجم لكل طن من الكتلة فوصلت إلى أسفل المنحدر بعد أن قطعت مسافة ٣٥٠ متر عليه وعند أسفل المنحدر أصطدمت بعربة أخرى ساكنة ومساوية لها فى الكتلة فسارت العربتان معا كجسم واحد على طريق أفقى فإذا سكنت العربتان بعد دقيقة واحدة من لحظة تصادمهما أوجد المسافة الأفقية التى تحركتها العربتان معا.

(٢) يتحرك منطاد رأسيا لأعلى وعندما كان على إرتفاع ٤٠,٤ مترا عن سطح الأرض سقط منه جسم كتلته ٥ كجم فإذا كانت طاقة حركة الجسم لحظة إصطدامه بالأرض تساوى ٢٩٤٠ جول وبفرض إهمال مقاومة الهواء إحسب

أولا: سرعة المنطاد لحظة سقوط الجسم

ثانيا: المسافة التى قطعها الجسم من لحظة سقوطه حتى لحظة انتظامه

السؤال الخامس:

(١) تحركت سيارة كتلتها ٣ طن بأقصى سرعة ومقدارها ٢٧ كم /س صاعدة من منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٣٠}$ ثم عادت السيارة وهبطت على نفس المنحدر بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم/س أوجه المقاومة بغرض ثبوتها ثم إحسب قدرة السيارة بالحصان

(٢) بندول بسيط مكون من خيط طوله $\frac{١}{٢}$١متر ثبت طرفه العلوى وحمل طرفه الأسفل جسما كتلته ٥٠٠ جرام ويتدلى رأسيا فإذا شد الجسم بقوة أفقية إلى أن أصبح مائلا على الرأس بزاوية ٦٠° أوجد:

أولا: التغير فى طاقة وضع الجسم بالجول ثانيا: الشغل الذى بذلته القوة بالجول

ثالثا: سرعة الجسم عند منتصف المسار إذا أزيلت القوة الأفقية وترك الجسم ليتذبذب.

الاختبار الثامن

أولاً: اجب عن السؤال الآتى

السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

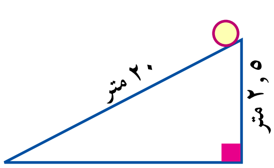
(١) فى لحظة ما كانت كمية حركة جسم ١١٢ كجم.م/ث وطاقة حركته ٨٠ث كجم.م فإن كتلة الجسم= ...... كجم، سرعته = ...م/ث عندئذ

(٢) جسم كتلته ٣٠٠ جرام يتحرك فى خط مستقيم متجه إزاحته $(ن^٢ + ن + ١)\ \overleftarrow{ى}$ حيث $||\overleftarrow{ف}||$ بالسم، ن بالثانية فان معيار القوة المؤثرة عليه = ...داين

(٣) جسم وزنه الحقيقى ٢٨نيوتن، وزنه الظاهرى ٣٢ نيوتن كما يعينه ميزان زنبركى داخل مصعد، يتحرك بتقصير منتظم، فإن إتجاه الحركة يكون............ وإتجاه العجلة يكون ....

(٤) المسافة الرأسية بين جسمين مربوطين فى نهاية خيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة ويتدليان رأسيا هى ١٠٠ سم بعد ٢ ثانية من بدء الحركة فإن سرعة كل منهما حينئذ = ...سم/ث

(٥) فى الشكل المقابل مستوى مائل أملس طوله ٢٠ متر وإرتفاعه ٢,٥ متر وضع جسم عند قمة المستوي وترك يهبط على المستوى فإنه يصل إلى قاعدة المستوى بسرعة = ...م/ث^٢

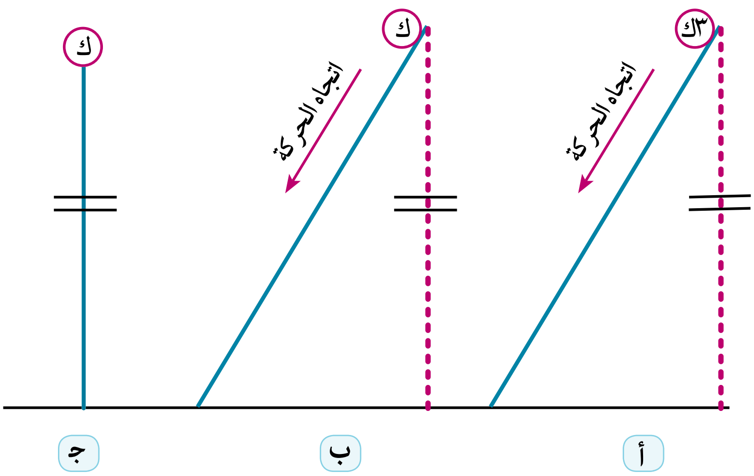


(٦) قذف جسم كتلته ٢٠٠ جرام رأسيا إلى أعلى بسرعة ٤٩ متر/ث فإن طاقة وضعه عند أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم = ... جول

ثانيا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى

السؤال الثانى:

(١) الشكل المقابل ثلاث كتل ك، ك، ٣ك تتحرك من أعلى لأسفل من السكون (بفرض أهمال مقاومة الهواء والاحتكاك)



أولا: أى من الكتل الثلاث تصل للأرض بأكبر سرعة.

ثانيا: أى من الكتل الثلاث تبذل شغلا أكثر للوصول إلى الأرض.

(٢) أثرت قوة ٥ث . كجم فى كتلة ١٩٦ كجم متحركة فى خط مستقيم أفقى فى اتجاه القوة فقطعت مسافة ٢,٨متر احسب مقدار زيادة طاقة الحركة للجسم بالجول، وإذا كانت طاقة حركة الجسم فى نهاية المسافة ١٤١,١٢ جول احسب السرعة الابتدائية للجسم.

السؤال الثالث:

(١) جسم كتلته ١٧٠جرام موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٨}{١٧}$ ثم ربط بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى ويتدلى من الطرف الخالص للخيط ثقل ما، فإذا كان أقل ثقل يلزم تعليقه من هذا الطرف للخيط لحفظ توازن الجسم على المستوى هو ٧٠ ثقل جرام أوجد مقاومة المستوي بثقل الجرام وإذا علق من الطرف الخالص للخيط ثقل قدرة ١٩٤ جرام أوجد عجلة المجموعة بفرض ثبوت المقاومة فى الحالتين

(٢) سيارة قدرة آلاتها ثابتة وأقصى سرعة لها عند صعودها منحدر ما هى ٥٤ كم/س وأقصى سرعة لها عند هبوطها نفس المنحدر هى ١٠٨ كم/س أوجد أقصي سرعة تتحرك بها على مستوي أفقى علما بأن مقاومة الطريق لحركة السيارة ثابتة فى الحالات الثلاث

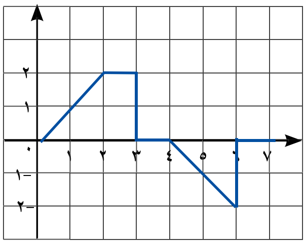
السؤال الرابع:

(١) كرة كتلتها ٢٠٠ جرام تتحرك سرعة ٧م/ث إصطدمت بكرة ساكنة كتلتها ٣٠٠ جرام وتحركتا معا كجم واحد

(أ) أوجد السرعة المشتركة لها بعد التصادم مباشرة

(ب) طاقة الحركة المفقودة بالتصادم

(ج) المسافة التى يسكن بعدها الجسم اذا لاقي مقاومة ٢٠٠ ث . جرام



٢ الشكل المقابل $\overleftarrow{ق}$ تؤثر على سيارة أطفال كتلتها ٢ كجم تسير فى خط مستقيم موازى لمحور السينات مركبة س تتغير بتغير القوة كما فى الشكل احسب الشغل المبذول بواسطة القوة عند:

أ س = ٠ إلى س = ٣متر   ب س = ٣متر إلى س = ٤متر

جـ س = ٤متر إلى س = ٧متر   د س = ٧ متر إلى س = ٢متر

السؤال الخامس:

١ يتحرك جسم متغير الكتلة فى خط مستقيم وكانت كتلته عند أى لحظة زمنية ن هى ك = (٤ن +١) جرام وكان متجه ازاحته يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف}$ = (ن٢ ـ٢ن) $\overleftarrow{ى}$ ، ن بالثانية، || $\overleftarrow{ف}$ || بالسنتيمتر أوجد كمية حركته فى الفترة الزمنية [٣ ، ٥]

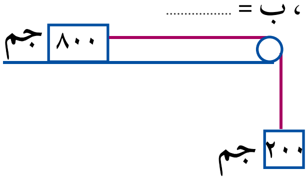
٢ لتعيين مقدار عجلة الجاذبية فى مكان ما علق جسم كتلته ١,٥ كجم فى خطاف ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجلت قراءة الميزان ١٦ ، ٥ نيوتن عندما كان صاعدا بعجلة جـ م/ث٢ وسجل ١٢,٧٥ نيوتن عندما كان هابطا بعجلة جـ م/ث٢ احسب عجلة الجاذبية فى ذلك المكان وكذلك عجلة حركة المصعد.

