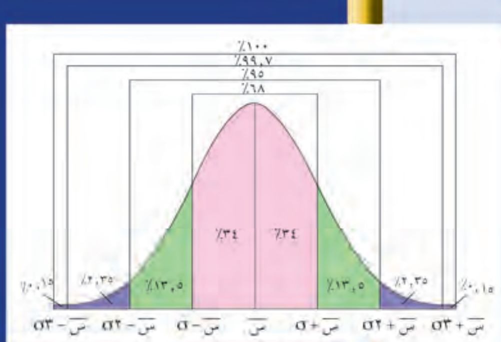
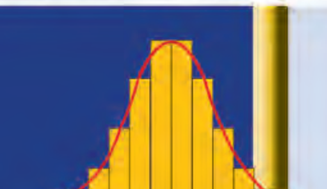
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب





الصفّ الحادي عشر أدبي ١١
الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٨ - ١٤٣٩ هـ

٢٠١٧ - ٢٠١٨ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر أدبي

أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمد بدر حاتم محمد **أ. إقبال محمد البحراني**

أ. مها زايد مطلق العنزي **أ. رضية جواد حسين النصر**

أ. محمد عبدالله الحمد الجرن

الطبعة الأولى ٢٠١٣ م

الطبعة الثانية ٢٠١٥ م

٢٠١٧ م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتويات

الوحدة الرابعة

وصف البيانات

Describing Data

مشروع الوحدة: الأجهزة الخلوية.

١ مقدمة المشروع: أصبحت الأجهزة الخلوية تشكل عنصرًا هامًا في استخداماتنا اليومية لما توفّره من خدمات سريعة نحصل عليها في أي زمن وفي أي مكان نتواجد فيه.

٢ الهدف: معرفة المدة المستغرقة في استخدام الأجهزة الخلوية لبعض فئات المجتمع.

٣ اللوازم: آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ كيف ستحدد الفئات التي سوف يشملها الاستطلاع؟

ب ما هي فئات المجتمع المستهدفة؟ (أطباء، محامون، مهندسون، معلمون، رجال أعمال، ضباط، طلاب، ...)

جـ اختر عينات متساوية العدد من كل فئة.

د احسب المتوسط الحسابي لكل فئة بالساعات.

أكمل الجدول التالي لإيجاد مدة استخدام الجهاز في يوم واحد:

الفئات المستهدفة	أطباء	محامون	مهندسون	معلمون	رجال أعمال	ضباط	طلاب
التكرار							
متوسط المدة (ساعات)							

استخدم هذا الجدول لإيجاد المتوسط الحسابي للمدة المستغرقة لفرد واحد.

٥ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه النتائج التي حصلت عليها وذلك من خلال الجدول.

اعرض اقتراحاتك حول الأرقام التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

٤-١ الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين	٤-٢ الالتواء	٤-٣ مقاييس التشتت وتطبيقاتها	٤-٤ تطبيقات إحصائية
(٤-١-أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري	(٤-٢-أ) الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية	(٤-٣-أ) مقاييس التشتت	(٤-٤-أ) مقاييس النزعة المركزية
(٤-١-ب) الوسيط، الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات	(٤-٢-ب) العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين	(٤-٣-ب) التوزيع الطبيعي	(٤-٤-ب) الوسيط
		(٤-٣-جـ) القيمة المعيارية	

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرّفت الحصر الشامل.
- تعرّفت المعاينة.
- تعرّفت تصنيف البيانات.
- تعرّفت طرق جمع البيانات وتنظيمها.
- تعرّفت أنواع العينات العشوائية.
- تعرّفت التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تعرّفت التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.
- تعرّفت المنحنيات التكرارية المتجمعة.
- تعرّفت التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية.
- تعرّفت المدرج والمنحنى والمضلع التكراري والخط المنكسر.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد الربيع الأدنى والربيع الأعلى من قيم البيانات.
- استخدام مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل البيانات.
- تمييز أنواع الالتواء.
- الربط بين الالتواء ومخطط الصندوق ومقاييس النزعة المركزية.
- إيجاد المدى ونصف المدى الربيعي والتباين والانحراف المعياري.
- استخدام القاعدة التجريبية والقيمة المعيارية في اتخاذ قرارات مناسبة.
- استخدام الحاسوب لإيجاد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت.

المصطلحات الأساسية

الربيع الأدنى - الربيع الأعلى - مخطط الصندوق ذي العارضتين - الالتواء - التماثل - الالتواء الموجب - الالتواء السالب - نصف المدى الربيعي - التباين - الانحراف المعياري - القاعدة التجريبية - القيمة المعيارية.

أضف إلى معلوماتك

في عصر العولمة الذي نعيش فيه تحت راية الإنجازات الإلكترونية يتصدر الهاتف المحمول قائمة هذه التقنيات، حيث أصبح من الأساسيات في حياتنا اليومية وذلك في مجال الاتصالات، وهو يعتمد على الاتصال اللاسلكي بواسطة شبكة من أبراج البث موزّعة ضمن مساحة محددة. ولقد أصبحت أجهزة الهاتف المحمول أكثر من مجرد وسيلة للاتصال الصوتي بل هي تستخدم أيضًا كأجهزة حاسوب وآلات تصوير وجهاز إرسال للرسائل النصية واستقبالها.

يعتبر الأمريكي مارتن كوبر الذي يعمل كباحث في شركة موتورولا للاتصالات صاحب أول إنجاز في هذا المجال، إذ أجرى أول مكالمة من هاتف محمول يوم ٣ إبريل من عام ١٩٧٣.

ولكن إلى جانب الخدمات المهمة التي يقدمها الهاتف المحمول لا بد من الإشارة إلى أن عدة دراسات أجريت على الحقل المغناطيسي الذي يولده هذا الجهاز أظهرت أن وضع الهاتف المحمول إلى جانب القلب قد يلحق به ضررًا.

٤–١

الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

Median, Lower and Upper Quartile—Box and Whisker Plot

سوف تتعلم

- الوسيط ($ر_{٢}$).
- الربيع الأدنى ($ر_{١}$).
- الربيع الأعلى ($ر_{٣}$).
- الصندوق ذو العارضتين.
- تطبيقات على بيانات موزعة فئات.

عمل تعاوني

تمثّل البيانات التالية رواتب شهرية لبعض العاملين في إحدى المؤسسات بالدينار الكويتي:

٧٠٠، ٧٥٠، ١١٥٠، ٧٠٠، ١١٠٠، ٩٥٠، ٨٠٠، ٨٠٠، ٧٥٠، ١٠٠٠، ٧٥٠، ٨٠٠، ٨٥٠،
٩٠٠، ٧٠٠، ٧٠٠، ١٠٥٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٩٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٨٠٠، ٨٠٠، ٩٠٠،
٨٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٧٠٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٧٥٠، ٧٠٠، ٧٠٠.

أ) أوجد الوسيط ($ر_{٢}$) لهذه الرواتب بعد ترتيبها تصاعديًا.

(لاحظ أنّ الوسيط يقسم هذه البيانات إلى مجموعتين متساويتين في العدد).

ب) أوجد وسيط المجموعة الأولى أي الربيع الأدنى ($ر_{١}$).

جـ) أوجد وسيط المجموعة الثانية أي الربيع الأعلى ($ر_{٣}$).

(٤–١–أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري

Median, Lower and Upper Quartile from Frequency Table

- **الوسيط**

الوسيط لعدد ن من قيم البيانات المرتبة تصاعديًا هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ من هذه القيم إذا كان العدد ن فرديًا. والمتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$، $\frac{ن}{٢} + ١$ من هذه القيم إذا كان العدد ن زوجيًا.

يقسم الوسيط مجموعة القيم في البيانات إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم ويرمز له بالرمز $ر_{٢}$.

- **الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من قيم البيانات مرتبة تصاعديًا.**

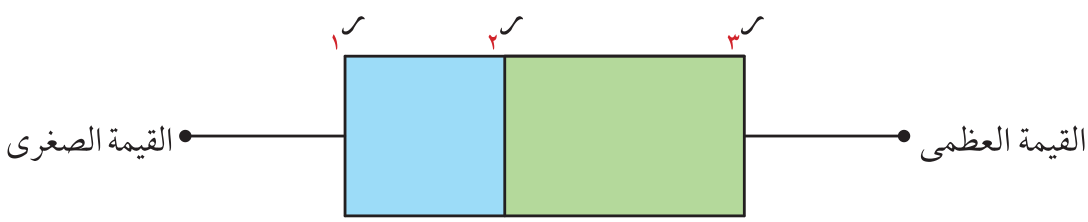
– الربيع الأدنى هو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $ر_{١}$.

– الربيع الأعلى هو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $ر_{٣}$.

- **مخطط الصندوق ذي العارضتين**

يبين الشكل التالي مخطط الصندوق ذي العارضتين، ممثل عليه مجمل الأعداد الخمسة وهي:

القيمة الصغرى، الربيع الأدنى، الوسيط، الربيع الأعلى، القيمة العظمى



مثال (١)

يبيّن الجدول التكراري التالي عدد البطاقات المباعة خلال الأسبوع الأول من عرض أحد الأفلام في إحدى عشر صالة عرض.

عدد البطاقات	٢٠٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	٥٠٠	المجموع
التكرار (عدد الصالات)	٢	٢	٣	٢	٢	١١

أ رتِّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.

ب أوجد الوسيط (م$_٢$).

ج أوجد الربيع الأدنى (م$_١$)، والربيع الأعلى (م$_٣$).

د مثل هذه القيم بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

الحل:

أ البيانات مرتبة تصاعديًّا: ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٠٠ ، ٥٠٠

ب عدد المفردات = ١١ (فردي)

ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{١١ + ١}{٢} = ٦$

الوسيط (م$_٢$) = ٣٥٠

ج الربيع الأدنى (م$_١$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٥

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٥ + ١}{٢} = ٣$

∴ الربيع الأدنى (م$_١$) = ٣٠٠

بالمثل الربيع الأعلى (م$_٣$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٥

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٥ + ١}{٢} = ٣$

∴ الربيع الأعلى (م$_٣$)= ٤٠٠

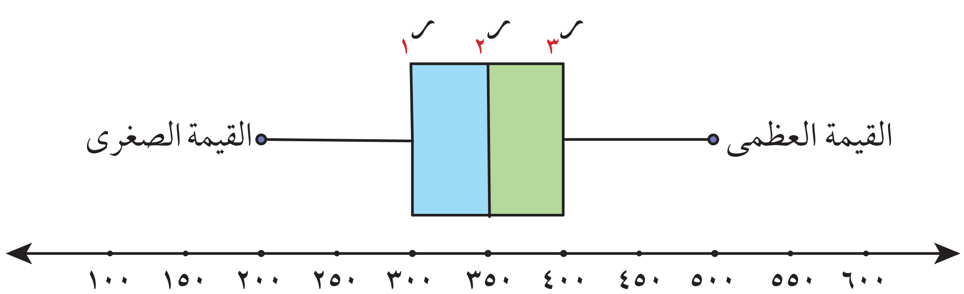
٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٠٠ ، ٥٠٠

القيمة الصغرى ، الربيع الأدنى ، الوسيط ، الربيع الأعلى ، القيمة العظمى

د يتضمّن مخطط الصندوق ذي العارضتين القيم الخمس التالية:

القيمة الصغرى = ٢٠٠ ، القيمة العظمى = ٥٠٠

القيمة الصغرى ، الربيع الأدنى ، الوسيط ، الربيع الأعلى ، القيمة العظمى



حاول أن تحل

١ يمثّل الجدول التكراري التالي معدل أجر الموظفين بالدينار الكويتي مقابل كل ساعة عمل في بعض الشركات.

معدل الأجر	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٢	٣	٢	٢	١٣

أجب عن الأسئلة الواردة في مثال (١).

مثال (٢)

يمثل الجدول التكراري التالي الارتفاع بالأمتار لبعض ألعاب القطار في عدة مدن من العالم

الارتفاع بالمتر	١٠	١٢	١٣	١٨	٢١	٢٣	٢٤	٢٥	٣٠	المجموع
التكرار	١	٣	١	٢	٢	٣	٢	٢	٢	١٨

أ رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًّا.

ب أوجد الوسيط لهذه البيانات ($ر_٢$).

جـ أوجد الربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$).

د مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

الحل:

أ البيانات مرتبة تصاعديًّا:

١٠ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٨ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٠

ب عدد القيم = ١٨ (زوجي)

الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ ، $\frac{ن}{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

الوسيط ($ر_٢$) = $\frac{٢١ + ٢٣}{٢} = ٢٢$

جـ الربيع الأدنى ($ر_١$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٩ (فردي)

ترتيب الربيع الأدنى: $\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

∴ الربيع الأدنى ($ر_١$) = ١٣

بالمثل الربيع الأعلى ($ر_٣$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٩ (فردي).

ترتيب الربيع الأعلى: $\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

∴ الربيع الأعلى ($ر_٣$) = ٢٤

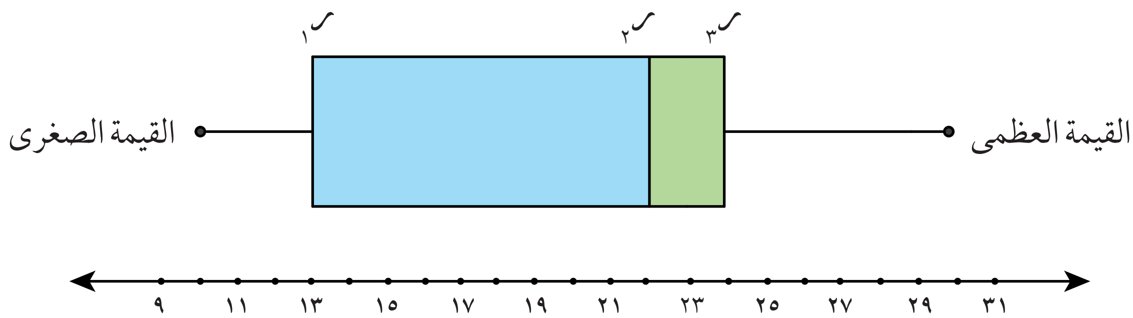
د يتضمن مخطط الصندوق ذي العارضتين القيم الخمس التالية:

القيمة الصغرى ، الربيع الأدنى ، الوسيط ، الربيع الأعلى ، القيمة العظمى.

القيمة العظمى = ٣٠ ، القيمة الصغرى = ١٠ .

١٠، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٣، ١٨ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢١ ، ٢٢، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٤، ٢٥ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٠

القيمة الصغرى — الربيع الأدنى — الوسيط — الربيع الأعلى — القيمة العظمى



حاول أن تحل

٢ يمثل الجدول التكراري التالي مبيعات أحد المتاجر في أحد الأيام لأنواع مختلفة من ساعات اليد بالدينار الكويتي.

سعر الساعة	٥٠	٦٥	٧١	٩٥	١٢٠	المجموع
التكرار	٤	٢	٣	٥	٢	١٦

أجب عن الأسئلة الواردة في المثال (٢).

(٤ – ١ – ب) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات

Median, Lower and Upper Quartile for Interval Data

تعلّمنا كيفية إيجاد الوسيط ($ر_٢$) والربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$) من جدول تكراري حيث القيم في البيانات متقطعة. سوف نتعلّم الآن كيفية إيجاد هذه المقاييس من جدول تكراري ذو فئات حيث القيم في البيانات مستمرّة.

يمكن إيجاد هذه المقاييس الثلاثة من توزيع تكراري ذو فئات باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد أو جدول التكرار المتجمع النازل (سوف تقتصر دراستنا على جدول التكرار المتجمع الصاعد).

حساب الوسيط للفئات:

$$\text{الوسيط}\,(س_٢) = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الربيع الأدنى}\,(س_١) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأدنى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الربيع الأعلى}\,(س_٣) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى} + \frac{\frac{٣ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأعلى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى}} \times \text{طول الفئة}$$

حيث ن مجموع التكرارات

مثال (٣)

يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات:

الفئة	٠–	١٠–	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	المجموع
التكرار	٣	٣	٥	٢	٥	٢	٢٠

أ كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب أوجد الوسيط حسابيًّا.

الحل:

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٠–	٣	أقل من ١٠	٣
١٠–	٣	أقل من ٢٠	٦
٢٠–	٥	أقل من ٣٠	١١
٣٠–	٢	أقل من ٤٠	١٣
٤٠–	٥	أقل من ٥٠	١٨
٥٠–	٢	أقل من ٦٠	٢٠
المجموع	٢٠		

مجموع التكرارات ن = ٢٠

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠

فئة الوسيط: هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط مباشرة)

أي أكبر من أو يساوي ١٠ مباشرة وبالتالي فئة الوسيط هي [٢٠، ٣٠)

الوسيط ($و_٢$) = الحد الأدنى لفئة الوسيط + $\frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}}$ × طول الفئة

التكرار الأصلي لفئة الوسيط = ٥ ، طول الفئة = ١٠

الحد الأدنى لفئة الوسيط = ٢٠ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط = ٦

$و_٢$ = ٢٠ + $\frac{١٠ - ٦}{٥}$ × ١٠

$و_٢$ = ٢٨

حاول أن تحل

٣ يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات

الفئة	٠-	١٥-	٣٠-	٤٥-	المجموع
التكرار	٤	٧	٦	٣	٢٠

أ كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب أوجد الوسيط حسابيًّا.

مثال (٤)

يمثل الجدول التالي درجات ٢٤ طالبًا في مادة الرياضيات في أحد فصول الصف الحادي عشر الأدبي، علمًا بأن الدرجة النهائية هي ٣٠ درجة.

