الوحدة الثالثة
تطبيقات التفاضل
ثاني ثانوي أدبي
حل أسئلة الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

منهاجي

٠٧٩٨٩ ٥٩٠٧١

Scanned by CamScanner

الأسئلة

١) جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢

ب) ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١ ، س = ١

جـ) ق(س) = (٢س − ٤) (س^{٢} + ١) ، س = صفرًا

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{٢س+٢}{س^{٢}+١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

٣) إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٤س − ٣، حيث أ عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي ٢٢، فجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢}، فجد ميل المنحنى للاقتران ق عندما س = ١

٥) إذا كان ق(س) = (٣س^{٢} − ٢)^{٤}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (−١، ق(−١)).

Scanned by CamScanner

سؤال P) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢

ق(٢) = ٣×٢ + ٥ = ١١

(٢ ، ١١) .

ق'(س) = ٣

م = ق'(٢) = ٣ .

معادلة المماس :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ١١ = ٣ (س − ٢)

ص − ١١ = ٣س − ٦
+ ١١ + ١١

ص = ٣س + ٥ .

ب) ق(س) = س٣ + ٣س − ١ ، س = ١

ق(١) = ١٣ + ٣×١ − ١

= ١ + ٣ − ١ = ٣ (١ ، ٣)

ق'(س) = ٣س٢ + ٣

م = ق'(١) = ٣×١ + ٣ = ٥ .

معادلة المماس :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٣ = ٥ (س − ١)

ص − ٣ = ٥س − ٥
+ ٣ + ٣

ص = ٥س − ٢

جـ) ق(س) = (٣س − ٤)(س٢ + ١) ، س = صفر

ق(٠) = (٣×٠ − ٤)(٠٢ + ١)

= −٤ × ١ = −٤ (٠ ، −٤)

ق'(س) = (٣س − ٤) × ٢س + (س٢ + ١) × ٣

م = ق'(٠) = (٣×٠ − ٤) × ٢×٠ + (٠٢ + ١) × ٣

= صفر + ٣ = ٣

معادلة المماس :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٤ = ٣ (س − ٠)

ص + ٤ = ٣س
− ٤ − ٤

ص = ٣س − ٤ .

س٣ ق(س) = $\frac{س^2 + ٢}{س^2 + ١}$ ، معادلة المماس عندما س = ١

ق(١) = $\frac{١^2 + ٢}{١^2 + ١}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ (١ ، ٢)

ق'(س) = $\frac{(س^2+١) \times ٢ - (س^2+٢) \times ٢س}{(س^2+١)^2}$

م = ق'(١) = $\frac{(١+١) \times ٢ - (١^2+٢) \times ٢ \times ١}{(١+١)^2}$

= $\frac{٤ - ٨}{٤}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

معادلة المماس :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٢ = −١ (س − ١)

ص − ٢ = −س + ١
+ ٢ + ٢

ص = −س + ٣

منهاجي

Scanned by CamScanner

٣ س ق(س) = ٢ س^٣ + ٤ س - ٣

ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي ٢٢

الحل: ق'(٣) = ٢٢

ق'(س) = ٦ س^٢ + ٤

ق'(٣) = ٦ (٣)^٢ + ٤

٢٢ = ٥٤ + ٤

١٨ = ٦ م ← م = ٣

٤ س ق(س) = س^٥ + ٤ س^٢

المطلوب ميل المنحنى للاقتران ق عندما س = ١

الحل: المطلوب ق'(١).

ق'(س) = ٥ س^٤ + ٨ س

م = ق'(١) = ٥ (١)^٤ + ٨ (١)

= ٥ + ٨

= ١٣

٥ س ق(س) = (٣ س^٢ - ٢)^٤ المطلوب معادلة المماس عند النقطة (-١ ، ق(-١))

الحل: ق(-١) = (٣ (-١)^٢ - ٢)^٤

= (٣ - ٢)^٤ = ١^٤ = ١

(-١ ، ١)

ق'(س) = ٤ (٣ س^٢ - ٢)^٣ × ٦ س

م = ق'(-١) = ٤ (٣ (-١)^٢ - ٢)^٣ × ٦ × -١

= ٤ (٣ - ٢)^٣ × -٦

= -٢٤ × ١ = -٢٤

معادلة المماس:

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ١ = -٢٤ (س - -١)

ص - ١ = -٢٤ (س + ١)

ص - ١ = -٢٤ س - ٢٤

+١ +١

ص = -٢٤ س - ٢٣

منهاجي

Scanned by CamScanner

الأسئلة

١) إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد:

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩م/ث.

