طريق التفوق

في

الرياضيات

التكامل

د. خالد جلال & ا.اياد الحمد

٠٧٩٩٩٤٨١٩٨ ٠٧٩٥٦٠٤٥٦٣

محتوى الوحدة

(١) الاقتران اللوغاريتم الطبيعي

١) **قاعدته هي** : $ص = \text{لو}_{هـ}\,\text{ق}(س)$ حيث هـ العدد النيبيري

٢) **مشتقته هي** : $\frac{دص}{د\,س} = \frac{\text{ق}'(س)}{\text{ق}(س)}$

٣) **قوانين اللوغاريتمات** :

١. $\text{لو}_{هـ} س\,ص = \text{لو}_{هـ} س + \text{لو}_{هـ} ص$

٢. $\text{لو}_{هـ} \frac{س}{ص} = \text{لو}_{هـ} س - \text{لو}_{هـ} ص$

٣. $\text{لو}_{هـ} س^{ن} = ن\,\text{لو}_{هـ} س$

٤. $\text{لو}_{هـ} هـ = ١$

٥. $\text{لو}_{هـ} ١ = \text{صفر}$

تمارين الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

أ) جد المشتقة الاولى لما يلي :

١) $ص = \text{لو}_{هـ} س$

٢) $ص = \text{لو}_{هـ}(٢س + ١)$

٣) $ص = \text{لو}_{هـ}(٢س^{٢} + ٤س + ٣)$

٤) $ص = \text{لو}_{هـ}|س^{٢} - ٤|$

٥) $ص = \text{لو}_{هـ} \text{جا}٢س$

٦) $ص = \text{لو}_{هـ} \text{جتا}٢س$

٧) $ص = \text{لو}_{هـ}(\text{جاس} + \text{جتاس})$

٨) $ص = \text{لو}_{هـ}(س + \text{ظاس})$

٩) $ص = \text{جالو}_{هـ} س$

١٠) $ص = \text{لو}_{هـ}(\text{قاس} + \text{ظاس})$

١١) $ص = \text{لو}_{هـ}\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٣}\right)$

ب) اجب عما لما يلي :

١١) اذا كان $ص = ٣س^{٢} + \text{لو}_{هـ}(٢س + ١)$ فجد $\frac{دص}{د\,س}$ عند $س = ٢$

١٢) اذا كان $ص = س\,\text{لو}_{هـ} س$ فجد $\frac{دص}{د\,س}$ عند $س = ١$

١٣) اذا كان $ص = \left(س + \text{لو}_{هـ} س\right)^{٥}$ فجد $\frac{دص}{د\,س}$

١٤) اذا كان $ص = س^{٣}\,\text{جالو}_{هـ} س$ فجد $\frac{دص}{د\,س}$ عند $س = ١$

١٥) $ص = \text{لو}_{هـ}(٢س + ٥)^{٢}(س^{٣} + ١)^{٤}$

١٦) $ص = \text{لو}_{هـ}\sqrt{(٧س + ٣)}\,(س^{٢} + ٥)^{٣}$

١٧) $ص = \text{لو}_{هـ} \frac{(٣س - ١)^{٢}}{(س^{٢} - ١)^{٦}}$

١٨) $ص = \text{لو}_{هـ}\sqrt[٣]{\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س + ٣}{(٣س - ١)^{٢}}}$

١٩) اذا كان $ص^{٢} = \text{لو}_{هـ} س\,ص + ٧س$ فجد $\frac{دص}{د\,س}$

٢٠) اذا كان $س + ٥ = لو_{هـ} \frac{ص}{س} + ص^{٣}$ فجد $\frac{دص}{د س}$

٢١) اذا كان $ص = لو_{هـ}(س + \sqrt{س^{٢}+٣})$ اثبت ان $\frac{دص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}+٣}}$

٢٢) اذا كان $ص = جالو_{هـ} س$ اثبت ان $س^{٢}صَّ + س صَ + ص = ٠$

٢٣) اذا كان $ص = ٥^{٣س^{٢}}$ فجد $\frac{دص}{د س}$

٢٤) اذا كان $ص = ٧^{٢س}$ فجد $\frac{دص}{د س}$ عند $س = ٠$

٢٥) اذا كان $ص = أ^{ق(س)}$ اثبت ان $ص = أ^{ق(س)} \times قَ(س) \times لو_{هـ} أ$ حيث أ ثابت

$أ \in ح$ ، $أ \neq ١$

٢٦) اذا كان $ص = لو_{هـ}(قاس + ظاس)$ فجد $جتاس \times صَ$

٢٧) اذا كان $ق(س) = لو_{هـ}(٢س+١)$ فجد $قًَ(٢)$

(٢) الاقتران الاسي الطبيعي

١) **قاعدته هي** : $ص = هـ^{ق(س)}$ حيث هـ العدد النيبيري

٢) **مشتقته هي** : $صَ = هـ^{ق(س)} \times قَ(س)$

٣) **قوانين الأسس** :

١. $هـ^{أ} \times هـ^{ب} = هـ^{أ+ب}$

٢. $هـ^{أ} \div هـ^{ب} = هـ^{أ-ب}$

٣. $(هـ^{أ})^{ب} = هـ^{أب}$

٤. $هـ^{-أ} = ١ \div هـ^{أ}$

٥. $\sqrt[ن]{هـ^{أ}} = هـ^{\frac{أ}{ن}}$

تمارين الاقتران الأسي الطبيعي

أ) جد المشتقة الاولى لما يلي :

١) ص = $هـ^{س}$ ٢) ص = $هـ^{٢س + ١}$ ٣) ص = $هـ^{س^{٢} - ٣}$ ٤) ص = $هـ^{جاس^{٢}}$

٥) ص = $هـ^{\sqrt{س}}$ ٦) ص = ٦$س^{٢}$ + $هـ^{س^{٣}}$ ٧) ص = ٣س $هـ^{س}$ ٨) ص = $(هـ^{س} - ٤)^{٣}$

٩) ص = $(س + هـ^{س})^{٣}$ ١٠) ص = $\sqrt{س + ٣هـ^{س}}$ ١١) ص = $\frac{هـ^{س}}{٢ + هـ^{س}}$

١٢) اذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ + $هـ^{-س}$ فاوجد قيم س التي عندها ق'(س) = صفر

ب) اجب عما لما يلي :

١٣) اذا كان ص = $هـ^{س + ص}$ فجد $\frac{دص}{د س}$ بدلالة ص

١٤) اذا كان ص + س = $هـ^{س ص}$ اثبت ان $\frac{دص}{د س} = \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١}$

١٥) اذا كان ص س = $هـ^{س + ص}$ فجد $\frac{دص}{د س}$

١٦) اذا كان $هـ^{ص}$ = جتا س اثبت ان $\left(\frac{دص}{د س}\right)^{٢} + \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = -١$

١٧) اذا كان $هـ^{ص} + هـ^{س} = هـ^{-ص} + هـ^{-س}$ فجد $\frac{دص}{د س}$ عند س = -١

١٨) اذا كان ص = $هـ^{س}$ جتا س اثبت ان ص'' - ٢ ص' + ٢ ص = ٠

١٩) اذا كان ص = $هـ^{أ س}$ جد الثابت أ اذا علمت ان ص'' + ٤ ص' - ٥ ص = ٠

٢٠) اذا كان ص = $هـ^{ب س}$ جد الثابت ب اذا علمت ان ٤ص'' + ٣ ص' - ٧ ص = ٠

٢١) اذا كان ص = أ $هـ^{ب س}$ جد الثابتين أ ، ب اذا علمت ان ص'' = ص

٢٢) اذا كان $ص^{٢}$ = $لو_{هـ}$ س ص - $هـ^{س^{٢}}$ فجد $\frac{دص}{د س}$

٢٣) اذا كان ق(س) = $لو_{هـ} هـ^{٢س}$ - $لو_{هـ}(١ + هـ^{٢س})$ فجد ق'(٠)

٢٤) اذا كان ق(س) = $لو_{هـ}(س + ٥)$ + $هـ^{س + ٤}$ فجد ق'(-٤)

(٣) العلاقة بين اللوغاريتمي الطبيعي والاسي الطبيعي

١) $\text{هـ}^{\text{لو}_\text{هـ} \text{ بطيخه}} = \text{بطيخه}$ (بشرط ان معامل اللوغاريتم يساوي ١)

٢) $\text{هـ}^{\text{م لو}_\text{هـ} \text{ بطيخه}} = \text{بطيخه}^\text{م}$

٣) $\text{لو}_\text{هـ} \text{م} = \text{ب} \Leftrightarrow \text{هـ}^\text{ب} = \text{م}$

تمارين العلاقة بين الأسي واللوغاريتمي

١) اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_\text{هـ} \text{س}^٢ + ٣\text{س}}$ فجد $\text{قَ}(٢)$

٢) اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_\text{هـ} (١ + \text{جا}^٢ \text{س})}$ فجد $\text{قَ}(\frac{\pi}{٣})$

٣) اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س} + \text{لو}_\text{هـ} \text{س}}$ فجد $\text{قَ}(\,٠\,)$

٤) اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{٢ \text{لو}_\text{هـ} (١ + \text{جتاس})}$ فجد $\text{قَ}(\frac{\pi}{٢})$

(٤) قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الاولى $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$ بشرط $\text{ن} \neq -١$

القاعدة الثانية $\int \text{أ} \, \text{دس} = \text{أ} \, \text{س} + \text{جـ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$

القاعدة الثالثة $\int \text{أ} \, \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \text{أ} \int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}$

القاعدة الرابعة $\int \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س}) \right) \text{دس} = \int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} \pm \int \text{هـ}(\text{س}) \, \text{دس}$

القاعدة الخامسة $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{دس} = \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$ بشرط $\text{ن} \neq -١$

القاعدة السادسة $\int \frac{\text{ل}}{\text{أس} + \text{ب}} \, \text{دس} = \frac{\text{ل}}{\text{أ}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{أس} + \text{ب}| + \text{جـ}$ **وبشكل عام فإن**

$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

القاعدة السابعة $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} \, \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}} \, \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{جـ}$