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	١	٤	٧	٩	٣	٢٤

والمطلوب إيجاد كلًا من:

أ جدول التكرار المتجمع الصاعد

ب الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

الحل:

مجموع التكرارات ن = ٢٤

ترتيب ($س_١$) = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥-	١	أقل من ١٠	١
١٠-	٤	أقل من ١٥	٥
١٥-	٧	أقل من ٢٠	١٢
٢٠-	٩	أقل من ٢٥	٢١
٢٥-	٣	أقل من ٣٠	٢٤
المجموع	٢٤		

ومنه تكون فئة الربيع الأدنى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأدنى مباشرة). وبالتالي فئة الربيع الأدنى هي [١٥، ٢٠)

التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى = ٧ ، طول الفئة = ٥

الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى = ١٥ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة ($س_١$) = ٥

$س_١$ = ١٥ + $\frac{٦ - ٥}{٧}$ × ٥ = $١٥\frac{٥}{٧}$

ترتيب $س_٣$ = $\frac{٣ ن}{٤}$ = ١٨

ومنه تكون فئة الربيع الأعلى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأعلى مباشرة). وبالتالي فئة الربيع الأعلى هي: [٢٠، ٢٥)

التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى = ٩ ، طول الفئة = ٥

الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى = ٢٠ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة ($س_٣$) = ١٢

∴ $س_٣$ = ٢٠ + $\frac{١٨ - ١٢}{٩}$ × ٥

= $٢٣\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٤ يمثل الجدول التكراري التالي درجات ٣٢ طالب في مادة الرياضيات في أحد فصول الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٣٠ درجة.

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	٩	٦	٨	٥	٤	٣٢

المطلوب إيجاد كلًّا من:

أ جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

٤-٢

الالتواء

Skewness

عمل تعاوني

من الجدول التالي:

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥	٥٠

أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب) أوجد كل من المتوسط الحسابي، المنوال، الوسيط، وقارنها.

ج) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى وارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

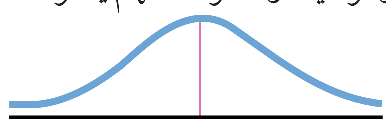
سوف تتعلم

- أنواع الالتواء
- الربط بين الالتواء ومقاييس النزعة المركزية: الوسيط، المتوسط الحسابي، المنوال.
- الربط بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٤-٢-أ) الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية

Skewness and Relation with Central Tendancy measures

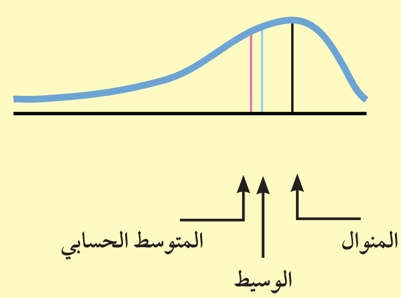
عند تمثيل بيانات لظاهرة ما على المنحنى التكراري فإنه يأخذ أشكالًا مختلفة. قد يكون هذا المنحنى متماثل أي له قمة في المنتصف، فإذا اسقطنا عمودًا من قمته على المحور الأفقي عندها يشطره إلى نصفين متماثلين كما هو مبيّن في الشكل أدناه في مثل هذه الحالة يكون المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال كلهم يقعون على نقطة واحدة.



ولكن في كثير من الحالات يمكن أن تتضمن البيانات قيم كبيرة تجذب إليها المتوسط الحسابي مما يعني أن المنحنى التكراري سوف يكون له ذيل لجهة اليمين وهذا يشير إلى وجود التواء لجهة اليمين من ناحية ثانية إذا تضمنت البيانات قيم صغيرة تجذب إليها المتوسط الحسابي عندها سوف يكون للمنحنى التكراري ذيلًا لجهة اليسار وهذا يشير إلى وجود التواء لجهة اليسار.

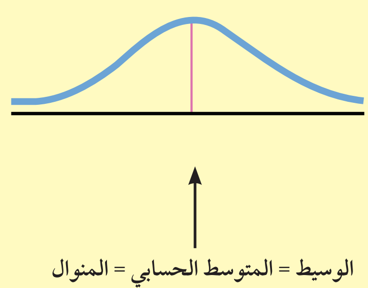
الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء

- المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي



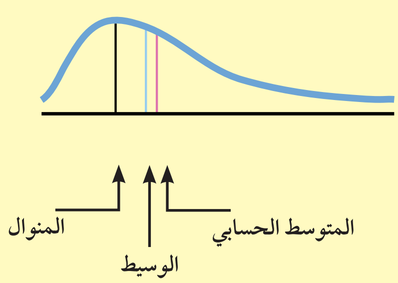
الالتواء إلى اليسار (الالتواء السالب)

- المنوال = الوسيط = المتوسط الحسابي



التماثل (لا وجود للالتواء)

- المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي



الالتواء إلى اليمين (الالتواء الموجب)

مثال (١)

يبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

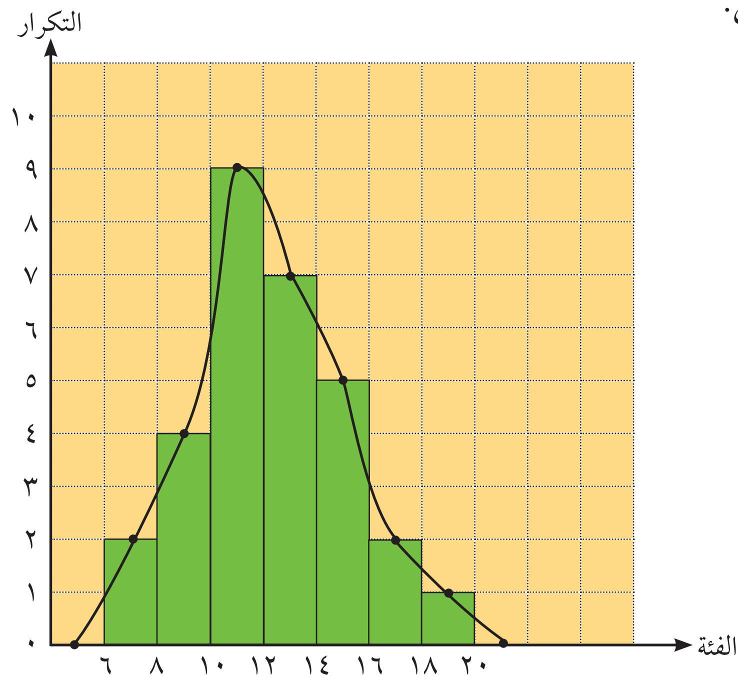
الفئة	٦-	٨-	١٠-	١٢-	١٤-	١٦-	١٨-	المجموع
التكرار	٢	٤	٩	٧	٥	٢	١	٣٠

أ مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

الحل:

أ



ب يتضح من شكل المنحنى التكراري ان الالتواء لجهة اليمين (التواء موجب).

حاول أن تحل

١ يبيّن الجدول أدناه أوزان ٣٠ طالبًا بالكيلوجرام.

الفئة	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	المجموع
التكرار	٢	٥	٧	١٠	٥	١	٣٠

أ مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

مثال (٢)

تمثّل البيانات التالية درجات الحرارة في بعض مدن العالم: ٢٤°، ٢٠°، ٢٢°، ٣٥°، ٣٧°، ٣٤°، ٤٠°، ٣٧°، ٣٠°

أ احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه البيانات.

ب هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

> **تذكر**
> المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

الحل:

أ المتوسط الحسابي $= \dfrac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \dfrac{٢٧٩}{٩} =$ ٣١°

القيم مرتبة تصاعديًّا: ٢٠° ، ٢٢° ، ٢٤° ، ٣٠° ، ٣٤° ، ٣٥° ، ٣٧° ، ٣٧° ، ٤٠°

∵ عدد القيم = ٩ (فردي)

∴ الوسيط = ٣٤°

المنوال = ٣٧°

ب ∵ المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي

∴ يوجد التواء

نوع الالتواء سالب

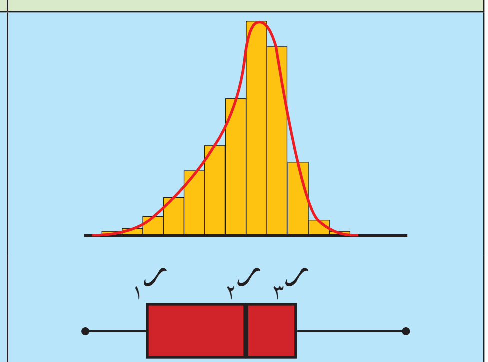
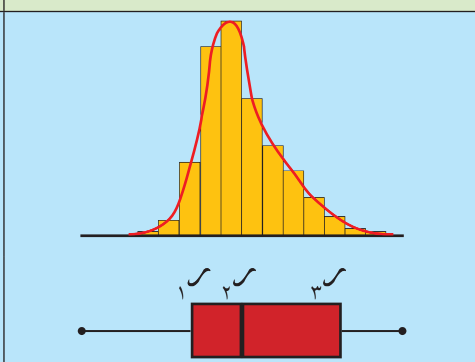
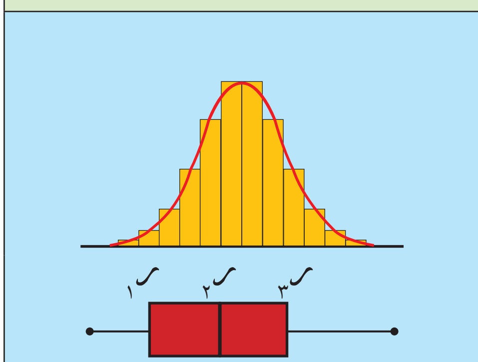
حاول أن تحل

٢ تمثل البيانات التالية أطوال مجموعة من التلاميذ في إحدى المدارس (مقاسه بالسنتيمتر):

١٣٩، ١٢٤، ١٣٨، ١٣٠، ١١٩، ١٢٤، ١٣٦، ١٣٤، ١٣٥ . أجب عن الأسئلة الواردة في مثال (٢).

(٤ـــ٢ـــ ب) العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين

Relation between Skewness and Box and Whisker Plot

الالتواء إلى اليسار (الالتواء السالب)	الالتواء إلى اليمين (الالتواء موجب)	متماثل
		
يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأدنى منه إلى الربيع الأعلى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط يقع في المنتصف بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

مثال (٣)

تمثّل البيانات التالية المصروف اليومي لعدة عائلات في الكويت بالدينار الكويتي (مرتبة تصاعديًّا):

٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٨ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣، ٤٤ ، ٤٦ ، ٥٣ ، ٥٦ ، ٦٠

أ احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

جـ هل البيانات تبيّن تماثلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

الحل:

أ عدد القيم = ١٤ (عدد زوجي)

الوسيط هو متوسط حسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ = ٧ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١ = ٨

∴ الوسيط ($ر_{٢}$) = $\frac{٤١ + ٤٢}{٢}$ = ٤١,٥

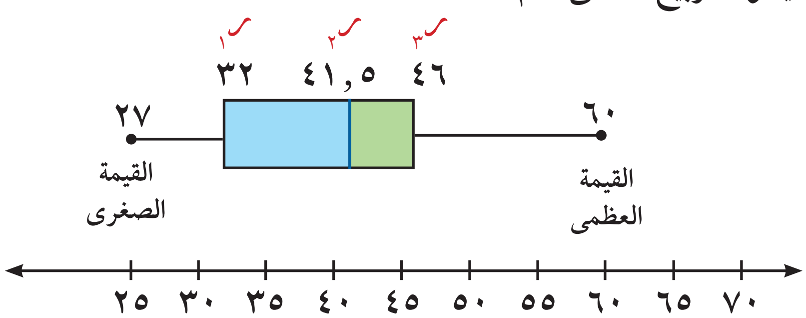
الربيع الأدنى ($ر_{١}$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٧ (فردي)

فيكون الربيع الأدنى ($ر_{١}$) = ٣٢

الربيع الأعلى ($ر_{٣}$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٧ (فردي)

فيكون الربيع الأعلى ($ر_{٣}$) = ٤٦

ب



جـ من شكل الصندوق يتضح أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى لذايوجد التواء لجهة اليسار (التواء سالب).

حاول أن تحل

٣ في البيانات التالية: ٤٥ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ٥٩ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٦ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨٦ ، ٩٠ ، ٩٦ ، ٩٨ ، ١٠٥ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ١١٧ ، ١٢٢

أ احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

جـ هل البيانات تبيّن تماثلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

٤ – ٣

مقاييس التشتت وتطبيقاتها

Measures of Dispersion and its Applications

سوف تتعلم

- المدى ونصف المدى الربيعي.
- التباين والانحراف المعياري.
- القاعدة التجريبية.
- القيمة المعيارية.
- تطبيقات على مقاييس التشتت.

عمل تعاوني

في نهاية الفصل الدراسي الأول كانت درجات احد الطلاب حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

المادة	الدرجة					المتوسط الحسابي
تاريخ	٩	١٠	١١	١٢	١١	
جغرافيا	١٣	٧	١٠	٨	١٦	
فلسفة	٥	٥	١٥	١٥	١٥	
رياضيات	١١	١٠	١١	١٢	١١	

أ هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في تحصيل الطالب دون إجراء عمليات حسابية، أو بايجاد المتوسط الحسابي لدرجات كل مادة ومقارنتها؟

ب أوجد المتوسط الحسابي لدرجات كل مادة عند هذا الطالب ماذا تلاحظ؟

جـ اوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة. ماذا تلاحظ؟

المادة	الانحراف المعياري
تاريخ	
جغرافيا	
فلسفة	
رياضيات	

(٤ – ٣ – أ) مقاييس التشتت Measures of Dispersion

المدى = القيمة العظمى – القيمة الصغرى

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$\text{التباين } ع^2 = \frac{\sum (س - \overline{س})^2}{ن}$$

$$\text{الانحراف المعياري } ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^2}{ن}}$$

حيث س = المتغير، $\overline{س}$ = المتوسط الحسابي، ن = عدد القيم.

إذا كان يوجد تكرار للقيم في البيانات يكون لدينا:

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{م} (س_ر - \overline{س})^2 ت_ر}{\sum_{ر=1}^{م} ت_ر} \quad ; \quad ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{م} (س_ر - \overline{س})^2 ت_ر}{\sum_{ر=1}^{م} ت_ر}}$$

حيث $ت_ر$ = عدد تكرار المتغيّر س

ملاحظة

في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات $س_ر$ تمثل مراكز الفئات، ونستخدم القوانين السابقة نفسها.

مثال (١)

لنأخذ البيانات: ٢، ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨.

أ أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى لهذه البيانات.

ب أوجد نصف المدى الربيعي.

جـ أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

الحل:

البيانات: ٢، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٨.

أ المدى = القيمة العظمى − القيمة الصغرى = ٨ − ٢ = ٦

الوسيط = $\frac{٦ + ٧}{٢}$ = ٦,٥ ، الربيع الأدنى = ٥ ، الربيع الأعلى = ٧

ب نصف المدى الربيعي = $\frac{٧ - ٥}{٢}$ = ١

جـ لإيجاد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات يجب أولًا إيجاد المتوسط الحسابي:

$\bar{س} = \frac{٢ + ٤ + ٥ + ٦ + ٦ + ٧ + ٧ + ٧ + ٨ + ٨}{١٠}$

$= \frac{٦٠}{١٠} = ٦$

نكوّن الجدول التالي:

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^٢
٢	−٤	١٦
٤	−٢	٤
٥	−١	١
٦	٠	٠
٦	٠	٠
٧	١	١
٧	١	١
٧	١	١
٨	٢	٤
٨	٢	٤
		المجموع ٣٢

التباين ع^٢ = $\frac{٣٢}{١٠}$ = ٣,٢

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٣,٢}$ ≃ ١,٧٨٨

ملاحظة

إذا كان الانحراف المعياري قريبًا من الصفر، تكون قيم البيانات قريبة من المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

١ لنأخذ البيانات: ١٧، ١٦، ٨، ١٥، ٩، ١١، ١٢، ١٣، ٧.

أ أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي لهذه البيانات.

ب أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري.

مثال (٢)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعاينة ١٢٠ مريضًا، جاءت النتائج كما يلي:

الوقت المستغرق بالدقائق	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
عدد المرضى	١١	٢١	٢٣	١٤	١٦	١٨	١٢	٣	٢	١٢٠

أ أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة، ثم أوجد المتوسط الحسابي.

ب أوجد التباين والانحراف المعياري.