٢) تحرك جسيم بحيث كان بُعْده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٢}. إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوانٍ، فجد قيمة أ.

٣) إذا كان ف(ن) = (٢ن − ٢)^{٣} + ٤ يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد السرعة المقطوعة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

٤) إذا مثَّل الاقتران ف(ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته، وكان ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٥، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤م/ث^{٢}؟

٥) تحرك جسيم بحيث كان بُعْده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة: ف(ن) = ن^{٢} + ٤. متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن ٤ ثوانٍ؟

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

Scanned by CamScanner

س١ ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} .

م) السرعة بعد مرور ثانيتين ← ع (٢)

ع = ف'(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن .

ع (٢) = ٣(٢)^{٢} + ٦(٢)

= ٤×٣ + ١٢

= ٢٤

ب) السارع عندما تكون السرعة ٩ م/ث

ع = ٣ن^{٢} + ٦ن = ٩

(٣ن^{٢} + ٦ن - ٩ = صفر) ÷ ٣

ن^{٢} + ٢ن - ٣ = صفر

(ن + ٣)(ن - ١) = ٠

ن + ٣ = صفر ⇐ ن = -٣ مرفوضة

(الزمن يجب ان يكون موجب)

ن - ١ = ٠ ⇐ ن = ١

المطلوب ت(١) .

ت' = ع = ٦ن + ٦

ت'(١) = ٦×١ + ٦

= ٦ + ٦

= ١٢

س٢ ف(ن) = ٢ن^{٣}

السرعة المتوسطة = $\frac{ف(P) - ف(١)}{P - ٠}$

= $\frac{٢P^{٣} - صفر}{P}$

= $\frac{٢P^{٣}}{P}$ = ٢P^{٢} .

السرعة اللحظية = ف'(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤×٣

= ١٢

ع(٣) = ٢P

١٢ = ٢P

$\frac{١٢}{٢}$ = $\frac{٢P}{٢}$

٦ = P .

منهاجي

Scanned by CamScanner

تابع حل اسئلة الكتاب

س٣ ف(ن) = (٢ن - ٢)^٣ + ٤

ع(ن) = ف'(ن) = ٣(٢ن - ٢)^٢ × ٢ .

ع(ن) = ٦ (٢ن - ٢)^٢ .

ع(٤) = ٦ (٢ × ٤ - ٢)^٢

= ٦ (٦)^٢

= ٦ × ٣٦ = ٢١٦ .

س٤ ف(ن) = ن^٣ - ن^٢ + ٥

ت(ن) = ٤ م/ث^٢

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن

ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ٢

ع = ٦ن - ٢
ت ت

٦ = ٦ن ⇐ ن = ١

المطلوب السرعة عندما ن = ١

ع(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن

ع(١) = ٣(١)^٢ - ٢(١)

= ٣ - ٢

= ١ م/ث .

س٥ ف(ن) = ١٠ن^٢ - ٤ن + ٦

المطلوب ع(٤) .

ع(ن) = ف'(ن)

= ٢٠ن - ٤ .

ع(٤) = ٢٠ × ٤ - ٤

= ٨٠ - ٤

= ٧٦ م/ث .

س٥ ع = ف' = ٢ن

ع(٤) = ٢ × ٤ = ٨

السرعة المتوسطة = (ف(ن) - ف(٠)) / (ن - ٠)

= (ن^٢ + ٤ن - ٤) / (ن - ٠) = ٨

ن^٢ / ن = ٨

ن = ٨ .

منهاجي

Scanned by CamScanner

الأسئلة

١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي:

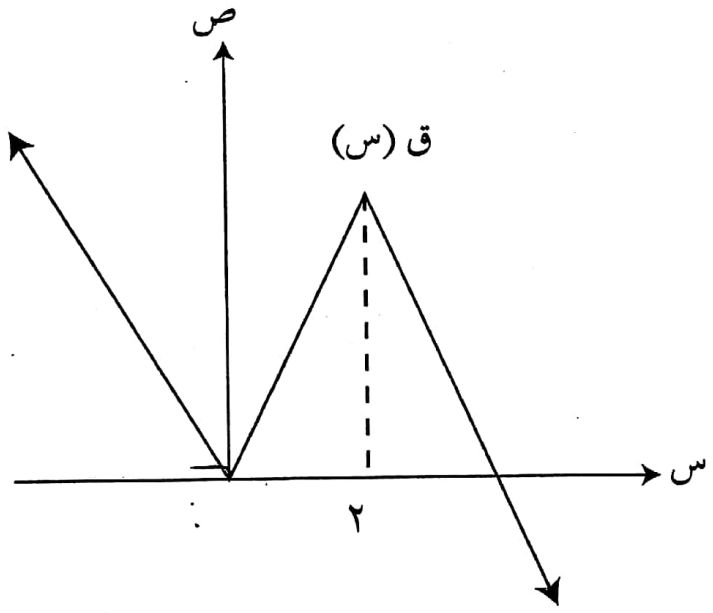
أ) ق(س) = ٣ – ٤س

ب) ق(س) = ٨س – س^{٢}

جـ) ق(س) = ٤س^{٣} – ٦س^{٢} + ٢

د) ق(س) = (س + ٢) (س + ٣)

٢) اعتمادًا على الشكل (٣–٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣–٨).