القاعدة الثامنة $\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}} \, \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}} \, \text{جا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قا}^{٢}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}} \, \text{ظا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قتا}^{٢}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}} \, \text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{ظا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}} \, \text{قا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب}) \, \text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}} \, \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

تمارين قواعد التكامل غير المحدود

أوجد كلا مما يأتي :

رقم	السؤال
١	$\int \text{س}^{٥}\ \text{دس}$
٢	$\int \text{س}^{٧}\ \text{دس}$
٣	$\int \text{س}^{٢}\ \text{دس}$
٤	$\int \text{س}\ \text{دس}$
٥	$\int \text{س}^{-٥}\ \text{دس}$
٦	$\int \text{س}^{-١١}\ \text{دس}$
٧	$\int \text{س}^{-٣}\ \text{دس}$
٨	$\int \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\ \text{دس}$
٩	$\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$
١٠	$\int \text{س}^{\frac{-١}{٢}}\ \text{دس}$
١١	$\int \text{س}^{\frac{-٣}{٢}}\ \text{دس}$
١٢	$\int \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$
١٣	$\int \sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{دس}$
١٤	$\int ٤\ \text{دس}$
١٥	$\int ٧\ \text{دس}$
١٦	$\int -٤\ \text{دس}$
١٧	$\int -٧\ \text{دس}$
١٨	$\int \frac{٤}{٣}\ \text{دس}$
١٩	$\int -\frac{٤}{٣}\ \text{دس}$

رقم	السؤال
٢٠	$\int \sqrt{٥}\ \text{دس}$
٢١	$\int \ \text{دس}$
٢٢	$\int - \ \text{دس}$
٢٣	$\int \text{هـ}\ \text{دس}$
٢٤	$\int ٩\ \text{دص}$
٢٥	$\int ٨\ \text{دل}$
٢٦	$\int ٥\ \text{دع}$
٢٧	$\int ١١\ \text{دم}$
٢٨	$\int ٧\text{س}^{٥}\ \text{دس}$
٢٩	$\int ٣\text{س}^{٧}\ \text{دس}$
٣٠	$\int ٦\text{س}^{-١٠}\ \text{دس}$
٣١	$\int ٢\text{س}^{-٥}\ \text{دس}$
٣٢	$\int ٦\text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$
٣٣	$\int ٨\text{س}^{\frac{-٣}{٢}}\ \text{دس}$
٣٤	$\int ٩\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$
٣٥	$\int \frac{٦}{٤\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$
٣٦	$\int \frac{٤}{٣}\text{س}^{٢}\ \text{دس}$
٣٧	$\int -\frac{٤}{٣}\text{س}^{٥}\ \text{دس}$
٣٨	$\int \frac{٧}{\text{س}^{٥}}\ \text{دس}$

رقم	السؤال
٣٩	$\int (٢س^{٢} - ١١س + ٥)\ دس$
٤٠	$\int (س^{٣} + س^{٢} - ١٢س + ٥)\ دس$
٤١	$\int (س^{٢} - ١٢س + ٩)\ دس$
٤٢	$\int (٢س + ٥س^{٣} + س^{٢})\ دس$
٤٣	$\int (-١٤س + ٨)\ دس$
٤٤	$\int (-\frac{٤}{٣}س^{٢} - ٢س + ٣)\ دس$
٤٥	$\int (\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} - س + ٧)\ دس$
٤٦	$\int (٩\sqrt{س} + ١٤س + ٨)\ دس$
٤٧	$\int (٢س + \frac{٦}{٤\sqrt{س}} + س^{٢})\ دس$
٤٨	$\int س(٤س + ٨)\ دس$
٤٩	$\int ٢س^{٢}(٥س + ١)\ دس$
٥٠	$\int س^{٣}(س - ٣)\ دس$
٥١	$\int (س - ٣)(٤س + ٨)\ دس$
٥٢	$\int (س^{٢} - ٢)(س + ٣)\ دس$
٥٣	$\int (٢ - ٣س)(٤س + ٥)\ دس$
٥٤	$\int (١ - ٣س^{٢})(س + ٣)\ دس$
٥٥	$\int (١ - ٣س^{٢})^{٢}\ دس$
٥٦	$\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢} +}{س}\ دس$
٥٧	$\int \frac{٧س^{٥} - ٩س^{٣}}{س^{٣}}\ دس$
٥٨	$\int \frac{١٢س^{٥} - ٨}{٤س^{٢}}\ دس$
٥٩	$\int \frac{٩س^{٤} - ٨س^{٣}}{٣س^{٣}}\ دس$

رقم	السؤال
٦٠	$\int \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣}\ دس$
٦١	$\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٤}{س - ١}\ دس$
٦٢	$\int \frac{٧س^{٢} - س}{٧س - ١}\ دس$
٦٣	$\int (٢س + ٥)^{٦}\ دس$
٦٤	$\int ٦(٧ - ٣س)^{-٧}\ دس$
٦٥	$\int -٧(٥س + ٣)^{\frac{٤}{٣}}\ دس$
٦٦	$\int ٩\sqrt[٣]{(س + ٢)^{٢}}\ دس$
٦٧	$\int (س^{٢} - ٤س + ٤)^{٧}\ دس$
٦٨	$\int (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)^{\frac{٣}{٧}}\ دس$
٦٩	$\int (٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦)^{\frac{-١}{٥}}\ دس$
٧٠	$\int \frac{١}{س}\ دس$
٧١	$\int \frac{-٥}{٨س}\ دس$
٧٢	$\int \frac{٥}{٢س + ١}\ دس$
٧٣	$\int \frac{١}{٤س + ٧}\ دس$
٧٤	$\int \frac{س}{٢س^{٢} + ٧}\ دس$
٧٥	$\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + ١}{س}\ دس$
٧٦	$\int \frac{٧س^{٥} - ٩س^{٣}}{س^{٤}}\ دس$
٧٧	$\int \frac{٥ - س}{س}\ دس$
٧٨	$\int ٧\ هـ^{٢س + ١}\ دس$
٧٩	$\int ٢\sqrt[٣]{هـ^{٦س + ٣}}\ دس$

رقم	السؤال
٨٠	∫ $\frac{٣}{هـ^{٢س+١}}$ دس
٨١	∫ $(هـ^{٢س+١})^{٤}$ دس
٨٢	∫ $(هـ^{س} + هـ^{-س})^{٢}$ دس
٨٣	∫ $هـ^{٢س+١}(هـ^{س} + هـ^{-س})^{٢}$ دس
٨٤	∫ $\frac{هـ^{٥س+٣}}{هـ^{٢س+١}}$ دس
٨٥	∫ $\frac{هـ^{٥س+٣} + ٦}{هـ^{٢س+١}}$ دس
٨٥	∫ $\frac{هـ^{٢س+١}}{هـ^{٢س+١} + ٦}$ دس
٨٦	∫ $لو_{هـ}٧$ دس
٨٧	∫ جا٢س دس
٨٨	∫ قا $\frac{١}{٢}$س ظا $\frac{١}{٢}$س دس
٨٩	∫ قتا(١ − س) ظتا(١ − س) دس
٩٠	∫ $\frac{٥}{جا^{٢}س}$ دس
٩١	∫ جا$\frac{١}{٢}$س جتا$\frac{١}{٢}$س دس
٩٢	∫ $\frac{جتا^{٣}س - ٢}{١ - جا^{٢}س}$ دس
٩٣	∫ جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ دس

رقم	السؤال
٩٤	∫ $\frac{جتا٢س}{جتا^{٢}س\ جا^{٢}س}$ دس
٩٥	∫ (قا^{٢}س - ظا^{٢}س) دس
٩٦	∫ جا٤س جتا٦س دس
٩٧	∫ جا٥س جتا٣س دس
٩٨	∫ $\frac{ظاس}{جتاس}$ دس
٩٩	∫ (جتا^{٢} $\frac{١}{٢}$س - جا^{٢} $\frac{١}{٢}$س) دس
١٠٠	∫ (π جتا^{٢}س + π جا^{٢}س) دس
١٠١	∫ جتا^{٢}٣س دس
١٠٢	∫ جا^{٢}$\frac{١}{٢}$س دس
١٠٣	∫ ظتا^{٢}$\frac{١}{٢}$س دس
١٠٤	∫ (٣ + ٢ظتا^{٢}س) دس
١٠٥	∫ (قاس + ظاس)^{٢} دس
١٠٦	∫ (جتاس − جاس)^{٢} دس
١٠٧	∫ (قا^{٤}س − ظا^{٤}س) دس
١٠٨	∫ جتا٣س جتا٧س دس
١٠٩	∫ جا٣س جا٧س دس
١١٠	∫ $\frac{١}{١ + جاس}$ دس
١١١	∫ $\frac{٥}{٢ - ٢جتا٢س}$ دس
١١٢	∫ جا٣س جا٧س دس
١١٣	∫ $\frac{١ - جا^{٢}س}{جتا^{٢}\frac{١}{٢}س\ جا^{٢}\frac{١}{٢}س}$ دس

(٥) قواعد التكامل المحدود

هي نفس القواعد الثمانية السابقة مع اهمال الثابت جـ ومراعاة حدود التكامل كما يلي :

١) $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\ دس = ق(س) \Big|_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$ ٢) $\int_{أ}^{ب} جـ\ دس = جـ(ب - أ)$

تمارين قواعد التكامل المحدود

رقم	السؤال
١١٤	$\int_{١}^{٣} ٧\ دس$
١١٥	$\int_{٢}^{٤} (٢س + ٥)دس$
١١٦	$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٦}}$ قتاس ظتاس دس
١١٧	$\int_{١}^{٩} \sqrt{س}\ دس$
١١٨	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جتاس - جاس)دس
١١٩	$\int_{٢}^{١} (٢س - ١)^{٤}\ دس$
١٢٠	$\int_{٠}^{١} \frac{١}{\underset{هـ}{س^{٢}}}\ دس$
١٢١	$\int_{١}^{٤} \frac{هـ^{س}}{س^{٢}}\ دس$