الحل:

أ

الوقت المستغرق بالدقائق	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
عدد المرضى	١١	٢١	٢٣	١٤	١٦	١٨	١٢	٣	٢	١٢٠
مركز الفئة	١٢,٥	١٧,٥	٢٢,٥	٢٧,٥	٣٢,٥	٣٧,٥	٤٢,٥	٤٧,٥	٥٢,٥	

$$\overline{س} = \frac{\sum س_ر ت_ر}{\sum ت_ر}$$

$$\overline{س} = \frac{(١١ \times ١٢,٥) + (٢١ \times ١٧,٥) + (٢٣ \times ٢٢,٥) + \dots + (١٢ \times ٤٢,٥) + (٣ \times ٤٧,٥) + (٢ \times ٥٢,٥)}{١٢٠}$$

$$\overline{س} = \frac{٣٣٦٠}{١٢٠} = ٢٨$$

ب لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي:

مركز الفئة $س_ر$	التكرار ($ت_ر$)	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$ت_ر(س_ر - \overline{س})^٢$
١٢,٥	١١	١٢,٥ − ٢٨ = −١٥,٥	٢٤٠,٢٥	٢٦٤٢,٧٥
١٧,٥	٢١	١٧,٥ − ٢٨ = −١٠,٥	١١٠,٢٥	٢٣١٥,٢٥
٢٢,٥	٢٣	٢٢,٥ − ٢٨ = −٥,٥	٣٠,٢٥	٦٩٥,٧٥
٢٧,٥	١٤	٢٧,٥ − ٢٨ = −٠,٥	٠,٢٥	٣,٥
٣٢,٥	١٦	٣٢,٥ − ٢٨ = ٤,٥	٢٠,٢٥	٣٢٤
٣٧,٥	١٨	٣٧,٥ − ٢٨ = ٩,٥	٩٠,٢٥	١٦٢٤,٥
٤٢,٥	١٢	٤٢,٥ − ٢٨ = ١٤,٥	٢١٠,٢٥	٢٥٢٣
٤٧,٥	٣	٤٧,٥ − ٢٨ = ١٩,٥	٣٨٠,٢٥	١١٤٠,٧٥
٥٢,٥	٢	٥٢,٥ − ٢٨ = ٢٤,٥	٦٠٠,٢٥	١٢٠٠,٥
				المجموع = ١٢ ٤٧٠

$$\text{التباين: } ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{م} (س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}$$

$$= \frac{١٢\ ٤٧٠}{١٢٠} \approx ١٠٣,٩١٦$$

$$\text{الانحراف المعياري: } ع \approx \sqrt{١٠٣,٩١٦}$$

$$\approx ١٠,٢$$

حاول أن تحل

٢ لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار الكويتي كما يلي:

الفئة (بالدينار)	٠−	٥−	١٠−	١٥−	٢٠−	٢٥−	المجموع
التكرار	١٩	٣٠	٤٧	٢٨	٢٠	١٦	١٦٠

أ أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة، ثم أوجد المتوسط الحسابي.

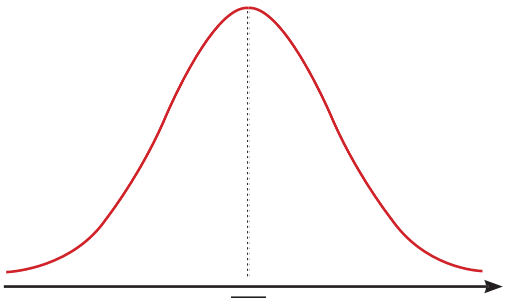
ب أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

(٤–٣– ب) التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.

والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي.



من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

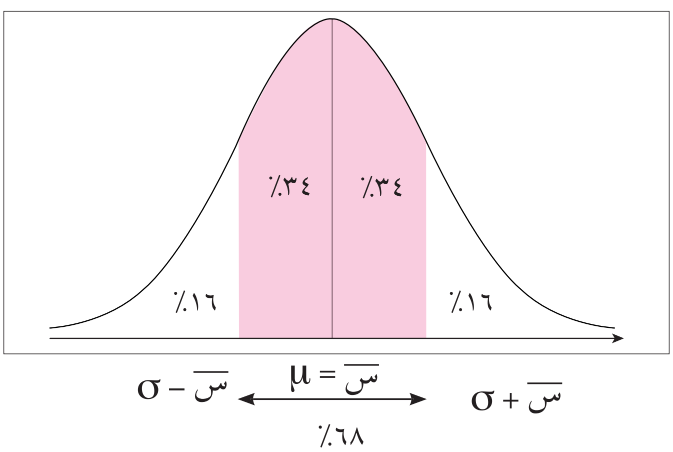
- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة عددها ن(ن > ٣٠) ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة. سوف نرمز للتباين ع٢ بالرمز σ^2 والانحراف المعياري ع بالرمز σ والمتوسط الحسابي س̄ بالرمز μ.

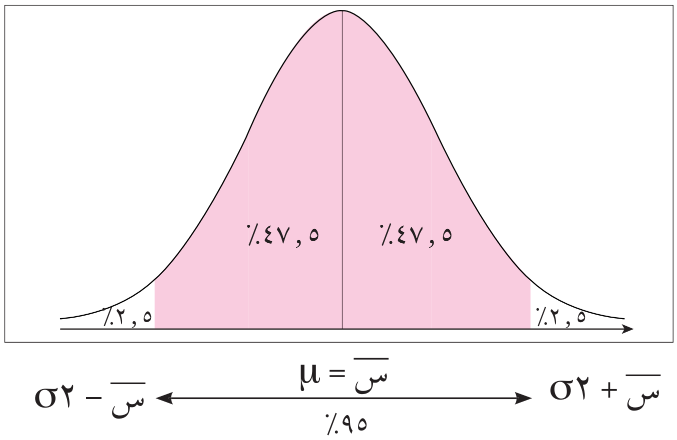
على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي س̄ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالى ٦٨٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − σ ، س̄ + σ].



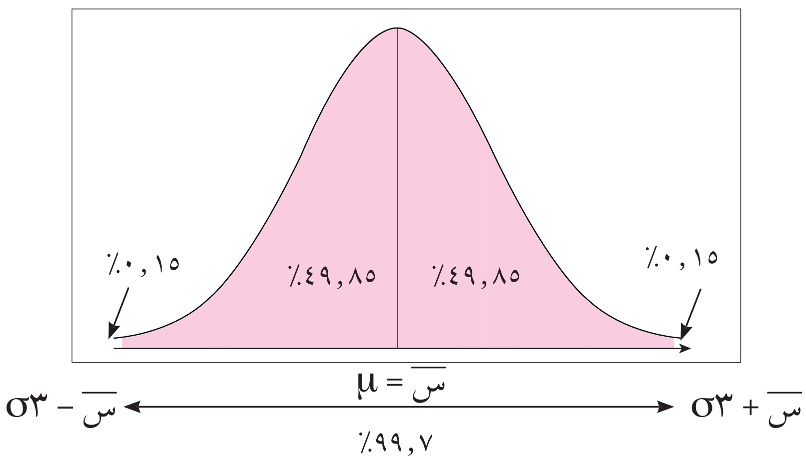
٦٨٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − σ ، س̄ + σ]

- حوالى ٩٥٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٢σ ، س̄ + ٢σ]



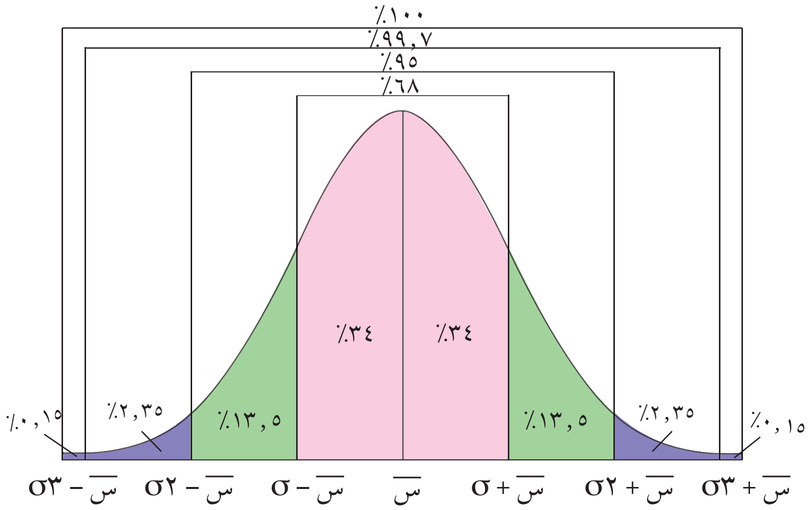
٩٥٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٢σ ، س̄ + ٢σ]

- حوالى ٩٩,٧٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٣σ ، س̄ + ٣σ]



٩٩,٧٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٣σ ، س̄ + ٣σ]

يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.



مثال (٣)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة ٣٥٠ دينارًا والانحراف المعياري ١١٥ والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب هل وصلت أرباح الشركة إلى ٦٩٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

أ $\overline{س} = ٣٥٠$، $\sigma = ١١٠$

باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:

(١) حوالي ٦٨٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - \sigma، \overline{س} + \sigma] = [٣٥٠ - ١١٠، ٣٥٠ + ١١٠] = [٢٤٠، ٤٦٠]$

(٢) حوالي ٩٥٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - ٢\sigma، \overline{س} + ٢\sigma] = [٣٥٠ - ٢٢٠، ٣٥٠ + ٢٢٠] = [١٣٠، ٥٧٠]$

(٣) حوالي ٩٩,٧٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - ٣\sigma، \overline{س} + ٣\sigma] = [٣٥٠ - ٣٣٠، ٣٥٠ + ٣٣٠] = [٢٠، ٦٨٠]$

ب نلاحظ أن المبلغ ٦٩٠ دينارًا يقع خارج الفترة الأخيرة [٢٠، ٦٨٠] والتي تناظر ٩٩,٧٪ من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ ٦٩٠ دينارًا.

حاول أن تحل

٣ لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها ٤٧٥ دينارًا بانحراف معياري ١١٥ دينارًا.

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى ٧٥٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

مثال (٤)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (أ) هو ٦٠ شهرًا بانحراف معياري ١٠ أشهر.

على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

أ) طبّق القاعدة التجريبية.

ب) أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يزيد عمرها عن ٥٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

جـ) أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يقل عمرها عن ٤٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل:

أ) (١) حوالى ٦٨٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

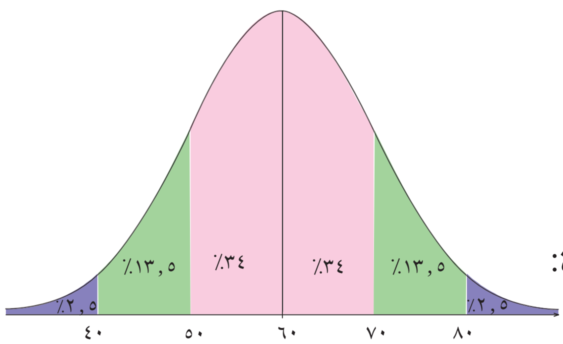
$$[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma] = [٦٠ - ١٠ ، ٦٠ + ١٠] = [٥٠ ، ٧٠]$$

(٢) حوالى ٩٥٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma] = [٦٠ - ٢٠ ، ٦٠ + ٢٠] = [٤٠ ، ٨٠]$$

(٣) حوالى ٩٩,٧٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma] = [٦٠ - ٣٠ ، ٦٠ + ٣٠] = [٣٠ ، ٩٠]$$



ب) بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:

٣٤٪ + ٣٤٪ + ١٣,٥٪ + ٢,٥٪ = ٨٤٪

أي أن ٨٤٪ من هذه البطاريات يزيد عمرها عن ٥٠ شهرًا بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحًا.

جـ) يبيّن المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن ٢,٥٪ من هذه البطاريات يقل عمرها عن ٤٠ شهرًا وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحًا.

حاول أن تحل

٤) يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (أ) هو ٧٠٠ ساعة بانحراف معياري ١٠٠ ساعة على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

أ) طبّق القاعدة التجريبية.

ب) أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (أ) التي يزيد عمرها عن ٥٠٠ ساعة.

جـ) أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (أ) التي يقل عمرها عن ٤٠٠ ساعة.

(٤–٣–جـ) القيمة المعيارية Standarized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًّا مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

$$\text{القيمة المعيارية } (\text{ى}) = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{\text{س} - \overline{\text{س}}}{\sigma}$$

مثال (٥)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة ١٦ من ٢٠ في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٥ ونال أيضًا ١٦ من ٢٠ في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٤.

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٦ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الرياضيات: $\text{ى}_1 = \frac{\text{س}_1 - \overline{\text{س}}}{\sigma_1} = \frac{16 - 13}{5} = 0{,}6$

القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الكيمياء: $\text{ى}_2 = \frac{\text{س}_2 - \overline{\text{س}}}{\sigma_2} = \frac{16 - 14}{4} = 0{,}5$

$0{,}5 < 0{,}6$

∴ القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الرياضيات أكبر من القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الكيمياء.

وبالتالي الدرجة ١٦ في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة ١٦ في مادة الكيمياء.

حاول أن تحل

٥ جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٣,٨ وفي مادة الكيمياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٧,٨

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٥ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

مثال (٦)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على ٦٤ درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي ٦٩ والانحراف المعياري ٨. وحصلت على ٤٨ درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي ٥٦ والانحراف المعياري ١٠.

في أي من المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موضي أكثر تحصيلًا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

القيمة المعيارية للدرجة ٦٤ في مادة اللغة العربية: $ى_١ = \frac{س_١ - \overline{س}}{\sigma_١} = \frac{٦٤ - ٦٩}{٨} = -٠,٦٢٥$

القيمة المعيارية للدرجة ٤٨ في مادة الجغرافيا: $ى_٢ = \frac{س_٢ - \overline{س}}{\sigma_٢} = \frac{٤٨ - ٥٦}{١٠} = -٠,٨$

$-٠,٦٢٥ > -٠,٨$

∴ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أكبر من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

∴ أداء الطالبة موضي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

حاول أن تحل

٦ يسكن خالد في المدينة (أ) حيث إن طول قامته ١٨٠ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٧٤ سم مع انحراف معياري ١٢ سم. أما صالح فيسكن في المدينة ب حيث إن طول قامته ١٧٢ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٦٥ سم مع انحراف معياري ١٥.

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

٤–٤

تطبيقات إحصائية

Statistical Applications

دعنا نفكر ونتناقش

ليس من الضروري أن يحتاج المرء إلى البرمجيات الإحصائية الخاصة لأداء التحليلات الإحصائية. يمكن استخدام برنامج Microsoft Office Excel لتشغيل الإجراءات الإحصائية.

فكما قد سبق أن استخدمنا هذا البرنامج في دروس سابقة لحساب كافة أنواع العينات العشوائية وتحديدها، نجد أنه يتضمن عدة تطبيقات تسهل علينا حساب وإيجاد كل من المتوسط الحسابي، الوسيط، التباين، الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات وذلك عن طريق اتباع خطوات محددة والالتزام بها للوصول إلى النتائج المطلوبة والصحيحة.

سوف تتعلم

- استخدام برنامج Excel عن طريق تطبيق الدوال التالية لحساب: المتوسط الحسابي Average، الوسيط Median، التباين VARP، الانحراف المعياري STDEVP.

(٤–٤–أ) مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

مثال (١)

عند إجراء الدراسة التالية على الفصل الحادي عشر في إحدى المدارس، تمّ تسجيل النتائج الواردة في الجدول المقابل حول الأوزان، الأطوال، عدد الإخوة والأخوات.

أوجد المتوسط الحسابي لكل من الأوزان، الأطوال، عدد الإخوة والأخوات.

الحل:

قم بتشغيل برنامج «EXCEL».

- في الخلية A_1 نكتب الأوزان، في الخلية B_1 نكتب الأطوال، في الخلية C_1 نكتب عدد الإخوة والأخوات ونقوم بإدخال المعطيات التي تمّ جمعها من الطلاب في الأعمدة المخصصة لها كما يظهر الشكل (١).

الأوزان	الأطوال	عدد الإخوة والأخوات
٧٠	١٦٥	١
٨٤	١٧٢	٣
٩٠	١٨١	٢
٧٨	١٧٥	٥
٨٠	١٨٤	٤
٦٥	١٦٣	٢
٧٢	١٧١	٠
٧٨	١٧٤	١
٨٥	١٧٨	٤
٨٢	١٧٢	٧
٦٩	١٦٨	٣
٦٤	١٥٦	٤
٧٩	١٧٧	٣
٧١	١٦٩	١
٧٦	١٧١	٥
٨٥	١٧٨	٤
٦٠	١٥٩	٣
٨٧	١٧٩	٢

	A	B	C
1	الأوزان	الأطوال	عدد الإخوة والأخوات
2	70	165	1
3	84	172	3
4	90	181	2
5	78	175	5
6	80	184	4
7	65	163	2
8	72	171	0
9	78	174	1
10	85	178	4
11	82	172	7
12	69	168	3
13	64	156	4
14	79	177	3
15	71	169	1
16	76	171	5
17	85	178	4
18	60	159	3
19	87	179	2

شكل (١)

- نكتب في الخلية D_1 «متوسط الأوزان»، في الخلية E_1 «متوسط الأطوال»، وفي الخلية F_1 «متوسط عدد الإخوة والأخوات»، ومن ثم نحدد الخلية D_2.
- نضغط بواسطة الفأرة على *fx* كما يبيّن الشكل (٢).

fx

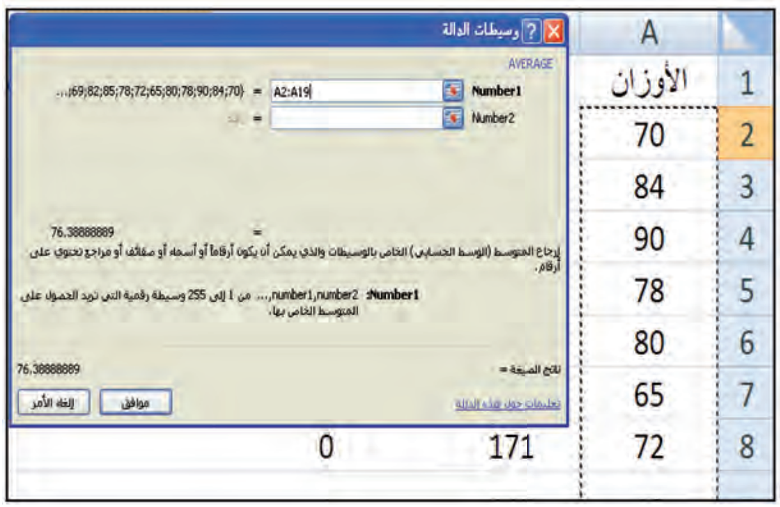
D	E	F
متوسط الأوزان	متوسط الأطوال	متوسط عدد الإخوة والأخوات

شكل (٢)

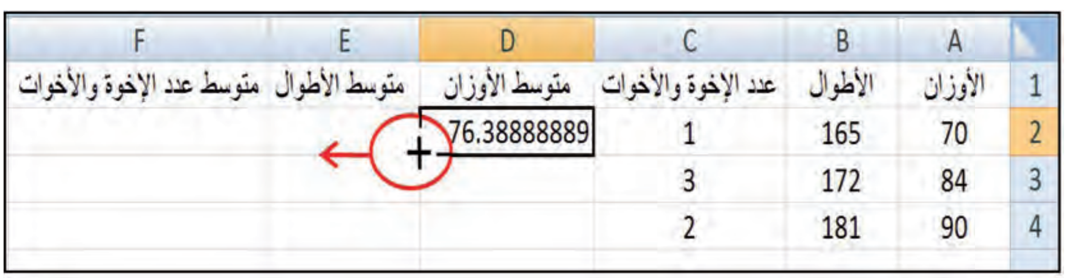
تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (٣) نقوم باختيار «AVERAGE» من قائمة «تحديد دالة».