٣) بيِّن أن الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥ يكون متزايدًا لقيم س جميعها.

٤) إذا كان قَ(س) = هـَ(س)، فأثبت أن ق(س) = هـ (س) + جـ، حيث جـ عدد ثابت.

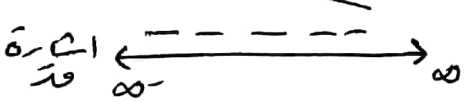
Scanned by CamScanner

حل الاسئلة
التزايد والتناقص

س١ جد فترات التزايد والتناقص

أ) $هـ(س) = ٣ - ٤س$

$هـ'(س) = -٤$ لا يوجد أصفار للمشتقة

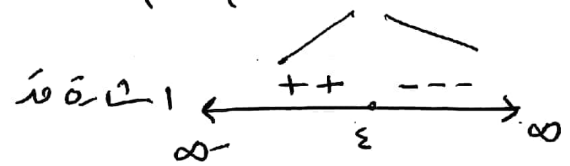


$هـ(س)$ متناقص على $(-\infty, \infty)$

ب) $هـ(س) = ٨س - س^٢$

$هـ'(س) = ٨ - ٢س$

$٨ - ٢س = صفر \Leftarrow ٢س = ٨ \Leftarrow س = ٤$



$(-\infty, ٤]$ متزايد

$[٤, \infty)$ متناقص .

جـ) $هـ(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢ + ٢$

$هـ'(س) = ١٢س^٢ - ١٢س$.

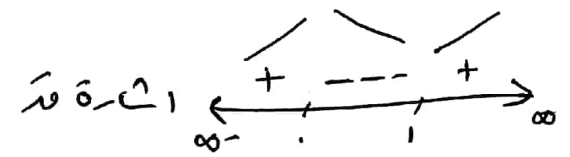
$١٢س^٢ - ١٢س = صفر$

$١٢س(س - ١) = صفر$

$١٢س = ٠ \Leftarrow س = صفر$

$س - ١ = صفر \Leftarrow س = ١$

+ 1 1+



$(-\infty, ٠]$ ، $[١, \infty)$ تزايد

$[٠, ١]$ تناقص .

د) $هـ(س) = (س+٢)(س+٣)$ حاصل ضرب اقترانين

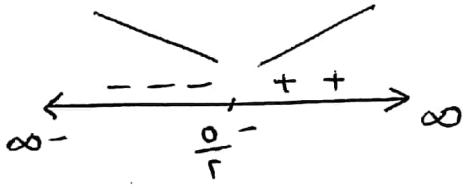
$هـ'(س) = (س+٢) \times ١ + (س+٣) \times ١$

$= س + ٢ + س + ٣$

$هـ'(س) = ٢س + ٥$.

$٢س + ٥ = ٠ \Leftarrow \frac{٢س}{٢} = \frac{-٥}{٢}$

$س = \frac{-٥}{٢}$



$(-\infty, \frac{-٥}{٢}]$ متناقص

$[\frac{-٥}{٢}, \infty)$ متزايد .

س٢ السؤال يمثل منحنى الاقتران هـ

لتحديد فترات التزايد والتناقص ننظر للسؤال من جهة اليسار .

اذا كان ↗ (صاعد) فإنه يكون متزايد

اذا كان ↘ (نازل) فإنه يكون متناقص .

$(-\infty, ٠]$ متناقص

$[٠, ٢]$ متزايد

$[٢, \infty)$ متناقص .

منهاجي

Scanned by CamScanner

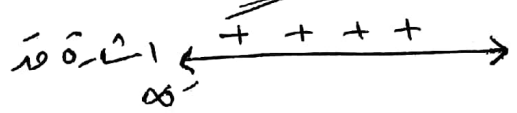
س٣) $ق(س) = س^3 + ٣س + ٥$

بين أن ق(س) متزايد لجميع قيم س

الحل: $ق'(س) = ٣س^2 + ٣$

لا يوجد أصفار للاقتران .