رقم	السؤال
١٢٢	$\int_{١}^{هـ} \frac{٣}{س}\ دس$
١٢٣	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ (جتا٢س + جا٢س) دس
١٢٤	$\int_{٠}^{هـ} \frac{١}{س + هـ}\ دس$
١٢٥	إذا كان ق(١) = ٤ ، ق(٥) = ١٢ فجد $\int_{٥}^{١} ٢\ ق'(س)\ دس$
١٢٦	جد $\int_{-١}^{١} س^{ن}\ دس$ حيث ن $\in \overset{+}{ص} \cup \{ ٠ \}$
١٢٧	أثبت أن $\int_{٠}^{١} س^{ن}\ دس + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}}\ دس = ١$ حيث ن $\in ح^{+}$

(٦) خواص التكامل المحدود

الخاصية الأولى : $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ ق(س) دس = صفر

الخاصية الثانية : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = − $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ ق(س) دس

الخاصية الثالثة : إذا كانت أ ، ب ، جـ $\in$ ح فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) دس + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

الخاصية الرابعة :

١) إذا كان ق(س) $\geq$ صفر في الفترة [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس $\geq$ صفر

٢) إذا كان ق(س) $\leq$ صفر في الفترة [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس $\leq$ صفر

الخاصية الخامسة :

١) إذا كان ق(س) $\geq$ هـ(س) في الفترة [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس $\geq$ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ هـ(س) دس

٢) إذا كان ق(س) $\leq$ هـ(س) في الفترة [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس $\leq$ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ هـ(س) دس

الخاصية السادسة :

١) إذا كان ق(س) $\geq$ ل في الفترة [أ ، ب] فإن : ل تسمى أصغر قيمة للاقتران ق(س) ولذلك فإن أصغر قيمة للمقدار $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ل دس = ل (ب − أ)

٢) إذا كان ق(س) $\leq$ ك في الفترة [أ ، ب] فإن : ك تسمى أكبر قيمة للاقتران ق(س) ولذلك فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ك دس = ك (ب − أ)

تمارين خواص التكامل المحدود

١٢٧) إذا كان $\int_{\text{٢م+١}}^{\text{٧}} \text{ق(س) دس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة الثابت م

١٢٨) إذا كان $\int_{\text{٥م+٦}}^{\text{م}^{\text{٢}}} \text{ق(س) دس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة/قيم الثابت م

١٢٩) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{م}} (\text{٢س} + \text{٥})\ \text{دس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة الثابت م

١٣٠) إذا كان $\int_{\text{٢}}^{\text{م}} (\text{٣س} - \text{٤})\ \text{دس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة الثابت م

١٣١) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{م}} (\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٦س})\ \text{دس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة الثابت م

١٣٢) إذا كان $\int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{٣ق(س) دس} = \text{١٢}$ فاوجد قيمة $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} (\text{٢س} - \text{٦ق(س)})\ \text{دس}$

١٣٣) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} (\text{٢س} + \text{٣ق(س)})\ \text{دس} = \text{١١}$ فاوجد قيمة $\int_{\text{٣}}^{\text{١}} (\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{ق(س)})\ \text{دس}$

١٣٤) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \left(\text{٢ق(س)} - \text{٦} + \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right) \text{دس} = \text{١٢}$ فاوجد قيمة ما يلي :

١) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} - \int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{٣ق(س) دس}$ ٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس} - \int_{\text{٣}}^{\text{٦}} \text{ق(س) دس}$

١٣٥) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{٣ق(س) دس} = -\text{٦}$ ، $\int_{\text{٧}}^{\text{١}} \text{ق(س) دس} = \text{١٢}$ جد $\int_{\text{٧}}^{\text{٤}} \text{ق(س) دس}$

١٣٦) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} = \text{٥}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = \text{٤}$ جد $\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{ق(س) دس}$

١٣٧) إذا كان $\int_{-\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٣ق(س)} - \text{٤})\ \text{دس} = \text{٣}$ ، $\int_{\text{٤}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} = \text{٦}$ جد $\int_{-\text{١}}^{\text{٤}} (\text{٢س} + \text{ق(س)})\ \text{دس}$

١٣٨) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣س}^{\text{٢}} \text{ ، } \text{٠} \le \text{س} \le \text{١} \\ \text{س} + \text{٢} \text{ ، } \text{١} \le \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$ جد $\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{ق(س) دس}$

١٣٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س}+٥ & ، ٣ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$ جد $\int_{٠}^{٦} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

١٤٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ، ٠ < \text{س} \le \text{أ} \\ \frac{\text{أ}}{\text{أ}-١}(\text{س}-١) & ، \text{أ} < \text{س} \le ١ \end{cases}$ و كان $\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{١}{٨}$

فاوجد قيمة او قيم الثابت أ حيث أ > ٠

١٤١) جد قيمة ما يلي :

١) $\int_{٠}^{٢} |٤\text{س}+٨|\, \text{دس}$ ٢) $\int_{١}^{٥} |٢\text{س}-٦|\, \text{دس}$ ٣) $\int_{٠}^{٣} \text{س}|٢\text{س}-٦|\, \text{دس}$

٤) $\int_{٠}^{٨} (\text{س} - |\text{س}-١٦|)\, \text{دس}$ ٥) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{(\text{س}-٢)^{٢}}\, \text{دس}$ ٦) $\int_{٣}^{٠} \sqrt{\text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩}\, \text{دس}$

٧) $\int_{-٢}^{٢} \frac{|\text{س}^{٢}-٤|}{\text{س}-٢}\, \text{دس}$ ٨) $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{|\text{س}-١|}\, \text{دس}$ ٩) $\int_{-١}^{١} |\text{هـ}^{\text{س}}-١|\, \text{دس}$

١٠) $\int_{٠}^{\pi} |\text{جتاس}|\, \text{دس}$ ١١) $\int_{٠}^{\pi} \sqrt{١+\text{جتا}٢\text{س}}\, \text{دس}$ ١٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١+\text{جا}٢\text{س}}\, \text{دس}$

١٣) $\int_{٠}^{\pi} \left(\frac{١-\text{جتا}٢\text{س}}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دس}$ ١٤) $\int_{٠}^{٢} |\text{هـ} - \text{هـ}^{٢\text{س}-١}|\, \text{دس}$ ١٥) $\int_{١}^{٢} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-٦\text{س}+٩}}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}\, \text{دس}$

١٤٢) إذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}} |\text{س}-١|\, \text{دس} = \frac{٥}{٢}$ جد قيمة الثابت جـ حيث جـ > ١

١٤٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\text{س}-٣ + |٢\text{س}-٤| & ، \text{س} \ge ٢ \\ \frac{١}{٢}\text{أ}^{٢}\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ حيث أ $\in$ ح

وكان $\int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$ فاوجد قيمة الثابت أ

١٤٤) بدون إجراء عملية التكامل حدد إشارة التكامل $\int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦)\, \text{دس}$

١٤٥) بدون إجراء عملية التكامل أثبت أن $\int_{٢}^{٤} (\text{س} + ٤)\, \text{دس} \ge \int_{٤}^{٢} -٥\sqrt{\text{س}}\, \text{دس}$

١٤٦) بدون إجراء عملية التكامل أثبت أن $\int_{-١}^{٦} (\text{س}^{٢}+٥)\, \text{دس} \le \int_{٦}^{-١} -٢\text{س}\, \text{دس}$

١٤٧) بدون إجراء عملية التكامل أثبت أن $\int_{-2}^{5} (س^{2}+4)\, دس \le \int_{5}^{-2} -3س\, دس$

١٤٨) إذا كان $ق(س) \ge 2$ لكل $س \in [-1 ، 2]$ فجد اصغر قيمة للمقدار $\int_{-1}^{2} ق(س)\, دس$

١٤٩) إذا كان $ق(س) \le 3$ لكل $س \in [1 ، 5]$ فجد اكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{5} (2ق(س) + 3)\, دس$

١٥٠) إذا كان $1 \le ق(س) \le 5$ لكل $س \in [0 ، 3]$ فجد اكبر و اصغر قيمة للمقدار $\int_{0}^{3} ق(س)\, دس$

١٥١) إذا كان $-2 \le ق(س) \le 7$ لكل $س \in [1 ، 4]$ ، كان $م \le \int_{1}^{4} ق(س)\, دس \le ن$ فجد م ، ن

١٥٢) إذا كان $2 \le ق(س) \le 4$ لكل $س \in [-3 ، 2]$ ، كان $أ \le \int_{-3}^{2} (3 - ق(س))\, دس \le ب$
فجد قيمة كل من أ ، ب

١٥٣) بدون إجراء عملية التكامل أثبت أن $-\pi \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جاس\, دس \le \pi$

١٥٤) إذا كان $ق(س) = 4 + 3جا^{4}2س$ فجد أكبر و أصغر قيمة للمقدار $\int_{0}^{\pi} ق(س)\, دس$

١٥٥) إذا كان $ق(س) = \sqrt{9 - س^{2}}$ ، $س \in [-3 ، 3]$ ، فجد أكبر و أصغر قيمة للمقدار $\int_{-3}^{3} ق(س)\, دس$

١٥٦) جد أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{3} (س^{2} + 1)\, دس$ ١٥٧) جد أصغر قيمة للمقدار $\int_{0}^{2} (3 - 2س^{2})\, دس$

١٥٨) جد أكبر و أصغر قيمة للمقدار $\int_{1}^{4} \frac{1}{س + 2}\, دس$ ١٥٩) جد أكبر و أصغر قيمة للمقدار $\int_{0}^{3} \frac{س}{س + 1}\, دس$

١٦٠) بدون إجراء عملية التكامل أثبت أن $\frac{\pi}{4} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3 + جا^{2}س}\, دس \le \frac{\pi}{3}$

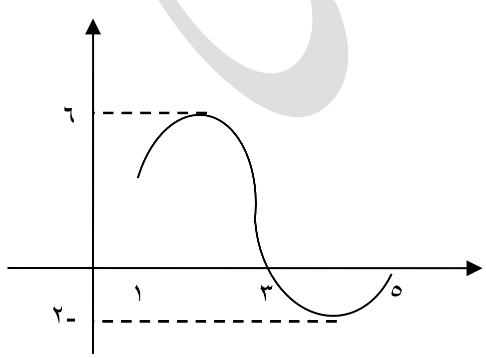
١٦١) إذا كان $ق(س) = جتاس + جاس$ جد أكبر قيمة للمقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ق(س)\, دس$

١٦٢) معتمدا على الشكل المعطى جد قيمة
كل من أ ، ب في الحالات الاتية :

١) $أ \le \int_{1}^{4} ق(س)\, دس \le ب$

٢) $أ \le \int_{1}^{4} ق^{2}(س)\, دس \le ب$

٣) $أ \le \int_{1}^{4} (7 - 2ق(س))\, دس \le ب$



(٧) العلاقة بين التفاضل والتكامل

١) $\frac{د}{د س}$ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = صفر

٢) $\frac{د}{د س}$ $\int$ ق(س) دس = ق(س)

٣) ق(س) = $\int$ قَ(س) دس = $\int$ ميل المماس دس

تمارين العلاقة بين التفاضل والتكامل

١٦٣) إذا كان $\int$ ق(س) دس = ٢ س^{٣} + ٣ س - ١ جد ق(١) ، قَ(١) .