شكل (٣)

- بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» نضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{19} كما يظهره الشكل (٤) ونضغط على خانة موافق.



شكل (٤)



شكل (٥)

• نضع مؤشر الفأرة عند مقبض الخلية (Handel Cell) في الزاوية السفلية اليسرى فيصبح مؤشر الفأرة + كما يظهر في الشكل (٥) ونسحب الفأرة باتجاه السهم وتكون ضاغطًا عليها لتصل إلى الخلية F_2 فيتم بذلك الحصول على متوسط الأطوال في الخلية E_2 ومتوسط عدد الإخوة والأخوات في الخلية F_2 كما تظهر في الشكل (٦) ويعود ذلك إلى مبدأ الخلايا التبادلية (Relative Cell) والذي يعني ارتباط التابع بمكان أصل المعلومة.

	A	B	C	D	E	F
1	الأوزان	الأطوال	عدد الإخوة والأخوات	متوسط الأوزان	متوسط الأطوال	متوسط عدد الإخوة والأخوات
2	70	165	1	76.38888889	171.777778	3
3	84	172	3			
4	90	181	2			

شكل (٦)

وبذلك يكون:

متوسط الأوزان = ٧٦,٤ كجم

متوسط الأطوال = ١٧١,٨ سم

متوسط عدد الإخوة والأخوات = ٣

حاول أن تحل

١ في الفصل نفسه تمّ تسجيل علامات الطلاب في مادتي الرياضيات والعلوم كما وردت في الجدول التالي:

الرياضيات	١١	١٨	٩	١٢	٢٠	١٣	١٤	١٦	١٧	١٥	١٠	٧	١٩	١٤	١٢	١٢	١٣	١٨
العلوم	١٢	١٤	٨	١٥	١٣	١٨	١٩	١٤	٦	١٣	١٧	١٤	١١	١٠	١٦	١٣	٧	١٧

أوجد المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادتي الرياضيات والعلوم.

(٤–٤–ب) الوسيط Median

مثال (٢)

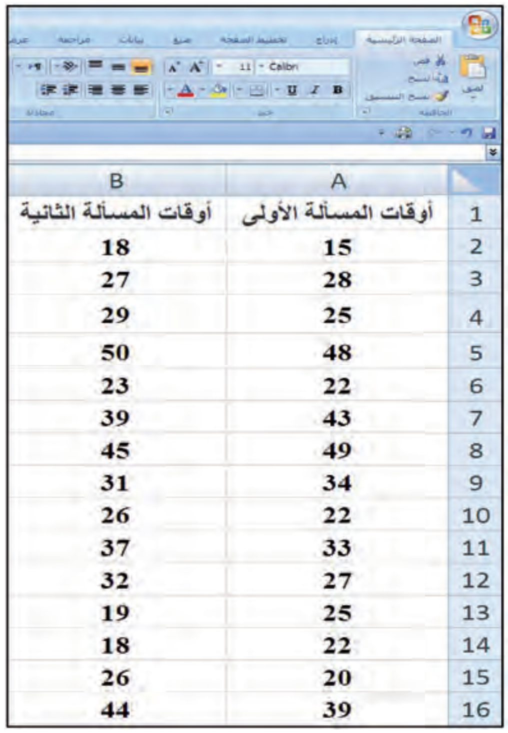
طلب معلم في مدرسة ثانوية خاصة من طلابه حل مسألتين عبر الشبكة العنكبوتية. بحيث يستخدم الطلاب كلمة مرور للوصول إلى المسائل، ويسجلون للمعلم وقت الدخول والخروج لكل مسألة تلقائيًّا. في نهاية الأسبوع، يدرس المعلم مقدار الوقت الذي يستغرقه كل طالب في العمل على حل المسائل. يبيّن الجدول التالي أوقات الطلاب بالدقائق:

أوقات المسألة الأولى	١٥	٢٨	٢٥	٤٨	٢٢	٤٣	٤٩	٣٤	٢٢	٣٣	٢٧	٢٥	٢٢	٢٠	٣٩
أوقات المسألة الثانية	١٨	٢٧	٢٩	٥٠	٢٣	٣٩	٤٥	٣١	٢٦	٣٧	٣٢	١٩	١٨	٢٦	٤٤

أوجد الوسيط لكل من أوقات المسألة الأولى والثانية.

الحل:

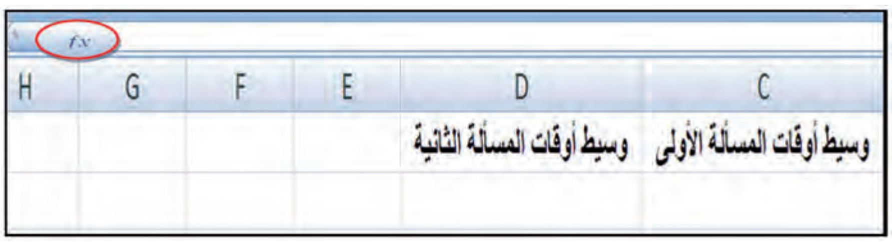
- قم بتشغيل برنامج «EXCEL».
- في الخلية A_1 نكتب «أوقات المسألة الأولى»، في الخلية B_1 نكتب «أوقات المسألة الثانية»، ونقوم بإدخال المعطيات التي تمّ جمعها من الطلاب في الأعمدة المخصصة لها كما يظهر الشكل (٧).



	A	B
1	أوقات المسألة الأولى	أوقات المسألة الثانية
2	15	18
3	28	27
4	25	29
5	48	50
6	22	23
7	43	39
8	49	45
9	34	31
10	22	26
11	33	37
12	27	32
13	25	19
14	22	18
15	20	26
16	39	44

شكل (٧)

- نكتب في الخلية C_1 «وسيط أوقات المسألة الأولى»، في الخلية D_1 «وسيط أوقات المسألة الثانية» ومن ثم نحدد الخلية C_2.
- نضغط بواسطة الفأرة على fx كما يبيّن الشكل (٨).



شكل (٨)

• تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (٩)، ثم نقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة».

شكل (٩)

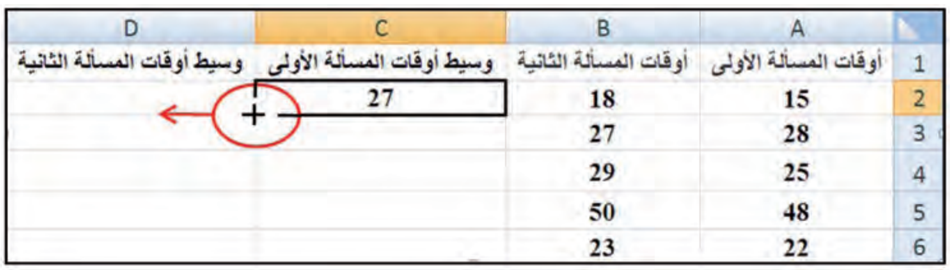
• ومن ثم نختار «MEDIAN» من قائمة «تحديد دالة» كما في الشكل (١٠).

شكل (١٠)

• بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» نضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{16} كما يظهره الشكل (١١).

شكل (١١)

• نضغط على «موافق» فيظهر «وسيط أوقات المسألة الأولى» في الخانة C_2 كما في الشكل (١٢).



شكل (١٢)

• نضع مؤشر الفأرة عند مقبض الخلية (Handel Cell) في الزاوية السفلية اليسرى فيصبح مؤشر الفأرة +، نسحب الفأرة باتجاه السهم ونطلب ضاغطين عليها لنصل إلى الخلية D_2 فيتم بذلك الحصول على «وسيط أوقات المسألة الثانية» في الخلية D_2 كما في الشكل (١٣)، ويعود ذلك إلى مبدأ الخلايا التبادلية (Relative Cell) الذي يعني ارتباط التابع بمكان أصل المعلومة.

	D	C	B	A
1	وسيط أوقات المسألة الثانية	وسيط أوقات المسألة الأولى	أوقات المسألة الثانية	أوقات المسألة الأولى
2	29	27	18	15
3			27	28
4			29	25
5			50	48
6			23	22

شكل (١٣)

وبذلك يكون:

وسيط أوقات المسألة الأولى = ٢٧ دقيقة.

وسيط أوقات المسألة الثانية = ٢٩ دقيقة.

حاول أن تحل

٢ قامت مجموعة متخصصة بتحديد جودة البرامج الحوارية ونوعيتها من خلال مراقبتها وإحصاء عدد الكلمات البذيئة والألفاظ النابية التي يجب حذفها وكذلك المشادات البدنية التي يمكن استخدامها مع المعنيين لعدم ملاءمتها العرض، وخصوصًا في النهار وجاءت نتائج مراقبة تلك البرامج لمدة أسبوعين كما يلي:

٣٤٢	٢٦٧	٣٢١	١٥٧	٣٣	٣٤٩	٢٥٤	١٦٦	١٣٢	٢٨٩

أوجد مستخدمًا برنامجًا إحصائيًّا الوسيط لعدد الكلمات البذيئة والمشادات البدنية في البرنامج الحواري التي يجب حذفها أو عدم عرضها.

مثال (٣)

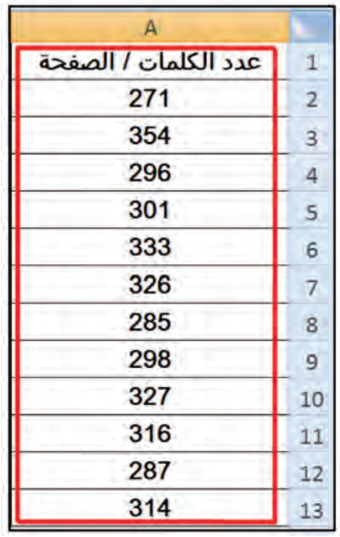
لدينا كتيب مؤلف من ١٢ صفحة يحتوي على أعداد الكلمات التالية:

٢٧١	٣٥٤	٢٩٦	٣٠١	٣٣٣	٣٢٦	٢٨٥	٢٩٨	٣٢٧	٣١٦	٢٨٧	٣١٤

احسب كلًّا من التباين والانحراف المعياري لبيانات أعداد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢.

الحل:

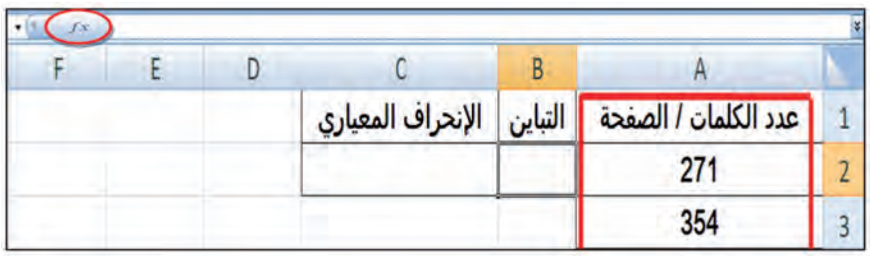
- قم بتشغيل برنامج «**EXCEL**».
- في الخلية A_1 نكتب عدد الكلمات/ الصفحة، ونقوم بإدخال أعداد الكلمات في الصفحات الـ ١٢ للكتيب كما يظهر الشكل (١٤).



	A
1	عدد الكلمات / الصفحة
2	271
3	354
4	296
5	301
6	333
7	326
8	285
9	298
10	327
11	316
12	287
13	314

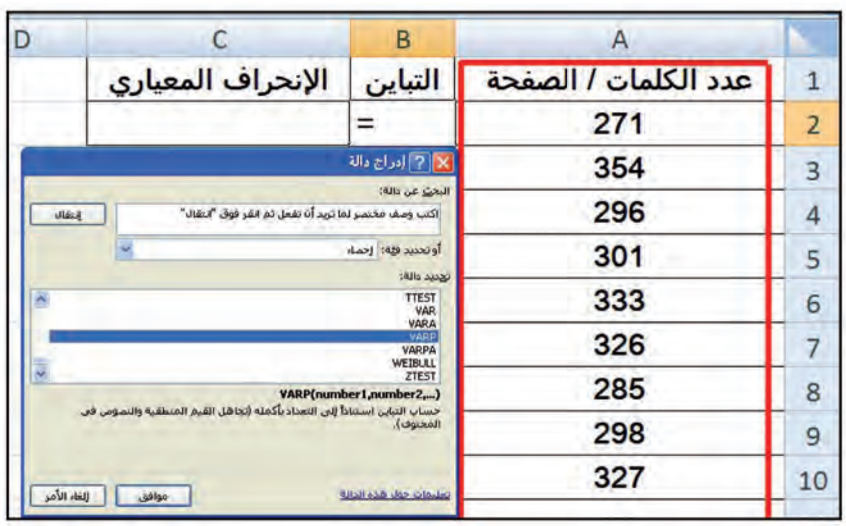
شكل (١٤)

- نقوم بإدخال التباين في الخلية B_1، والانحراف المعياري في الخلية C_1.
- نحدد الخلية B_2، ثم نضغط بواسطة الفأرة على fx كما يظهر الشكل (١٥).



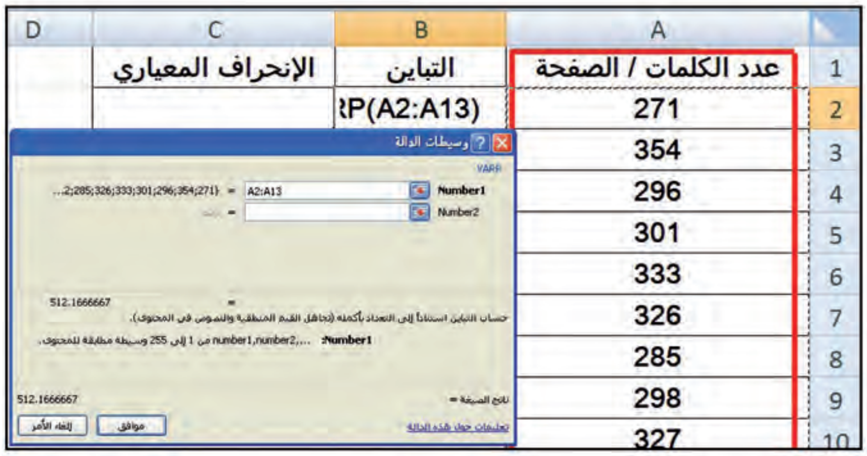
شكل (١٥)

- تظهر النافذة «إدراج دالة» كما في الشكل (١٦). فنقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة»، ثم نختار من قائمة «تحديد دالة» دالة تباين المجتمع «VARP».



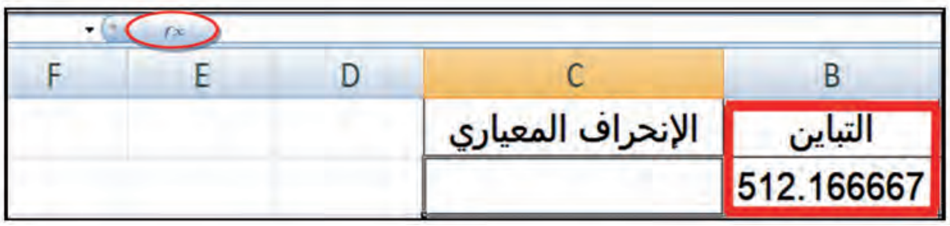
شكل (١٦)

- بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» فنضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{13} كما يظهره الشكل (١٧).



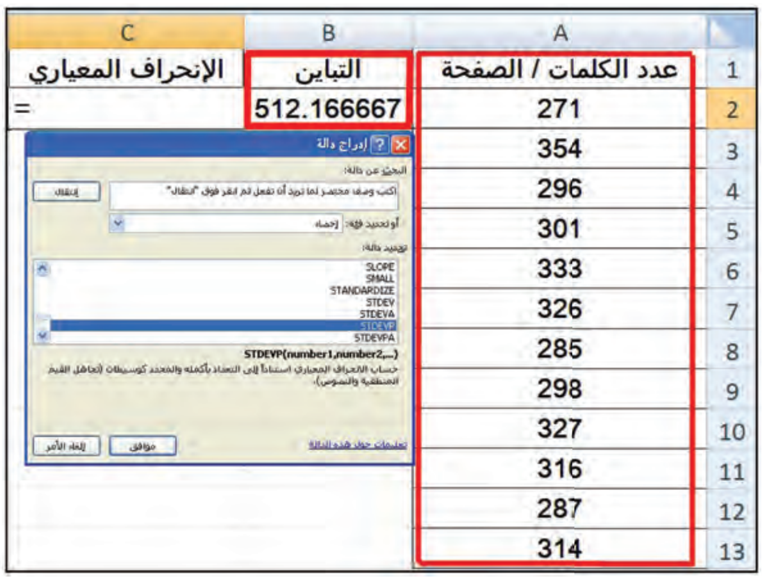
شكل (١٧)

- نضغط على «موافق» فيظهر التباين في المجتمع المؤلف من عدد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢ في الخانة B_2 كما في الشكل (١٨).
- نحدد الخلية C_2، ثم نضغط بواسطة الفأرة على *fx* كما يظهر الشكل (١٨).