اشارة الاقتران ق' دائماً موجبة



تذكير: الاقتران التربيعي الذي لا يحلل (لا يوجد له جذور) اشارته نفس اشارة معامل $س^2$.

اذن ق(س) متزايد على $(-\infty, \infty)$

س٤ بما أن $ق(س) = هـ(س)$

$\Leftarrow$ $ق(س) - هـ(س) = صفر$.

لكن $(ق(س) - هـ(س))' = (ق - هـ)'(س)$.

$(ق - هـ)'(س) = صفر$

$\Leftarrow$ $(ق - هـ)(س) = ج$ (ثابت)

$ق(س) - هـ(س) = ج$

$\Leftarrow$ $ق(س) = هـ(س) + ج$

وهو المطلوب .

Scanned by CamScanner

١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

أ) ق (س) = س^{٣} − ٣س + ١

ب) ل (س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٢

جـ) هـ (س) = س^{٣} + ٤

د) ك (س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٤س + ٨

٢) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) ق (س) = ٨ − س^{٢}

ب) ق (س) = س^{٢} + ٤

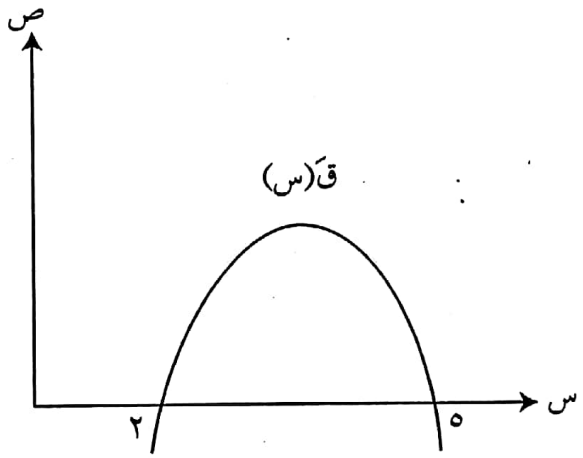
جـ) ق (س) = ٢س^{٣} − ٦س

٣) اعتمادًا على الشكل (٣−١٢) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث قَ(٢) = قَ(٥) = صفرًا ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق مُحدِّدًا نوعها.



الشكل (٣−١٢).

٤) إذا كان للاقتران ق(س) = ٣س^{٢} − أس + ٤ قيمة حرجة عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

Scanned by CamScanner

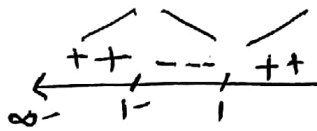
جد القيم القصوى المحلية إن وجدت

أ) $f(s) = s^3 - 3s + 1$

$f'(s) = 3s^2 - 3$

$3s^2 - 3 = 0 \Leftarrow \frac{3}{3} = \frac{3s^2}{3}$

$s^2 = 1 \Leftarrow s = \pm 1$



عند $s = -1$ توجد قيمة عظمى محلية هي

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

عند $s = 1$ توجد قيمة صغرى محلية هي

$f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$

ب) $f(s) = 4s^3 - 6s^2 + 2$

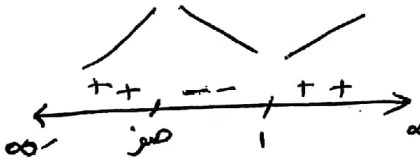
$f'(s) = 12s^2 - 12s$

$12s^2 - 12s = 0$

$12s(s - 1) = 0$

$\frac{12s}{12} = \frac{0}{12} \Leftarrow$ $\boxed{s = 0}$

$s - 1 = 0 \Leftarrow$ $\boxed{s = 1}$



عند $s = 0$ توجد قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 2$

عند $s = 1$ توجد قيمة صغرى محلية هي

$f(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 2$

$= 4 - 6 + 2$

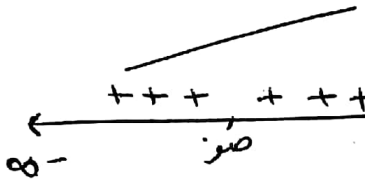
$= -2 + 2$

$= 0$ صفر.

جـ) $h(s) = s^3 + 4$

$h'(s) = 3s^2$

$\frac{3s^2}{3} = \frac{0}{3} \Leftarrow 3s^2 = 0 \Leftarrow s = 0$ صفر



الاقتران $h(s)$ متزايد على $(-\infty, \infty)$

لا يوجد قيم قصوى

د) $f(s) = s^3 - 2s^2 - 4s + 8$.