الاختبار التاسع

أولاً: اجب عن السؤال الآتى

السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

١ يتحرك جسم كتلته ٥ وحدات كتلة تحت تأثير قوة $\overleftarrow{ق}$ = (أ + ١) $\overleftarrow{س}$ + (ب - ٢) $\overleftarrow{ص}$ وكان متجه إزاحته عند أى لحظة يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف}$ = ن٢ $\overleftarrow{س}$ + ($\frac{1}{2}$ ن٢ + ٣ن) $\overleftarrow{ص}$ فإن أ = ... ، ب = ...



٢ فى الشكل المقابل مستوى أفقى أملس فإن الضغط على البكرة =.............. ث.جم

٣ رصاصة كتلتها ٩٨جرام تتحرك أفقيا بسرعة ٧٢٠ كم/س غاصت فى حاجز رأسى مسافة ١٠سم قبل أن تسكن، فإن متوسط مقاومة الحاجز = ...ث كجم

٤ سفينة كتلتها ٤٤١ طن تتحرك بسرعة ٧٢ كم/س فإن طاقة حركتها = ... كيلووات . ساعة

٥ آلة تبذل شغلا قدرة ١٥٠٠٠ كيلوجرامتر خلال ١٠ ثوان فإن قدرة الآلة **المتوسطة** بالحصان تساوى ....

٦ قوة مقدارها ٨٠ نيوتن تعمل فى إتجاه ٣٠° شمال الشرق فإن الشغل المبذول بواسطة القوة خلال إزاحة معيارها ٤٠ متر نحو الشمال يساوى ....جول

ثانيا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى

السؤال الثانى:

١ يتحرك راكب دراجة على طريق أفقى خشن بعجلة منتظمة فتغيرت طاقة حركته بمقدار ١٠٧٨٠٠جول خلال $\frac{1}{2}$ كيلومتر ثم أوقف الراكب حركة ساقيه فقطع ١٠٠متر فقدت خلالها طاقة الحركة بمقدار ٧٨٤٠جول أوجد بثقل الكيلوجرام كلا من المقاومات والقوة.

② كفتا ميزان كتلة كل منهما ٣٥جم متصلتان بخيط خفيف غير مرن يمر على بكرة صغيرة ملساء وضع فى إحدى الكفتين جسم كتلته ٢٨٠جرام وفى الكفة الثانية جسم كتلته ك جرام فإذا هبطت الكفة التى بها الكتلة ٢٨٠جرام مسافة ٥٦٠سم من السكون فى ٢ ثانية أوجد:

أولا: عجلة حركة المجموعة ثانيا: الشد فى الخيط وكذلك قيمة ك

ثالثا: الضغط على كل من الكفتين

السؤال الثالث:

① قذفت كرة كتلتها ٢٠٠جرام بسرعة ٢١متر/ث على مستوى أفقى ضد مقاومات تعادل $\frac{١}{١٤}$ من وزنها وبعد ١٠ ثوان صدمت كرة أخري مساوية لها فى الكتلة تتحرك بسرعة ٧ متر/ث فى الاتجاه المضاد فإذا تحركت الكرتان معا كجسم واحد بعد التصادم إحسب

أولا: السرعة المشتركة للكرتين بعد التصادم ثانيا: دفع كل من الكرتين على الأخرى

ثالثا: طاقة الحركة المفقودة بالتصادم

② تنتقل الصناديق فى أحد المصانع بانزلاقها على مستوى مائل ينتهى بمستوي أفقى فاذا كان طول المستوي المائل ٤٠متر وزاوية ميله على الأفقى ٣٠° والمقاومة لكل من المستويين تعادل $\frac{١}{٥}$ وزن الجسم أوجد سرعة الصندوق عند نهاية المسار بفرض أن سرعته لا تتغير بانتقاله إلى المستوى الأفقى اذا كان طول الجزء الأفقى ١٠ أمتار

السؤال الرابع:

① أثرت قوة قدرها ١٢,٦نيوتن على جسم ساكن موضوع على مستوي أفقى لفترة زمنية فاكتسب الجسم فى نهايتها طاقة حركة قدرها ٩ث كجم.متر، بلغت كمية حركته عندئذ ٤٢ كجم.متر/ث ثم رفعت القوة فعاد الجسم إلى السكون مرة أخرى بعد أن قطع مسافة ٢١ متر من لحظة رفع القوة أوجد كتلة الجسم ومقاومة المستوى لحركة الجسم بالنيوتن بفرض ثبوتها ثم أوجد زمن تأثير القوة.

② علق جسم فى ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد فسجل القراءة ٨٠ث.كجم عندما كان المصعد صاعدا بعجلة منتظمة جـ متر/ث^{٢} وسجل القراءة ٦٠ث. كجم عندما كان المصعد صاعدًا بتقصير منتظم مقداره جـ متر/ث^{٢} أوجد كتلة الجسم وقيمة جـ

السؤال الخامس:

① قاطرة قدرة محركها ثابتة تساوى ١٠٨٠ حصانا وكتلتها ٥٠ طن تجر قطار كتلة ١٣٠ طن على مستوي أفقى خشن بعجلة ٤٩سم/ث^{٢} فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك تعادل ١٠ث. كجم عن كل طن من الكتلة أحسب سرعة القطار بالكيلومتر / ساعة عندئذ.

② عامل يدفع عربة كتلتها ٢٠ كجم لتصعد مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٢٥° لأعلى بقوة مقدارها ١٤٠ نيوتن فإذا كان معامل الأحتكاك بين المستوي والعربة $\frac{٣}{١٠}$ والعربة تتحرك مسافة ٣,٨متر احسب الشغل الكلى المبذول على العربة، إذا تحركت العربة أسفل المستوى من سكون إحسب سرعة العربة عندما تكون على مسافة ٣,٨ على المستوى

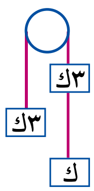
الاختبار العاشر

أولاً: اجب عن السؤال الآتى

السؤال الأول: اكمل ما يأتى:

(١) يجذب حصان كتلة خشبية على أرض أفقية بقوة مقدارها ١٠٠ث كجم وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا تحركت الكتلة بسرعة منتظمة فإن مقدار مقاومة الأرض لحركتها = ...ث كجم

(٢) إذا أثرت قوة ثابتة مقدارها ٥ث. كجم على جسم ساكن كتلته ٤٩ كجم لمدة ٣ ثوانى فإن سرعة الجسم فى نهاية هذه المدة = ...م/ث



(٣) فى الشكل المقابل ٣ك، ٣ك كتلتان معلقتان من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء ومعلق باحدى الكتلتين كتلة إضافية ك وتركت المجموعة للحركة من السكون فإن سرعة المجموعة بعد ٢ ثانية = ...سم/ث

(٤) قذيفة كتلتها ٤٥ جرام تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها ١٤٤٠ كم/س فإن طاقة حركتها = ...جول

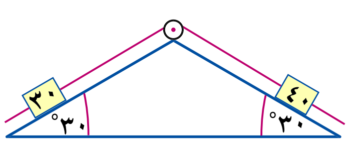
(٥) آلة تبذل شغلا بمعدل منتظم = ١٨٠٠٠ث. كجم. متر كل دقيقة فإن قدرة الآلة المتوسطة = ...حصان

(٦) تتحرك كرة كتلتها ٣٠٠جرام أفقيا إصدمت بحائط رأسى عندما كانت سرعتها ٦٠متر/ث فإذا إرتدت بعد أن فقدت $\frac{٢}{٣}$ مقدار سرعتها فإن التغير فى كمية حركتها نتيجة إصطدامها بالحائط= ....جرام.سم/ث

ثانيا: أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى

السؤال الثانى:

(١) يتحرك جسم كتلته كيلو جرام تحت تأثير القوى $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ب $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٣}$ = -٣ $\overleftarrow{س}$ + ا $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين، || $\overleftarrow{ق}_{١}$ ||، || $\overleftarrow{ق}_{٢}$ ||، || $\overleftarrow{ق}_{٣}$ || مقيسة بالنيوتن ، ا ، ب ثابتان فإذا كان متجه الأزاحة $\overleftarrow{ف}$ = ن^{٢} $\overleftarrow{س}$ + (٢ن^{٢} - ن) $\overleftarrow{ص}$ حيث ف بالمتر ، ن بالثانية
أولا: أوجد قيمة الثابتين ا ، ب ثانيا: احسب الشغل المبذول من محصلة القوى المذكورة خلال الثوانى العشر الأولى من حركة الجسم



(٢) فى الشكل المقابل كتلتان ٤٠جرام، ٣٠جرام مربوطتان فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند قمة مستويين أملسين متقابلين مائلين على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° كما هو مبين بالشكل حفظت المجموعة فى حالة إتزان عندما كان الجسمان على خط أفقى واحد وجزءا الخيط مشدودين فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون أوجد عجلة الحركة والمسافة الرأسية بين الجسمين بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

السؤال الثالث:

(١) تتحرك قاطرة أفقيا تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه المقاومة تساوى ٤٥٠ث.كجم عندما كانت سرعة القاطرة ٣٠ كم/س إحسب أقصى سرعة للقاطرة اذا كانت قدرة محركها ٤٠٠ حصان

(٢) درع وقائى مصنوع من طبقتين ملتحمتين منتظمتى السمك من الحديد والنحاس فإذا كان سمك الحديد ١سم وسمك النحاس ٣سم وكان الدرع فى مستوى رأسى عندما أطلقت عليه رصاصتان متساويتين فى الكتلة فى إتجاهين متضادتين وعموديين على مستوى الدرع وبسرعة واحدة فأخترقت الأولى الحديد وسكنت بعد أن دخلت فى النحاس $\frac{٥}{٤}$سم، بينما أخترقت الثانية النحاس وسكنت بعد أن دخلت فى الحديد $\frac{٣}{٤}$ سم أثبت أن مقاومة الحديد = ٧ أمثال مقاومة النحاس.