١٦٤) إذا كان $\int$ قَ(س) دس = جا^{٢} ٢ س + ظا س + جـ جد قَ($\frac{\pi}{٤}$) .

١٦٥) إذا كان $\int$ قَ(س) دس = س^{٢} + ٣ س + ٣ جد ق(٤) ، علما بأن ق(١) = ٢ .

١٦٦) إذا كان ص = $\int \sqrt[٣]{س^{٢}+١٤ س+٥}$ دس جد $\frac{دص}{د س}$ عند س = - ١ .

١٦٧) إذا كان $\int$ جا($\frac{٣\pi}{٢}$)ق(س) دس = س^{٢} - ٢ س + ٣ جد ق(٢) .

١٦٨) إذا كان $\int$ ق(س) دس = جا س - جتا س + ٢ أثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) - قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ .

١٦٩) إذا كان ق(س) = هـ^{٣س} + لو$_{هـ}$(٢س + ١) + $\int \frac{٤}{٥+ظاس}$ دس جد قَ(٠) .

١٧٠) إذا كان ص = هـ$^{أ جاس}$ + لو$_{هـ}$جتاس + $\int \frac{٤}{٢+جتاس}$ دس ، كان $\frac{دص}{د س}$ = ٥ عند س = π فجد قيمة أ

١٧١) إذا كان $\int$ (ق(س) + ٢) دس = س^{٣} + أ س + ٩ ، كان ق(١) = ٧ ، فجد قيمة الثابت أ

١٧٢) إذا كان $\int$ قَ(س) دس = جتا^{٢} س - أ جا س + ١ ، كان قَ($\frac{\pi}{٤}$) = صفر ، فجد قيمة الثابت أ

١٧٣) إذا كان $\int$ (قَ(س) + ٢ س) دس = س^{٣} + أ س + ١ ، كان قَ(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ فجد الثابت أ ، ق(س)

١٧٤) إذا كان $\int$ (ق(س) + ٢ س) دس = لو$_{هـ}$|قاس + ظاس| + س^{٢} + أ فاثبت ان ق(س) = قاس

١٧٥) إذا كان $\int$ (٤ قَ(س) + ٢ س) دس = ٨س + جا س - $\int$ قَ(س) جتاس دس جد قَ(٠)

١٧٦) إذا كان $\int$ قَ(س) دس = ٣ س ق(س) - $\int$ ٦ س ق(س) دس ، كان ق(١) = ٢ جد قَ(١)

تمارين اضافية على الفقرات السبعة السابقة

١٧٦) إذا كان $ق(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(٢س+١)^{٢} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{١+ظاس}\, دس$ جد $قَ(٠)$

١٧٧) إذا كان $\int_{-١}^{٣} \left(٣س^{٢} + \int_{٠}^{جـ} ٦م\, دم\right) دس = ٤٠$ فجد قيمة الثابت جـ

١٧٨) إذا كان $ق(س) = \int \left(٣س^{٢} + \int_{٠}^{٣} ٦\, دص\right) دس$ جد $قَ(٣)$

١٧٩) إذا كان $أ = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جا^{٢}س\, دس$ ، $ب = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا^{٢}س\, دس$ فجد قيمة ما يلي :

١) $أ + ب$ ٢) $أ - ب$ ٣) أ ، ب دون حساب التكامل

١٨٠) إذا كان $لو_{هـ}أ = ٦$ ، $لو_{هـ}ب = ٢$ فجد قيمة ما يلي :

١) $\int_{١}^{\frac{١}{ب}} \frac{١}{س}\, دس$ ٢) $\int_{١}^{\sqrt{أ}} \frac{١}{س}\, دس$ ٣) $\int_{١}^{أب} \frac{١}{س}\, دس$

١٨١) إذا كان $\int_{١}^{أ} \frac{س^{٤} - ١}{س^{٣}}\, دس = \frac{٩}{٨}$ فجد قيمة الثابت أ حيث $أ > ١$

١٨٢) جد قيمة $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س + |س|}\, دس$

١٨٣) إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ ، $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس = -٢$ ، $\int_{٢}^{١} هـ(س)\, دس = ٥$

و كان $\int_{٢}^{٣} \left(٢هـ(س) - ٣ق(س)\right) دس = ١$ فجد قيمة $\int_{١}^{٣} هـ(س)\, دس$

١٨٤) إذا كان $\int ق(س)\left(ظا^{٢}س - قا^{٢}س\right) دس = جتا^{٢}س - ٢س + أ$ فجد $قَ(\frac{\pi}{٢})$

١٨٥) إذا علمت ان $أ \le \int_{٠}^{\pi} هـ^{٢لو_{هـ}جتاس}\, دس \le ب$ فجد قيمة أ ، ب

١٨٦) إذا كان $\int_{٥}^{٩} \left(٤ق(س) - ١\right) دس = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس = -٦$ جد $\int_{٩}^{٢} \left(٣ + ٢ق(س)\right) دس$

١٨٧) إذا كان $\int ق(س)\, دس = س\, جالو_{هـ}س - جتالو_{هـ}س$ فجد $ق(١)$

١٨٨) جد التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{جتا٢س}{(جاس + جتاس)^{٢}}\, دس$ ٢) $\int (٩س^{٢} - ٦س + ١)^{٥}\, دس$

(٨) طرق التكامل

هي أداة لتحويل السؤال من شكل لايكامل بالقواعد الثمانية السابقة إلى شكل يكامل بهذه القواعد ومن طرق التكامل :

١) طريقة التكامل بالتعويض **٢) طريقة التكامل بالاجزاء** **٣) طريقة التكامل بالكسور الجزئية**

تمارين التكامل بالتعويض

الرقم	السؤال	الرقم	السؤال
١	$\int \text{س}(\text{س}^{٢} - ٧)^{٧}\,\text{دس}$	١٥	$\int \text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$
٢	$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$	١٦	$\int \text{س}^{٢}\ \text{قا}^{٢}\text{س}^{٣}\ \text{دس}$
٣	$\int \text{قا}^{٢}(\text{ظاس})\ (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{دس}$	١٧	$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$
٤	$\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{دس}$	١٨	$\int \text{جا٢س}(٣ - \text{جتا٢س})^{٣}\,\text{دس}$
٥	$\int \text{س}^{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ٢}\ \text{دس}$	١٩	$\int \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٥}\,\text{دس}$
٦	$\int \text{س}\ \text{قا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{ظا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{دس}$	٢٠	$\int \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}\ \text{دس}$
٧	$\int_{٠}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}\,\text{دس}$	٢١	$\int \frac{(\text{س} + ١)^{٧}}{\text{س}^{٩}}\,\text{دس}$
٨	$\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\,\text{دس}$	٢٢	$\int \frac{\text{س} - ١}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٣}}\,\text{دس}$
٩	$\int \frac{\text{دس}}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$	٢٣	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس}\ \text{جتاس}}{\sqrt{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}}\,\text{دس}$
١٠	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٩}} \text{قا}^{٣}\text{٣س}\ \text{ظا٣س}\ \text{دس}$	٢٤	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$
١١	$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢ + \sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$	٢٥	$\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٧} - \text{س}^{٣}}\ \text{دس}$
١٢	$\int \frac{\text{جا٣س}}{١ + \text{جتا٣س}}\,\text{دس}$	٢٦	$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٥}\ \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$
١٣	$\int \frac{(٣ + \sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$	٢٧	$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$
١٤	$\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$	٢٨	$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$

٢٩	$\int \text{ظا}^{٤}\text{٤س}\ \text{دس}$	٤٣	$\int \text{جا}^{٣}\text{س جتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$
٣٠	$\int \text{قا}^{٢}\text{س ظتاس دس}$	٤٤	$\int \text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$
٣١	$\int \text{س}(\text{س}+١)^{٦}\ \text{دس}$	٤٥	$\int \text{ظا٧س دس}$
٣٢	$\int \text{جتاس جتا}^{٢}(\text{جاس})\ \text{دس}$	٤٦	$\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٥} - \text{س}^{٣}}\ \text{دس}$
٣٣	$\int \frac{١}{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$	٤٧	$\int \text{س}^{٨}\left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}} - \frac{٧}{\text{س}}\right)^{٤}\ \text{دس}$
٣٤	$\int_{١}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ٩}\ \text{دس}$	٤٨	$\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{٢س}^{٢}}\ \text{دس}$
٣٥	$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٢ + ٣\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$	٤٩	$\int \text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}\ \text{دس}$
٣٦	$\int \text{س هـ}^{\text{٤س}^{٢}}\ \text{دس}$	٥٠	$\int \frac{١}{\text{س}}\ \text{جا}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{دس}$
٣٧	$\int \frac{\text{جتا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$	٥١	$\text{هـ}^{\text{س}^{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$
٣٨	$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{هـ}^{-\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$	٥٢	$\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}\sqrt{١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{دس}$
٣٩	$\int \frac{(١ - \text{س})^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٥}{٢}}}\ \text{دس}$	٥٣	إذا كان $\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = ٨$ جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٥\ \text{جتاس ق}(\text{جاس})\ \text{دس}$
٤٠	$\int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١}\ \text{دس}$	٥٤	$\int \text{جا٢س هـ}^{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$
٤١	$\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{هـ}^{\frac{٣}{\text{س}}}\ \text{دس}$	٥٥	$\int_{٠}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$
٤٢	إذا كان $\text{ق}(١) = ٣$ ، $\text{ق}(٩) = ١٠$ جد $\int_{٠}^{٢} \text{٦س}^{٢}\ \text{قَ}(\text{س}^{٣}+١)\ \text{دس}$	٥٦	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{\text{قتا}^{٣}\text{س}}\ \text{دس}$