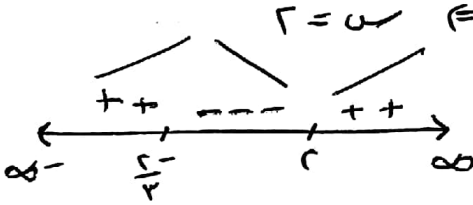
$f'(s) = 3s^2 - 4s - 4$

$3s^2 - 4s - 4 = 0$

$(3s + 2)(s - 2) = 0$

$3s + 2 = 0 \Leftarrow \frac{3s}{3} = \frac{-2}{3} \Leftarrow s = \frac{-2}{3}$

$s - 2 = 0 \Leftarrow s = 2$



عند $s = -\frac{2}{3}$ توجد عظمى هي

$f(-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^3 - 2(-\frac{2}{3})^2 - 4(-\frac{2}{3}) + 8$

$= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 8$

$= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} + \frac{72}{27} = \frac{256}{27}$

عند $s = 2$ توجد صغرى هي $f(2)$

$f(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 8$

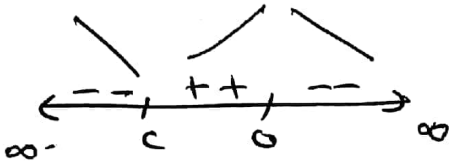
$= 8 - 8 - 8 + 8$

$=$ صفر

س٣ أصفار المشتقة الأولى

أ) هي {٢ ، ٥} وهي النقاط الحرجة

ب)



اشارة د

(−∞ ، ٢] ، [٥ ، ∞) تناقص.

[٢ ، ٥] تزايد.

جـ) عند س = ٢ يوجد صغرى هي د(٢)

عند س = ٥ يوجد عظمى هي د(٥).

س٣ جد القيم القصوى (إن وجدت) باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) د(س) = ٨ − س٣

د'(س) = −٣س٢

−٣س٢ = صفر ⇐ س = صفر

د''(س) = −٦س

د''(٠) = −٦(٠) = صفر فيه عظمى محلية

عند س = ٠ هي د(٠) = ٨.

ب) د(س) = س٤ + ٤

د'(س) = ٤س٣

٤س٣ = ٠ ⇐ س = ٠

د''(س) = ١٢س٢

د''(٠) = ١٢(٠)٢ = ٠ فيه صغرى محلية

عند س = ٠ هي د(٠) = ٤

جـ) د(س) = ٢س٣ − ٦س.

د'(س) = ٦س٢ − ٦

٦س٢ − ٦ = ٠ ⇐ ٦س٢ = ٦ ⇐ س٢ = ٦/٦

س٢ = ١ ⇐ س = ±١

د''(س) = ١٢س

د''(١) = ١٢ > ٠ فيه صغرى هي د(١) = −٤

د''(−١) = −١٢ < ٠ فيه عظمى هي

د(−١) = ٤

س٤ د(س) = ٣س٤ − ٢٠س٣ + ٤

فيه حرجة عند س = ٢ ⇐ د'(٢) = صفر

د'(س) = ١٢س٣ − ٦٠س٢

د'(٢) = ١٢(٨) − ٦٠(٤)

صفر = ٩٦ − ٢٤٠

١٤٤ = ٢٤٠

١٢ × ٢٠ = ٢٤٠

منهاجي

Scanned by CamScanner

الأسئلة

١) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س + س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٤٠ + ١٦٠س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

٢) ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعيًّا. فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢}، وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ دينارًا ، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

٣) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٦٠س – س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٢٠ + ٨س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

٤) إذا كان د(س) = ١٦س – س^{٢} – ٢٠ دينار، ك(س) = ٢س^{٢} – ٨س + ١٥ دينار، هما إيراد س من وحدات سلعة معينة وتكلفتها، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٦) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ٩٠ دينارًا. فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًّا تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٠,٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠ دينار، فجد الربح الحدي.

Scanned by CamScanner

س١ ر(س) = د(س) - ك(س)

ر(س) = ٨٠س + س² - (١٦٠ + ٤٠ك)

= ٨٠س + س² - ١٦٠ك - ٤٠

ر(س) = س² - ٨٠س - ٤٠

ر'(س) = ٢س - ٨٠ (الربح الحدي)

س٢ ك(س) = س² + ٥٠س + ٣٠٠٠

الايراد = سعر الجهاز × عدد الأجهزة

د(س) = س × ٥٠س

ر(س) = د(س) - ك(س)

= (٥٠س - س²) - (س² + ٥٠س + ٣٠٠٠)

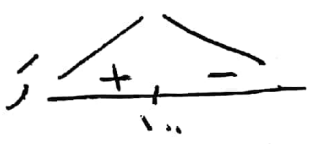
= ٥٠س - س² - ٥٠س - ٣٠٠٠ - س²

= -٢س² + ٥٠س - ٣٠٠٠

ر'(س) = -٤س + ٥٠

-٤س + ٥٠ = ٠ ⇐ ٤س = ٥٠

س = ٥٠/٤ = ١٢.٥



قيمة عظمى عند س = ١٢.٥

س٣ ر(س) = د(س) - ك(س)

ر(س) = ٦٠س - س² - (٢٠ + ٨ك)

= ٦٠ك - س² - ٢٠ - ٨ك

ر(س) = ٥٢ك - س² - ٢٠

الربح الحدي = ر'(س) = ٥٢ - ٢ك .

