الرياضيات

الثاني عشر العلمي

الوحدة الثانية: التفاضل

إعداد الأستاذ

محمد عبد الرحمن حميدي

شبكة منهاجي التعليمية

أولاً : معدل التغير

التغير في السينات : $\Delta \text{س} = \text{س}_{٢} - \text{س}_{١} = \text{هـ}$

التغير في الاقتران : (التغير في الصادات)

$$\Delta \text{ص} = \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١} = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$$

$$= \text{ق}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$$

معدل التغير في ص :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$$

(١) إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١$ ، جد مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الحالات الآتية :

١) إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢) إذا تغيرت س من $\text{س}_{١} = \text{ن}$ إلى $\text{س}_{٢} = \text{ن} - ١$

الحل :

(1) $\Delta \text{ص} = \text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$

$= (٩ - ١٢ + ١) - (١ - ٤ + ١)$

$= -٢ - -٢ = ٠$

---

(2) $\Delta \text{ص} = \text{ق}(\text{ن} - ١) - \text{ق}(\text{ن})$

$= ((\text{ن} - ١)^{٢} - ٤(\text{ن} - ١) + ١) - (\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ١)$

$= (\text{ن}^{٢} - ٢\text{ن} + ١ - ٤\text{ن} + ٤ + ١) - \text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ١$

$= \text{ن}^{٢} - ٦\text{ن} + ٦ - \text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ١ = -٢\text{ن} + ٥$

---

(٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (-١) إلى (٢) :

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-١)}{٢ - -١} = \frac{٦ - ٠}{٣} = ٢$$

---

(٣) إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = ٥ - \text{س}^{٢}$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) إذا تغيرت س من (٢) إلى (٢,١) :

الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢,١) - \text{ق}(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٠,٥٩ - ١}{٠,١}$

$= \frac{-٠,٤١}{٠,١} = -٤,١$

---

(٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left| ٢\text{س} - ٦ \right|$ ، جد معدل التغير في الاقتران ق(س) على [١ ، ٤] :

الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١} = \frac{٢ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

---

(٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\, \frac{١}{٢}\text{س} - ١ \,]$ ؛ جد معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [٣ ، ٥] :

الحل : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣} = \frac{١ - ٠}{٢} = \frac{١}{٢}$

---

(٦) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}^{٢}} & ، ١ \le \text{س} < ٢ \\ [\, \frac{\text{س}}{٢} \,] & ، ٢ \le \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

جد :

أ) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ على [١ ، ٣]

ب) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ عند $\text{س}_{١} = ٣$ ، $\text{هـ} = ٤$

الحل :

(٧) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ١ ، وكان معدل تغير الاقتران ق(س) يساوي (٣) على [أ ، ٣] جد أ :

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{أ})}{٣ - \text{أ}}$$

$$٣ = \frac{١٠ - \text{أ}^{٢} - ١}{٣ - \text{أ}}$$

$$٩ - ٣\text{أ} = ٩ - \text{أ}^{٢} \longrightarrow \text{أ}^{٢} - ٣\text{أ} = ٠$$

$$\text{أ}(\text{أ} - ٣) = ٠ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٠} \text{ ، } \cancel{\text{أ} = ٣} \text{ تهمل}$$

(٨) إذا كان ق(س) = أس^{٢} - ٣س + ٤ ، وكان معدل تغير ق(س) على [١ ، ٣] يساوي (٣) جد الثابت (أ) :

الحل :

<u>هام جداً :</u>

هنالك أسماء أخرى لمعدل التغير هي :

* السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$

* ميل القاطع الواصل بين نقطتين .

(٩) جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) (٥ ، ق(٥)) الواقعتين على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٣س :

الحل :

ميل القاطع = معدل تغير ق(س) على [٢ ، ٥]

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{١٠ - (-٢)}{٣} = ٤$$

(١٠) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد معدل تغير الاقتران ق على [١ ، ٣] :

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{معدل التغير} = \text{ميل القاطع}$$

$$= \text{ظا}\,(١٣٥^{\circ}) = -١$$

(١١) إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية مقدارها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد ق(١) :

الحل :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٤ - \text{ق}(١)}{٢ - ١} = \text{ظا}\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)$$

$$\frac{٤ - \text{ق}(١)}{١} = -١ \longrightarrow ٤ - \text{ق}(١) = -١$$

$$-\text{ق}(١) = -٥ \longrightarrow \boxed{\text{ق}(١) = ٥}$$

(١٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٢} - ن ، حيث (ن) الزمن بالثواني ف(ن) المسافة بالأمتار ، أجب عن السؤالين الآتيين :

١) هل سرعة الجسيم ثابتة أم متغيرة ؟

٢) أحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] :

الحل : ١ المسافة المقطوعة بين ن = ١ ، ن = ٢ هي :

ف(٢) − ف(١) = ٢ − ٠ = ٢

المسافة المقطوعة بين ن = ٢ ، ن = ٣ هي :

ف(٣) − ف(٢) = ٦ − ٢ = ٤

السرعة متغيرة ، لأن المسافة في الفترة [١ ، ٢] تختلف عنها في الفترة [٢ ، ٣] .

---

٢ $$\bar{\text{ع}} = \frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(٥) - \text{ف}(٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{٢٠ - ٢}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦ \text{ م/ث}$$

(١٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ن^{٢} - ٤ن + ٢٠ ، حيث ف بعد الجسيم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٤] :

الحل : $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف(٤)} - \text{ف(١)}}{\text{٤} - \text{١}}$

$= \frac{(\text{٤٨ - ١٦ + ٢٠}) - (\text{٣ - ٤ + ٢٠})}{\text{٣}}$

$= \frac{\text{٥٢} - \text{١٩}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣٣}}{\text{٣}} = $ ١١ م/ ث

<u>دردشة خفيفة :</u>

* مساحة المربع = (الضلع)^{٢} ⟵ ق(س) = س^{٢}
* حجم المكعب = (الضلع)^{٣} ⟵ ق(س) = س^{٣}
* مساحة الدائرة = π نق^{٢} ⟵ ق(س) = πس^{٢}
* مساحة مثلث متساوي الأضلاع ⟵ ق(س) = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$ س^{٢}

(١٤) أوجد معدل تغير في حجم المكعب إذا تغير طول ضلعه من ١ سم إلى ٣ سم :

الحل : ق(س) = س^{٣}

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(١)}}{\text{٣} - \text{١}}$

$= \frac{\text{٢٧ - ١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢}} = $ ١٣

(١٥) إذا تغير طول ضلع صفيحة مربعة الشكل من ١ سم إلى ١,٢ سم جد :

١) التغير في مساحة الصفيحة
٢) معدل التغير في مساحة الصفيحة

الحل : ق(س) = س^{٢}

١) Δ ص = ق(١,٢) − ق(١) = ١,٤٤ − ١ = ٠,٤٤

٢) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{٠,٤٤}}{\text{٠,٢}} = \frac{\text{٤٤}}{\text{٢٠}} = $ ٢,٢