تمارين التكامل بالاجزاء

الرقم	السؤال	الرقم	السؤال
١	$\int \text{س جا٤س دس}$	١٨	$\int \text{جا لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$
٢	$\int \text{س}^{٢}\text{جتا٢س دس}$	١٩	$\int (\text{٣س}+١)\,\text{هـ}^{١-\text{س}}\,\text{دس}$
٣	$\int \frac{\text{٢س}+١}{\text{قاس}}\,\text{دس}$	٢٠	$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س}\sqrt{١-\text{جتا ٢س}}\;\text{دس}$
٤	$\int \text{٢س جا}^{٢}\text{س دس}$	٢١	$\int \text{قا}^{٢}\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس دس}$
٥	$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\;\text{دس}$	٢٢	$\int (\text{٢س}-١)\,\text{جتا٤س دس}$
٦	$\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس}$	٢٣	$\int (\text{س}-٢)^{٢}\text{جتا}(\text{س}+١)\;\text{دس}$
٧	$\int \text{س ظاس قا}^{٢}\text{س دس}$	٢٤	$\int \text{جتا}\sqrt{\text{٢س}+١}\;\text{دس}$
٨	$\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}\,\text{دس}$	٢٥	$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\;\text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\;\text{دس}$
٩	$\int \text{س هـ}^{\text{س}+٢}\,\text{دس}$	٢٦	$\int \text{س}^{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$
١٠	$\int_{١}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$	٢٧	$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس دس}$
١١	$\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$	٢٨	$\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}-٢}\,\text{دس}$
١٢	$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-١)^{٥}\,\text{دس}$	٢٩	$\int \text{جتا}\sqrt[٣]{\text{س}}\;\text{دس}$
١٣	$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس}$	٣٠	$\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\text{قتا}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$
١٤	$\int \text{س}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس}$	٣١	$\int \text{لو}_{\text{هـ}}x\;\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$
١٥	اذا كان $\text{ق}(١)=\text{ق}'(١)=٢$ ، $\text{ق}(٢)=\text{ق}'(٢)=٥$ جد $\int_{١}^{٢} \text{س ق}''(\text{س})\;\text{دس}$		
١٦	اذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\;\text{دس}=٤$ ، $\text{ق}(٢)=٢$، $\text{ق}(-١)=-٢$ جد $\int_{-\frac{١}{٢}}^{١} \text{س ق}'(\text{٢س})\;\text{دس}$		
١٧	اذا كان $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س جاس دس} = \int_{\cdot}^{٢} (\text{أس}^{٢}+\text{٢س})\;\text{دس}$ فجد قيمة الثابت أ		

تمارين التكامل بالكسور الجزئية

الرقم	السؤال	الرقم	السؤال
١	$\int \frac{٣}{\text{س}^{٢} - ١}\,\text{د س}$	١٧	$\int \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\,\text{د س}$
٢	$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\,\text{د س}$	١٨	$\int \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\,\text{د س}$
٣	$\int \frac{٥}{٢\text{س} - \text{س}^{٢}}\,\text{د س}$	١٩	$\int \frac{\text{س} + ١}{٢\text{س} - \text{س}^{٢}}\,\text{د س}$
٤	$\int \frac{٤\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ١}\,\text{د س}$	٢٠	$\int \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} + ١}\,\text{د س}$
٥	$\int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}\,\text{د س}$	٢١	$\int \frac{٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}\,\text{د س}$
٦	$\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}\,\text{د س}$	٢٢	$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{ظا س} - ٢}\,\text{د س}$
٧	$\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}\,\text{د س}$	٢٣	$\int \frac{\text{جاس}}{٨ + \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س}$
٨	$\int \frac{\text{ه}^{٢\text{س}}}{\text{ه}^{٤\text{س}} - ٤}\,\text{د س}$	٢٤	$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤\text{س}^{٢}}\,\text{د س}$
٩	$\int \frac{\text{ه}^{٣\text{س}}}{\text{ه}^{\text{س}} + ١}\,\text{د س}$	٢٥	$\int \frac{\text{ه}^{٣\text{س}}}{\text{ه}^{٢\text{س}} - ٣\,\text{ه}^{\text{س}} - ٤}\,\text{د س}$
١٠	$\int \frac{١}{\text{ه}^{\text{س}} - ١}\,\text{د س}$	٢٦	$\int \text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}^{٢} - ١)\,\text{د س}$
١١	$\int \frac{١}{\text{س} -}\,\text{د س}$	٢٧	$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\,(\text{لو}_{\text{ه}}\text{س}^{٣} - ٢)\,(\text{لو}_{\text{ه}}\text{س}^{٢} + ٣)}$
١٢	$\int \frac{٥}{\text{س}^{٥} + \text{س}}\,\text{د س}$	٢٨	$\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\,\text{د س}$
١٣	$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}\,\text{د س}$	٢٩	$\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}\,\text{د س}$
١٤	$\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جاس} - ٢}\,\text{د س}$	٣٠	$\int \sqrt{١ + \text{ه}^{\text{س}}}\,\text{د س}$
١٥	$\int \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}\,\text{د س}$	٣١	$\int \frac{١}{\text{س}\,(\text{لو}_{\text{ه}}\text{س})^{٢} + \text{س}\,(\text{لو}_{\text{ه}}\text{س})}\,\text{د س}$
١٦	$\int \frac{\text{س}}{٢\sqrt{\text{س} + ١} + \text{س}^{٢} + ٢}\,\text{د س}$	٣٢	$\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} + ٤\text{س} + ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\,\text{د س}$

تمارين عامة على طرق التكامل

الرقم	السؤال	الرقم	السؤال
١	$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{2} - \text{س}^{4}}}{\text{س}^{5}}\,\text{دس}$	١٧	$\int \frac{\text{س}^{7}}{\sqrt{\text{س}^{5}+1} + \sqrt{\text{س}+1}}\,\text{دس}$
٢	$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-2)}{(\text{س}-2)^{2}}\,\text{دس}$	١٨	$\int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^{2}}\,\text{دس}$
٣	$\int \frac{(2 - \sqrt[3]{\text{س}})^{2}}{\text{س}}\,\text{دس}$	١٩	$\int \frac{\text{س} - 4}{\sqrt{\text{س}}\,(2 + \sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$
٤	$\int \frac{1}{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$	٢٠	$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{3}} + \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}^{5}} + \text{هـ}^{\text{س}^{3}}}\,\text{دس}$
٥	$\int \text{س}\,x \sqrt[3]{\frac{5}{\text{س}^{2}} + \frac{1}{\text{س}^{3}}}\,\text{دس}$	٢١	$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{4}} + 5}{\text{هـ}^{\text{س}^{4}} + 3}\,\text{دس}$
٦	$\int_{4}^{9} \sqrt{\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}}\,\text{دس}$	٢٢	$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{(1 + \text{س}\sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$
٧	$\int \frac{1}{\text{س}^{7} + \text{س}}\,\text{دس}$	٢٣	$\int \frac{\sqrt{\text{جاس}}}{\text{ظاس}}\,\text{دس}$
٨	$\int \frac{\text{جا}^{4}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{دس}$	٢٤	$\int \frac{\text{س} - 9}{\text{س} - \sqrt{3}}\,\text{دس}$
٩	$\int \frac{\text{س}^{2} + 3\text{س}}{\text{س}^{2} - \text{س} - 12}\,\text{دس}$	٢٥	$\int \frac{\text{قا}^{2}\text{س} - 1}{1 - \text{قتا}^{2}\text{س}}\,\text{دس}$
١٠	$\int \text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{5}\text{س}\,\text{دس}$	٢٦	$\int \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$
١١	$\int \text{جا}4\text{س}\,\text{جتا}3\text{س}\,\text{دس}$	٢٧	$\int \text{جا}^{5}\text{س}\,\text{جتا}^{3}\text{س}\,\text{دس}$
١٢	$\int 2\text{جا}2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس})\,\text{دس}$	٢٨	$\int \text{جا}^{3}\text{س}\,\text{جتا}^{4}\text{س}\,\text{دس}$
١٣	$\int \text{قا}^{4}\text{س}\,\text{دس}$	٢٩	$\int \text{ظاس}\,(1 + \text{قاس})^{2}\,\text{دس}$
١٤	$\int \text{س}\,\text{جاس}^{2}\,\text{جتا}^{2}\text{س}^{2}\,\text{دس}$	٣٠	$\int (1 + \text{جتاس})(\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتاس})\,\text{دس}$
١٥	$\int \text{ظا}^{3}\text{س}\,\text{قا}^{4}\text{س}\,\text{دس}$	٣١	$\int \text{ظتاس}\,\text{قتا}^{3}\text{س}\,\text{دس}$
١٦	$\int \text{قتا}^{2}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس}$	٣٢	$\int (\text{س}^{11} - 3\text{س})^{9}\,\text{دس}$