السؤال الرابع:

(١) عند عمل أساس احدى العمارات أستخدمت مطرقة كتلتها ٤٨٠ كيلو جرام لستقط رأسيا من ارتفاع ٢,٥متر على عمود أساس خرسانى كتلته ١٢٠ كيلوجرام فيكونان جسما واحدا يغوص فى الأرض مسافة ٢٤ سم أوجد
أولا: السرعة المشتركة للمطرقة والعمود بعد التصادم مباشرة.
ثانيا: دفع المطرقة للأسطوانة ثالثا: متوسط مقاومة سطح الأرض للمطرقة والعمود

(٢) جسم موضوع عند أعلى نقطة من منحدر إرتفاعه ١٢٥سم و يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° تحرك الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل ضد مقاومة ثابتة تقدر بربع وزنه إحسب سرعة وصول الجسم إلى أسفل نقطة للمستوى وما هى السرعة التى يقذف بها الجسم من أسفل نقطة فى الاتجاه المضاد حتى يصل بالكاد إلى قمته.

السؤال الخامس:

(١) جسم كتلته ٤٢جرام موضوع على مستوى أفقي خشن شد بحبل يميل على الأفقى بزاوية جا$^{-١}$ $\frac{٤}{٥}$ فإذا كانت قوة الشد فى الحبل ١٠ث جرام قد بذلت شغلا قدرة ٨٤ث. جم . سم خلال ٢ ثانية من بدء الحركة أوجد
أولا : عجلة حركة الجسم ثانيا: النسبة بين مقاومة المستوى ورد الفعل العمودى

(٢) وقف طفل على ميزان ضغط داخل مصعد متحركا لأعلى بعجلة ١,٩٦ م/ث^{٢} فسجل الميزان ٢٤ث.كجم. أوجد وزن الطفل، واذا هبط المصعد لأسفل بنفس العجلة أوجد قراءة الميزان فى هذه الحالة.

أولاً: الاستاتيكا: الوحدة الأولى : الاحتكاك

إجابات تمارين (١ – ١)

(١) الأحتكاك (٢) الملساء

(٣) على وشك الحركة (٤) رد الفعل العمودية

(٥) رد الفعل المحصل (٦) رد الفعل العمودى

(٧) ١٨ ث كجم (٨) $\frac{٢}{٣}$

(٩) ر = ٥٦ ، م = ٠,٧٥ (١٠) ٧٠,٨٦ ث كجم

(١١) و = ١٣ ث جم ، م = $\frac{١}{٣}$

(١٢) الجسم يكون على وشك الحركة

(١٣) ر = وزن الصندوق = ٤٠ ث كجم

(١٤) و = ١٥ نيوتن ، ك = ٩ نيوتن

إجابات تمارين (١ – ٢)

(١) × (٢) ✔ (٣) ✔ (٤) ×

(٥) ✔ (٦) × (٧) أ (٨) أ

(٩) أ (١٠) ٣٢ نيوتن

(١١) الجسم على وشك الحركة

(١٢) الاحتكاك غير نهائى ، ٥ ث كجم

(١٣) ٢٥,٠٤٥٣ نيوتن (١٤) هـ = ل ، رَ = و

(١٥) هـ ٣٠° ، م = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$ (١٦) ١٩ ث كجم

(١٧) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، و = ٤ $\sqrt{٣}$ ث كجم ، ٢ $\sqrt{٣}$ ث كجم

(١٨) $\frac{٥}{٣}\sqrt{٣}$ ث كجم ، $\frac{٤}{٣}\sqrt{٣}$ ث كجم

(١٩) ظا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (٢٠) و = و × جا (هـ + ل)

إجابات التمارين العامة

(١) أ (٢) ب (٣) جـ

(٤) الجسم لا يكون على وشك الحركة.

(٥) أ ١٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم ب رَ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

(٦) $\frac{١}{٢}$ (٧) ١٠ ث كجم

(٨) ح > مركبة الوزن يكون الجسم متزن

و = ١,٢ نيوتن

الوحدة الثانية : (العزوم)

إجابات تمارين (٢ – ١)

(١) ٤٠٠ (٢) ٥٤٠ (٣) ٢٠ $\widehat{\text{ع}}$

(٤) القوة تمر بهذه النقطة

(٥) بعد النقطة عن خط عمل القوة

(٦) ٣٥ (٧) ب (٨) أ ل جا θ

(٩) $\overleftarrow{\text{و}}$ // $\overline{\text{أب}}$ (١٠) ل = $\frac{-٧}{٩}$ ، م = $\frac{١٣}{٩}$

(١١) خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ١) ، (٦، ٤)

(١٢) ١٤٩,٧٦٨٩ نيوتن. متر

(١٣) أ -١٢٠٠ نيوتن .سم ب -١١٧٥,٨٧٧ نيوتن. سم

جـ ٦٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن. سم

(١٤) (-٤٦ ، ٢٨) نيوتن

إجابات تمارين (٢ – ٢)

(١) أ -١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٩ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$

ب -١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ - ٧ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، ٣,٧٣

(٢) ل = ٣ (٣) ١٢٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٤٨٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(٤) -١٢٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٦٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (٥) $\overleftarrow{\text{و}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{س}}$

(٦) ب = -٣ ، طول العمود = $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{١٤}}$

(٧) ٤٨٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٣٦٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (٨) ع = ١ ، س = ١

(٩) ١٥٠ (١٠) ١٣٢٨,٤٣

إجابات التمارين العامة

(١) ١٨,١٩٩ نيوتن

(٢) -٥٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٢٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢٨ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(٣) ١١ نيوتن (٤) -٢٨ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(٥) -٧ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (٦) ك = ٢

(٧) -٣٢٦٠,٧٧ نيوتن. م

(٨) محصلة القوة تمر بالنقطة جـ

(٩) ٢٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن. م

إجابات الاختبار التراكمى

(١) ١٠ جتا θ (٢) ٥

(٣) $(٢، \frac{\pi}{٣})$ (٤) $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

(٥) ٨ جا ٧٠ (٦) ٤

(٧) (-٤، ٧، -٦)

(٨) أ -١٣٠٠ ب -٣٠٠ جـ -٨٠٠

(٩) $\frac{-٧٧٥\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن . م (١٠) ١٩,٦٤٨٥ نيوتن . سم

(١١) أقل قيمة للقوة ق يكون عند σ = ٩٠ هي ٢٠ نيوتن

الوحدة الثالثة: القوى المتوازية

تمارين إجابات (٣ – ١)

(١) د (٢) أ (٣) أ

(٤) أ ٢٦ نيوتن ٨,٥ سم
ب ٣٨ نيوتن ٢٢,٥ سم
جـ ٢٦ نيوتن ١٨,٧٥ سم

(٥) ب ٨ نيوتن ١٤ نيوتن
جـ ١٢,٧٥ نيوتن

(٦) أ ٣٥ نيوتن ٤٠ سم
ب $ق_{١}$ = ٢٠ نيوتن ح = ١٤

(٧) أ ١٤ نيوتن ٢,٥ سم عند أ
ب ٣ نيوتن ٢١ سم
جـ ٢ نيوتن ١٢ سم

(٨) ٢٧ سم (٩) ٤ متر

(١٠) ٣٠ سم (١١) ٢٠ نيوتن ١٢سم

(١٢) $١\frac{٥}{٨}$ متر (١٣) ٦,٥ نيوتن

(١٤) مقدار المحصلة = $\frac{٣}{٢}$ نيوتن وتعمل رأسيًا لأعلى $\frac{٥}{٣}$ متر من نقطة أ

إجابات تمارين (٣ – ٢)