(١٦) عند رمي حجر في بركة ماء راكدة تتكون دائرة يزداد طول قطرها بمرور الزمن ، ما معدل الزيادة في مساحة الدائرة عندما يزداد طول قطرها من ٨ سم إلى ١٠ سم :

الحل :

(١٧) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٦] يساوي ١٢ ، وكان هـ (س) = ٢س − ٣ ق(س) ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٦] :

الحل : $\frac{\text{ق(٦)} - \text{ق(١)}}{\text{٦} - \text{١}} = $ ١٢

$\frac{\Delta \text{هـ}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ(٦)} - \text{هـ(١)}}{\text{٦} - \text{١}}$

$= \frac{(\text{٢×٦ - ٣ق(٦)}) - (\text{٢×١ - ٣ق(١)})}{\text{٥}}$

$= \frac{\text{١٢ - ٣ق(٦)} - \text{٢ + ٣ق(١)}}{\text{٥}}$

$= \frac{\text{١٢ - ٢}}{\text{٥}} - \text{٣}\left(\frac{\text{ق(٦)} - \text{ق(١)}}{\text{٥}}\right)$

$= \frac{\text{١٠}}{\text{٥}} - $ ٣ × ١٢ = ٢ − ٣٦ = -٣٤

(١٨) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [-١ ، ٢] يساوي ٥، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = ٤س^{٢} − ٣ ق(س) على الفترة نفسها :

الحل : $\frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(-١)}}{\text{٢} - \text{-١}} = $ ٥

$\frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(-١)}}{\text{٣}} = $ ٥

$\frac{\Delta \text{هـ}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ(٢)} - \text{هـ(-١)}}{\text{٢} - \text{-١}}$

$= \frac{(\text{١٦ - ٣ق(٢)}) - (\text{٤ - ٣ق(-١)})}{\text{٣}}$

$= \frac{\text{١٦ - ٤}}{\text{٣}} - \text{٣}\left(\frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(-١)}}{\text{٣}}\right)$

= ٤ − ٣×٥ = ٤ − ١٥ = -١١

(١٩) إذا كان ل(س) = س ق(س) ، وكان معدل التغير ل(س) في [-٢، ٤] يساوي (١٢) ، ل(٤) = ٦ فما قيمة ق(-٢) :

الحل :

$$\frac{\text{ل}(٤) - \text{ل}(-٢)}{٤ - -٢} = ١٢$$

$$\frac{٦ - -٢\,\text{ق}(-٢)}{٦} = ١٢$$

$$٦ + ٢\,\text{ق}(-٢) = ٧٢$$

$$= \frac{٢}{٢}\,\text{ق}(-٢) = \frac{٦٦}{٢} \longrightarrow \boxed{\text{ق}(-٢) = ٣٣}$$

(٢٠) إذا كان معدل التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣] يساوي ٥ وكان ق(١) × ق(٣) = ١٢ وكان هـ(س) = $\frac{١}{\text{ق}(\text{س})}$ ، جد قيمة معدل التغير للاقتران هـ (س) على نفس الفترة :

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = ٥ \longrightarrow \text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = ١٠$$

$$\longrightarrow \text{ق}(٣) \times \text{ق}(١) = ١٢$$

$$\frac{\Delta\,\text{هـ}(\text{س})}{\Delta\,\text{س}} = \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{\frac{١}{\text{ق}(٣)} - \frac{١}{\text{ق}(١)}}{٢}$$

$$= \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٣)}{(\text{ق}(٣))\,(\text{ق}(١))\,(٢)} = \frac{-١٠}{١٢\times٢} = \frac{-٥}{١٢}$$

(٢١) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١، ٤] يساوي ٣، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = ق^{٢}(س) على الفترة [١، ٤] :

الحل :

(٢٢) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢، ٥] يساوي ٧، وكان معدل تغيره على الفترة [٥، ٩] يساوي ١٤ ، فجد معدل التغير في الاقتران على الفترة [٢، ٩] :

الحل :

$$\frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٥ - ٢} = ٧ \longrightarrow \text{ق}(٥) - \text{ق}(٢) = ٢١ \;--\; ١$$

$$\frac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(٥)}{٩ - ٥} = ١٤ \longrightarrow \text{ق}(٩) - \text{ق}(٥) = ٥٦ \;--\; ٢$$

$$١ + ٢ \Longleftarrow \text{ق}(٩) - \text{ق}(٢) = ٧٧$$

$$\left.\frac{\Delta\,\text{ق}}{\Delta\,\text{س}}\right|_{[٢،٩]} = \frac{\text{ق}(٩) - \text{ق}(٢)}{٩ - ٢} = \frac{٧٧}{٧} = ١١$$

(٢٣) قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث يكون بعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية معطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢} ، جد :

١) السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] :

٢) السرعة المتوسطة للجسيم بدلالة Δ ن ، إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن :

الحل :

$$١\quad \bar{\text{ع}} = \frac{\Delta\,\text{ف}}{\Delta\,\text{ن}} = \frac{\text{ف}(٥) - \text{ف}(٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{(٣٠٠ - ١٢٥) - (١٢٠ - ٢٠)}{٣}$$

$$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥ \text{ م/ث}$$

$$٢\quad \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ف}(\Delta\,\text{ن}) - \text{ف}(٠)}{\Delta\,\text{ن}}$$

$$= \frac{٦٠(\Delta\,\text{ن}) - ٥(\Delta\,\text{ن})^{٢} - ٠}{\Delta\,\text{ن}}$$

$$= \frac{(\Delta\,\text{ن})\,(٦٠ - ٥(\Delta\,\text{ن}))}{\Delta\,\text{ن}} = ٦٠ - ٥(\Delta\,\text{ن})$$

(٢٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + \text{س})^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $\text{س}_{٢}$ يساوي $(\frac{-١}{٣})$ ، فجد قيمة $\text{س}_{٢}$ حيث $\text{س}_{٢} > ٠$:

الحل : $\Delta\,\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(١)$

$$\frac{-١}{٣} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}} - \frac{١}{٢}$$

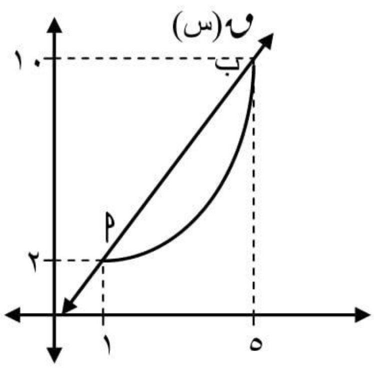
$$\frac{-١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}}$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢}} \longrightarrow \text{س}_{٢}^{٢} + \text{س}_{٢} - ٦ = ٠$$

$$(\text{س}_{٢} + ٣)(\text{س}_{٢} - ٢) = ٠$$

$$\cancel{\text{س}_{٢} = -٣} \text{ ، } \boxed{\text{س}_{٢} = ٢}$$

(٢٥) يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق على الفترة [١، ٥] جد ميل العمودي على القاطع أ ب :