٣٣	$\int س^{٤}\sqrt[٣]{س^{٧}-س^{٤}}\ دس$	٥٣	$\int ه^{٢س}\ جا\ ه^{س}\ دس$
٣٤	$\int \frac{٢}{١+\sqrt{س}}\ دس$	٥٤	$\int \frac{٢س}{س^{٤}-س^{٢}-٢}\ دس$
٣٥	$\int \frac{٢س}{١+قا^{٢}س}\ دس$	٥٥	$\int \frac{١}{ه^{س}-ه^{-س}}\ دس$
٣٦	$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١-جاس}\ دس$	٥٦	$\int \frac{س^{٢}+١}{(س-٢)(س+١)}\ دس$
٣٧	$\int س^{٧}\ ه^{س^{٤}+١}\ دس$	٥٧	$\int \frac{١}{\sqrt{س+١}-(\sqrt{س+١})^{٣}}\ دس$
٣٨	$\int \frac{س+١}{١+جتاس}\ دس$	٥٨	$\int \frac{١}{\sqrt{٢س-١}+٢س-٣}\ دس$
٣٩	$\int \left(\frac{س+٣}{س-١}\right)^{٢} دس$	٥٩	$\int \frac{٢جا٣س\ جاس+جتا٤س}{١+جا٢س}\ دس$
٤٠	$\int جتا٢س\ (جاس+جتاس)^{٤}\ دس$	٦٠	$\int ٦جا٣س\ (جتا٢س\ جتاس-جا٢س\ جاس)\ دس$
٤١	$\int س^{٥}\ (لو_{ه}\ س)^{٢}\ دس$	٦١	$\int جتا^{٣}٤س\ (جتا٣س\ جاس+جتاس\ جا٣س)\ دس$
٤٢	$\int (جتا^{٤}س-جا^{٤}س)\ ه^{لو_{ه}\ س}\ دس$	٦٢	$\int \frac{قا^{٥}س}{قتا^{٣}س}\ دس$
٤٣	$\int (جتا^{٤}س+جا^{٤}س)\ ه^{٢س}\ دس$	٦٣	$\int س^{١٤}\ (س^{٥}+١)^{٨}\ دس$
٤٤	$\int جاس\ (س+قتا^{٣}س)\ دس$	٦٤	$\int قاس\ (قاس+ظاس)^{ن}\ دس$ حيث ن صحيح موجب
٤٥	$\int (س-جتاس)^{٢}\ دس$	٦٥	$\int ه^{س}\ (جتا٥س\ جاس-\frac{١}{٢}جتا٨س)\ دس$
٤٦	$\int \frac{١}{جتاس+٣قاس}\ دس$	٦٦	$\int س(س-١)^{٨}\ (س^{٢}+٢س+١)^{٤}\ دس$
٤٧	$\int \frac{س}{جا^{٢}س-جا^{٤}س}\ دس$	٦٧	$\int \sqrt{س-\sqrt{س^{٢}-١}}\ دس$
٤٨	$\int (قاس+جتاس)^{٢}\ دس$	٦٨	$\int جتاس\ جتا٢س\ جاس\ جا٥س\ دس$
٤٩	$\int جتا٥س\ جا^{٢}س\ دس$	٦٩	$\int (س-٢)^{٣}\ جتا(س^{٢}-٤س)\ دس$
٥٠	$\int \frac{جاس+جتاس}{٨+جا٢س}\ دس$	٧٠	$\int \frac{جاس}{١-٣جتاس-جتا٢س}\ دس$
٥١	$\int \frac{٧+ظتا^{٣}٢س}{١-جتا^{٢}٤س}\ دس$	٧١	$\int ٣^{٣س-١}\ دس$
٥٢	$\int \frac{قاس}{ظاس-٣ظتاس}\ دس$	٧٢	$\int \frac{س-٣}{٢س^{٢}-١١س+٥}\ دس$

٧٣) إذا كان $س^{٢} - س + ١ = ٠$ فاوجد قيمة $\int_{٢}^{٧} (س^{٩} + ٤)\, دس$

٧٤) إذاعلمت ان $\int_{أ}^{ب} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}\, دس = ٢أ$ فاوجد قيمة $\int_{أ}^{ب} (س^{٢} - ٣س + ١١)\, دس$

٧٥) إذاعلمت ان $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا٢س\, ق(س)\, دس = ١٠$ ، $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جا٢س\, قَ(س)\, دس = ٤$ فاوجد قيمة $ق(\frac{\pi}{٤})$

٧٦) اوجد $\int \frac{جا٢س}{أجتا^{٢}س + ب جا^{٢}س}\, دس$ إذاعلمت ان أ ، ب اعداد صحيحة موجبة ، $ب < أ$

٧٧) اوجد $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س - ١)^{ن}}{س^{ن+٢}}\, دس$ إذاعلمت ان ن عدد صحيح فردي

٧٨) إذاعلمت ان $\int_{-١}^{٢} (\frac{١}{٢} ق(س) - ١)\, دس = ٥$ ، $\int_{١}^{٢} س^{٢} ق(س^{٣} - ٢)\, دس = -٢$ ، جد $\int_{٢}^{٦} (٤ + ق(س))\, دس$

٧٩) إذا كان $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتا^{٥}س\, جا^{٢}س\, دس = أ$ اثبت ان $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\frac{١}{٦} جتا^{٧}س + جا٢س)\, دس = أ + ١$

٨٠) إذا كان $(ق \cdot هـ)(٤) = ٦$ ، $(ق \cdot هـ)(٢) = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٤} هـ \cdot دق = ٥$ جد $\int_{٢}^{٤} ق \cdot دهـ$

٨١) إذا كان $جا^{٤}س + جتا^{٢}س - جا^{٢}س = ١$ جد $\int_{٠}^{\pi} جتا^{٤}س\, دس$

٨٢) إذاعلمت ان $ق(١) \cdot ق(٢) = ٥$ ، $ق(٢) = ٢$ جد $\int_{١}^{٢} \frac{ق(س) - س\, قَ(س)}{(ق(س))^{٢}}\, دس$

٨٣) اثبت ان $\int_{٠}^{\pi} س\, ق(جاس)\, دس = \frac{\pi}{٢} \int_{٠}^{\pi} ق(جاس)\, دس$ (استخدم $ص = \pi - س$)

٨٤) اثبت ان $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{لو_{هـ} س - ١}{(لو_{هـ} س)^{٢}}\, دس = \frac{١}{٢} هـ^{٢} - هـ$

٨٥) إذا كان $أ = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٢جتاس + ٦جاس}\, دس$ ، $ب = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس}{٢جتاس + ٦جاس}\, دس$ جد قيمة كل مايلي :

١) $٢أ + ٦ب$ ٢) $٦أ - ٢ب$ ٣) أ ، ب

٨٦) جد $\int جتا^{٣} ٤س\, (جتا٣س\, جاس + جتاس\, جا٣س)^{٧}\, دس$

(٩) المعادلة التفاضلية

١) المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي تحتوي مشتقات

٢) حل المعادلة التفاضلية هو ايجاد العلاقة بين المتغيرات بدون مشتقات

٣) طريقة حل المعادلة التفاضلية هي فصل المتغيرات

٤) $\text{ف} = \int \text{ع}\ \text{دن}$ ٥) $\text{ع} = \int \text{ت}\ \text{دن}$ حيث $\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ ، $\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

٦) $\text{ق(س)} = \int \text{ق}'\text{(س)}\ \text{دس} = \int \text{ميل المماس}\ \text{دس}$ ٧) $\text{ق}'\text{(س)} = \int \text{ق}''\text{(س)}\ \text{دس}$

تمارين المعادلة التفاضلية

١) حل المعادلات التفاضلية الاتية :

الرقم	المعادلة	الرقم	المعادلة
١	$\frac{\text{دص}}{\text{جاس}} = \frac{\text{دس}}{\text{جتاس}}$	٨	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س ص}}$ حيث س > ٠ ، ص > ٠
٢	$\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٦\text{س} - ٢ = ٠$	٩	$٢\ \text{قا}^٢\text{س}\ \text{دص} + \text{ص}^٢\ \text{دس} = ٢\text{دص}$
٣	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢\ \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٠$	١٠	$(\text{س}^٢ + \text{ص س}^٢)\ \text{دص} + (\text{ص}^٢ - \text{س ص}^٢)\ \text{دس} = ٠$
٤	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جا}^٢ ٣\text{ص}\ \text{جتا}٣\text{س}$	١١	$\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس} - ٥\text{ص}\ \text{دص}$
٥	$٣\text{ص}^٢\ \text{ظاس}\ \text{دص} = \text{دس}$	١٢	$\sqrt{١ + ٢\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}\ \text{قتا}^٢\text{س}$
٦	$(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)\ \text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$	١٣	$\text{جتاص}\ \text{دس} + (١ + \text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{جاص}\ \text{دص} = ٠$
٧	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س} - \text{ص}} + \text{س}^٢\ \text{هـ}^{-\text{ص}}$	١٤	$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^٢ - ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}$

٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\text{هـ}^{٣\text{س}}\ \text{ص}$. جد معادلة هذا المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (٠،١) .

٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{\text{س ص}^٣}{\sqrt{١ + \text{س}^٢}}$. جد معادلته علماً بأنه يمر بالنقطة (٠،−١) .

٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه هو $\frac{\text{ص}^٢ \sqrt{\text{س ص}}}{\text{س}}$. جد معادلته علماً بأنه يمر بالنقطة (١،٤) .

٥) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١،٠) يساوي ٢ وكان ق(٠)=١ جد قاعدة علماً

ق(س) بأن ق''(س) = س + جتا س

٦) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه هو أ(٢س – ١) حيث أ ثابت . جد معادلة

علماً بأنه يمر بالنقطتين (٢،–٢) ، (٣،٢)

٧) نقطة مادية تتحرك بتسارع ت = ٦ن + ٤ سم / ث^{٢} ، اذا بدأت هذه النقطة حركتها بسرعة ٢ سم / ث

من نقطة تبعد ١٠ سم عن نقطة الأصل جد بعد هذه النقطة عن نقطة الأصل بعد ٢ ثانية من بدء التحرك

٨) قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية ٦٤ م/ ث من على ارتفاع ٨٠ م وبتسارع قدره –٣٢ م/ ث^{٢} جد :

١. معادلة الحركة لهذة الكرة   ٢. أقصى ارتفاع تصل اليه الكرة

٣. الزمن الذي تحتاجه الكرة لتعود إلى نقطة القذف   ٤. سرعة الكرة لحظة وصولها إلى سطح الأرض

٩) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان ع ت = ٤ حيث ع السرعة ، ت التسارع ، ع > ٠ فإذا كانت

سرعته تساوي ٦ م/ ث عندما ن = ٢ ثانية. جد تسارع الجسيم عندما ن = ٣ ثانية

١٠) يتحرك جسيم من السكون على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\frac{١}{ع}$ ، ع > ٠ فإذا كانت ف = ١٠$\sqrt{٢}$

عندما ن= ٤ ث. جد موقع الجسيم عندما ن = ١

١١) انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة أ فإذا كانت سرعته هي ع = $\begin{cases} ٣ن^{٢} ، & ٠ \le ن < ٢ \\ ١٦-٢ن ، & ٢ \le ن \le ٨ \end{cases}$

جد بعده عن أ عندما ن= ٥ ثانية

١٢) اذا كان $\frac{دص}{د س}$ = ص جتا٢س جد ص بدلالة س

١٣) اذا كان ق''(س) = ٤هـ^{٢س} + ٤س ، ق(٠)=٩ ، قَ(٠)=٧ فجد قاعدة الاقتران ق(س)

١٤) جد الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية بحيث يكون ق(٠)=١ ، ق(٢)=٣ ، $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = ٩

١٥) اذا كان ق''(س) = ٦ ، ق(١)=١٠ ، $\int_{-١}^{٢}$ قَ(س) دس = ١٤ فجد قاعدة الاقتران ق(س)

١٦) آلة قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن بمعدل –٥٠٠(ن+١)$^{-٢}$ دينار/ سنة

احسب قيمة الآلة بعد مرور ٣ سنوات من شرائها

١٧) يزداد طول سلك بمعدل ($\frac{١}{١٠}$س) سم/ دقيقة حيث س طول السلك ، فإذا علمت ان طول السلك يساوي

هـ سم عند بدء التمدد. جد طوله بعد ١٠ دقائق حيث هـ العدد النيبيري.