س٤ ر(س) = د(س) - ك(س)

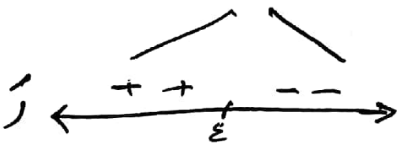
ر(س) = ١٦س - س² - ٢٠ - (١٥ + ٨ك - ٢ك²)

= ١٦ك - س² - ٢٠ - ١٥ + ٨ك - ٢ك²

ر(س) = ٢٤ك - ٣ك² - ٣٥

ر'(س) = ٢٤ - ٦ك = ٠

٦س/٦ = ٢٤/٦ ⇐ س = ٤



عند س = ٤ قيمة عظمى

منهاجي

Scanned by CamScanner

ن د(س) = عدد الثلاجات × سعر الثلاجة

= س × ٥٠٠

= ٥٠٠ س

ر(س) = د(س) − ك(س)

= (٣٦٠٠٠ + ٤ك + ك^{٢}) − ٥٠٠ك

= ٣٦٠٠٠ − ٤ك − ك^{٢} − ٥٠٠ك

= ٣٦٠٠ − ٤٩٦ك

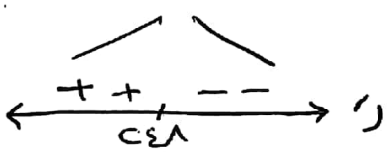
ر′(س) = ٤٩٦ − ٢ك

ر′(س) = صفر ⇐ ٤٩٦ − ٢ك = ٤ك + ٤ك

٤٩٦ = ٢ك + ٢ك

$\frac{٤٩٦}{٢} = \frac{٢ك}{٢}$

ك = ٢٤٨



تبلغ عظمى عند ك = ٢٤٨

ن د(س) = ٩٠ س

ر(س) = د(س) − ك(س)

ر(س) = ٩٠ س − (١٠٠ + ٧٠ك + ٠٫٢ك^{٢})

ر(س) = ٩٠ك − ٠٫٢ك^{٢} − ٧٠ك − ١٠٠

ر(س) = ٢٠ك − ٠٫٢س^{٢} − ١٠٠

ر′(س) = ٢٠ − ٠٫٤س (الربح الحدي)

منهاجي

Scanned by CamScanner

أسئلة الوحدة

١) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} − ١٢ن + ٣، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢م/ث.

٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = م (ن − ١)^{٢}، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ تساوي ١٢م/ث، فجد قيمة الثابت م.

٣) قطعة أرض يراد تسييج جزء مستطيل منها بحيث تبلغ مساحته ٣٧٥٠م^{٢}. إذا كانت تكلفة المتر الطولي الواحد من جانبين متوازيين ثلاثة دنانير، ومن الجانبين الآخرين دينارين، فجد أبعاد قطعة الأرض التي يمكن تسييجها لتحقيق أقل كلفة ممكنة. (علمي)

٤) إذا كان ق(س) = س^{٢}(٦ − س)، فجد:

أ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق.

ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران ق (إن وجدت).

٥) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًّا تعطى بالعلاقة:

ك(س) = ٠,٣ س^{٢} + ٤٠س + ٧٠ دينارًا، فجد الربح الحدي.

٦) لكل من الاقترانين الآتيين، جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ٥ (علمي)

ب) ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٧

٧) إذا كان ق(س) = س(٣س − ١)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

٨) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما ٥٠، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟ (علمي)

٩) إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعة.