الحل :

$$\text{م} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{١٠ - ٢}{٥ - ١} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$\text{ميل العمودي ل} = \frac{-١}{\text{م}} = \frac{-١}{٢}$$

ثانياً : المشتقة الأولى :

* رموز المشتقة الأولى للاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ هي $\text{ق}'(\text{س})$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، $\frac{\text{دق}(\text{س})}{\text{دس}}$ ، $\underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}}$

* يمكن اعتبار المشتقة الأولى بأنها معدل تغير ق(س) بالنسبة لـ (س) عندما $\text{س} = \text{س}_{١}$

تعريف المشتقة الأولى :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{ معدل التغير}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

(١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٢} + ١$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥\text{ع}^{٢} + ١ - ٥\text{س}^{٢} - ١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥(\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= ١٠\,\text{س}$$

(٢) إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + \text{س}$، س ∈ ح، فجد ق̀(س) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}^{٣} - ٣\text{ع}^{٢} + \text{ع} - \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{ع} - \text{س}} - ٣\,\text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع}^{٢} + \text{ع}\,\text{س} + \text{س}^{٢})}{\text{ع} - \text{س}}$

$-٣\,\text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + ١ = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$

---

(٣) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}$ ، فجد ق̀(س) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\dfrac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢} + ٨} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}\,\text{س}^{٢} + ٨\text{ع} - \text{س}\,\text{ع}^{٢} - ٨\text{س}}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع} - \text{س})}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}\,\text{س}^{٢} - \text{س}\,\text{ع}^{٢}}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع} - \text{س})}$

$+ \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{٨(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع} - \text{س})}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع}\,\text{س}(\text{س} - \text{ع})}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع} - \text{س})}$

$+ \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{٨}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)}$

$= \dfrac{-\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}} + \dfrac{٨}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}} = \dfrac{-\text{س}^{٢} + ٨}{(\text{س}^{٢} + ٨)^{٢}}$

---

(٤) إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، جد ق̀(-١) باستخدام تعريف المشتقة :

الحل :

---

(٥) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، أوجد ق̀(س) باستخدام تعريف المشتقة ثم أوجد ق̀(٣) :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{ع} + ١} - \sqrt{\text{س} + ١}}{\text{ع} - \text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع} + ١} + \sqrt{\text{س} + ١}}{\sqrt{\text{ع} + ١} + \sqrt{\text{س} + ١}}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{(\text{ع} + ١) - (\text{س} + ١)}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع} + ١ - \text{س} - ١}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})}$

$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ع} - \text{س}}{(\text{ع} - \text{س})\,(٢\sqrt{\text{س} + ١})} = \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ١}}$

$\text{ق}'(٣) = \dfrac{١}{٢ \times ٢} = \dfrac{١}{٤}$

(٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ، أوجد $\text{قَ}(\text{٨})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{قَ}(\text{٨}) = \underset{\text{ع}\to\text{٨}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{٨})}{\text{ع} - \text{٨}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٨}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{٨}} \times \frac{(\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}})^{\text{٢}} + \text{٢}\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}} + \text{٤}}{(\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}})^{\text{٢}} + \text{٢}\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}} + \text{٤}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{٨}}{\text{نها}} \frac{\text{ع} - \text{٨}}{(\text{ع} - \text{٨})\,(\text{١٢})} = \frac{\text{١}}{\text{١٢}}$$

---

(٧) باستخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - \text{٣}}$ عند $\text{س} = \text{٢}$:

الحل :

---

(٨) استخدام تعريف المشتقة الأولى لإيجاد $\text{قَ}(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{٢س} + \text{١}}$ ، حيث $\text{س} > \dfrac{-\text{١}}{\text{٢}}$:

الحل :

---

(٩) استخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى لإيجاد $\text{قَ}(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، حيث $\text{س} \neq \text{٠}$:

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{ع}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{ع}^{\text{٢}}}{(\text{ع}^{\text{٢}})\,(\text{س}^{\text{٢}})\,(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - \text{ع})\,(\text{س} + \text{ع})}{(\text{ع}^{\text{٢}})\,(\text{س}^{\text{٢}})\,(\text{ع} - \text{س})} = \frac{-\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٤}}}$$

---

* المشتقة من اليمين :

$$\text{قَ}_{+}(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{قَ}_{+}(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$$

---

* المشتقة من اليسار :

$$\text{قَ}_{-}(\text{أ}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

$$\text{قَ}_{-}(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$$

إذا كان $\text{قَ}_{+}(\text{أ}) = \text{قَ}_{-}(\text{أ})$ فإن $\text{قَ}(\text{أ})$: موجودة

إذا كان $\text{قَ}_{+}(\text{أ}) \neq \text{قَ}_{-}(\text{أ})$ فإن $\text{قَ}(\text{أ})$: غير موجودة

(١٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} \leq ٣ \\ ٦\text{س} - ٩ & \text{، س} > ٣ \end{cases}$

جد أ) $\text{ق}'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

ب) $\text{ق}'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل : أ) $\text{ق}'(١) = \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$

$= \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نها}} \frac{٦\text{ع} - ٩ + ٣}{\text{ع} - ١} = \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نها}} \frac{٦\text{ع} - ٦}{\text{ع} - ١}$

$= \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نها}} \frac{٦(\text{ع} - ١)}{\text{ع} - ١} = ٦$

ب) $\text{ق}'(٣)$ ⟵ تحول ⟵ نجد $\text{ق}'_{+}(٣)$، $\text{ق}'_{-}(٣)$

$\text{ق}'_{+}(٣) = \underset{\text{ع}\to ٣^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} - ٣} = ٦$

$\text{ق}'_{-}(٣) = \underset{\text{ع}\to ٣^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣^{-}}{\text{نها}} \frac{٦\text{ع} - ٩ - ٩}{\text{ع} - ٣} = \underset{\text{ع}\to ٣^{-}}{\text{نها}} \frac{٦(\text{ع} - ٣)}{\text{ع} - ٣} = ٦$

بما أن $\text{ق}'_{+}(٣) = \text{ق}'_{-}(٣) = ٦$ ⟵ $\therefore \text{ق}'(٣) = ٦$

أي أن الاقتران ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣

---

(١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٩ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$

باستخدام تعريف المشتقة جد $\text{ق}'(٣)$

الحل : $\text{ق}'(٣) = \underset{\text{ع}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣}$