(١) ١١ نيوتن ، س = ٢٨سم

(٢) ك = ١٠ نيوتن ق = ١٧ نيوتن

(٣) س = ٤سم

(٤) ك = ١٠ نيوتن ق = ١٥ نيوتن

(٥) $ر_{١}$ = ١٤,٢٥ كجم $ر_{٢}$ = ٤٨,٧٥ كجم

(٦) ١ متر

(٧) س = ٥٦ سم و = ١٥ نيوتن

(٨) أ ١٠٠ ث كجم ١٠٠ ث كجم
ب ١٦٠ ث كجم ١٢٤ ث كجم

(٩) **أولًا:** ش = ١٠٠ ث جم
ر = ٣٠٠ ث جم
ثانيًا: و = ٢٠٠ ث جم

(١٠) س تقع بين ٤٠سم، ٦٠سم
أكبر قيمة للشد عند أ = ١٢ ث.جم
وأقل قيمة = ٧ث.جم
أكبر قيمة للشد عند ب = ١٥ ث.جم
وأقل قيمة = ١٠ ث.جم

(١١) ٨ نيوتن

(١٢) أكبر مسافة من أ هى ٣٣ كم ورد الفعل عند أ، ب علي الترتيب ٦٠ ث. كجم / ٤٠ ث. كجم

(١٣) $\overleftarrow{ق_{٣}} = -٩\ \overleftarrow{س} - ١٢\ \overleftarrow{ص}$
$\overleftarrow{ق_{٤}} = -٦\ \overleftarrow{س} - ٨\ \overleftarrow{ص}$

إجابات تمارين عامة

(١) ١٠٥ سم

(٢) عزم المحصلة حول نفس النقطة

(٣) ٢٦ سم

(٤) **أولًا:** ١٠٠ نيوتن والبعد بين خط عمل النيوتن ١٠٠ سم
ثانيًا: ٤٠٠ نيوتن والبعد عن خط عمل النيوتن ٢٥سم

(٥) ٨ نيوتن ٣٢ سم

(٦) $٣\frac{٦}{٧}$سم

(٧) ٤، ٢، ١٢

(٨) **أولًا:** ٣٠سم عن أ
ثانيًا: ق = ٨٠ ث. كجم

(٩) وزن القضيب = ٩٠ ث جم والبعد بين الحاملين ٢٢سم

(١٠) **أولًا:** ١٠ نيوتن ٧٠ نيوتن
ثانيًا: ١٠٠ نيوتن

الوحدة الرابعة: الاتزان العام

تمارين إجابات (٤ – ١)

(١) ✗ (٢) ✗ (٣) ✔ (٤) ✗

(٥) ينعدم متجه مجموع القوى
ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

(٦) عموديًا على القضيب

(٧) ٢ نيوتن

(٨) ش = ٥ نيوتن ر = $\sqrt{٦٥}$
ل = ١٩'' ١٥' ٦٠°

(٩) ش = ٤ نيوتن ر = ٢$\sqrt{٧}$

(١٠) $\frac{٥}{١٢}$

(١١) ش = ٨٠ ، ر١ = ١٢٨ ، ر٢ = ٨٠

(١٢) ر٢ = ١٢ ، م = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، رد فعل الأرض ١٢$\sqrt{٣}$

(١٣) **أولًا:** ش = ٦٥ ث كجم
ثانيًا: ش = ٨٥ ث كجم

(١٤) ١٠ نيوتن (١٥) م = $\frac{١}{٣}$

(١٦) **أولًا:** ٧٠ نيوتن **ثانيًا:** ١٤ نيوتن

(١٧) إثبات

تمارين عامة

(١) ٨٠ سم من الطرف ب

(٢) ٣٤ نيوتن

(٣) م = $\frac{٥}{٨}$ و = ١١٠ ث كجم

(٤) و = ٢٠ ث كجم ر٢ = ١٢,٥ ث كجم

(٥) إثبات

(٦) $\frac{٨}{١١}$ (٧) هـ = ٢ل

(٨) ر = ٥ ث كجم
و = ٢,٥ ث كجم

حل الاختبار التراكمي

(١) س = ٢٦'' ٣٥' ١٣٨°

(٢) ش = ٣٠$\sqrt{٣}$ ث جم و = ٣٠٠ ث جم

(٣) ش = ٢٤ نيوتن ش٢ = ١٠ نيوتن

(٤) هـ = ٢٢° و = ١٨,٩ نيوتن

(٥) ر١ = ١٠$\sqrt{٣}$ ث. جم ، ر٢ = ٢٠$\sqrt{٣}$ ث. جم

(٦) ش٢ = ١٢نيوتن ، ش١ = ١٦ نيوتن

(٧) و = $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ و (٨) ظا هـ = ٢

(٩) و = ١٨ ث . كجم

(١٠) إثبات

(١١) و = $\frac{١٣}{٤}$ ث . كجم ر١ = ٣ ث . كجم
ر٢ = $\frac{١٥}{٢}$ ث. كجم

الوحدة الخامسة: الازدواج

إجابات تمارين (٥ – ١)

(١) د (٢) د (٣) ب (٤) د

(٥) جـ (٦) ب (٧) د (٨) ب

(٩) (أ) ١٦٠ نيوتن . سم (ب) ٢٤٠$\sqrt{٢}$ نيوتن . سم
(جـ) ١٠٠$\sqrt{٣}$ نيوتن. سم
(د) ١٢٠$\sqrt{٣}$ نيوتن. سم
(هـ) ٥٢٠ نيوتن. سم

(١٠) (أ) ١٠٠ نيوتن سم (ب) ١٠٠ نيوتن . سم

(١١) ١٠ وحدات عزم

(١٢) أ = -٥ ، ب = ٢ ، ل = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٩}}$

(١٣) ٦،٦ راسين القوتان هما ٦ ، ٦

(١٤) و = ٤٠ نيوتن

(١٥) ش = ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن ر = ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن

(١٦) ٣٠° ، أ ١٥٠°

(١٧) القوتان ٣٠$\sqrt{٢}$ ، ٣٠$\sqrt{٢}$ نيوتن أحدهما تعمل في اتجاه $\overleftarrow{بء}$ والأخرى في اتجاه $\overleftarrow{ءب}$

إجابات تمارين (٥ – ٢)

(١) (أ) تكافىء إزدواج ١٠ نيوتن ٠ متر
(ب) لا تكافىء إزدواج
(جـ) لا تكافىء إزدواج
(د) المجموعة تكافىء إزدواج -١٥ نيوتن ٠ م
(هـ) تكافىء إزدواج ١٧ ث . كجم . متر

و لا تكافىء إزدواج

ز تكافىء إزدواج ١٦ نيوتن · سم

ح لا تكافىء إزدواج

ط المجموعة تكافىء إزدواج = ٧٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن · سم

(٢) ٩ نيوتن . سم

(٣) ٩٨ ث . كجم · سم

(٤) معيار عزم الأزدواج = ٣٠٠ ث جم · سم و يعمل فى الاتجاه أ ب جـ د

القوتان هما ٦، ٦ ث جم

(٥) ١٧٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم · سم

القوتان هما ١٧,٥ ، ١٧,٥ ث كجم تؤثران عند ب ، ء

(٦) ٤٠٠ نيوتن.

(٧) ١١٣٤ نيوتن. سم (٨) ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم

(٩) ٥١٦ ث كجم. سم (١٠) ٥٤ $\sqrt{٣}$ ث جم. سم

(١١) ٤٨٠٠ نيوتن . سم (١٢) ق = ٢٠٠ نيوتن

إجابات تمارين عامة

(١) أ ٢٠٠٠ نيوتن · سم

ب ١٠٠٠ نيوتن · سم جـ صفر

(٢) أ ٧٠ نيوتن . سم

ب ٤٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن · سم

جـ θ = ٣٠° د θ = ٣′ ٦١°

(٣) وزن القضيب = ١٠٠ نيوتن لأسفل

رد فعل المسمار = ١٠٠ نيوتن لأعلى

(٤) $ج_أ = ج_{جـ} = ج_ء$ = ٢٢٠ ث . جم . سم

(٥) أ ٢٠٠ نيوتن · سم ب ١٧٦ نيوتن · متر

جـ ٦٥٠ نيوتن

(٦) -٨٠٠ نيوتن · متر

- ٧٠٠ نيوتن · متر

= ٣٠٠ ($\sqrt{٣}$ - ٥) نيوتن · متر

(٧) ١٢٠ ث كجم · متر

(٨) أ = ٥ ، ب = ٣ $\|\overleftarrow{ج}\|$ = ١١ وحدة جرام

البعد العمودى بين القوتين = $\frac{١١}{٣٤}\sqrt{٣٤}$ وحدة طول

(٩) -١٢ $\overleftarrow{ع}$ (١٠) $\overleftarrow{ج_أ} = \overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{ج_{جـ}}$ = ٨ $\overleftarrow{ع}$