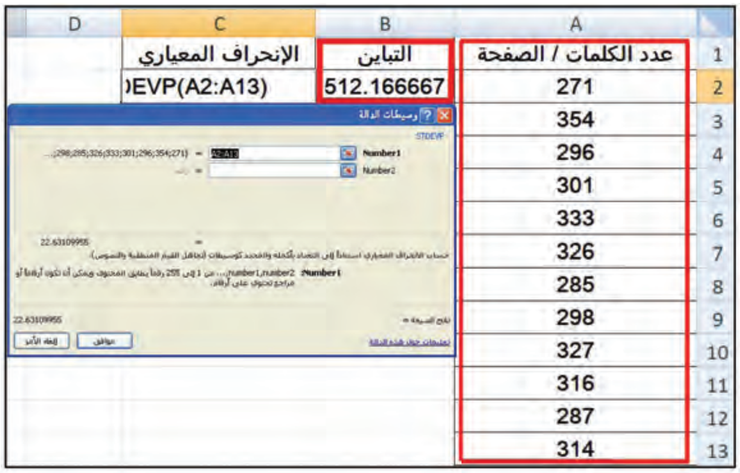
شكل (١٨)

- تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (١٩) نقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة». ثم نختار من قائمة «تحديد دالة» دالة الانحراف المعياري «STDEVP».



شكل (١٩)

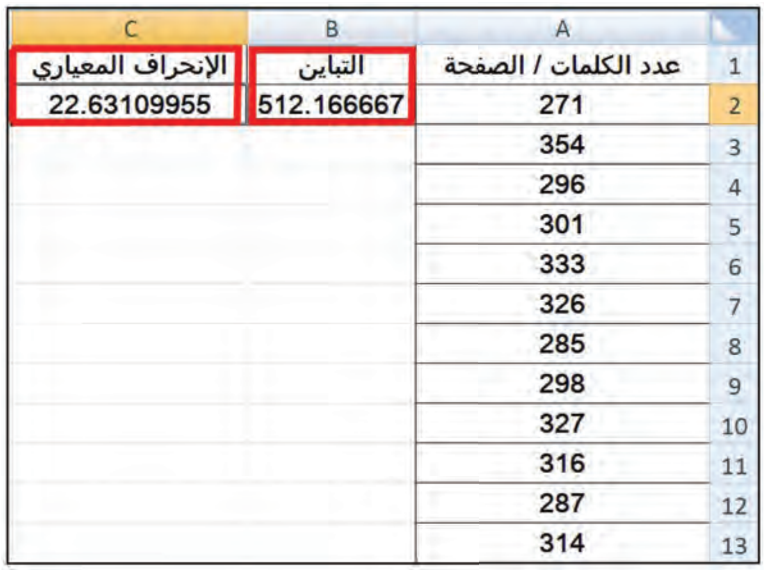
• نضغط على «موافق» فتظهر نافذة «وسيطات الدالة»، نضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{13} كما يظهره الشكل (٢٠).



	A	B	C	D
1	عدد الكلمات / الصفحة	التباين	الإنحراف المعياري	
2	271	512.166667	)EVP(A2:A13)	
3	354			
4	296			
5	301			
6	333			
7	326			
8	285			
9	298			
10	327			
11	316			
12	287			
13	314			

شكل (٢٠)

• نضغط على «موافق» فيظهر الانحراف المعياري في المجتمع المؤلف من عدد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢ في الخانة C_2 كما في الشكل (٢١).



	A	B	C
1	عدد الكلمات / الصفحة	التباين	الإنحراف المعياري
2	271	512.166667	22.63109955
3	354		
4	296		
5	301		
6	333		
7	326		
8	285		
9	298		
10	327		
11	316		
12	287		
13	314		

شكل (٢١)

وبالتالي يكون:

١ التباين في عدد كلمات المجتمع المؤلف من صفحات الكتيب الـ ١٢ : ٥١٢,١$\overline{٦}$.

٢ الانحراف المعياري في عدد كلمات المجتمع المؤلف من صفحات الكتيب الـ ١٢ : ٢٢,٦٣.

حاول أن تحل

٣ أوجد التباين والانحراف المعياري لأول عشرة أعداد كلية من ١ إلى ١٠ مستخدمًا برنامجًا إحصائيًّا.

المرشد لحل المسائل

تنتج إحدى المؤسسات أكياسًا صغيرة معبأة بالسكر للاستهلاك الشخصي، وقد استخدمت لذلك آلتين على أن يحتوي الكيس الواحد على ٢٦٥ جرامًا فقط.

أخذت عينة عشوائية من ٤٠ كيسًا معبأة من الآلة الأولى وكانت تحوي الكميات التالية:

٢٥٧، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٧٠.

ثم أخذت عينة عشوائية من ٤٠ كيسًا معبأة من الآلة الثانية وكانت تحوي الكميات التالية:

٢٦١، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧٠، ٢٧٠، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧١.

كيف يمكن لهذه المؤسسة أن تتأكد من جودة عمل كل من آلتي التعبئة؟

صالح فكّر

نوجد المتوسط الحسابي لمحتوى الأكياس المعبأة من كل آلة.

بالنسبة إلى الآلة الأولى: $\overline{\text{س}} = \frac{١٠٦٠٤}{٤٠} = ٢٦٥,١$.

أي أن المتوسط الحسابي لمحتويات الأكياس هو: $\overline{\text{س}} = ٢٦٥,١$ جرامًا.

ومن ثم نوجد المتوسط الحسابي لمحتوى الأكياس المعبأة من الآلة الثانية: $\overline{\text{ص}} = \frac{١٠٦٥٨}{٤٠} = ٢٦٦,٤٥$.

أي أن المتوسط الحسابي لمحتويات الأكياس من الآلة الثانية هو: $\overline{\text{ص}} = ٢٦٦,٤٥$ جرامًا.

وبالتالي يعتبر الجهاز الأول أفضل من الجهاز الثاني لأن المتوسط الحسابي ٢٦٥,١ جرامًا هو الأقرب إلى شرط التعبئة وهو ٢٦٥ جرامًا.

خالد فكّر

نوجد الوسيط للقيم في البيانات، ثم الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، المدى الربيعي ونحسب النسبة المئوية لقيم البيانات في المدى الربيعي ونقارن بعد ذلك.

الآلة الأولى: الوسيط = ٢٦٦

الربيع الأدنى = ٢٦٣

الربيع الأعلى = ٢٦٧

المدى الربيعي = ٢٦٧ − ٢٦٦ = ١

الآلة الثانية: الوسيط = ٢٦٦,٥

الربيع الأدنى = ٢٦٥

الربيع الأعلى = ٢٦٨,٥

المدى الربيعي = ٢٦٨,٥ − ٢٦٥ = ٣,٥

فأستنتج أن الآلة الأولى أفضل من الآلة الثانية، لأن المدى الربيعي للقيم من الآلة الأولى أصغر من المدى الربيعي للقيم من الآلة الثانية. **جاسم فكّر**

نوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات الناتجة من التعبئة في الآلتين، ثم نحسب النسبة المئوية للقيم على الفترة [$\overline{س} - \sigma_1$، $\overline{س} + \sigma_1$] وعلى الفترة [$\overline{ص} - \sigma_2$، $\overline{ص} + \sigma_2$] حيث $\overline{س}$، $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي للقيم على الترتيب للآلة الأولى وللآلة الثانية، σ_1 ، σ_2 الانحراف المعياري للقيم على الترتيب للآلة الأولى وللآلة الثانية.

الآلة الأولى: $\overline{س}$ = ٢٦٥,١ ، σ_1 = ٢,٨

الفترة [$\overline{س} - \sigma_1$ ، $\overline{س} + \sigma_1$] = [٢٦٢، ٢٦٨].

عدد القيم المعبأة من الآلة الأولى في الفترة [٢٦٢، ٢٦٨] هو ٣٢.

النسبة المئوية = $\frac{٣٢}{٤٠}$ × ١٠٠٪ = ٨٠٪ .

الآلة الثانية: $\overline{ص}$ = ٢٦٦,٤٥ ؛ σ_2 = ٢,٦٤٥

الفترة [$\overline{ص} - \sigma_2$ ، $\overline{ص} + \sigma_2$] = [٢٦٤، ٢٦٩].

عدد القيم المعبأة من الآلة الثانية في الفترة [٢٦٤، ٢٦٩] هو ٢٩.

النسبة المئوية = $\frac{٢٩}{٤٠}$ × ١٠٠٪ = ٧٢,٥٪

أي أن الآلة الأولى أفضل من الآلة الثانية، لأن النسبة ٨٠٪ هي أكبر من النسبة ٧٢,٥٪.

مسألة إضافية

تمت برمجة إحدى الآلات لتنتج كرات حيث طول قطر الكرة الواحدة ٥ سنتيمترات. ولكن لوحظ أنه يوجد تغيرات بسيطة على طول القطر لعدد كبير من الكرات المنتجة.

يبيّن الجدول أدناه طول القطر لعينة من ٤٠ كرة:

٤,٩	٥	٥,٢	٤,٦	٤,٩	٥,٢	٤,٦	٥,١
٥	٤,٧	٤,٨	٥,١	٤,٨	٥,٤	٤,٩	٤,٧
٤,٩	٥	٥,٢	٥,٣	٥,٤	٤,٩	٥	٤,٩
٤,٧	٤,٩	٥,٤	٤,٨	٥,٢	٥	٥,٢	٤,٧
٤,٨	٥,١	٥	٤,٨	٤,٧	٤,٨	٤,٨	٤,٦

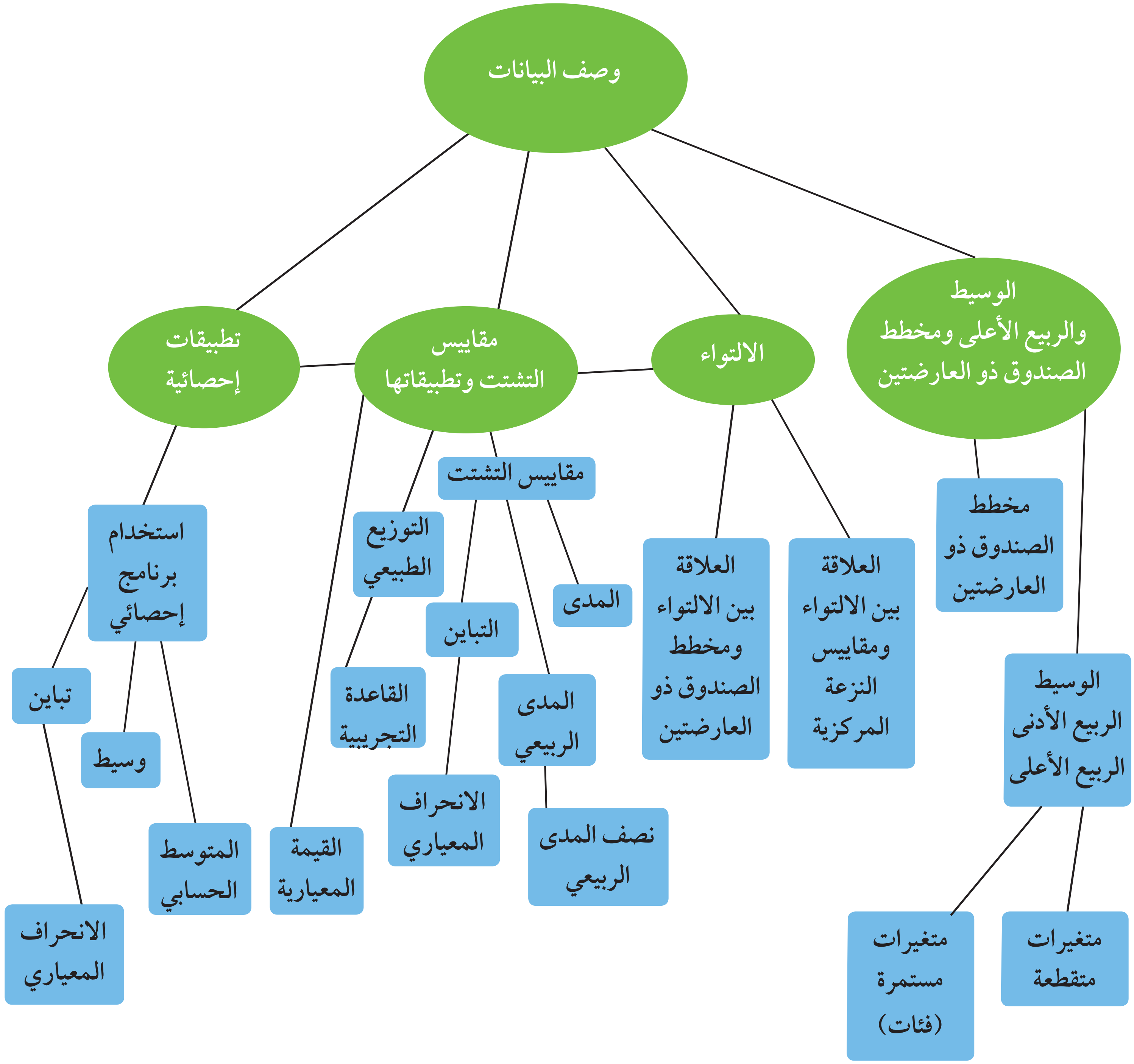
أ اعتبرت المؤسسة أن هذه الآلة بحالة جيدة وذا جودة مقبولة شرط أن يكون المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لهذه القياسات أصغر من ٥,١٢ وأكبر من ٤,٨٨.

هل هذا الشرط متوفر على المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لطول قطر ٤٠ قيمة وردت في جدول العينة العشوائية؟

ب فكرت المؤسسة أنه يمكن للمتوسط الحسابي $\overline{س}$، أن يحقق الشرط الموجود في السؤال أ ، لذا أرادت وضع شرط جديد وهو أن يكون الانحراف المعياري لطول القطر أصغر من ٠,٢٥ وأكبر من ٠,١٣ وذلك من خلال قيم العينة العشوائية الواردة في الجدول. فهل هذا الشرط متوفر؟ اشرح.

جـ ما القرار الذي سوف تتخذه المؤسسة: تصليح الآلة أم الاستمرار بالإنتاج؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.
- الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم ويرمز للوسيط بالرمز ($م_٢$).
- لإيجاد قيمة الوسيط.

أولًا: الوسيط من جدول التكراري

(أ) إذا كان ن (عدد القيم) فردي يكون ترتيب الوسيط على $\frac{ن + ١}{٢}$ بعد ترتيب البيانات تصاعديًّا.

(ب) إذا كان ن (عدد القيم) زوجي يكون ترتيب الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيم التي ترتيبها تصاعديًّا $\frac{ن}{٢}$، $\frac{ن}{٢} + ١$

ثانيًا: الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري ذو فئات

(أ) الوسيط ($م_٢$) = الحد الأدنى لفئة الوسيط + $\frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}}$ × طول الفئة

(ب) الربيع الأدنى ($م_١$)

= الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + $\frac{\frac{ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأدنى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى}}$ × طول الفئة

(جـ) الربيع الأعلى ($م_٣$)

= الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى + $\frac{\frac{٣ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأعلى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى}}$ × طول الفئة

- فئة الوسيط هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط مباشرة.
- فئة الربيع الأدنى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأدنى مباشرة.
- فئة الربيع الأعلى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأعلى مباشرة.
- يمكن استخدام برنامج إحصائي لإيجاد مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري) ولإيجاد مقاييس النزعة المركزية (الوسيط والمتوسط الحسابي).

- المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

- الربيع الأدنى هو وسيط البيانات للقيم ما دون قيمة الوسيط.

- الربيع الأعلى هو وسيط البيانات للقيم أعلى من قيمة الوسيط.

- الصندوق ذي العارضتين هو مخطط يتكون من مستطيل يمثل الربيع الأدنى والربيع الأعلى وبداخله قطعة مستقيمة تمثل الوسيط وله عارضتان يوضع عند نهايتهما القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء.
  - إذا كان المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي فإن نوع الالتواء سالب.
  - إذا كان المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي فإن نوع الالتواء موجب.
  - إذا كان المنوال = الوسيط = المتوسط الحسابي فلا يوجد التواء.

- المدى = القيمة العظمى في البيانات − القيمة الصغرى لهذه البيانات.

- نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى − الربيع الأدنى}}{٢}$.

- التباين = $\frac{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}$

- الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}}$

- القاعدة التجريبية هي واحدة من الفترات التالية: $[\overline{س} - \sigma، \overline{س} + \sigma]$، $[\overline{س} - ٢\sigma، \overline{س} + ٢\sigma]$، $[\overline{س} - ٣\sigma، \overline{س} + ٣\sigma]$، حيث $\overline{س}$ = المتوسط الحسابي لقيم البيانات، σ = الانحراف المعياري لقيم البيانات.
- القيمة المعيارية = $\frac{\text{القيمة − المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$.