$= \underset{\text{ع}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٩}{\text{ع} - ٣} = ٦$

---

(١٢) $\text{ق}(\text{س}) = |٢\text{س}| + |\text{س} - ٢|$ ، جد $\text{ق}'(١)$ باستخدام التعريف :

الحل :

---

(١٣) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}| + |\text{س} - ٢|$ ، جد المشتقة الأولى باستخدام التعريف عند (٠ ، ٢) :

الحل :

(١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \left|\text{س}^{٢}\right| [\,\text{س}\,]$ ، جد $\text{ق}'(٠)$ باستخدام التعريف :

الحل :

* <u>أمثلة غريبة .. عجيبة :</u>

(١٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - \text{م})\,\text{ل}(\text{س})$ ، حيث $\text{ل}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = \text{م}$ ،بين باستخدام تعريف المشتقة أن $\text{ق}'(\text{م}) = \text{ل}(\text{م})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{م}) = \underset{\text{ع}\to\text{م}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{م}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{م})\,\text{ل}(\text{ع}) - (\text{م} - \text{م})\,\text{ل}(\text{م})}{\text{ع} - \text{م}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{م}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{م})\,\text{ل}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{م}} = \underset{\text{ع}\to\text{م}}{\text{نها}}\,\text{ل}(\text{ع})$$

* لكن ل متصل ⟵ $\therefore \underset{\text{ع}\to\text{م}}{\text{نها}}\,\text{ل}(\text{ع}) = \text{ل}(\text{م})$

$\therefore \text{ق}'(\text{م}) = \text{ل}(\text{م})$

---

(١٦) أثبت أن $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$

يساوي $\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : * نضيف ونطرح $\text{س}\,\text{ق}(\text{س})$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})\,(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\,(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{ع}))}{\text{ع} - \text{س}}$$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

---

(١٧) إذا كان مقدار التغير في $\text{ق}(\text{س})$ يُعطى بالعلاقة

$٣\text{هـ} + ٥\,\text{س}\,\text{هـ} + ٧\,\text{هـ}^{٢}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\therefore$ معدل التغير $= \dfrac{\text{هـ}\,(٣ + ٥\text{س} + ٧\,\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$\therefore$ م التغير $= ٣ + ٥\,\text{س} + ٧\text{هـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}}$ معدل التغير

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} (٣ + ٥\text{س} + ٧\,\text{هـ}) = ٣ + ٥\,\text{س}$

---

(١٨) إذا كان مقدار التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ يساوي

$\text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل : $\Delta\,\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}\,\text{ع} - \text{ع}^{٢}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}\text{ع}\,(\text{س} - \text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} - \text{ع}\,\text{س} = - \text{س}^{٢}$$

(١٩) إذا كان مقدار التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^{٢} هـ – ٣ س هـ^{٢}) ، حيث : هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر ، فجد ق'(-٢) :

الحل :

* قواعد الاشتقاق :

مشتقة الثابت = صفر

(١) إذا كان ق(س) = أ ⟵ ق'(س) = صفر

ق(س) = ٥ ⟵ ق'(س) = صفر

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ⟵ ق'(س) = صفر

ق(س) = - $\sqrt{٣}$ ⟵ ق'(س) = صفر

ق(س) = π ⟵ ق'(س) = صفر

مشتقة س = ١

(٢) إذا كان ق(س) = س ⟵ ق'(س) = ١

ق(ص) = ص ⟵ ق'(ص) = ١

ق(ع) = ع ⟵ ق'(ع) = ١

مشتقة الثابت أس = أ

(٣) إذا كان ق(س) = أس ⟵ ق'(س) = أ

ق(س) = ٥ س ⟵ ق'(س) = ٥

ق(س) = $\frac{-١}{٢}$ س ⟵ ق'(س) = $\frac{-١}{٢}$

ق(س) = $\sqrt{٢}$ س ⟵ ق'(س) = $\sqrt{٢}$

ق(س) = π س ⟵ ق'(س) = π

مشتقة س^{ن} = ن س$^{ن-١}$

(٤) إذا كان ق(س) = س^{ن} ⟵ ق'(س) = ن س$^{ن-١}$

ق(س) = س^{٧} ⟵ ق'(س) = ٧ س$^{٧-١}$ = ٧ س^{٦}

ق(س) = س^{٨} ⟵ ق'(س) = ٨ س^{٧}

ق(س) = س^{٢} ⟵ ق'(س) = ٢س

مشتقة أ س^{ن} = أ × ن س$^{ن-١}$

(٥) إذا كان ق(س) = أ س^{ن} ⟵ ق'(س) = أ ن س$^{ن-١}$

ق(س) = ٧س^{٦} ⟵ ق'(س) = ٤٢ س^{٥}

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ⟵ ق'(س) = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

ق(س) = $\sqrt{٣}$ س^{١٠} ⟵ ق'(س) = $\sqrt{٣}$ × ١٠ س^{٩}

ق(س) = ٤ س^{٥} ⟵ ق'(س) = ٢٠س^{٤}

ق(س) = -٢ س^{٥} ⟵ ق'(س) = -١٠ س^{٤}

مشتقة س$^{\frac{أ}{ب}}$ = $\frac{أ}{ب}$ س$^{\frac{أ}{ب}-١}$

(٦) ق(س) = س$^{\frac{٦}{٥}}$ ⟵ ق'(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{٦}{٥}-١}$

ق'(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{٦-٥}{٥}}$ ⟵ ق'(س) = $\frac{٦}{٥}$ س$^{\frac{١}{٥}}$

(٧) ق(س) = س$^{\frac{٧}{٢}}$ ⟵ ق'(س) = $\frac{٧}{٢}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$

(٨) ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ⟵ ق'(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{١-٣}{٣}}$

ق'(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ ⟵ ق'(س) = $\frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$

مشتقة جـ س$^{\frac{أ}{ب}}$ = جـ × $\frac{أ}{ب}$ س$^{\frac{أ}{ب}-١}$

(٩) إذا كان ق(س) = ٥ س$^{\frac{٧}{٢}}$ ، جد ق'(س) :

ق'(س) = ٥ × $\frac{٧}{٢}$ س$^{\frac{٧-٢}{٢}}$ = $\frac{٣٥}{٢}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$

(١٠) ق(س) = $\frac{٤}{٩}$ س$^{\frac{١}{٣}}$ ⟵ ق َ(س) = $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{١}{٣}-١}$

ق َ(س) = $\frac{٤}{٢٧}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{٤}{٢٧\text{س}^{\frac{٢}{٣}}}$

(١١) ق(س) = $\sqrt{٢}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ ⟵ ق َ(س) = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$