١٨) خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات ابعاده ١،٢،٥ متر، يصب فيه الماء بمعدل (٤ن – ١) م^{٣}/ دقيقة

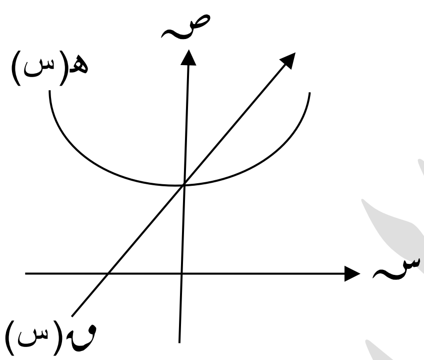
متى يمتلئ الخزان ؟

١٩) يشفى جرح بحيث تتناقص مساحته بمعدل −٣(ن+٢)$^{-٢}$ سم^{٢}/ يوم منذ ن يوماً ابتداءا من يوم الاثنين فإذا كانت مساحته في اليوم التالي ٢ سم. جد مساحته يوم الاثنين (بدء الجرح)

٢٠) شب حريق في غابة ، اذا دل م على المساحة للمنطقة التي يصيبها الحريق مقدراً بالدونمات وكان معدل زيادة المساحة (٠,٠٢ م) هو مقدراً بالدونمات لكل ساعة ، فإذا علمت ان المساحة التي أصابها الحريق عند اكتشافه تعادل ٣ دونمات، جد المساحة المحروقة بعد ساعتين من اكتشاف الحريق

٢١) اذا كان قَ(س) = ق(س) + ١ وكان ق(٠) = ١ اوجد ق(٢$_{هـ}$)

٢٢) الشكل المجاور يمثل منحنيين ق(س)، هـ(س) فاذا كان ق(س) = ٣س + ٤ جد هـ(٥) علما بان هـَ(س) = ٢س − ٣



٢٣) اذا كان ق(س) ≠ قَ(س) ، ق(س) = قً(س) اوجد ق(س) (معالي المستشار ابراهيم الاحمدي)

٢٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي ٧^{س} ، فجد قاعدة العلاقة ص علما بأن منحناها يمر بالنقطة (٠ ، ١) .

٢٥) إذا علمت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (٧ − س)(س − ٣) ، فأوجد قاعدة الاقتران ص إذا كانت له قيمة صغري محلية مقدارها ٥

٢٦) إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي س $\sqrt{\text{٢ + لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٧}}$ فجد قاعدة العلاقة ص علما بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ١١) .

٢٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}\,(\text{س} - ٣)\,(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}$ فجد قاعدة العلاقة ص علما بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٠) .

٢٨) إذا كان قً(س) = قا^{٢}س ، قَ (π) = صفر ، ق(٠) = ٥ فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

٢٩) تتحرك نقطة مادية في لحظة ما بتسارع ت حيث ت = $\frac{١}{(\text{ن}+١)^{٣}}$ قدم / ث^{٢} ، فإذا كانت سرعتها لابتدائية هي $\frac{٣}{٤}$ قدم / ث ، وبعدها عن نقطة ثابتة (و) عند بدء الحركة هو $\frac{١}{٨}$ قدم . جد معادلة الحركة ف .

٣٠) تحركت نقطة مادية بحيث ان سرعتها في اللحظة ن هي ع (ن) = $\frac{١}{٢\text{ن}^{٢} + ٣\text{ن} + ١}$ جد المسافة علما بأن النقطة المادية كانت عند نقطة الاصل في بداية الحركة .

٣١) حل المعادلة $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{٤س^٢ص - ٥س^٢ - ١٢ص + ١٥}$

٣٢) إذا كان س $\acute{ق}$(س) + ق(س) = $\frac{١}{س}$ فأوجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (هـ ، ١) حيث هـ العدد النيبيري.

٣٣) اوجد قاعدة الاقتران الذي يمر بالنقطتين($\frac{\pi}{٤}$ ، ٥) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١) اذا كان ميل المماس له عند اي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\acute{ق}$(س) = - م قتا^{٢}س

(١٠) معكوس المشتقة

١) يسمى الاقتران م(س) **معكوسا لمشتقة** الاقتران ق(س) **إذا كان** مَ(س) = ق(س)

٢) **لايجاد** م(س) **فإن** م(س) = $\int$ ق(س) دس

٣) يوجد للاقتران ق(س) **عدد لانهائي** من معكوسات المشتقة

٤) **الفرق** بين اي معكوسين للمشتقة يساوي ثابت **اي انه** اذا كان م(س) ، ل(س) معكوسين للمشتقة للاقتران ق(س)
فإن م(س) - ل(س) = أ حيث أ ثابت

٥) **لاثبات** ان م(س) معكوسا لمشقة الاقتران ق(س) **نثبت ان** مَ(س) = ق(س)

٦) إذا كان م(س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = م(ب) - م(أ)

تمارين الاقتران العكسي (معكوس المشتقة)

١) جد الاقتران العكسي (معكوس المشتقة) لكل من الاقترانات التالية :

١. ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ + ١

٢. ق(س) = $\sqrt[3]{\text{هـ}^{\text{٦س+٣}}}$ + س

٣. ق(س) = قا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$

٤. ق(س) = جا^{٢} س جتا^{٥} س

٥. ق(س) = $\dfrac{١}{(\text{٢جاس + جتاس})^{٢}}$

٦. ق(س) = $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\text{٢س (١ + ظاس)}}{\text{١ - ظاس}}$

٢) جد ق(س) لكل من الاقترانات العكسية التالية :

١. م(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٦س}}$

٢. م(س) = ٣$^{\text{٣س - ١}}$

٣) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان $\int_{١}^{٥}$ (م(س) - ل(س)) دس = ٨
جد $\int_{٢}^{٧}$ (م(س) - ل(س)) دس

٤) إذا كان م(س) هومعكوس مشتقة الاقتران ق(س) وكان ق(١) = ٥ ، م(١) = ٣ ، ق(٤) = ٧ ، م(٤) = ٩
جد $\int_{٤}^{١}$ (ق(س) – ٢س + ٣) دس

٥) إذا كان م(س) هومعكوس مشتقة الاقتران ق(س) = أس + ب ، مَ(١) = ٣ ، مً(٢) = ٤ جد قاعدة ق(س)

٦) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) وكان $\int_{١}^{٥}$ (م(س) − ل(س)) دس = ٨

أوجد $\int_{١}^{٥}$ س م(س) دس + $\int_{٥}^{١}$ س ل(س) دس .

٧) إذا كان ل(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س) = $\frac{١}{س^{٢}\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ حيث ل(٢) = ٠ ، ل(١) = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

جد $\int_{١}^{٢} \frac{١ + ٢}{س^{٢}\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ دس

٨) إذا كان ل(س) = ٤س − أ س^{٢} معكوس المشتقة للاقتران ق(س) وكان ق(٢) = ٦ **فا**وجد قيمة الثابت أ

٩) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان هـ(س) = ٥م(س) − ٩ل(س)

جد هـَ(س)

١٠) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان هـ(س) = ١٥م(س) − أ ل(س)

وكان ق(٢) = ٦ ، هـَ(٢) = ٢ **فا**وجد قيمة الثابت أ

١١) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان $\int_{-١}^{٢}$ (م(س) − ل(س)) دس = ٦

فما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ (م(س) − ل(س)) هـ^{س} دس

١٢) إذا علمت أن م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان $\int_{١}^{٥}$ (م(س) − ل(س)) دس = ٦

فما قيمة $\int_{١}^{٥} \frac{(ل(س) - م(س))}{س}$ دس

(١١) المساحات

يفسر **التكامل** $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس **هندسيا** بانه **المساحة** المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] حيث يقع منحنى ق فوق محور السينات .