Scanned by CamScanner

١٠) إذا كان ق(س) = (٣س − ٤)^{٣}، فجد قيمة س التي تجعل قَ(س) = ٣٦

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح . ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٢} − ١٢س + ١ قيمة حرجة عندما س = ٣، فإن قيمة أ تساوي:

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) −٢

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ − س)^{٤} عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) يساوي (٤) ، فإن قيمة س$_{١}$ تساوي:

أ) −٣ ب) −٢ جـ) ٢ د) ٣

(٣) إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٤س، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عندما س تساوي:

أ) صفرًا ب) ٢ جـ) −٤ د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٢ هي:

أ) [٢، ٣] ب) [٠، ١] جـ) [١، ∞) د) (−∞، ١]

(٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٦ن^{٢} − ن^{٣}، حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم في زمن قدره ن ثانية. المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفرًا هي:

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٦) إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٣} − ٣س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س = ١، فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٢ ب) −٢ جـ) −٣ د) ٣

Scanned by CamScanner

س١ ف(ن) = ٢ن^٢ − ١٢ن + ٣

المطلوب ت عندما ع = ٤٢ م/ث .

ع = ف' = ٦ن − ١٢

٤٢ = ٦ن − ١٢

+١٢ +١٢

٥٤/٦ = ٦ن^٢/٦ ⇐ ن^٢ = ٩

ن = ±٣ (−٣ مرفوض لأنه زمن)

ت = ع' = ١٢ن

ت|ن=٣ = ١٢ × ٣

= ٣٦ م/ث^٢

س٢ ف(ن) = م(ن − ١)^٢

ع(٤) = ١٢ المطلوب قيمة الثابت م ؟

ع = ف' = ٢م(ن − ١)

ع(٤) = ٢م(٤ − ١)

١٢ = ٢م × ٣

١٢/٦ = ٦م/٦

م = ٢

س٣

المساحة = ك × ص

ص = ٣٧٥٠/ك

المحيط = ك + ك + ٢ص

التكلفة = ك × ٣ + ك × ٢ × ص .

ت = ٤ك + ٦ص

= ٤ك + ٦ × ٣٧٥٠/ك

ت' = ٤ − ٢٢٥٠٠/ك^٢

صفر = ٤ − ٢٢٥٠٠/ك^٢

٤ = ٢٢٥٠٠/ك^٢ ⇐ ٤ك^٢/٤ = ٢٢٥٠٠/٤

ك^٢ = ٥٦٢٥

ك = ٧٥ .

ص = ٣٧٥٠/٧٥

ص = ٥٠

ت'' = ٤ك^٣/ك^٢ = ٤٥٠٠٠/ك^٣

ت''(٧٥) = ٤٥٠٠٠/(٧٥)^٣ > صفر

قيمة صغرى عند ك = ٧٥ .

ص = ٣٧٥٠/ك

منهاجي

Scanned by CamScanner

٤) $د(س) = س^{٢}(٦ - س)$

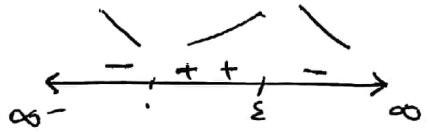
$= ٦س^{٢} - س^{٣}$

$د'(س) = ١٢س - ٣س^{٢}$

$١٢س - ٣س^{٢} = ٠$

$٣س(٤ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$٤ - س = ٠ \Leftarrow س = ٤$



$(-\infty, ٠]$ متناقص

$[٠, ٤]$ متزايد

$[٤, \infty)$ متناقص

عند $س = ٠$ يوجد صغرى محلي $د(٠) =$ صفر

عند $س = ٤$ يوجد عظمى محلي $د(٤) = ٣٢$

---

٥) الإيراد = د(س) = عدد الوحدات × سعر الوحدة

$د(س) = س \times ١٠٠$

$د(س) = ١٠٠س$

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

$ر(س) = ١٠٠س - ٣٠س^{٢} + ٤٠س - ٧٠$

$= ٦٠س - ٣٠س^{٢} - ٧٠$

$ر'(س) = ٦٠ - ٦٠س$

الربح الحدي

---

٦) $د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

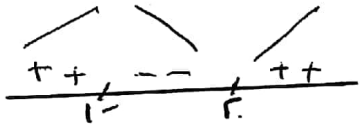
$د'(س) = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢$

$\frac{٦س^{٢}}{٦} - \frac{٦س}{٦} - \frac{١٢}{٦} = \frac{٠}{٦}$

$س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ أو $س = -١$



توجد صغرى عند $س = ٢$ حيث $د(٢) =$

توجد عظمى عند $س = -١$ حيث $د(-١) =$

عند $س = -١$ حيث $د(-١) = ١٢$

ب) $د(س) = س^{٣} - ٣س + ٧$

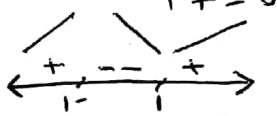
$د'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{٣}{٣} \Leftarrow$