مشتقة س$^{-م}$ = - م س$^{-م-١}$

(١٢) ق(س) = س$^{-٤}$ ⟵ ق َ(س) = - ٤ س$^{-٤-١}$ = -٤س$^{-٥}$

(١٣) ق(س) = $\frac{١}{\text{س}^{٩}}$ ⟵ ق َ(س) = س$^{-٩}$

ق َ(س) = - ٩س$^{-١٠}$ = $\frac{-٩}{\text{س}^{١٠}}$

(١٤) ق(س) = س$^{-٦}$ ⟵ ق َ(س) = -٦ س$^{-٧}$

ق َ(س) = $\frac{-٦}{\text{س}^{٧}}$

مشتقة س$^{-\frac{م}{ب}}$ = $\frac{-م}{ب}$ س$^{-\frac{م}{ب}-١}$

(١٥) ق(س) = س$^{-\frac{٣}{٥}}$ ⟵ ق َ(س) = $\frac{-٣}{٥}$ س$^{-\frac{٣}{٥}-١}$

ق َ(س) = $\frac{-٣}{٥}$ س$^{-\frac{٨}{٥}}$ = $\frac{-٣}{٥\text{س}^{\frac{٨}{٥}}}$

(١٦) ق(س) = س$^{-\frac{١}{٣}}$ ⟵ ق َ(س) = $\frac{-١}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}-١}$

ق َ(س) = $\frac{-١}{٣}$ س$^{-\frac{٤}{٣}}$ = $\frac{-١}{٣\text{س}^{\frac{٤}{٣}}}$

(١٧) ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}^{٦}}$ ⟵ ق َ(س) = ٢س$^{-٦}$

ق َ(س) = -١٢س$^{-٧}$ = $\frac{-١٢}{\text{س}^{٧}}$

مشتقة جمع الاقترانات

* إذا كان ق(س) = هـ(س) + ل(س) + م(س)

فإن ق َ(س) = هـ َ(س) + ل َ(س) + م َ(س)

(١٨) ق(س) = س^{٢} + س^{٣} + ٧س^{٤} + ٤

ق َ(س) = ٢س + ٣ س^{٢} + ٢٨س^{٣}

(١٩) ق(س) = ٧س + $\frac{١}{٢}$ س^{٦} + ٣س^{٧} + ٩

ق َ(س) = ٧ + ٣ س^{٥} + ٢١س^{٦}

(٢٠) ق(س) = ٧س^{٣} + س$^{\frac{١}{٢}}$ + س$^{\frac{١}{٤}}$ + ٢س - ١

ق َ(س) = ٢١س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٤}$ س$^{-\frac{٣}{٤}}$ + ٢

مشتقة طرح الاقترانات

* إذا كان ق(س) = هـ(س) - ل(س) - م(س)

فإن ق َ(س) = هـ َ(س) - ل َ(س) - م َ(س)

(٢١) ق(س) = س^{٧} - ٤س^{٦} - ٣س - ٦

ق َ(س) = ٧س^{٦} - ٢٤س^{٥} - ٣

(٢٢) ق(س) = -٥س - ٧س^{٢} - ٣س^{٣} - ٦

ق َ(س) = -٥ - ١٤س - ٩س^{٢}

(٢٣) ق(س) = ٣س^{٣} - ٢س$^{-١}$ - ٦س - $\frac{٧}{٢}$

ق َ(س) = ٩س^{٢} + ٢س$^{-٢}$ - ٦

مشتقة جمع وطرح الاقترانات

(٢٤) ق(س) = ٧س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣س - ٨

ق َ(س) = ٢١س^{٢} - ٨س + ٣

(٢٥) ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ + س$^{\frac{١}{٤}}$ - س$^{\frac{١}{٥}}$ + ٧

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ + $\frac{١}{٤}$ س$^{\frac{-٣}{٤}}$ - $\frac{١}{٥}$ س$^{\frac{-٤}{٥}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$ + $\frac{١}{٤س^{\frac{٣}{٤}}}$ - $\frac{١}{٥س^{\frac{٤}{٥}}}$

(٢٦) ق(س) = ٧س$^{\frac{١}{٣}}$ + ٥س$^{\frac{١}{٧}}$ - ٣س + ٩

قَ(س) = $\frac{٧}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ + $\frac{٥}{٧}$ س$^{\frac{-٦}{٧}}$ - ٣

قَ(س) = $\frac{٧}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$ + $\frac{٥}{٧س^{\frac{٦}{٧}}}$ - ٣

(٢٧) ق(س) = س^{٥} - س^{٢} + ٢س

قَ(س) = ٥س^{٤} - ٢س + ٢

<u>مشتقة ضرب اقترانين</u>

* إذا كان ل(س) = ق(س) × هـ(س)

فإن لَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

= الأول يبقى ونشتق الثاني + الثاني يبقى ونشتق الأول

(٢٨) ق(س) = (س^{٢} + ١) (٥س + ٢)

قَ(س) = (س^{٢} + ١) (٥) + (٥س + ٢) (٢س)

(٢٩) ق(س) = (س^{٣} + ٣س + ١) (٥س^{٢} + ٢)

قَ(س) = (س^{٣} + ٣س + ١)(١٠س) + (٥س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} + ٣)

(٣٠) إذا كان ق(س) = ٥ هـ(س) × ٣س^{٢}، وكان هـَ(١) = ٥

، هـ(١) = ١٠ ، فإن قَ(١) = ؟؟

أ) ١٠٠ ب) ١٢٥ ج) ٣٧٥ د) ٢٠٠

الحل :

(٣١) إذا كان ق(س) = س^{٢} × هـ(س) ، وعلمت أن هـَ(٣) = ٥

، هـ(٣) = ٤ ، فإن قَ(٣) = ؟؟

أ) ٦٠ ب) ٦٣ ج) ٦٦ د) ٦٩

الحل : قَ(س) = س^{٢} × هـَ(س) + هـ(س) × ٢س

قَ(٣) = (٣)^{٢} × هـَ(٣) + هـ(٣) × (٢)(٣)

= ٩×٥ + ٤×٦ = ٤٥ + ٢٤ = ٦٩

(٣٢) إذا كان ق(س) = ٥س × هـ(س) ، وكان هـ(٣) = ٣

، هـَ(٣) = ٤ ، أوجد قَ(٣) = ؟؟

أ) ٧٥ ب) -٧٥ ج) ٣٠ د) -٣٠

الحل : قَ(س) = ٥س × هـَ(س) + هـ(س) × ٥

قَ(٣) = ١٥×٤ + ٣×٥ = ٦٠ + ١٥ = ٧٥

(٣٣) إذا كان ق(س) = س (س^{٢} + ٥) ، فإن قَ(س) =؟؟

أ) -٣س^{٢} + ٢ ب) ٣س^{٢} + ٥

ج) ٢س + ٥ د) ٢س^{٢}

الحل :

(٣٤) إذا كان ل(١) = ٢ ، فإن لَ(١) = ٤ ، هـ(١) = ١

، هـَ(١) = ٥ ، وكان ق(س) = هـ(س) × ل(س)