(١١) ق = ١٥ نيوتن، ك = ٥ نيوتن

إجابة أختبار تراكمى

(١) جـ (٢) أ (٣) ب

(٤) أ (٥) ء

(٦) ق = ١٠ نيوتن ك = ١٠ نيوتن

(٧) م = ٤ ، ل = -٦ (٨) جـ = ٠ ب = ١

(٩) -٥٤ نيوتن · سم

(١٠) $ق_٢$ = ٨ نيوتن $ق_١$ = ١٦ نيوتن

(١١) ك = -٢ ، ل = ٣

الوحدة السادسة استاتيكا (مركز الثقل)

إجابات تمارين (٦ - ١)

(١) ✔ (٢) ✗ (٣) ✔ (٤) ✔

(٥) ✔ (٦) ✗ (٧) ✔ (٨) ✗

(٩) ✔ (١٠) ✔

(١١) ٣سم من أ (١٢) ($\frac{٩}{٤}$ ، ٢)

(١٣) ($\frac{١}{٢}$ ، ٢) (١٤) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣٧}{٢٠}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

(١٥) أ (٥، $\frac{١٦}{٣}$) ب (٤٤، ٦)

جـ ($\frac{١٣}{٢}$، $\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$) د ($\frac{١٣٠}{٣}$ ، ١٠)

هـ (٥، ٦)

و (صفر، $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ ل)

باعتبار أن طول ضلع المسدس = ٢ ل

(١٦) ٤٩سم عن طرف أ

(١٧) ١٢سم عن أ

(١٨) مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف $\overline{م جـ}$

(١٩) ١٩′ ١١°

(٢٠) مركز الثقل هو (٨,٤، ٣)، ٤′ ٢٨°

(٢١) ($\frac{١٩}{٣٠}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل) (٢٢) ($\frac{١٥٢}{١٥}$ ، ٦)

إجابات تمارين (٦ - ٢)

(١) مركز الثقل (٢) نقطة التعليق

(٣) نقطة منتصفه

(٤) مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين)

(٥) متوسطات المثلث　(٦) خط هذا المحور

(٧) هذا المستوى　(٨) مركز الدائرة

(٩) مركز الكرة　(١٠) مركزها الهندسى

(١١) منتصف محورها

(١٢) **أولًا:** يقع فى مركز المربع

ثانيًا: يقع عند (٥٠ ، ٥٠) من أ

(١٣) ٣٠ - ٢٧,٥ = ٢,٥سم من مركز ثقل القرص الأصلى

(١٤) مركز ثقل الجزء المتبقى هو (٦، $\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$)

(١٥) يبعد ٧سم عند ى

(١٦) **أولًا:** و يبعد عن مركز المسدس مسافه ٢$\sqrt{٣}$ سم

ثانيًا: ٥٤° ١١َ

(١٧) $\frac{١}{٢}$

(١٨) ($\frac{١٤١}{٧}$ ، $\frac{١٢٣}{٧}$) ، طا هـ = $\frac{٤١}{٤٧}$

(١٩) (٣,٧٦ ،٣,٧٦)　(٢٠) $\frac{١٣}{١٢}$

إجابات تمارين عامة

(١) جـ　(٢) ب　(٣) أ　(٤) ى

(٥) أ　(٦) ى　(٧) أ

(٨) $س_م$ = $\frac{٢}{٣}$ سم　$ص_م$ = ١ سم

(٩) ٢,٣سم، ٢,٠٨سم

(١٠) ١٣$\frac{٥}{٧}$سم عن نقطة ب

(١١) ٥$\sqrt{٧}$ سم

(١٢) ($\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{١٤}$)، $\frac{\sqrt{٣٣٧}}{١٤}$

(١٣) ٧سم

إحداثى مركز الثقل (٧، ٢,٤) ، طا هـ = $\frac{١٢}{٣٥}$

(١٤) ($\frac{١٣٠}{٣}$ ، ٢٥)　(١٥) ك = ٢٠٠جم

(١٦) (-٢ ، -٣)

(١٧) طا هـ = $\frac{٢}{٩}$

(١٨) طا هـ = $\frac{٢٥}{٣١}$　(١٩) طا هـ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

(٢٠) مركز الثقل يقع عند نقطة هـ

(٢١) ٢٠ سم، ٢٠ سم

(٢٢) ($\frac{٧١٠}{٨١}$ ، ٨) ، طا هـ = $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

(٢٣) $طا^{-١}$ $\frac{٥}{٨}$　(٢٤) ٢٤سم

ثانيًا الديناميكا

الوحدة الأولى : الدوال المتجهه

تمارين الدرس (١ - ١)

(١) د　(٢) أ　(٣) جـ　(٤) جـ

(٥) د　(٦) د　(٧) جـ

(٨) (١) ⟵ (٥)　(٢) ⟵ (٦)

(٣) ⟵ (٤)

(٩) (١) سالبة - الجسم يتباطأ

(٢) موجبة - الجسم يتحرك يتسارع

(٣) موجبة - الجسم يتباطأ

(١٠) (١) موجبة - الجسم يتحرك بتسارع

(٢) سالبة- الجسم يتحرك بتباطؤ

(٣) موجبة - الجسم يتحرك بتسارع

(١١) أ -١ ، -٦

ب ٤ ، -٣ ، -٤

جـ ∴ ≃ ف ∈ [-٨ ، ٢]

(١٢) أ ع = ± ك $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$

ب ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك

جـ $ن_١$ = ($\frac{-\pi}{٤}$ + ٢ م π) × $\frac{١}{ك}$

$ن_٢$ = ($\frac{٧\pi}{٦}$ + ٢ م π) × $\frac{١}{ك}$

جـ = $\frac{أك^٢}{٢}$

(١٣) $\frac{١٥}{٨}$ م/ث٢

(١٤) ± ٥ ، صفر

(١٥) أ $\frac{-٢}{س^٥}$　ب -٦٤ وحدة عجلة

(١٦) ٩س ، ١٨ وحدة عجلة

تمارين الدرس (١ - ٢)

(١) جـ　(٢) د　(٣) ب　(٤) د

(٥) د　(٦) ب　(٧) د　(٨) أ

(٩) د　(١٠) ٢٦,١ متر

(١١) ∴ ع = ن^{٢} - ٦ن + ٢

∴ س = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢ن ، س (٨) = $\frac{-١٦}{٣}$

(١٢) ن = ٢ ، اقصي سرعة = $\frac{٣٢}{٣}$ م/ث

(١٣) ع = ± $\sqrt{٢}$ م/ث

س= ± ٤$\sqrt{٢}$ متر

(١٤) ع = ± $\sqrt{٧}$ م/ث

س = $\frac{-١٣}{٣}$ م أو س = ٤م

تمارين عامة

(١) د (٢) جـ (٣) د (٤) جـ

(٥) أ (٦) جـ (٧) أ

(٨) -٤سم/ث ، ٤ كم/ث^{٢}

(٩) س ($\frac{\pi}{٢}$) = -١

(١٠) أ -٦ م/ث ، ٦ م/ث^{٢}

جـ ∴ ع تتزايد فى الفترة] ٢ ، ∞[

ع تتناقص فى الفترة] ٠ ، ٢[

د ٢٨ متر

(١١) -٦م/ث ، $\frac{٢٦}{٤}$ متر

(١٢) جـ (٠) = -٦ م/ث^{٢}

جـ (٢) = ٦ م/ث^{٢} ، ١٠م/ث

(١٣) س (١) = $\frac{١١}{٦}$ متر

(١٤) ٤٣,٤متر

الوحدة الثانية : قوانين نيوتن للحركة

إجابات تمارين (٢-١)

(١) ب (٢) جـ (٣) ب (٤) د

(٥) ب ، د

(٦) ٢٠ م/ث (٧) ٣٠٤٢جم.م/ث

(٨) ١٦٠٠٠٠جم.سم/ث

(٩) ٩,٣م/ث (١٠) ١٠,٥ كجم. م/ث

(١١) ١,٠٥×١٠^{٤} كجم.م/ث

(١٢) أ ٢٩,٤ كجم.م/ث

ب ٣٩,٢ كجم.م/ث

جـ ٣٩,٢ كجم.م/ث

(١٣) ٦ كجم.م/ث

(١٤) أ -٢٤ كجم. م/ث

ب -٧٢ كجم. م/ث

جـ -٤٨ كم . م/ث

(١٥) أ ١٦٢ كجم.م/ث

ب ٥٤جم. م/ث

(١٦) أ ٥٧٦جم.م/ث ب صفر

إجابات تمارين (٢-٢)

(١) ب (٢) أ (٣) ب (٤) جـ

(٥) جـ

(٦) أ و= ٤٠ نيوتن ك = ١٢٠ نيوتن

ب و= ٨٠ نيوتن

جـ و= ٢٥ نيوتن ، ك= ٤٩ نيوتن

د و= ٤٠ نيوتن

(٧) أ ٨٤ نيوتن ب ٤٥ نيوتن

جـ ٢٨ نيوتن ، ٢٢ نيوتن

د و= ١٨ نيوتن

(٨) ٤٨ ث . كجم (٩) ١٦ $\frac{٢}{٣}$ ث كجم

(١٠) ١٨٠ كم/س (١١) ١٤٠ كم/س

(١٢) ١,٨٧٥ ث كم (١٣) ٦ كم/س

(١٤) ∴ م^{٢} = ٤٠ ث كجم (١٥) ٧ عربات

(١٦) ١٠٠٠ث كجم

إجابات تمارين (٢-٣)