الوحدة الخامسة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: تعرّف معالم بلدك.

١ مقدمة المشروع: هل سبق أن زرت محمية في بلدك؟ إذا أردت القيام بزيارة لإحدى المحميات، فكيف يتمّ اختيارها؟

٢ الهدف: تقوم مؤسّسات كويتية بحملات إعلامية ومشاريع تهدف إلى حماية بعض الحيوانات وبعض أنواع النباتات المهدّدة بالانقراض. ضع ملصقًا لمحميّة طبيعيّة في بلدك تبرز فيه بعض الحيوانات والنباتات التي تعيش في هذه المحميّة.

٣ اللوازم: أوراق ملونة، مقص، مسطرة، حاسوب، جهاز إسقاط، بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في الكويت.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ اختر بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في دولة الكويت (عدد كل منها ١٠).

ب إذا وضعت البطاقات في علبة، ثم سحبت منها بطاقة عشوائيًا، فما احتمال الحصول على صورة نبات؟ وما احتمال الحصول على صورة حيوان؟

جـ اخلط البطاقات جيّدًا. اسحب بطاقة، دوّن اسمها (نبات، حيوان)، ثم أعد السحب خمسين مرة متتالية.
قارن بين $\frac{\text{عدد صور النبات}}{٥٠}$ ، واحتمال الحصول على صورة نبات.
أعد العملية نفسها مع صور الحيوانات.

د أعد الفقرة جـ. ولكن هذه المرة قم بالخطوات مئة مرة متتالية.

هـ كوّن جدولًا يتضمن نتائج سحوباتك واحتمالي الحدثين.

٥ التقرير: ضع تقريرًا يتضمن أسباب اختيارك للمحمية.

أرفق تقريرك بعرض على الحاسوب أو على جهاز الإسقاط لهذه المواقع ولبعض الحيوانات التي تعيش في الصحراء الكويتية.

دروس الوحدة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في مبدأ العد.
- تعرفت طرائق العد مثل الجداول ومخططات ڤن والتباديل والتوافيق.
- استخدمت طرق العد في حل بعض المسائل.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث والأحداث المتنافية والحدث المتمم والأحداث المستقلة.

المصطلحات الأساسية

القوائم - مبدأ العد الأساسي - مضروب العدد - التباديل - التوافيق - مثلث باسكال - نظرية ذات الحدين - التجربة العشوائية - فضاء العينة - الحدث - احتمال الحدث - الأحداث المتنافية - متمم الحدث - الأحداث المستقلة.

أضف إلى معلوماتك

قام الرياضي السويسري جاك برنولي (١٦٥٤ - ١٧٣٤) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس» الذي نشره ابن أخيه نقولا برنولي بعد وفاته بثماني سنوات.

يبيّن برنولي في كتابه النتيجة التالية: «إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث».

على سبيل المثال، إذا ألقي حجر نرد منتظم فإن احتمال ظهور العدد ٢ هو $\frac{١}{٦}$. إذا كررنا إلقاء حجر النرد عددًا كبيرًا من المرات (ن) فإنه من شبه المؤكد أن عدد مرات ظهور العدد ٢، وليكن م، يحقق $\frac{م}{ن} = \frac{١}{٦}$.

ويُسمى هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

حاليًّا تستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

٥–١

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

عمل تعاوني

تتكون شيفرة من حرفين مختلفين يليهما عدد من رقم واحد غير صفري. نريد تحديد عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها تكوين هذه الشيفرة؟

١ هل ترتيب الحرفين مهم في الشيفرة؟

٢ إذا ابتدأت الشيفرة بالحرف أ، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرف الثاني؟

٣ إذا اختير الحرفان أ، ب بالترتيب، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار العدد؟

٤ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرفين؟

٥ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الشيفرة؟

سوف تتعلم

- بعض طرق العد.
- استخدام مبدأ العد في حل المسائل.
- استخدام التباديل. والتوافيق في حل المسائل.

(٥–١–أ) العد عن طريق القوائم Counting by Using lists

بعض الأشياء سهلة العد مثل عدد الطلاب في الصف أو عدد بطاقات الطلاب عند المسؤول الصحي في المدرسة.

بعض الأشياء يصعب عدها مثل عدد سكان مجمع أو عدد الحضور في مسرح.

لذا تستخدم تقنيات العد لتوفير الجهد والوقت والمال.

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدّها أي بوضع قائمة مرتبة.

مثال (١)

استعدادًا لحفل نهاية العام الدراسي كلّف مدير المدرسة صالح وخالد وسالم وأحمد الاهتمام بالتقاط الصور وتوزيع البطاقات على المدعوين واستقبال الأهل وتوزيع المرطبات.

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع المهام على الطلاب الأربعة؟

الحل:

نظّم قائمة مرتّبة.

مثال: صالح يلتقط الصور، خالد يوزّع البطاقات، سالم يستقبل الأهل، أحمد يوزّع المرطبات.

وسنستخدم لذلك الترميز التالي:

صالح – خالد – سالم – أحمد، تصبح القائمة كما يلي:

صالح – خالد – سالم – أحمد
صالح – خالد – أحمد – سالم
صالح – سالم – خالد – أحمد
صالح – سالم – أحمد – خالد
صالح – أحمد – خالد – سالم
صالح – أحمد – سالم – خالد

خالد – صالح – سالم – أحمد
خالد – صالح – أحمد – سالم
خالد – سالم – صالح – أحمد
خالد – سالم – أحمد – صالح
خالد – أحمد – صالح – سالم
خالد – أحمد – سالم – صالح

سالم – صالح – خالد – أحمد
سالم – صالح – أحمد – خالد
سالم – خالد – صالح – أحمد
سالم – خالد – أحمد – صالح
سالم – أحمد – صالح – خالد
سالم – أحمد – خالد – صالح

أحمد – صالح – خالد – سالم
أحمد – صالح – سالم – خالد
أحمد – خالد – صالح – سالم
أحمد – خالد – سالم – صالح
أحمد – سالم – صالح – خالد
أحمد – سالم – خالد – صالح

∴ يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة مختلفة لتوزيع المهام على الطلاب الأربعة.

حاول أن تحل

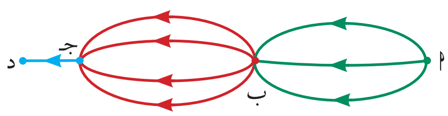
١ باستخدام ثلاثة أحرف من كلمة ناصر ودون تكرار أي حرف منها، كم كلمة مختلفة يمكن الحصول عليها؟ (لها معنى أو بدون معنى).

(٥–١–ب) المبدأ الأساسي للعد Fundamental Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على ٣ مراحل متتابعة. هناك ٣ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى و٤ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: ٣ × ٤ × ١ = ١٢ طريقة



مفتاح حل المسائل باستخدام المبدأ الأساسي للعد باتباع الخطوات التالية:

- تحديد عدد المراحل (م)
- تحديد عدد طرائق كل مرحلة: ن$_{١}$، ن$_{٢}$، ن$_{٣}$، ...، ن$_{م}$
- عدد طرائق إجراء العملية هو ن$_{١}$ × ن$_{٢}$ × ن$_{٣}$ × ... × ن$_{م}$

المبدأ الأساسي للعد

لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، وقد أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_١$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_٢$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ $ن_م$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_١ \times ن_٢ \times \ldots \times ن_م$.

مثال (٢)

لوحات السيارات في إحدى القرى السياحية تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه رقمان يتم اختيارهما من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

كم عدد لوحات السيارات الممكنة بحيث أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات السيارات؟

الحل:

طريقة أولى:

تحديد عدد المراحل:

المرحلة الأولى: اختيار الحرف

المرحلة الثانية: اختيار رقم الآحاد

المرحلة الثالثة: اختيار رقم العشرات

عدد طرائق المرحلة الأولى = ٢٨

عدد طرائق المرحلة الثانية = ٦

عدد طرائق المرحلة الثالثة = ٥

عدد الطرائق: ٢٨ × ٦ × ٥ = ٨٤٠ طريقة

طريقة ثانية:

عدد طرائق اختيار الحرف	عدد طرائق اختيار رقم الآحاد	عدد طرائق اختيار رقم العشرات
٢٨	٦	٥

عدد الطرائق = ٢٨ × ٦ × ٥

= ٨٤٠ طريقة

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢) كم عدد لوحات السيارات إذا كانت اللوحات تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه ثلاثة أرقام يتم اختيارها من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

مثال (٣)

كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من أربعة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {٢، ٥، ٦، ٨} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ إذا كان رقم الآحاد ٢ (لا يسمح بالتكرار)

الحل:

أ إذا سمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ٤

عدد الأعداد = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦

ب إذا لم يسمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٣

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٢

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ١

عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

جـ رقم الآحاد ٢ ∴ يبقى ٣ مراحل ∴ عدد الأعداد = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦

حاول أن تحل

٣ كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من ثلاثة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {١، ٣، ٦، ٩} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ إذا كان العدد فردي ويسمح بالتكرار.

(٥-١-ج) مضروب العدد Factoriel of a Number

رسم هشام ٤ مراكب صغيرة ولوّنها بألوان مختلفة. أراد عرضها على لوحة جدارية في الصف قرب بعضها بعضًا.

عدد طرائق العرض:

٤ مواقع للرسمة الأولى، ٣ للرسمة الثانية، ٢ للرسمة الثالثة، ١ للرسمة الرابعة.

∴ عدد طرائق العرض = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

يسمى ناتج الضرب ٤ × ٣ × ٢ × ١ مضروب ٤ ويرمز إليه بالرمز ٤!

وعمومًا، ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح موجب.

٠! = ١

لاحظ أن: ن! = ن × (ن − ١)!

مثال (٤)

احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٥!

ب $\frac{١٢!}{٩!}$

ج $\frac{١٦!}{١٢! ٤!}$

الحل:

أ ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

ب $\frac{١٢!}{٩!} = \frac{١٢ × ١١ × ١٠ × \overbrace{٩ × ٨ × ٧ × ... × ٣ × ٢ × ١}}{\underbrace{٩ × ٨ × ٧ × ... × ٣ × ٢ × ١}}$

= ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٣٢٠

ج $\frac{١٦!}{١٢! ٤!} = \frac{١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣ × \overbrace{١٢ × ١١ × ... × ٣ × ٢ × ١}}{\underbrace{١٢ × ١١ × ... × ٣ × ٢ × ١} × ٤ × ٣ × ٢ × ١}$

$= \frac{\overset{٤}{\cancel{١٦}} × \overset{٥}{\cancel{١٥}} × \overset{٧}{\cancel{١٤}} × ١٣}{\cancel{٤} × \cancel{٣} × \underset{١}{\cancel{٢}} × ١}$ = ١٨٢٠

معلومة:

استخدمت علامة التعجب أولًا للمضروب في سنة ١٨٠٨ بواسطة العالم كريستيان كامب (١٧٦٠-١٨٢٦) ليظهر أن مضروب عدد يكون كبيرًا إلى حدّ ما، فمثلًا:

١٠! = ٣٦٢٨٨٠٠

حاول أن تحل

٤ احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٧!

ب $\frac{١٠!}{٨!}$

ج $\frac{١٤!}{٨! ٧!}$

(٥-١-د) التباديل Permutations

في المثالين (٢)، (٣)، كان الترتيب مهمًّا ومأخوذًا بعين الاعتبار. فمثلًا في مثال (٢) لوحة السيارة ب ٢١ تختلف عن لوحة السيارة ب ١٢. مثل هذا الترتيب يسمى **تبديلًا**. عامة:

- التبديل هو وضع العناصر وفق ترتيب معين.
- عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!.

مثال (٥)

فصل فيه ٢٠ طالبًا. يراد اختيار ثلاثة منهم على أن يكون الأول رئيسًا والثاني نائبًا للرئيس والثالث أمينًا للسر.
بكم طريقة يمكن اختيار الطلاب الثلاثة؟

الحل:

توجد ٢٠ طريقة مختلفة لاختيار الرئيس و١٩ طريقة مختلفة لاختيار نائب الرئيس و١٨ طريقة مختلفة لاختيار أمين السر.

∴ عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها اختيار الطلاب الثلاثة هو:

٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠ طريقة.

حاول أن تحل

٥ ما عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام أحرف كلمة «سعود»؟

يمكن أن يعمم، المثال (٥)، لمواقف ذات ترتيب ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء، حيث ن ≥ ر.

قانون التباديل Permutation Formula

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times \ldots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١) \quad \text{حيث ر ، ن} \in \text{ص}_{+} \text{ ، ر} \leq \text{ن}$$

عندما ر = ٠ يعرّف ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

لاحظ:

$${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times \ldots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١)$$

$$= \text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times \ldots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١) \times \frac{(\text{ن} - \text{ر}) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}{(\text{ن} - \text{ر}) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$$

قانون التباديل $\quad {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!} \quad : \quad \text{ر} \leq \text{ن} \quad ، \quad \text{ر ، ن} \in \text{ص}_{+}$

مثال (٦)

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $ل^{٨}_{٣}$ ب $ل^{٧}_{٣} + ل^{٧}_{٥}$ ج $\frac{ل^{٩}_{٥}}{ل^{٨}_{٤}}$

الحل:

أ $ل^{٨}_{٣} = \frac{٨!}{(٨-٣)!} = \frac{٨!}{٥!}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{\cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$

$= ٨ \times ٧ \times ٦$

$= ٣٣٦$

ب $ل^{٧}_{٣} + ل^{٧}_{٥} = \frac{٧!}{(٧-٣)!} + \frac{٧!}{(٧-٥)!} = \frac{٧!}{٤!} + \frac{٧!}{٢!}$

$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{\cancel{٤!}} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!}}$

$= ٢١٠ + ٢٥٢٠$

$= ٢٧٣٠$

ج $\frac{ل^{٩}_{٥}}{ل^{٨}_{٤}} = \frac{\frac{٩!}{(٩-٥)!}}{\frac{٨!}{(٨-٤)!}} = \frac{\frac{٩!}{٤!}}{\frac{٨!}{٤!}} = \frac{٩!}{٨!}$

$= \frac{٩ \times \cancel{٨!}}{\cancel{٨!}}$

$= ٩$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $ل^{٧}_{٤}$ ب $ل^{٥}_{٤} + ل^{٥}_{٥}$ ج $\frac{ل^{١٠}_{٧}}{ل^{٩}_{٦}}$

مثال (٧)

بعد انتهاء مباراة كرة القدم بالتعادل، أراد المدرب اختيار ٥ لاعبين بالترتيب لركلات الترجيح.
بكم طريقة يمكن اختيار اللاعبين الخمسة من بين اللاعبين الأحد عشر؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل المكون من ٥ لاعبين المأخوذين من ١١ لاعبًا.

$$^{١١}ل_{٥} = \frac{١١!}{(١١-٥)!} = \frac{١١!}{٦!}$$

$$= ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧$$

$$= ٥٥\,٤٤٠$$

حاول أن تحل

٧ **في المثال (٧)، ما عدد الخيارات إذا استثني حارس المرمى؟**

(٥-١-هـ) التوافيق Combinations

مثال تمهيدي

أراد معلم التربية البدنية اختيار طالبين من بين مجموعة مكونة من أربعة طلاب:

{محمد، أحمد، علي، حسين} للاشتراك في سباق الماراتون.

كل التبديلات الممكنة هي:

(محمد ، أحمد) ؛ (محمد ، علي) ؛ (محمد ، حسين) ؛

(أحمد ، محمد) ؛ (أحمد ، علي) ؛ (أحمد ، حسين) ؛

(علي ، محمد) ؛ (علي ، أحمد) ؛ (علي ، حسين) ؛

(حسين ، محمد) ؛ (حسين ، أحمد) ؛ (حسين ، علي).

وبما أن المدرب يريد اختيار أي طالبين من بين الأربعة طلاب **دون اعتبار للترتيب** فإن اختيار محمد وأحمد لا يختلف عن اختيار أحمد ومحمد. وبالتالي في هذه الحالة تكون الاختيارات الممكنة هي محمد، أحمد أو محمد ، علي أو محمد، حسين أو أحمد ، علي أو أحمد ، حسين أو علي، حسين.

وكل اختيار من هذه الاختيارات يسمى **توفيقة.**

عندما نريد إيجاد المجموعات الجزئية المكوّنة كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر بصرف النظر عن الترتيب فنحن نحسب **التوافيق** ويرمز له بالرمز $\binom{ن}{ر}$، $^{ن}ق_{ر}$.

قانون التوافيق Combination Formula

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبين حيث ن $\geq$ ر، فإن:

عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من العناصر والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو:

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$$

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\, ر!}$$

ملاحظات:

- عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ق_{٠} = ١$
- $^{ن}ق_{ن} = ١$
- $^{ن}ق_{١} = ن$
- $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

مثال (٨)

في إحدى محافظات دولة الكويت ٨ صيدليات. يريد المسؤولون اختيار ٣ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي.
بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الثلاث؟

الحل:

المطلوب اختيار ٣ صيدليات من بين ٨ صيدليات (الترتيب غير مهم)

عدد الطرائق الممكنة لاختيار الصيدليات الثلاثة = $^{٨}ق_{٣}$

$$= \frac{^{٨}ل_{٣}}{٣!}$$

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= ٥٦$$

يمكن اختيار الصيدليات الثلاث بـ ٥٦ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٨ في محافظة أخرى ١٢ صيدلية والمطلوب اختيار ٤ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي.
بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الأربع؟

مثال (٩)

أراد مدير مدرسة تشكيل لجنة من ٨ طلاب للتحضير لاحتفال نهاية العام الدراسي. عليه اختيار ٤ من بين ١٨ مرشحًا من الصف الثاني عشر، و٣ من بين ١٤ مرشحًا من الصف الحادي عشر، و١ من بين ١١ مرشحًا من الصف العاشر.

بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير تكوين اللجنة؟

الحل:

على المدير اختيار ٤ طلاب من بين ١٨ من الصف الثاني عشر، ترتيب العناصر غير مهم، فيكون عدد الطرائق = $^{١٨}\text{ق}_{٤}$

كذلك عليه اختيار ٣ طلاب من بين ١٤ من الصف الحادي عشر، عدد الطرائق = $^{١٤}\text{ق}_{٣}$

وعليه اختيار طالب واحد من بين ١١ من الصف العاشر، عدد الطرائق = $^{١١}\text{ق}_{١}$

عدد طرائق تكوين اللجنة = $^{١٨}\text{ق}_{٤} \times {}^{١٤}\text{ق}_{٣} \times {}^{١١}\text{ق}_{١}$

$= ٣٠٦٠ \times ٣٦٤ \times ١١$

$= ١٢\ ٢٥٢\ ٢٤٠$

يمكن اختيار اللجنة بـ ٢٤٠ ٢٥٢ ١٢ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٩ في الصف الحادي عشر ٢٠ طالبًا، وفي الصف العاشر ٢٤ طالبًا. أراد معلم الرياضة اختيار ٦ طلاب من الصف الحادي عشر و٥ طلاب من الصف العاشر لتشكيل فريق كرة القدم. كم عدد الفرق التي بإمكانه تشكيلها؟

مثال (١٠)

حلّ كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ١٠$ ب $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ١٢\text{ن}$ ج $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = \text{ن}$

الحل:

أ $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ١٠$

$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٢)!\,٢!} = ١٠$ قانون التوافيق

$\frac{\text{ن}\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)!}{(\text{ن} - ٢)!\,٢!} = ١٠$ خواص مضروب العدد

$\frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)}{٢} = ١٠$

حل آخر

$\because\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ١٠$

$\frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}{٢!} = ١٠$

$ن^{٢} - ن = ٢٠$

$ن^{٢} - ن - ٢٠ = ٠$

$ن = ٥$ أو $ن = -٤$

$ن = -٤$ مرفوضة ، لأن ن عدد صحيح موجب $\therefore$ $ن = ٥$

الضرب التقاطعي

$$\frac{ن\,(ن - ١)}{٢ \times ١} = ١٠$$

$ن\,(ن - ١) = ٢٠$

$ن\,(ن - ١) = ٥ \times ٤$

$\therefore$ $ن = ٥$

ب ${}^{ن}ل_{٢} = ١٢ن$

$ن\,(ن - ١) = ١٢ن$

$ن^{٢} - ن = ١٢\,ن$

$ن^{٢} - ن - ١٢\,ن = ٠$

$ن^{٢} - ١٣\,ن = ٠$

$ن(ن - ١٣) = ٠$

$ن = ١٣$ أو $ن = ٠$

$ن = ٠$ مرفوضة ، لأن $ن > ٢$ $\therefore$ $ن = ١٣$

جـ ${}^{ن}ق_{٢} = ن$

$$\frac{{}^{ن}ل_{٢}}{!٢} = ن$$

$$\frac{ن\,(ن - ١)}{٢ \times ١} = ن$$

$ن^{٢} - ن = ٢ن$

$ن^{٢} - ن - ٢\,ن = ٠$

$ن^{٢} - ٣\,ن = ٠$

$ن\,(ن - ٣) = ٠$

$ن = ٠$ (مرفوضة) أو $ن = ٣$

حاول أن تحل

١٠ حل كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ ${}^{ن+١}ق_{٢} = ٢\,ن$

ب ${}^{ن}ل_{٣} = ٢٤$

جـ ${}^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ل_{٢}$

٥ – ٢

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

سوف تتعلم

- إيجاد مثلث باسكال.
- إيجاد معاملات مفكوك ذات الحدين.
- نظرية ذات الحدين.
- إيجاد مفكوك ذات الحدين.

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية المهمة بدأت بدراسة الأنماط.
نهدف في هذا الدرس إلى تقديم نظرية مهمة لكثيرة حدود تدعى نظرية ذات الحدين.
ولتحقيق ذلك سنبدأ بمراقبة بعض الأنماط.

إذا فككت $(أ + ب)^{ن}$ حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إليك ما ستحصل عليه:

$(أ + ب)^{٠} =$ ١

$(أ + ب)^{١} =$ ١ $أ^{١}ب^{٠}$ + ١ $أ^{٠}ب^{١}$

$(أ + ب)^{٢} =$ ١ $أ^{٢}ب^{٠}$ + ٢ $أ^{١}ب^{١}$ + ١ $أ^{٠}ب^{٢}$

$(أ + ب)^{٣} =$ ١ $أ^{٣}ب^{٠}$ + ٣ $أ^{٢}ب^{١}$ + ٣ $أ^{١}ب^{٢}$ + ١ $أ^{٠}ب^{٣}$

$(أ + ب)^{٤} =$ ١ $أ^{٤}ب^{٠}$ + ٤ $أ^{٣}ب^{١}$ + ٦ $أ^{٢}ب^{٢}$ + ٤ $أ^{١}ب^{٣}$ + ١ $أ^{٠}ب^{٤}$

$(أ + ب)^{٥} =$ ١ $أ^{٥}ب^{٠}$ + ٥ $أ^{٤}ب^{١}$ + ١٠ $أ^{٣}ب^{٢}$ + ١٠ $أ^{٢}ب^{٣}$ + ٥ $أ^{١}ب^{٤}$ + ١ $أ^{٠}ب^{٥}$

هل يمكنك مراقبة الأنماط وتوقع ما سيكون عليه مفكوك $(أ + ب)^{٦}$؟

قد يمكنك توقع ما يلي:

أ) ينقص أس العدد أ من ٦ إلى صفر بمقدار الوحدة على التوالي.
ب) يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة من صفر إلى ٦ .
جـ) سيكون مجموع أسي أ ، ب يساوي ٦ .
د) سيكون المعاملان الأولان ١، ٦ .
هـ) سيكون المعاملان الأخيران ٦، ١ .

لإيجاد باقي المعاملات سوف نتعرف على مثلث باسكال.

(٥–٢–أ) مثلث باسكال Pascal's Triangle

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، إذا ألغينا أ ، ب وإشارة الجمع من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ نحصل على:

الصف ٠	١
الصف ١	١ ١
الصف ٢	١ ٢ ١
الصف ٣	١ ٣ ٣ ١
الصف ٤	١ ٤ ٦ ٤ ١
الصف ٥	١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وهذا ما يسمى **بمثلث باسكال**.

ملاحظة:
رقم ١ في قمة مثلث باسكال له معنى، لأنه إذا كان:
أ + ب ≠ ٠، فإن $(أ + ب)^{٠}$ = ١

لاحظ النمط في هذا المثلث:

- الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١ .
- كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ ١ وينتهي أيضًا بـ ١ .

بليز باسكال
Blaise PASCAL
(١٦٢٣-١٦٦٢)

١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي

من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

على الرغم من أن هذا النمط العددي المثلثي كان معروفًا لعالم الرياضيات الصيني تشوشي كي والعالم العربي الكرخي. إلّا أنه سُمي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال، والذي استخدم المثلث عام ١٦٥٤ لإيجاد معاملات مفكوك كثيرة الحدود.

مثال (١)

أوجد الصف السادس من مثلث باسكال إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

العددان في أول الصف وآخره يساوي كل منهما ١ .

وكل عدد بينهما يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه تمامًا، لذلك نوجد الصف السادس كما يلي:

الصف الخامس: ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الصف السادس: ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

حاول أن تحل

١ في المثال (١) ، أوجد الصف السابع من مثلث باسكال.

مثال (٢)

أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٦}$ مستخدمًا مثلث باسكال لإيجاد المعاملات إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

علينا أولًا إيجاد معاملات $أ^{٦}$ ، $أ^{٥}ب$ ، $أ^{٤}ب^{٢}$ ، $أ^{٣}ب^{٣}$ ، $أ^{٢}ب^{٤}$ ، $أ^{١}ب^{٥}$ ، $ب^{٦}$. لذلك نستعين بالمثال السابق (١).

فنحصل على ١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٦ ، ١ وهكذا نحصل على مفكوك $(أ + ب)^{٦}$:

$(أ + ب)^{٦} = ١أ^{٦} + ٦أ^{٥}ب + ١٥أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠أ^{٣}ب^{٣} + ١٥أ^{٢}ب^{٤} + ٦أب^{٥} + ١ب^{٦}$

أو $(أ + ب)^{٦} = أ^{٦} + ٦أ^{٥}ب + ١٥أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠أ^{٣}ب^{٣} + ١٥أ^{٢}ب^{٤} + ٦أب^{٥} + ب^{٦}$ (عدم ضرورة كتابة ١ قبل $أ^{٦}$، $ب^{٦}$)

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢) ، أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٧}$ مستخدمًا مثلث باسكال.

(٥-٢-ب) نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال هي معاملات مفكوك ذات الحدين ويمكن إيجاد هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في المثال (١). يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام التوافيق.

إذا حسبنا: $^{٣}ق_{٠}$، $^{٣}ق_{١}$، $^{٣}ق_{٢}$، $^{٣}ق_{٣}$ نحصل على ١، ٣، ٣، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الثالث من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا $^{٤}ق_{٠}$، $^{٤}ق_{١}$، $^{٤}ق_{٢}$، $^{٤}ق_{٣}$، $^{٤}ق_{٤}$ نحصل على ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

وعليه يكون مفكوك $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠}أ^{٤}ب^{٠} + {}^{٤}ق_{١}أ^{٣}ب^{١} + \dots + {}^{٤}ق_{٤}أ^{٠}ب^{٤}$.

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب ن،

$(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}أ^{ن - ١}ب + {}^{ن}ق_{٢}أ^{ن-٢}ب^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن - ١}أب^{ن - ١} + {}^{ن}ق_{ن}ب^{ن}$

خواص نظرية ذات الحدين Properties of the Binomial Theorem

١ مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًّا.

٢ الحد الأول في المفكوك هو $أ^{ن}$، ثم ينقص أس العدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.

٣ يبدأ ظهور العدد ب في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون $ب^{ن}$.

٤ مجموع أسي العدد أ، والعدد ب في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس ن.

٥ يتساوى معاملا كل حدين لهما البعد نفسه عن الحد الأول والحد الأخير:

معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير وهكذا...

٦ الحد الذي ترتيبه ر + ١ يرمز له بالرمز $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$

مثال (٣)

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٢)^{٦}$

الحل:

في مفكوك $(أ + ب)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠} أ^{٦} + {}^{٦}ق_{١} أ^{٥} ب + {}^{٦}ق_{٢} أ^{٤} ب^{٢} + {}^{٦}ق_{٣} أ^{٣} ب^{٣} + {}^{٦}ق_{٤} أ^{٢} ب^{٤} + {}^{٦}ق_{٥} أ ب^{٥} + {}^{٦}ق_{٦} ب^{٦}$

نعوّض عن أ بـ س ، عن ب بـ ٢:

$(س+٢)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠} س^{٦} + {}^{٦}ق_{١} س^{٥} × (٢) + {}^{٦}ق_{٢} س^{٤} × (٢)^{٢} + {}^{٦}ق_{٣} س^{٣} × (٢)^{٣} + {}^{٦}ق_{٤} س^{٢} × (٢)^{٤} + {}^{٦}ق_{٥} س × (٢)^{٥} + {}^{٦}ق_{٦} × (٢)^{٦}$

$= س^{٦} + ٦ × ٢ س^{٥} + ١٥ × ٤ س^{٤} + ٢٠ × ٨ س^{٣} + ١٥ × ١٦ س^{٢} + ٦ × ٣٢ س + ٦٤$

$= س^{٦} + ١٢ س^{٥} + ٦٠ س^{٤} + ١٦٠ س^{٣} + ٢٤٠ س^{٢} + ١٩٢ س + ٦٤$

حاول أن تحل

٣ استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٣)^{٥}$

مثال (٤)

أوجد مفكوك $(٢س - ٣ص)^{٤}$

الحل:

أولًا: $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠} أ^{٤} + {}^{٤}ق_{١} أ^{٣} ب + {}^{٤}ق_{٢} أ^{٢} ب^{٢} + {}^{٤}ق_{٣} أ ب^{٣} + {}^{٤}ق_{٤} ب^{٤} = أ^{٤} + ٤ أ^{٣} ب + ٦ أ^{٢} ب^{٢} + ٤ أ ب^{٣} + ب^{٤}$

ثانيًا: يمكن أن تكتب ذات الحدين ٢س − ٣ص على الشكل ٢س + (−٣ص)

ثالثًا: نعوّض في $(أ + ب)^{٤}$ عن أ بـ (٢س) وعن ب بـ (−٣ص) فنحصل على:

$(٢س - ٣ص)^{٤} = (٢س)^{٤} + ٤(٢س)^{٣} × (-٣ص) + ٦(٢س)^{٢} × (-٣ص)^{٢} + ٤(٢س) × (-٣ص)^{٣} + (-٣ص)^{٤}$

$= ١٦ س^{٤} + ٤ × ٨ × (-٣) س^{٣} ص + ٦ × ٤ × (-٣)^{٢} س^{٢} ص^{٢} + ٨ × (-٣)^{٣} س ص^{٣} + (-٣)^{٤} ص^{٤}$

$= ١٦ س^{٤} - ٩٦ س^{٣} ص + ٢١٦ س^{٢} ص^{٢} - ٢١٦ س ص^{٣} + ٨١ ص^{٤}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مفكوك $(٣س - ٤ص)^{٣}$

مثال (٥)

أوجد الحد الثالث في مفكوك $(٢س + ص)^{٥}$

الحل:

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

$ن = ٥ ،\ أ = ٢س ،\ ب = ص$

$ر + ١ = ٣ \Leftarrow ر = ٢$

$ح_{٣} = {}^{٥}ق_{٢} \times (٢س)^{٣} \times (ص)^{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times ٨ \times س^{٣} \times ص^{٢}$

$= ٨٠\ س^{٣}ص^{٢}$

حاول أن تحل

٥ أوجد الحد السادس في مفكوك $(س + ٢ص)^{٧}$.

مثال (٦)

في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$.

الحل:

$ن = ٨ ،\ أ = ٣س ،\ ب = -٢ ،$

$ر = ؟؟$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر}\ (٣س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \times (٣)^{٨-ر} \times (س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$

$س^{٨-ر} = س^{٥}$

$\therefore\ ٨ - ر = ٥ ،\ ر = ٣$

الحد الرابع يحتوي على $س^{٥}$

$ح_{٤} = {}^{٨}ق_{٣}\ (٣س)^{٥} \times (-٢)^{٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times (٣)^{٥}\ س^{٥} \times (-٨) = ٥٦ \times ٢٤٣ \times (-٨)س^{٥}$

$\therefore$ معامل $س^{٥} = -١٠٨٨٦٤$

حاول أن تحل

٦ في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٦}$.

٥-٣

الاحتمال
Probability

دعنا نفكر ونتناقش

التجربة **Experiment**

تستخدم كلمة «احتمال» كثيرًا في حياتنا اليومية وهي تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حدث معين غير مؤكد.

ما احتمالات وقوع الأحداث التالية:

- هطول المطر اليوم
- نجاحك في اختبار مادة الرياضيات.
- سفرك في العطلة الصيفية.
- الحصول على صورة عند إلقاء قطعة نقود معدنية.

سجّل إجابات زملائك في الصف. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ استخدام تعابير قياسية مثل: غالبًا، تقريبًا، متأكد، من غير المحتمل، شبه مستحيل.

سوف تتعلم

- تعرّف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

(٥-٣-أ) التجربة العشوائية و فضاء العينة Random Experiment and Sample Space

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١ جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقًا قبل إجراءها.

٢ لا يمكن توقع نتيجة التجربة بشكل مؤكد قبل إجراءها.

٣ يمكن حساب فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو المجموعة المكونة من جميع النواتج الممكنة للتجربة. نرمز لفضاء العينة بالرمز (**ف**) ونرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز **ن(ف)**.

الناتج هو أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنه عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

مثال (١)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين.

أ اكتب عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

الحل:

أ عناصر فضاء العينة هي:

(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)

(٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)

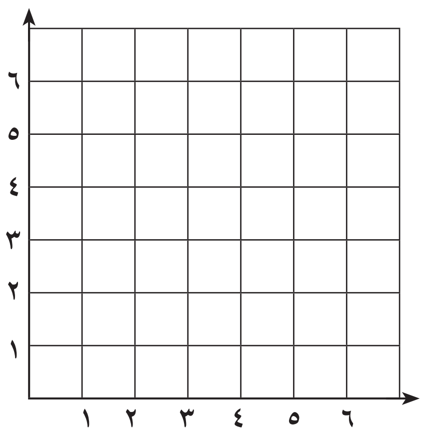
(٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)

ب عدد النواتج = ٣٦ ناتجًا.

وحسب المبدأ الأساسي للعد يكون:

عدد النواتج = عدد نواتج الرمية الأولى × عدد نواتج الرمية الثانية

= ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا



حاول أن تحل

١ في الكيس الأول ٥ كرات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ وفي الكيس الثاني ٥ كرات متماثلة مرقمة من ٦ إلى ١٠. سحبت عشوائيًّا كرة من الكيس الأول ثم سحبت كرة من الكيس الثاني.