، فإن قَ(١) = ؟؟

أ) -٦ ب) ٦ ج) -١٤ د) ١٤

الحل :

(٣٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})$ ، وكان $\text{ل}(١) = ٢$ ، فإن $\text{ل}'(١) = ٣$ ، $\text{هـ}'(١) = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٦$ ، فجد $\text{ق}'(١) =$ ؟؟

أ) ‎-١٥‎   ب) ١٥   ج) ‎-٢٤‎   د) ٢٤

الحل :

مشتقة ضرب ٣ اقترانات

* إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \times \text{م}(\text{س})$

فإن $\text{ل}'(\text{س}) = \text{ق}' \times \text{هـ} \times \text{م} + \text{ق} \times \text{هـ}' \times \text{م} + \text{ق} \times \text{هـ} \times \text{م}'$

(٣٦) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^٣ + ١)(\text{س}^٢ + ٣)(١ - ٥\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = (٣\text{س}^٢)(\text{س}^٢ + ٣)(١ - ٥\text{س})$

$+ (\text{س}^٣ + ١)(٢\text{س})(١ - ٥\text{س})$

$+ (\text{س}^٣ + ١)(\text{س}^٢ + ٣)(-٥)$

(٣٧) $\text{ق}(\text{س}) = (١ + \text{س}^٢)(٥\text{س} + \text{س}^٦)(٢\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = (٢\text{س})(٥\text{س} + \text{س}^٦)(٢\text{س})$

$+ (١ + \text{س}^٢)(٥ + ٦\text{س}^٥)(٢\text{س})$

$+ (١ + \text{س}^٢)(٥\text{س} + \text{س}^٦)(٢)$

مشتقة القسمة

* إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

فإن $\text{ل}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^٢}$

$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$

(٣٨) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٧\text{س}^٢ + ١}{٢\text{س} - ٥}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(٢\text{س} - ٥)(١٤\text{س}) - (٧\text{س}^٢ + ١)(٢)}{(٢\text{س} - ٥)^٢}$

(٣٩) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}^٣ + ١}{\text{س}^٢ + ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٢ + ١)(١٥\text{س}^٢) - (٥\text{س}^٣ + ١)(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ + ١)^٢}$

(٤٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١ + ٣\text{س}}{\text{س}^٧ + ٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^٧ + ٢)(٣) - (١ + ٣\text{س})(٧\text{س}^٦)}{(\text{س}^٧ + ٢)^٢}$

مشتقة قسمة $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$

* إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{أ}}$ ، فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{\text{أ}}$

(٤١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢}{٦} \longrightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٦}$

(٤٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٤}{٩}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^٢ + ٦\text{س} - ٢}{٩}$

(٤٣) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\sqrt{٢}\,\text{س}^٣ + \sqrt{٥}\,\text{س}}{٦}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣\sqrt{٢}\,\text{س}^٢ + \sqrt{٥}}{٦}$

(٤٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١ - ٤\text{س}}{٧} \longrightarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٤}{٧}$

مشتقة قسمة $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$

* إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\,\text{ثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^٢}$

(٤٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٧}{\text{س}^٣ + ٥}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٧ \times ٣\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ + ٥)^٢} = \frac{-٢١\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ + ٥)^٢}$

(٤٦) إذا كان ق(س) = $\frac{-٣}{س^٢ + ٦}$ ، جد قَ(س) :

الحل : قَ(س) = $\frac{-(-٣)\ (٢س)}{(س^٢+٦)^٢}$ = $\frac{٦س}{(س^٢+٦)^٢}$

(٤٧) إذا كان ق(س) = $\frac{٢}{س^{\frac{١}{٢}} + ١}$ ، جد قَ(س) :

الحل : قَ(س) = $\frac{-٢\ (\frac{١}{٢} س^{\frac{-١}{٢}})}{(س^{\frac{١}{٢}} + ١)^٢}$ = $\frac{- س^{\frac{-١}{٢}}}{(س^{\frac{١}{٢}} + ١)^٢}$

(٤٨) ق(س) = $\frac{١}{س}$ + س ، فإن قَ (٢) = ؟؟

أ) $\frac{-١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{-٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}$

الحل :

(٤٩) إذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س + ١}$ ، س ≠ -١ ، وعلمت أن

ق(٢) = ١ ، هـَ (٢) = ٧ ، فإن قَ (٢) = ؟؟

أ) ٢ ب) -٢ جـ) ١ د) -١

الحل :

(٥٠) إذا كان قَ (١) = ٣، قَ (١) = ٢ ، فإن $(\frac{٧}{ق})'$ (١)

تساوي :

أ) $\frac{-٢١}{٤}$ ب) $\frac{٢١}{٤}$ جـ) $\frac{٧}{٣}$ د) $\frac{-٧}{٣}$

الحل :

(٥١) إذا كان ق(س) = $\frac{س + ١}{هـ(س)}$ ، حيث هـ(س) ≠ صفر

، وعلمت أن هـ(٢) = ٥ ، هـَ (٢) = ١ ، فإن قَ (٢) = ؟؟

أ) $\frac{٢}{٥}$ ب) $\frac{١}{٥}$ جـ) $\frac{٢}{٢٥}$ د) $\frac{-٢}{٢٥}$

الحل :

(٥٢) إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{٥س + ١}$ ، أوجد قيمة (أ) إذا كانت

قَ (١) = ٥ :

أ) -٣٦ ب) ٣٦ جـ) -١٨ د) ١٨

الحل :

(٥٣) إذا كان ق(س) = $\frac{س + ٥}{٦ - ٢س}$ ، فإن قَ (٢) = ؟؟

أ) -٤ ب) ٤ جـ) - $\frac{١}{٢}$ د) ٣

الحل :

<u>مشتقة هـ(س) = $(ق(س))^ن$</u>

* إذا كان هـ (س) = $(ق(س))^ن$

فإن هـَ (س) = ن $(ق(س))^{ن-١}$ × قَ(س)

(٥٤) ق(س) = $(س^٣ + ٢)^٩$

قَ(س) = ٩ $(س^٣ + ٢)^٨$ × $(٣س^٢)$

(٥٥) ق(س) = (١ - ٤س)^{١٠٠}

ق$'$(س) = ١٠٠ (١ - ٤س)^{٩٩} × -٤

(٥٦) ق(س) = (١ + س^{٣} + ٢س)^{١٣}

ق$'$(س) = ١٣ (١ + س^{٣} + ٢س)^{١٢} × (٣س^{٢} + ٢)

<u>مشتقة هـ(س) = (ق(س))$^{\frac{م}{ب}}$</u>

* إذا كان هـ(س) = (ق(س))$^{\frac{م}{ب}}$

فإن هـ$'$(س) = $\frac{م}{ب}$ (ق(س))$^{\frac{م}{ب}-١}$ × ق$'$(س)