(١) جـ (٢) جـ (٣) د (٤) د

(٥) جـ (٦) جـ

(٧) شكل (٢٧) و= ١١٨ نيوتن

شكل (٢٨) و= ١٠ نيوتن

شكل (٢٩) ١٣١ نيوتن شكل (٣٠) ٢٠ كجم

شكل (٣١) ٨ كجم شكل (٣٢) ٤ كجم

(٩) شكل (٣٣) - ٥م/ث^{٢} ، شكل (٣٤) - $\frac{١}{٥}$ م/ث^{٢}

شكل (٣٥) ٤,٨م/ث^{٢}

(١٠) جـ = ٣٠سم/ث^{٢} (١١) ٩٨٠ نيوتن

(١٢) ٦٢,٥ث كجم (١٣) ٣٦٧,٥سم/ث

(١٤) ٨٠٠م = نيوتن لكل طن من الكتلة ، ن = ٢٥ ث

(١٥) ٥٩ث كجم (١٦) ١٢٩٢,٥ ث. كجم

(١٧) ٠,٨ ثقل طن (١٨) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ م/ث^{٢}

(١٩) $\frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$نيوتن (٢٠) $\frac{١}{٢}$ (٣$\overrightarrow{س}$ + ٢$\overrightarrow{ص}$ + ٦$\overrightarrow{ع}$)

(٢١) أ = ٦ ، ب = ٣ ، جـ= ١

(٢٢) أ = ١ ، ب= -٩

(٢٣) **أولا:** ١$\overrightarrow{ى}$ **ثانيا:** ٤٧ نيوتن

(٢٤) ٦٠٠ داين (٢٥) ١٧٠ داين

(٢٦) $\overrightarrow{م}$ = (٨ن^{٢}+١٠ن+٢)$\overrightarrow{ى}$

(٢٧) ع(٢) = ٢م/ث ب(٢) = ١,٥م

(٢٨) جـ ≶ $\frac{٤}{١٥}$ ٣ (٢٩) ١٠^{٤} ث كجم

(٢٩) ١٦٠ داين

(٣٠) ٤٠٢ ث كجم

تمارين (٢-٤)

(١) ٦٠ (٢) ١١٢,٤٢٠ (٣) ٧٢

(٤) ٣٥ ، ٤٢

(٥) أ ٨٠ ث . كجم ، ب ٧٦,٤ ث. كجم

جـ ٧٧,٦ ث. كجم

(٦) أ ٤٠ جرام ب ٢٤٥ جرام

جـ ١٠٠ جم

(٧) ١,٤م/ث^{٢} (٨) ١٥ ث. كجم

(٩) ١٠٨ ث كجم صفر،

(١٠) ك= ١٤ جم ، ر= ١٥ جم

(١١) ١,٤ م/ن لأعلى

تمارين (٢-٥)

(١) أ ٢,٤٥ ولأعلى ب ٩,٨م/ث

جـ $\sqrt{٣}$

(٢) أ $\frac{٤٩}{٧٥}$ ولأسفل ب ٢,٩٤ جـ ١٤,٤

(٣) أ (٤) جـ (٥) جـ (٦) جـ

(٧) ٢,١٢م/ث٢ ، ٨ث.كجم

(٨) جـ = ١,٥م/ث^{٢} ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ث.كجم

(٩) -٣,٨ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ م/ث^{٢}

٩,٢ $\sqrt{٢}$ ث.كجم

(١٠) $\frac{ن_١}{ن_٢}$ = ١

تمارين (٢-٦)

(١) أ $\frac{٢}{٧}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{١}{٤}$

د ≃ ,٧ هـ ≃ ,٣٥ و ≃ ,٣٣

ز ≃ ,٢٧ ح ٨,٦ كجم

(٢) م$_ح$=١

(٣) أ ١٩,٨نيوتن ب ١١,٨ نيوتن

(٤) $\frac{١}{٤}$ (٥) ١,٠٨

تمارين (٢-٧)

الاكمال

(١) أ صفر ب ٣ جـ ٢

(٢) أ ٤,٩ ب ٩,٨ جـ صفر د ٣٩,٢

(٣) أ ١٤٠ ب ٤٨٠ جـ ٩٦٠ د ٣٦٠

(٤) أ $\frac{١}{٣}$ د ب $\frac{٨}{٣}$ ك جـ ٤,٩ د ٧,٣٥

هـ $\frac{١}{٢}$ و ١,٢٥

(٥) أ $\frac{٧}{٢}$ ى ب $\frac{١٠}{٧}$ جـ $\frac{١٠}{٧}\sqrt{٢}$

د $\frac{٧}{٢}$ ى هـ $\frac{٤}{٧}$ ى

(٦) أ ٣,٥ ب ٢٥,٢ جـ ٢٥,٢$\sqrt{٣}$

(٧) أ ٢٨٠سم/ث

(٨) ٢,٤٥م/ث^{٢} ، ٧٣,٥ نيوتن ، ١,٩٦ متر

(٩) $\frac{٣}{٢}$ (١٠) ن = $\frac{٤}{٧}$ ث

(١١) ٧٠ سم/ن^{٢} ٧٨٠ ث جم

(١٢) ٤,٢ م/ث، ١٩,٦ كجم (١٣) ٤٢٠ كم

(١٤) ٢٢,٦٨ كجم ، ٢٧٤,٩٨ نيوتن

(١٥) ١٨٠سم/ث^{٢}

٧٢٠٠٠ داين ، ٧٢٠٠٠$\sqrt{٢}$ داين

(١٦) ٢ث (١٧) ١,٤٧$\sqrt{٢}$ نيوتن

٧٠$\sqrt{١٠}$ سم/ث ، ٥٠سم

تمارين عامة

اسئلة الاكمال

(١) أ ٤٠ ب $\frac{٢٠٠}{٤٩}$

(٢) ٣٧,٥ (٣) $\frac{٣}{٤}$ (٤) ٣٥٢,٨

(٥) ٢٨ (٦) ١٥ (٧) ٩,٨

(٨) ١١,٢ كجم م/ث (٩) ٨٠ ث كجم

(١٠) ٤٦٨ث (١١) $\frac{٤٠٠}{٣}$ جم

(١٢) ٤٩, م/ث ، ٩٣١, نيوتن

٦٣٧, نيوتن ، ٧٠سم

(١٣) $\frac{١٧٥}{٣}$ جم ، ٧م (١٤) ٦ كجم

(١٥) جـ = ١,٩٦م / $ث^٢$ ∴ ن = ٢ ث

(١٦) ٦, م/$ث^٢$ ، ٢,٣٩٢ نيوتن

∴ ن = ٣ ث

(١٧) ∴ ع = $\frac{\sqrt{٤٩٩}}{٥}$ ، ع = $\sqrt{\frac{٤١}{٥}}$

الوحدة الثالثة : الدفع و التصادم

إجابات تمارين (٣ - ١)

(١) أ (٢) جـ (٣) ب (٤) ب

(٥) أ (٦) جـ (٧) ٥٠٠م/ث

(٨) ١٠٠م/ث (٩) ٢٥٠سم

(١٠) ٢,٨كم.م/ث ، ٥٦ نيوتن

(١١) ٧٥ × $١٠^٣$ نيوتن

(١٢) م = ٥٠ ث كجم ، ع = ٧,٣٥ م/ث

(١٣) ١٠٦٠ ث. كجم (١٤) ١١,٧٥ث. كجم

(١٥) -٥٢٥ × $١٠^٣$ جرام. سم/ث

(١٦) أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب= ٧

إجابات تمارين (٣ - ٢)

(١) د = ق × ن (٢) دفع هذه القوة على الجسم.