أ اكتب كل عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

الحدث Event

في المثال (١)، ليكن الحدث أ: «رمي حجري نرد بحيث يكون العددان الظاهران متساويان».

أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

وليكن الحدث ب: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩».

ب = {(٣، ٦)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٣)}

والحدث جـ: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ١٥».

جـ = ϕ

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.

أنواع الحدث Types of Event

(١) **الحدث البسيط** (Simple Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على عنصر واحد.

(٢) **الحدث المركب** (Compound Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على أكثر من عنصر.

(٣) **الحدث المستحيل** (Impossible Event) هو مجموعة جزئية خالية من فضاء العينة ف ويرمز له بالرمز ϕ أو { }.

(٤) **الحدث المؤكد** (Certain Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف ويساويه.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة ثلاث مرّات متتالية، أوجد:

أ فضاء العيّنة (ف).

ب الحدث أ: «ظهور صورتين وكتابة».

جـ الحدث ب: «ظهور ثلاث صور».

د الحدث جـ: «ظهور صورة واحدة على الأقل».

هـ الحدث د: «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

الحل:

أ ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}.

ب الحدث أ = {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}.

جـ الحدث ب = {(ص، ص، ص)}.

د الحدث جـ = {(ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}.

هـ الحدث د = {(ك، ك، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)}.

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، اكتب كلًّا مما يلي:

أ الحدث أ: «ظهور كتابتين وصورة».

ب الحدث ب: «ظهور كتابة واحدة على الأقل».

(٥-٣-ب) تعيين احتمالات الأحداث Precising Probabilities of Events

في التجارب التي تمّ تناولها حتّى الآن، افترضنا أنّ نواتج فضاء العيّنة هي نواتج لها فرص الظهور نفسها. ويمكن إيجاد احتمالات لتجربة ما عن طريق قسمة عدد نواتج الحدث على عدد نواتج فضاء العيّنة.

احتمال وقوع الحدث Probability of an Event

إذا كان أ حدثًا في فضاء عيّنة ف (منته وغير خال) لتجربة عشوائية نتائجها لها فرص الظهور نفسها، فإنّ احتمال وقوع الحدث أ هو:

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

ن(أ): عدد عناصر الحدث أ ، ن(ف): عدد عناصر الحدث ف.

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما دائمًا ما يكون أصغر من أو مساويًا لعدد نواتج فضاء العينة.

خواص الاحتمال لحدث ما Properties of the Probability of an Event

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف (منته وغير خال) فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١.

٢ إذا كان أ = { }، فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.

٣ إذا كان أ = ف، فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.

مثال (٣)

يبيّن الجدول أدناه وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

	الشعبة أ	الشعبة ب
الحافلة المدرسية	١٦	١٥
مع الأهل	٦	٨
سيارة نقل عام	٤	٣

اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.
ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

الحل:

لنفرض أن الحدث أ: «المجيء بالحافلة المدرسية إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث (أ) : ١٦ + ١٥ = ٣١

عدد نواتج فضاء العينة (ف):

ن(ف) = (١٦ + ٦ + ٤) + (١٥ + ٨ + ٣) = ٥٢

$$\therefore \; ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}} = \frac{٣١}{٥٢}$$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يذهبون للمدرسة مع الأهل؟

مثال (٤)

ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

الحل:

ليكن الحدث ﺃ: "اختيار رقم هاتف مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}".

عدد النواتج في الحدث ن(ﺃ) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠

عدد النواتج في فضاء العينة ن(ف) = ٧ × ٧ × ٧ × ٧ × ٧ = ١٦٨٠٧

$$ل(ﺃ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث (ﺃ)}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة (ف)}} = \frac{ن(ﺃ)}{ن(ف)} = \frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$$

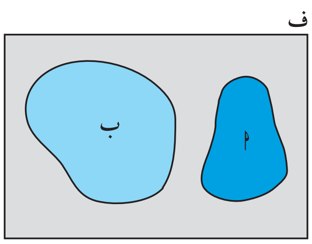
$$ل(ﺃ) = \frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$$

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤) ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكون من ٧ أرقام مختلفة؟

(٥-٣-جـ) الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events

عندما تكون الأحداث من فضاء العينة نفسه، ولا توجد بينها نواتج مشتركة حينها تسمى بـ «أحداث منفصلة» أو «أحداث متنافية» كما هو موضّح في الشكل المقابل.



شكل ڤن لحدثين متنافيين ﺃ، ب من فضاء العينة نفسه ف.

في المثال (١) لتكن الأحداث: ﺃ «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٥»

ب «ظهور العدد ١ في الرمية الأولى»

جـ «ظهور العدد نفسه في الرميتين»

ﺃ = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

ب = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)}

جـ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

مما سبق نلاحظ أنه لا توجد نواتج مشتركة بين الحدثين ﺃ ، جـ.

∴ ﺃ ∩ جـ = ϕ

يسمى الحدثان ﺃ ، جـ **حدثان متنافيان**.

ﺃ ∩ ب = {(١، ٤)}

∴ ﺃ ∩ ب ≠ ϕ

يسمى ﺃ ، ب حدثان غير متنافيين.

قاعدة الإضافة للأحداث المتنافية — Addition Rule for Mutually Exclusive Events

- إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) − ل(أ ∩ ب)
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإنّ: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) حيث ل(أ ∩ ب) = ٠ والعكس صحيح

مثال (٥)

تختار مها عشوائيًّا عددًا بين الصفر و٩ . ما احتمال أن تختار مها عددًا أكبر من ٦ أو عددًا أصغر من ٣؟

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «العدد أكبر من ٦».

جـ = {٧، ٨، ٩}

نفرض أن الحدث م: «العدد أصغر من ٣»

م = {٠، ١، ٢}

المطلوب إيجاد ل(جـ ∪ م).

∴ جـ ∩ م = {٧، ٨، ٩} ∩ {٠، ١، ٢} = ϕ

∴ جـ ، م حدثان متنافيان

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) = $\frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

حاول أن تحل

٥ في تجربة إلقاء حجر نرد، ما احتمال الحدث «الحصول على عدد أصغر من ٢ أو من مضاعفات العدد٣»؟

(٥-٣-د) متمم الحدث — Complement of an Event

متمم الحدث أ ويرمز له بالرمز $\overline{\text{أ}}$، هو مجموعة كل نواتج فضاء العينة وغير الموجودة في الحدث أ كما هو موضّح في الشكل المقابل.

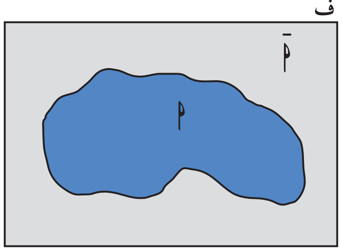
ولأن أ، $\overline{\text{أ}}$ يشكلان معًا فضاء العينة كاملًا، حيث أ ∪ $\overline{\text{أ}}$ = ف و أ ∩ $\overline{\text{أ}}$ = ϕ

فإن ل(أ ∪ $\overline{\text{أ}}$) = ل(ف) = ١

الحدثان أ، $\overline{\text{أ}}$ متتامان

∴ أ ، $\overline{\text{أ}}$ حدثان منفصلان ، لذلك:

ل(أ ∪ $\overline{\text{أ}}$) = ل(أ) + ل($\overline{\text{أ}}$) = ١



شكل ڤن لحدثين متممين داخل فضاء العينة نفسه.

قاعدة الحدث المتمم — The Complement Rule

إذا كانت أ حدثًا، فاحتمال عدم حدوث أ هو:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

مثال (٦)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث أ «ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥».

أوجد ما يلي:

أ) ل(أ)

ب) ل($\bar{أ}$)

معلومة رياضية:
الحدث المتمم للحدث أ
يرمز اليه بالرمز $\bar{أ}$.

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ = {٥، ٦}

أ) ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٢}{٦}$

= $\frac{١}{٣}$

ب) ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{١}{٣}$

= $\frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

٦) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحصول على عددين مختلفين.

(٥−٣−هـ) الحدثان المستقلان — Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أمثلة توضيحية

1. عند إلقاء قطعة نقود معدنية وحجر نرد منتظم مرّة واحدة. فإن الحدثين «الوجه الظاهر لقطعة النقود كتابة»، «الوجه العلوي لحجر النرد العدد ٣» لا يؤثر وقوع أحدهما على وقوع الآخر لذلك الحدثان مستقلان.
2. يلعب عبدالله وسالم كرة اليد.
   الحدثان: «سجّل عبدالله هدفًا من رمية حرّة»، و«سجّل سالم هدفًا من رمية حرّة» هما حدثان مستقلان لأن وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الحدث الآخر.
3. لدينا كيسان: في الكيس الأول ٥ كرات حمراء و٣ كرات خضراء وفي الثاني ٤ كرات حمراء و٦ كرات خضراء.
   الحدثان: «سحب كرة خضراء من الكيس الأول» و«سحب كرة خضراء من الكيس الثاني». هما حدثان مستقلان.

قاعدة الأحداث المستقلة — Rule of Independant Two Events

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) • ل(ب)، والعكس صحيح.

احتمال اتحاد حدثين مستقلين — Probability of Union for Two Independant Events

لإيجاد احتمال اتحاد حدثين نستخدم القاعدة:

ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cap$ ب)

وفي حالة حدثين مستقلين تصبح هذه القاعدة:

ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) • ل(ب)

مثال (٧)

يلعب ابراهيم ويوسف لعبة رمي السهم.

احتمال أن يصيب ابراهيم الهدف يساوي $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب يوسف الهدف يساوي $\frac{١}{٣}$

رمى كل منهما سهمًا على الهدف.

ما احتمال:

أ) أن يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف؟

ب) إصابة الهدف؟

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «يصيب ابراهيم الهدف»

ونفرض أن الحدث م: «يصيب يوسف الهدف».

الحدثان جـ، م مستقلان لأن وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أ يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف هو الحدث (جـ ∩ م).

∵ جـ ، م حدثان مستقلان

∴ ل(جـ ∩ م) = ل(جـ) • ل(م)

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{٢}{١٥}$

ب الحدث «إصابة الهدف» هو اتحاد الحدثين المستقلين جـ، م.

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) − ل(جـ ∩ م)

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{١٥}$

$= \frac{٦ + ٥ - ٢}{١٥}$

$= \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل

٧ في مثال (٧)، ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

المرشد لحل المسائل

إذا أراد ٣ أشخاص الإقامة في فندق مكون من خمس طوابق وكان بإمكان أي شخص من الأشخاص الثلاثة الإقامة في أي طابق.

١ ما احتمال أن يقيم الثلاثة معًا في الطابق نفسه؟

٢ ما احتمال أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس؟

الحل:

يمكن لكل شخص اختيار طابق من بين ٥

∴ لكل شخص ٥ خيارات مستقلة عن الخيارات الأخرى.

∴ عدد النواتج في فضاء العينة = ٥ × ٥ × ٥ = ٥^{٣}

١ يمكن للثلاثة أن ينزلوا معًا في أي طابق من الطوابق الخمسة.

∴ عدد النواتج في الحدث = ٥ × ١ × ١

= ٥

ل(ينزل الثلاثة معًا في الطابق نفسه) = $\frac{٥}{١٢٥}$ = $\frac{١}{٢٥}$

٢ الحدث ﺃ: «أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس».

لكل شخص ٤ طوابق يختار طابقًا منها.

عدد النواتج في الحدث = ٤ × ٤ × ٤ = ٤^{٣}

∵ عدد النواتج في فضاء العينة = ٥^{٣}

∴ ل(ﺃ) = $\frac{٤^{٣}}{٥^{٣}}$ = $\frac{٦٤}{١٢٥}$

حل مسألة إضافية

يبيّن الجدول المقابل فصائل الدم لِـ ١٥٠٠ شخص.

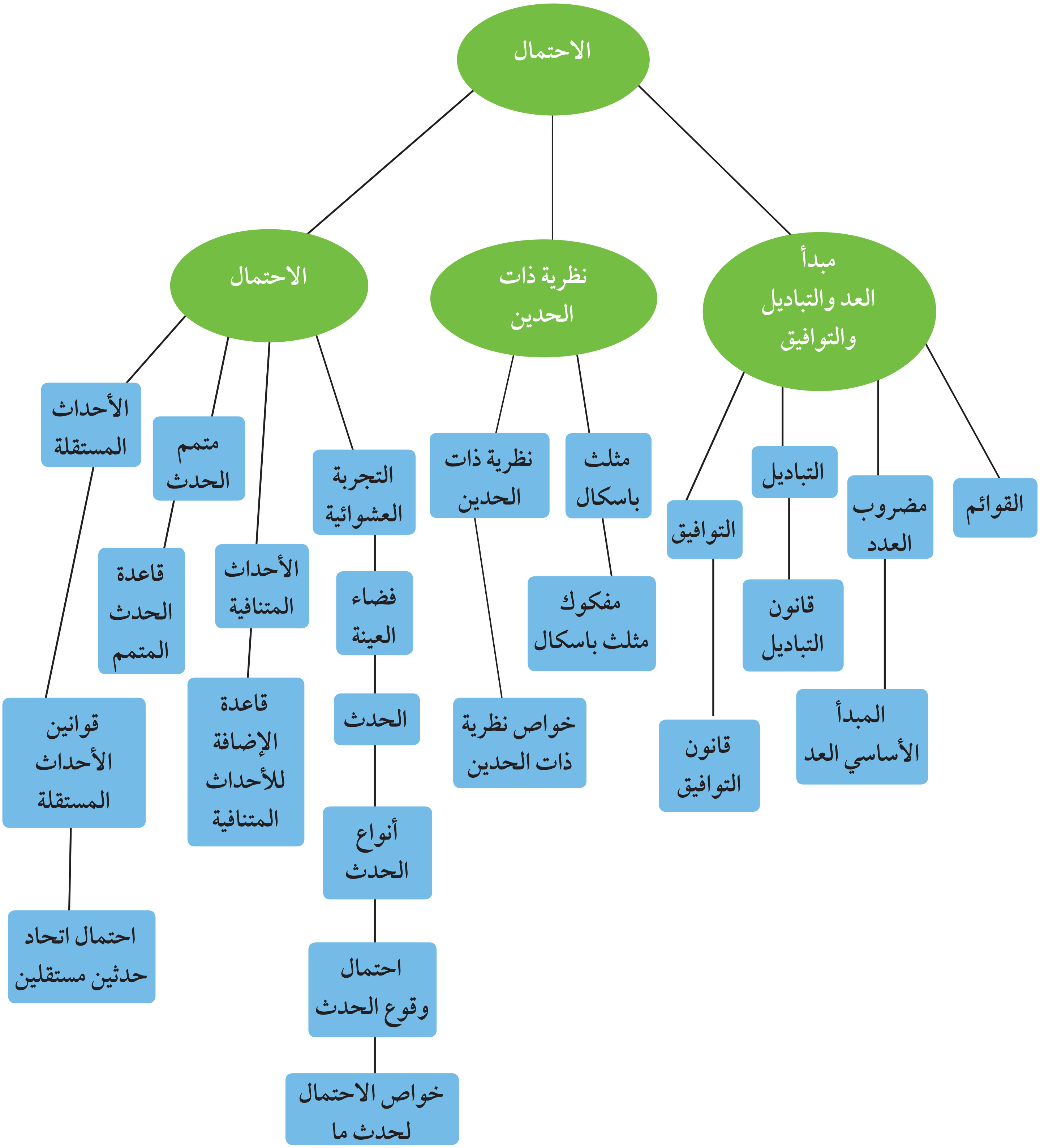
اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة.

أ ما احتمال أن يكون دمه من الفصيلة AB؟

ب ما احتمال أن يكون نوع دمه سالبًا؟

الفصيلة / النوع	A	B	AB	O
موجب	٥١٥	٧٥	٦٠	٥١٠
سالب	١١٥	٤٥	١٥	١٦٥

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- يمكن حل بعض مسائل العد بوضع قائمة مرتبة.
- لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_١$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_٢$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ $ن_م$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_١ \times ن_٢ \times \ldots \times ن_م$
- مضروب العدد: $ن! = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$ لكل عدد صحيح موجب ن
- قانون التباديل: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$: $ر \leq ن$ ، $ر ، ن \in ص_{+}$
- قانون التوافيق: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$
- خواص التوافيق $^{ن}ق_{٠} = ١$، $^{ن}ق_{ن} = ١$، $^{ن}ق_{١} = ن$، $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن - ر}$
- مثلث باسكال

					١					
				١		١				
			١		٢		١			
		١		٣		٣		١		
	١		٤		٦		٤		١	
١		٥		١٠		١٠		٥		١

الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١

كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

- نظرية ذات الحدين: $(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, أ^{ن-١} ب + {}^{ن}ق_{٢}\, أ^{ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن-١}\, أ^{١} ب^{ن-١} + {}^{ن}ق_{ن}\, ب^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.
- مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًّا.
- الحد الذي ترتيبه ر + ١ هو $^{ن}ق_{ر} \times أ^{ن-ر} \times ب^{ر}$
- فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النواتج الممكن حدوثها لتجربة ما.
- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.
- احتمال الحدث: ل(الحدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$.
- $٠ \leq ل(أ) \leq ١$
- إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.
- إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإن $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$.
- الحدث المتمم: $ل(أ) + ل(\bar{أ}) = ١$
- إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$، $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ) \times ل(ب)$.

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٩٤) بتاريخ ٢٦/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة - الكويت