تمارين المساحات

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س - ٦ والمستقيمين س = ١ ، س = ٥ ومحور السينات

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا(πس) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢جتا^{٢}س - ١ ومحور السينات في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ - س^{٢} ومحور السينات

٥) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} - س ومحور السينات

٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س ، ص = $\sqrt{س}$

٧) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص= س^{٢} ، ص = $\sqrt{س}$

٨) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص = ٢ ، ص = ٦ - س^{٢}

٩) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص= ٣س ، ص = س^{٢}

١٠) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص= جتا٢س ، ص = جتاس في الفترة [٠، π]

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص+ س = ٢ ، ص = س^{٢} ، ص = ٠

١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س - ٢ ، ص = $\sqrt{س}$ ، ص = ٠ وتقع في الربع الاول

١٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات ق(س) = ٤ - س^{٢} ، هـ(س) = ٣س ، ل(س) = ٦ - س ومحور الصادات

١٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق(س) = ١ - س^{٢} والمستقيم ص+ س = ٣ ومحوري الاحداثيات

١٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س^{٣} ، ص = - $\frac{١}{٢}$ س ، ص = س +٢

١٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= ٢ - س^{٢} ، ص = |س|

١٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س ، ص = ٢ ، ص = $\frac{١}{س}$

١٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س - ١ ، ص = $\frac{٨}{س + ١}$ ومحوري الاحداثيات

١٩) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جا س - $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة [٠، $\frac{\pi}{٤}$]

٢٠) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= جا س ، ص = ٢ - جا س ، س = ٠ وتقع في الربع الاول

٢١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتا س والمستقيم المار بالنقطتين (- ١،٠) ، (٠،١) ومحور السينات وتقع فوقه

٢٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س ، ص = $\sqrt{٢ - س}$ ، ص = ٠

٢٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س^{٣} ، ص = ٨ ، ص = ١ ومحورالصادات

٢٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين ص= ٢ ، ص = لو$_{هـ}$ س ومحوري الاحداثيات

٢٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ص= س ، ص = هـ ، ص = هـ^{س} ومحورالصادات حيث هـ العدد النيبيري

٢٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين ص= س+ ٢ ، ق(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٢} ، & س \leq ٠ \\ ٤ - س ، & س \geq ٠ \end{cases}$

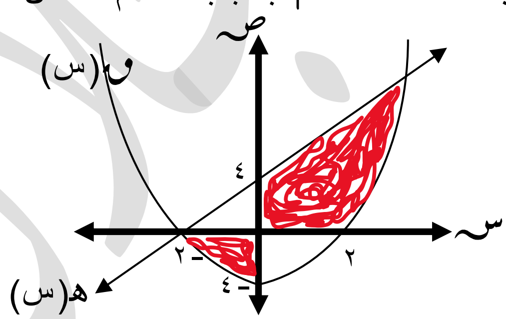
٢٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين ص= ٢ ، ص = هـ^{س} ومحوري الاحداثيات

٢٨) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = ظا س ومحور السينات في الفترة [- $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

٢٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص^{٢} = ٤ س والمستقيم الذي معادلته س - ص = ٣

٣٠) اذا كانت أ(١،٤) ، ب(٤،٦)، ج (٣،٣) جد مساحة المثلث أ ب ج باستخدام التكامل

٣١) في الشكل المجاور: جد مساحة المنطقة المظلله حيث ق(س) = س^{٢} - ٤



٣٢) جد قيمة أ بحيث ان المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى س = $\sqrt{ص}$ والمستقيم س = ٢ ومحورالسينات إلى قسمين متساويين

٣٣) جد قيمة ج التي تجعل المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ج^{٢} ومنحنى الاقتران هـ(س) =ج^{٢} - س^{٢} تساوي $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

٣٤) اذا كانت مساحة المثلث الناشئ من تقاطع المنحنى ص = (س+ ١)(أ- س) ، حيث أ > ٠ مع محوري الاحداثيات تساوي ١٠ وحدات مساحة . جد المساحة المحصورة بين هذا المنحنى ومحور السينات

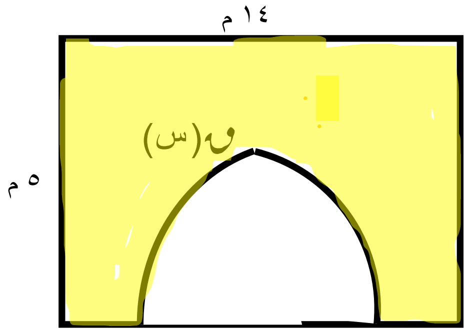
٣٥) الشكل المجاور :

يمثل الواجهة الامامية لمدخل

مبنى حيث ق(س) = ٨- س^{٢}

جد التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة

إذا علمت ان سعر دهان الوحدة المربعة يساوي ثلاث دنانير

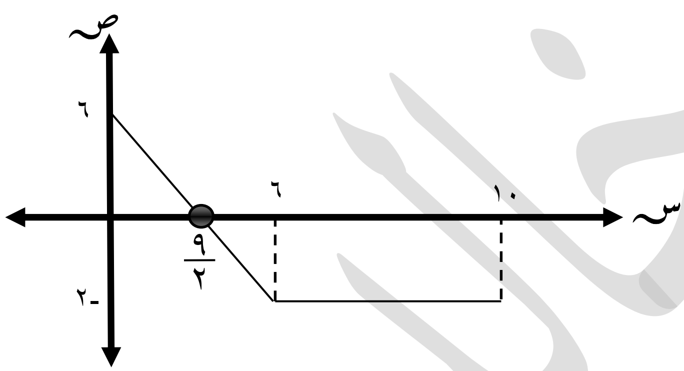


٣٦) الشكل المجاور :

يمثل منحنى ق المعرف

في الفترة [٠ ، ١٠]

جد $\int_{١٠}^{٠}$ ق(س) دس



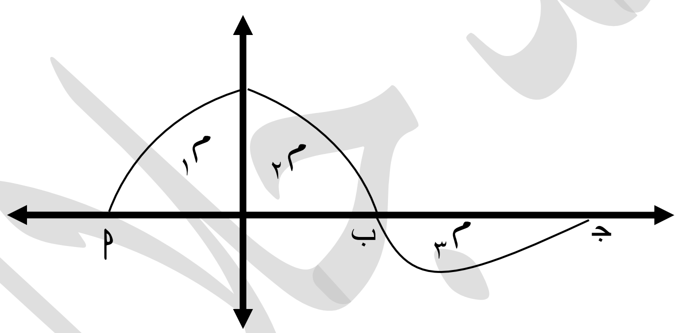
٣٧) الشكل المجاور :

يمثل منحنى الاقتران ق(س)

فاذا كانت م$_{١}$= ٩ وحدة مربعة ،

م$_{٣}$= ١١ وحدة مربعة وكان

$\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس = ٨ جد م$_{٢}$



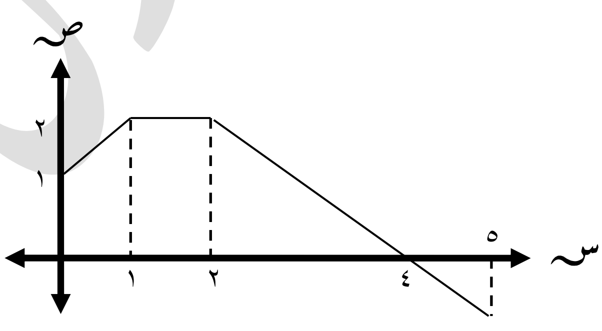
٣٨) الشكل المجاور :

يمثل منحنى الاقتران ق(س)

في الفترة [٠ ، ٥] جد :

١. $\int_{٠}^{٥}$ ق(س) دس

٢. $\int_{٠}^{٥}$ |ق(س)| دس



٣. مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٥]

٣٩) في الشكل المجاور :

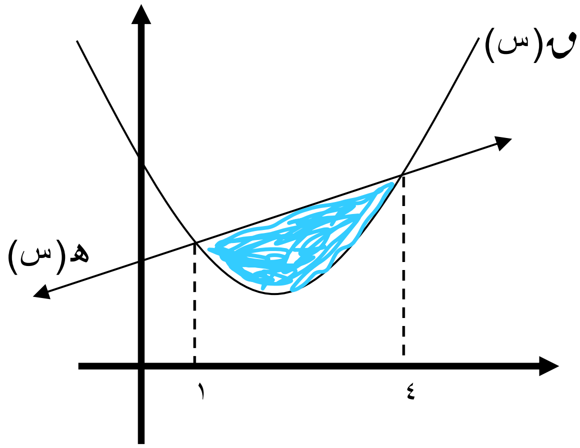
إذا كانت المساحة المحصورة

بين منحنى الاقتران ق(س)

والمستقيم هـ(س) في الفترة [١، ٤]

تساوي ١٥ وحدة مساحة وكان

$\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ٦ جد $\int_{٤}^{١}$ هـ(س) دس



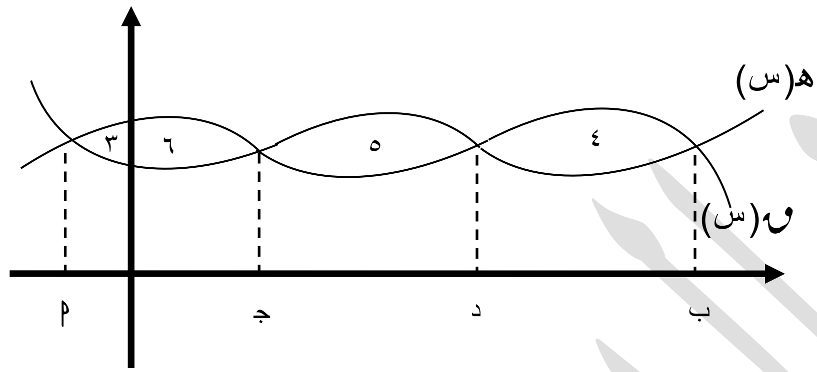
٤٠) في الشكل المجاور :

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين

للتكامل في الفترة [أ ، ب]

وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين

كما بالشكل المجاور جد ما يلي :



١. $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) − هـ(س)) دس   ٢. $\int_{د}^{ب}$ (هـ(س) − ق(س)) دس   ٣. $\int_{أ}^{د}$ (ق(س) − هـ(س)) دس

٤. $\int_{جـ}^{ب}$ (هـ(س) − ق(س)) دس   ٥. $\int_{جـ}^{أ}$ (ق(س) − هـ(س)) دس   ٦. $\int_{ب}^{د}$ (هـ(س) − ق(س)) دس

٤١) إذا كانت المساحة المحصورة بين محور السينات ومنحنى ص = س ، ص = $\frac{١}{س}$ والمستقيم س = أ

تساوي ١,٥ وحدة مساحة حيث أ > ١ فما قيمة أ ؟

٤٢) إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\sqrt{أ س}$ ، هـ(س) = $\frac{١}{أ}$ س^{٢} تساوي ١٢ وحدة مساحة

حيث أ عدد موجب فما قيمة الثابت أ .

٤٣) جد قيمة جـ التي تجعل المستقيم ص = جـ يقسم مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٢} ، و المستقيم

ص = ٤ إلى قسمين متساويين .