(٥٧) إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٣)$^{\frac{١}{٧}}$ ، أوجد ق$'$(س) :

الحل :

(٥٨) إذا كان ل(٢) = ١ ، ل$'$(٢) = ٥ ، وكان

ق(س) = (س^{٢} ل(س))^{٣} ، جد ق$'$(٢) :

أ) ٧٢ ب) ٢٤ ج) ٢ د) ١١٥٢

الحل :

(٥٩) إذا كان م(٣) = ٧ ، م$'$(٣) = ٤ ، وكان

ق(س) = (٢س^{٢} + م(س))^{٣} ، جد م$'$(٣) :

أ) -٣٠٠٠٠ ب) ٣٠٠٠٠

ج) -٦٠٠٠٠ د) ٦٠٠٠٠

الحل :

<u>مشتقة الجذور</u>

* <u>تذكير</u>

$\sqrt[٥]{س^{٢} + ١}$ ⟵ (س^{٢} + ١)$^{\frac{١}{٥}}$

$\sqrt[٧]{س^{٣} + ٥س + ٧}$ ⟵ (س^{٣} + ٥س + ٧)$^{\frac{١}{٧}}$

$\sqrt[٣]{س^{٢} + ٥}$ ⟵ (س^{٢} + ٥)$^{\frac{١}{٣}}$

$\sqrt[٤]{(٢س + ١)^{٣}}$ ⟵ (٢س + ١)$^{\frac{٣}{٤}}$

* هـ(س) = $\sqrt[ن]{ق(س)}$ ، نحوله أولاً على شكل أس :

هـ$'$(س) = $\frac{١}{ن}$ (ق(س))$^{\frac{١}{ن}-١}$ × ق$'$(س)

(٦٠) إذا كان ق(س) = $\sqrt[٧]{س^{٢} + ٣}$

ق(س) = (س^{٢} + ٣)$^{\frac{١}{٧}}$

ق$'$(س) = $\frac{١}{٧}$ (س^{٢} + ٣)$^{\frac{-٦}{٧}}$ × ٢س

(٦١) إذا كان ق(س) = $\sqrt[٩]{٥س^{٢} + ٧}$ ، أوجد ق$'$(س) :

الحل :

مشتقة الجذر التربيعي

$ق(س) = \sqrt{هـ(س)} \Leftarrow ق\,'(س) = \frac{هـ\,'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$

$ق\,'(س) = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر التربيعي}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

(٦٢) $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٣س + ١}$

$ق\,'(س) = \frac{٢س + ٣}{٢\sqrt{س^٢ + ٣س + ١}}$

(٦٣) إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٨}$ ، أوجد $ق\,'(١)$:

الحل :

(٦٤) إذا كان $ق(س) = \sqrt{١٠س - س^٢}$ فإن $ق\,'(١) =$

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{-٧}{٣}$ ج) $\frac{-٤}{٣}$ د) $\frac{٤}{٣}$

الحل:

(٦٥) إذا علمت $\lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢} =$

وكان ل (س) = ق (س) + $س^٢$ فإن ل$'$(٢) تساوي . . .

أ) ١٤ ب) ١٠ ج) ٨ د) صفر

الحل:

(٦٦) إذا كان $ق(س) = \frac{(س^٢ + ١)(س + ٢)^٣}{(س^٢ + ١)}$

فإن $ق\,'(٢) =$ ؟؟

أ) ٤٦ ب) ٤٨ ج) ٥٠ د) ٥٢

الحل:

$ق(س) = \frac{\cancel{(س^٢ + ١)}(س + ٢)^٣}{\cancel{(س^٢ + ١)}} = (س + ٢)^٣$

$ق\,'(س) = ٣(س + ٢)^٢$

$\Leftarrow ق\,'(٢) = ٣(٢ + ٢)^٢ = ٣ \times ١٦ = ٤٨$

(٦٧) إذا كان $ق(س) = س^٢ + ٥س + ٨$ فإن $ق\,'(٠) =$

أ) - ٥ ب) ٥ ج) صفر د) ١

الحل:

(٦٨) إذا كان $ق(س) = \frac{س^٤}{٢} + س^٣$ جد $ق\,'(س)$

أ) $\frac{-س^٣}{٢} - ٣س^٢$ ب) $\frac{س^٣}{٢} + ٣س^٢$

ج) $-٢س^٣ - ٣س^٢$ د) $٢س^٣ + ٣$

الحل:

(٦٩) إذا كان هـ (س) = س + ٥ فإن فإن هـ$'$(٥) =

أ) ١ ب) صفر ج) ٣ د) ٢

(٧٠) $ق(س) = \sqrt{س}$ فإن $ق\,'(٢٥) =$ ؟؟

أ) $\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{-١}{٥}$ ج) $\frac{١}{١٠}$ د) $\frac{-١}{١٠}$

(٧١) إذا كان ق (س) = هـ (س) + ٥ س

وكان هـ$'$(٥) = ٢٥ فإن $ق\,'(٥) =$ ؟؟

أ) ٢٥ ب) ٣٠ ج) - ٣٠ د) - ٢٥

(٧٢) إذا كان ق (س) = $س^٢$ هـ (س)

وكان هـ$'$(١) = ٥ ، هـ (١) = ٧ فإن $ق\,'(١) =$ ؟؟

أ) ١٥ ب) - ١٥ ج) - ١٩ د) ١٩

الحل:

(٧٣) إذا كان ق (س) = س^{٢} هـ (س)
وكان هـَ (٣) = ٥ ، هـ (٣) = ٤ فإن قَ (٣) = ؟؟

أ) صفر ب) ١٣٨ جـ) ٦٩ د) - ٦٩

---

(٧٤) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\text{(١)}\right)'$ تساوي :

أ) - ١ ب) ١ جـ) صفر د) ٢

---

(٧٥) إذا كان هـ (س) اقتران كثير حدود وكان هـ (١) = ٥
هـَ (١) = - ١ فإن (هـ^{٢})َ (١) = ؟؟

أ) = - ١٠ ب) ١٠ جـ) صفر د) - ٢

الحل:

---

(٧٦) إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق
وكان لَ (- ٢) = ٤ ، هـَ (- ٢) = - ٣ ، فجد قَ (- ٢)
في كل مما يلي

أ) ق (س) = ٦ ل (س) – ٢ هـ (س)

ب) ق (س) = $\frac{١}{٢}$ ل (س) + هـ (س) + س^{٣}

الحل:

أ) قَ (س) = ٦ لَ (س) – ٢ هـَ (س)
قَ (- ٢) = ٦ × ٤ – ٢ × - ٣ = ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) قَ (س) = $\frac{١}{٢}$ لَ (س) + هـَ (س) + ٣ س^{٢}