$س^{٢} = ١ \Leftarrow$

$س = \pm ١$



توجد

عند $س = ١$ توجد صغرى حيث $د(١) =$ ٥

عند $س = -١$ توجد عظمى حيث $د(-١) =$ ٩

منهاجي

Scanned by CamScanner

س٧ $م(س) = س(٣-س)^{٢}$

$م(١) = ١(٣-١\times٣)^{٢}$

$= ١ \times ٢^{٢} = ٤$

(١، ٤)

$م'(س) = س \times ٢(٣-س)(-١) + ١ \times (٣-س)^{٢}$

$م'(١) = ٦ \times ٢ + ٤$

$م = ١٢ + ٤ = ١٦$

معادلة المماس:

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = ١٦(س - ١)$

$ص - ٤ = ١٦س - ١٦$

$ص = ١٦س - ١٦ + ٤$

$ص = ١٦س - ١٢$

س٨ العدد الأول = س

العدد الثاني = ص

$س + ص = ٥٠ \Leftarrow ص = ٥٠ - س$

$ع = س \times ص$

$ع = س(٥٠ - س)$

$ع = ٥٠س - س^{٢}$

$ع' = ٥٠ - ٢س$

$٥٠ - ٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٥٠$

$س = ٢٥$

$ع'' = -٢$

$ع''(٢٥) = -$ ← صغرى محلية

$ص = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥$

س٩ $ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢}$

التكلفة الحدية $= ك'(س) = ٦س$

$ك'(٢٠) = ٦ \times ٢٠$

$= ١٢٠$ دينار

س١٠ $م(س) = (٣س - ٤)^{٣}$ ، $م'(س) = ٣٦$

$م'(س) = ٣(٣س - ٤)^{٢} \times ٣$

$\frac{٣٦}{٩} = \frac{٩(٣س - ٤)^{٢}}{٩}$

نأخذ الجذر للطرفين

$\sqrt{٤} = \sqrt{(٣س - ٤)^{٢}} \Leftarrow ٣س - ٤ = \pm ٢$

$٣س - ٤ = ٢$ أو $٣س - ٤ = -٢$

$+٤ \quad +٤ \qquad +٤ \quad +٤$

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٦}{٣} \Leftarrow س = ٢$

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٢}{٣}$

$س = \frac{٢}{٣}$

منهاجي

Scanned by CamScanner

(١١) س = ٣ نقطة حرجة ⇐ هـ'(٣) = صفر

هـ(س) = ٢ س^٣ − ١٢ س + ١

هـ'(س) = ٦ س^٢ − ١٢

هـ'(٣) = ٦ × ٩ − ١٢ = ٤٢

صفر = ٦ ب − ١٢ ⇐ ب = ٢

(أ) ب = ٢ ⇐ ٦ ب / ٦ = ١٢ / ٦

(٢) ميل المماس = هـ'(س١) = ٤

هـ(س) = (٢ − س)^٤

هـ'(س) = ٤ (٢ − س)^٣ × −١

٤ − = ٤ − (٢ − س١)^٣

(٢ − س١)^٣ = ١

٢ − س١ = ١

−س١ = −١

س١ = ١ ⇐ س١ = ٣

(د)

(٣) هـ(س) = س^٤ − ٤ ك

هـ'(س) = ٤ ك^٣ − ٤ = ٠

ك^٣ = ١ ⇐ ك = ١

	−	٠	+
هـ'		٠	
	↘	قيمة صغرى	↗

عندما س = ١ قيمة صغرى

(ب)

(٤) هـ(س) = ص^٣ − ٣ ك − ٢

هـ'(س) = ٣ ك^٢ − ٣ = ٠

ك^٢ = ١ ⇐ ك = ١

	−	١	+
هـ'		٠	
	↘	قيمة صغرى	↗

متزايدة في [١، ∞) (ب)

(٥) ف(ن) = ٦ ن^٢ − ن^٣

ع = ف'(ن) = ١٢ ن − ٣ ن^٢

ن = ع' = ١٢ − ٦ ن = صفر

١٢ / ٦ = ٦ ن / ٦ ⇐ ن = ٢

المطلوب ف(٢).

ف(٢) = ٦ (٢)^٢ − ٢^٣

= ٦ × ٤ − ٨ = ٢٤ − ٨

= ١٦ (ب)

(٦) هـ(س) = ٢ س^٣ − ٣ س^٢

يوجد قيمة صغرى عند س = ١ ⇐

س = ١ نقطة حرجة ⇐ هـ'(١) = صفر

هـ'(س) = ٦ س^٢ − ٦ ك

هـ'(١) = ٦ − ٦ ب

صفر = ٦ − ٦ ب

٦ ب / ٦ = ٦ / ٦

ب = ١

(أ)

منهاجي

Scanned by CamScanner