(٣) كيلو جرام . م / ث أو نيوتن × ثانية

(٤) التصادم المباشر

(٥) مجموع كمية حركتهما بعد التصادم

(٦) ١٦٠داين .ث (٧) ١٠م/ث

(٨) ٢,٥ث. جرام (٩) ١٢ × $١٠^٣$ جرام. سم/ث

(١٠) ٤٥٠٠ جرام. سم/ث (١١) -٤× $١٠^٥$ داين . ثانية

(١٢) ٧٨ نيوتن

(١٣) $\frac{١٠}{٣}$ فى اتجاه مضاد لحركتها ، $\frac{٢٠}{٩}$ سم

(١٤) ٧م/ث «السرعة المشتركة» ، م = ٣٦٤٠٠ث. كجم

(١٥) ٣ كجم. م/ث (١٦) ١٠٠سم/ث ، ٦٠٠٠٠ نيوتن

(١٧) $\frac{٦٩}{٤}$م/ث ، ن = ١٧,٦ ثانية

(١٨) ٣م/ث

إجابات التمارين العامة

(٤) ب (٥) د (٦) أ (٧) ب

(٨) أ (٩) أ

(١٠) ٢٤٢سم / ث فى اتجاه مضاد

(١١) ٤,١٦ث. كجم

(١٢) ١٦,٨ كجم . م/ث ، ١٧٧,٨ نيوتن

(١٣) ١٠٠ ث. جرام

(١٤) ١٥سم/ث فى نفس الأتجاه ، ٣٥٠٠ جرام . سم/ث

(١٥) $\frac{١}{٢}$ م/ث ، ٤,٢٤٢ نيوتن . ث

(١٦) ٩٨٠ ث. كجم (١٧) ١٠سم/ث

(١٨) ف= ٥ متر

إجابات الاختبار التراكمى

(٧) أ = -٢ ، ب= ١

(٨) $\frac{٧}{١٠}$ م/$ث^٢$ ، ٧٠ كجم (٩) ٢٠ متر

(١٠) ٤,٢م/ث ، ن = $٢\frac{١}{٧}$ث

(١١) $\frac{١}{٤}$ م/ث فى الأتجاه المضاد

الوحدة الرابعة : الشغل

إجابات تمارين (٤ - ١)

(١) ب (٢) أ (٣) د (٤) جـ

(٥) أ (٦) ١٥٨٦ إرج (٧) ٤٨× $١٠^٣$ إرج

(٨) أ ٣١,٩ جول ب صفر جـ صفر

د ٣١,٩ جول

(٩) ١٨ وحدة شغل (١٠) ١٦ وحدة شغل

(١١) ٣٠ $\sqrt{٤٨١}$ جول

(١٢) $\overleftarrow{ق}$ = ١٨ $\overleftarrow{ص}$ + ٢٤ $\overleftarrow{ص}$ ، ٣٦٠٠ وحدة قياس شغل

(١٣) ٥٥١٢٥ جول (١٤) ٣٠ كجم

(١٥) ف = ٩٨ متر (١٦) ٣٠ متر

(١٧) ٤٩ × ١٠^{٤} جول

(١٨) (١) صفر (٢) ٤٨٠,٢ جول (٣) -٤٥٦,١٩ جول

(١٩) ق = م + ٢٠٠٠ ث. كجم ٥٠٠ متر

= ٥ ث. كجم

(٢٠) ٥٨٢٣٠٠ جول -٤٤١٠٠ جول -٨٨٢٠٠ جول

٨٨٢٠٠ جول

(٢١) أ ١٢٦٠٠ وحدة شغل ب $\frac{١}{٣}$ ٢٨٣٣٣ وحدة شغل

(٢٢) ٥٣, جول (٢٣) ك ى ق وحدة شغل

إجابات تمارين (٤ – ٢)

(١) ١٥٠٠٠ (٢) ٨ (٣) ١٥ (٤) ٢,٥×١٠^{٥}

(٥) ٦٢٤٠ (٦) ٢,٩٤

(٧) $\frac{١}{٤٠٠٠}$ ثانية (٨) ٧٠ سم/ث

(٩) أ = ٦٠° ب = ١٢٠°

(١٠) -٨,٨٧٥ جول ١٣,١٢٥ جول س = $\frac{١١٣}{٢٤}$

(١١) ٤,٩ جول (١٢) - ١٧,١٩٩ جول صفر

(١٣) ١٤ م/ث (١٤) ك = ١٦ كجم

(١٥) اولا : أ = $\frac{٣}{٢}$ ، ب = -٢ ثانيًا: ٦٨ جول

ثالثًا: ٧٢ جول

(١٦) ع = ٧٥ م/ث (١٧) $\frac{٣}{٢}$

(١٨) طاقة الحركة المفقودة = ١٧,٦ - ٥,١ = ١٢,٥ جول

(١٩) ١,٦ متر

(٢٠) ٠,٠٦ كجم ١٦,٩ متر ١,٦٨ كجم. متر /ث

(٢١) اولًا: ع = ٢ متر /ث

ثانيًا : ٨٣٧,٩ جول ثالثًا: ٣٤,٢ كجم.متر /ث

(٢٢) اولا: ٨م/ث

ثانيًا: ١٤٣٣٦ جول ثالثًا: $\frac{٣}{٧}$ ٣٧٦٩١ ث كجم

إجابات تمارين (٤ – ٣)

(١) أ ٩,٨ جول ب صفر ج ٩,٨ جول

(٢) ٦٨٦ (٣) ٣,٤×١٠^{٦} (٤) ١٩,٦

(٥) ٤,٢ (٦) ٢٧ إرج (٧) ٧٢

(٨) ٢٠,٥٨ جول (٩) ٣٤,٣ جول

(١٠) ٤٩٠٠ جول ٦ ثوان ٤٧٧٤,٥٦ جول

(١١) ٤,٩ جول ٢,٦ ث . كجم

(١٢) ١٤١١٢ جول (١٣) ٥ م/ث

(١٤) ٤ جول ٠,٩ جول (١٥) ١٤٠ سم/ث

(١٦) ١٣,٥٩٧٥ جول

إجابات تمارين (٤ – ٤)

(١) ٣١ داين.سم/ث (٢) ٥ ث كجم

(٣) ٣٦ ث كجم (٤) ١٢٦ حصان

(٥) ١٢٦ كم/س (٦) ٣٠ كم/س

(٧) ٥٤ كم/س (٨) ١٨٧,٥ حصان

(٩) م = ٩٠٠ ث كجم القدرة ١٥٠ حصان

(١٠) القدرة = ٤٠٠ حصان (١١) ٤٣,٢ م/ث

(١٢) ١٢ كم/س (١٣) ٨٠ حصان

(١٤) ٨٠ حصان $\frac{٤٣٢}{٧}$ كم/س

(١٥) ٢٧٠ حصان

(١٦) أ ٣٩ جول ب ١٣ واط

ج ١٩ واط

(١٧) أ ٣٨٧ واط ب ٦٥٧ جول

ج القدرة = ٢١٩ واط

(١٨) أ ١٨ ن $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ب ٥٤ ن^{٣} + ١٢ ن

ج ٢٤٠ واط

(١٩) أ ١٣٥ حصان ب ٢٢٥٠ ث كجم. م

ج ١٨٠ حصان

(٢٠) ٤٠٠ جول

(٢١) أ $\overleftarrow{ق}$ = -٦ (جتا ٢ ن ، جا ٢ ن)

ب $\frac{٩}{٢}$ - ٣ (جتا ٢ ن + جا ٢ ن)

ج - ٦ (جتا ٢ ن - جا ٢ ن)

إجابات تمارين عامة على الوحدة الرابعة

(١) ٥٧٦٠٠ إرج

(٢) م = ١٨ ث جم ك = ٨٤٠ جم ن = ٦ ث

(٣) ٩٠ حصان

(٤) ع = ٧م/ث ١٣٧٢٠ جول ٣٦٤٠٠ ث كجم

(٥) ش = -١,٩٦ جول

(٦) $||\overleftarrow{س} + ٢٣ \overleftarrow{ص}$ ١٨٠ جول القدرة = ١٢٠ وات

(٧) ٢ حصان (٨) ٥٢٩٢ جول

(٩) ١٤,٧ جول ٢٤,٩٩ جول

(١٠) جـ = $\frac{١}{٤}$ م/ث^٢ ع = $\frac{٢٠٠}{١٣}$ م/ث

(١١) اولا: $\frac{١٠٠}{٣}$ حصان ثانيًا: جـ = $\frac{٤٩}{٢٠٠}$ م/ث^٢

(١٢) ١٠٢,٤ حصان

(١٣) أ ١٠ جول ب ٢,٤ جول

(١٤) ع = ١٠م/ث ٤٨ جول

(١٥) $\overleftarrow{ق} = \frac{٢}{٥}$ (٦ جتا ٢ ن $\overleftarrow{س}$ + ٢٠ هـ^{٤ن} $\overleftarrow{ص}$)

٤٠ هـ$^{٢\pi}$ وات (٥ هـ$^{٢\pi}$ - $\frac{١٠٧}{١٠}$) جول

الاختبار الاول

السؤال الأول

(١) د (٢) ب (٣) ب (٤) جـ

(٥) ب (٦) ب

السؤال الثانى

(١) ١٧٥,٤ نيوتن.م (٢) و جا(هـ + ل)

السؤال الثالث

(١) ٢٥ ى تبعد عن أ مسافة ٤٥سم

(٢) ٥٠ نيوتن ٦٠٠ نيوتن.سم

السؤال الرابع

(١) س١= ٥ $\sqrt{٣}$ س^٢ = ٥ هـ = ١٢,٨°

(٢) ($\frac{٣٥}{٦}$، $\frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$)

السؤال الخامس

(١) -٥٠٠٠ ٢٥٠ صفر

(٢) ($\frac{٤٠٧}{٧٢}$ ، $\frac{٢٤٥}{٨}$)

الاختبار الثانى

السؤال الأول

(١) أ (٢) أ (٣) ب (٤) ب

(٥) ب (٦) ب

السؤال الثانى

(١) ٧$\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ - ٩ $\overleftarrow{ع}$ $\frac{\sqrt{١٩٤}}{\sqrt{٣٥}}$

السؤال الثالث

(١) ٩سم (٢) ٤٦$\sqrt{٢}$ ث.كجم

السؤال الرابع

(٢) ب جـ يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٥}$

السؤال الخامس

(١) أولاً: $\frac{٦٥}{٧}$ $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$ ثانيا: $\frac{١٥}{٢٠}$ $\frac{٥}{٣}\sqrt{٣}$

الاختبار الثالث

السؤال الأول

(١) ٧٥ (٢) ٣٥٠ نيوتن. سم

(٣) ± ٤ (١، -٢) (٤) ٣٠٠٠ نيوتن .سم

(٥) بمركز الكرة

(٦) نقطة تقاطع المتوسطات

السؤال الثانى

(١) ٥٢َ ٣٦° (٢) ٦٣٩٢,٣

السؤال الثالث

(١) ٧٠سم و= ٢ نيوتن (٢) ٣٥$\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

السؤال الرابع

(١) ر ب= $\frac{١}{٢}$ و رأ= $\frac{٣}{٤}$ و س= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ و

السؤال الخامس

(٢) مركز الثقل هو ($\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٦}$)

الاختبار الرابع

السؤال الأول

(١) جـ (٢) ب (٣) ب (٤) د

(٥) د (٦) أ

السؤال الثانى

(١) ليس على وشك الحركة

(-٣٠٨٠٠ - ١٥٠٠٠√٣) نيوتن.سم

٢١٧٠٠ نيوتن.سم

السؤال الثالث

(١) ٣ث كجم (٢) ٧٥٠√٣ ث جم.سم

السؤال الرابع

(١) (١٠، ١٠) مركز الثقل هو $(\frac{٢٠}{٣}، \frac{٢٠}{٣})$

السؤال الخامس

(٢) ٢٠٠ $\overleftarrow{س}$ + ١٥٠ $\overleftarrow{ص}$

الاختبار الخامس

السؤال الأول

(١) قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودى

(٢) -١١ $\overleftarrow{س}$ - ١٧ $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$

(٣) ١٣ (٤) ٢

(٥) أ ينعدم متجه مجموع القوى

ب ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

(٦) بنقطة التعليق

السؤال الثانى

(١) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ (٢) ٥,٤ نيوتن

السؤال الثالث

(١) المؤثرة لاسفل مقدارها ٣٢ ث كجم ٢,٥ تقريبا

(٢) $و_٢$ = ٢٤ $و_١$ = ٢٤

السؤال الرابع

(١) ١٢,٥ ث كجم (٢) ٥٥,٧°

السؤال الخامس

(١) مركز الثقل هو (٨ ، ٠)

(٢) -١١ $\overleftarrow{ع}$

الاختبار السادس

السؤال الأول

(١) ٢١

(٢) أ = -١ ب = ١

(٣) ٣٠ث كجم (٤) ٢٠ جول

(٥) ٣٩,٢ متر (٦) ٧,٣٥م/ث^٢

السؤال الثانى

(١) ١٨٠٠ث.كجم جـ = ٤٩,م/ث^٢

(٢) ٦م/ث^٢ ٣٥,٦ نيوتن

السؤال الثالث

(١) ٢سم/ث ، ق = ٩٦ ث . جرام

(٢) -٦٤٠ جول

السؤال الرابع

(١) ٤٨٠ ث جرام، ٣٠٠ ث . جرام

(٢) -٢٠,٨ جول ٣٠ جول

صفر ، ع = ٨,٤٤م/ث

السؤال الخامس

(١) ع = ١٤م/ث

(٢) ٢,٨ √٥ م/ث

$م_١$ = ١٢٨ كجم.م/ث ، $م_٢$ = ٣٦٩٦ كجم.م/ث

الاختبار السابع

السؤال الأول

(١) ٦٤ كجم.م/ث (٢) ٢٤,٠١ جول

(٣) أ = ٢٠ ب = ٢٠

(٤) ٢,٤٥م/ث^٢ (٥) م = ١

(٦) ٩,٨م/ث^٢

السؤال الثاني

(١) ١٧٦٤٠ جول (٢) ٧عربات

السؤال الثالث

(١) صفر

(٢) أولاً: صه = ١٠ $\sqrt{2}$ ث. جم ثانيا: ف = ٣٣٢,٥سم

السؤال الرابع

(١) المسافة المطلوبة = ١٩,٦ × ٢ + ٤٠,٤ = ٧٩,٦متر

السؤال الخامس

(١) ٣٢ حصان

(٢) أولاً: ٣٦,٧٥ جول ثانيا: ١١,٠٢٥ جول

ثالثا: ٧٠ $\sqrt{30}$ سم/ث

الاختبار الثامن

السؤال الأول

(١) ك = ٨ كجم (٢) ٦٠٠ داين

(٣) لأسفل ، لأعلى (٤) ٥٠سم/ث

(٥) ٧ م/ث (٦) ٢٤٠,١ جول

السؤال الثانى

(١) السرعات الثلاث متساوية

ك العمودية تبذل شغلا أكثر

(٢) ١٣٧,٢ جول ، $\frac{١}{٥}$ م/ث

السؤال الثالث

(١) ١٠ث . جرام ٢٨٠سم/ث

(٢) ٢٠م/ث

السؤال الرابع

(١) أ ٢٨٠سم/ث ف = ١٠٠سم

(٢) أ ٤ جول ب صفر

جـ ٢٠ جول د صفر

السؤال الخامس

(١) ٦٨ جرام.سم/ث

(٢) ى = ٩,٧٥م/ث^{2}

جـ = ١,٢٥م/ث^{2}

الاختبار التاسع

السؤال الأول

(١) أ = ٩ ب = ٧

(٢) ١٦٠ث. جرام (٣) م = ٢٠٠٠ث. كجم

(٤) ٢٤,٥ كيلو وات/ساعة

(٥) ٢٠ حصان (٦) $\frac{٨}{١٥}$ حصان

السؤال الثانى

(١) م = ٨ ث كجم

و = ٢٢ + ٨ = ٣٠ث. كجم

(٢) ٢٨٠سم/ث^{2} ش= ٢٢٥ث . جرام

ك= ١٤٠ جرام

الهابطة $ر_1$= ٢٠٠ث. جرام

الصاعدة $ر_2$=١٨٠ ث . جرام

السؤال الثالث

(١) أولاً: ١٤م/ث ثانيا: $\frac{٢١}{١٠}$ كجم.م/ث

(٢) ع = ١٤م/ث

السؤال الرابع

(١) ع =$\frac{٢١}{٥}$ م/ث م = ٤,٢ نيوتن

ن = ٥ ثانية

(٢) جـ = ١,٤م/ث^{2} ك = ٧٠ كجم

السؤال الخامس

(١) ع = ٢٧ كم/س

(٢) الشغل الكلى = ١٤,٧ جول

ع = ٣,٣٥م/ث

الاختبار العاشر

السؤال الأول

(١) ٥٠$\sqrt{٣}$ ث.كجم　　(٢) ٣ م/ث

(٣) ع = ٢٨٠سم/ث　　(٤) ٣٦٠٠جول

(٥) ٤ حصان

(٦) -١٢٠٠٠٠جم.سم/ث

السؤال الثانى

(١) **أولاً:** ب = ٣　　أ = ١

ثانيا: ٩٦٠ جول

(٢) جـ = ٧٠سم/ث^{٢} ، المسافة الرأسية = ٣٥سم

السؤال الثالث

(١) ٣٩ كم/س　　(٢)

السؤال الرابع

(١) ٥,٦م/ث　　،　　م = ٤٦٠٠ث/كجم

(٢) ١٢,٢٥م/ث

السؤال الخامس

(١) (أ) جـ = ٧سم/ث^{٢}

(ب) $\frac{٥٧}{٣٤٠}$

(٢) ك = ٢٠كجم　　،　　ر = ١٦ث. كجم

كتاب الميكانيكا ٣ ثانوي عام			
عدد الصفحات بالغلاف	٢١٦ صفحة	طبع المتن	٤ لون
عدد الملازم	٣٩ ملزمة	طبع الغلاف	٤ لون
ورق المتن	٧٠ جرام	المقاس	٢٠×٢٨
ورق الغلاف	كوشية ١٨٠ جرام	التجليد	بشر
رقم الكتاب	٩/٣/٣٣/٣/١٠/٤٧٦		

http://elearning.moe.gov.eg

مطابع الهداية- العربى أنور سيد - المنطقة الصناعية بأبو رواش
خلف القرية الذكية - محافظة الجيزة