قَ (- ٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ (- ٢) + هـَ (- ٢) + ١٢

= ٢ – ٣ + ١٢ = ١١

---

٧٧) إذا علمت أن هـ(س) قابل للاشتقاق وأن هـ(٢) = ٣

هـَ(٢) = -١ ، فجد قَ(٢) في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = س هـ(س)

ب) ق(س) = ٣ س^{٢} هـ(س) – ٥س

جـ) ق(س) = هـ(س) - $\frac{١}{\text{هـ(س)}}$

د) ق(س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{٣ هـ(س)}}$

الحل : أ) قَ(س) = س هـَ(س) + هـ(س) × ١

قَ(٢) = ٢ هـَ(٢) + هـ(٢)
= -٢ + ٣ = ١

ب) قَ(س) = ٣ س^{٢} هـَ(س) + هـ(س) × ٦س – ٥

قَ(٢) = (١٢ × -١) + (٣ × ١٢) – ٥
= -١٢ + ٣٦ – ٥ = ١٩

جـ) قَ(س) = هـَ(س) + $\frac{\text{١ × هـَ(س)}}{\text{(هـ(س))}^{٢}}$

قَ(٢) = -١ + $\frac{-١}{٩}$ = $\frac{-١٠}{٩}$

د) قَ(س) = $\frac{\text{(٣ هـ(س)×٢) - ((٢س + ١) × ٣هـَ(س))}}{\text{(٣ هـ(س))}^{٢}}$

قَ(٢) = $\frac{\text{(١٨) - (٥ × ٣ × -١)}}{٨١}$

= $\frac{١٨ + ١٥}{٨١}$ = $\frac{٣٣}{٨١}$

---

(٧٨) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (-٢) = ٣

، لَ(-٢) = -١ ، هـ(-٢) = ٤ ، هـَ(-٢) = -٦

، فجد قَ(-٢) في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = ل(س) × هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س) + ١}}$

الحل :

أ) قَ(س) = ل(س) × هـَ(س) + هـ(س) × لَ(س)

قَ(-٢) = (٣ × -٦) + (٤ × -١)

= - ١٨ - ٤ = -٢٢

ب) قَ(س) = $\frac{\text{(ل(س) + ١)(هـَ(س)) - (هـ(س))(لَ(س))}}{\text{(ل(س) + ١)}^{٢}}$

قَ(-٢) = $\frac{\text{(٤ × -٦) - (٤ × -١)}}{\text{(٤)}^{٢}}$

= $\frac{-٢٤ + ٤}{١٦}$ = $\frac{-٢٠}{١٦}$

الاتصال والاشتقاق

نظرية : إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = س١ فإنه يكون متصلاً عند س = س١

ملاحظات على النظرية :

١) ق قابل للاشتقاق عند س١ ⟸ ق متصل عند س١

٢) ق غير متصل عند س١ ⟸ ق غير قابل للاشتقاق عند س١

٣) ق متصل عند س١ ⟸ ليس بالضرورة أن يكون قابل للاشتقاق عند س١

١) ق′(٣) = ٧ ، ق(٣) = ٤ ، جد نهـا (س←٣) (ق^٢(س) + ٤س^٢) :

الحل : ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣ ، لان ق′(٣) موجودة لذلك ق(س) متصل عند س = ٣

⟸ نهـا (س←٣) ق(س) = ق(٣) = ٤

المطلوب : (نهـا (س←٣) ق(س))^٢ + نهـا (س←٣) (٤س^٢)

= ١٦ + ٣٦ = ٥٢

٢) ق(س) = ٣ / (س - ٢) ، ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٢

الحل : ق(٢) غير معرفة (٣/٠) لذلك ق(س) غير متصل عند س = ٢ لذلك ق′(٢) غير موجودة

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س= ٢

٣) ق(س) = ٣ / (س - ٢) ، ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤

الحل : ق(٤) = نهـا (س←٤) ق(س) = ٣/٢

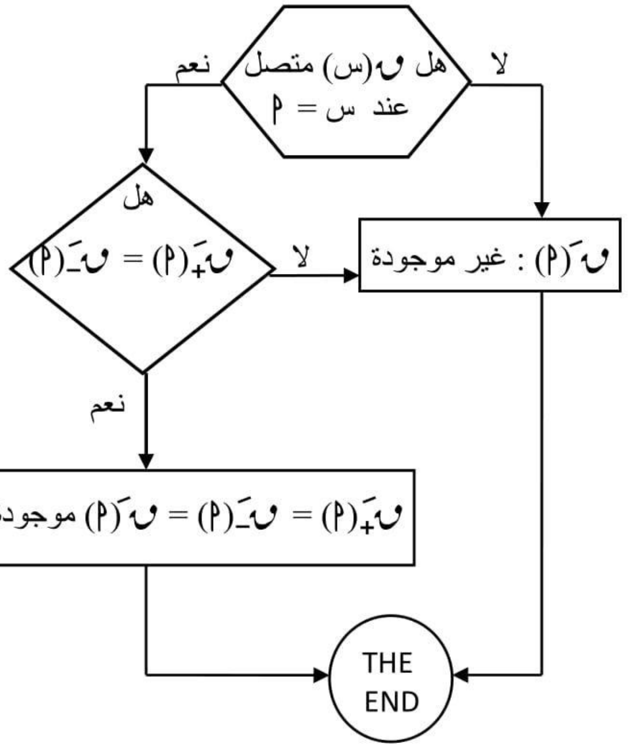
ق(س) متصل عند س = ٢

لذلك : ق′(س) = (-٣ × ١) / (س - ٢)^٢

ق′(٤) = -٣/٤ ⟸ ق(س) قابل للاشتقاق عند س= ٤

مشتقة الاقتران المتشعب باستخدام قواعد الاشتقاق :

١) نشتق كل قاعدة على حدى ثم نزيل إشارة المساواة عند الفترات .
٢) المشتقة عند الأطراف دائماً غير موجودة .
٣) المشتقة عند نقاط عند التحول (س = أ) .



١) إذا كان ق(س) =
٨س^٣ + ٤س ، س ≤ ١
٨س^٢ + ١٢س - ٨ ، س > ١

جد ق′(س) :

الحل : ق′(س) =
٢٤س^٢ + ٤ ، س < ١
١٦س + ١٢ ، س > ١
٢٨ ، س = ١

ندرس الاتصال عند س =١

ق(١) = نهـا (س←١) ق(س) = ١٢

∴ ق(س) متصل عند س =١

ق′₊(١) = ٢٨

ق′₋(١) = ٢٨

ق′(١) = ٢٨

٢) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤}{\text{س} + ١} & ،\ \text{س} \le ١ \\ \text{س} + ١ & ،\ \text{س} > ١ \end{cases}$$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح

الحل :

---

٣) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & ،\ ١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٤\text{س} - ٢ & ،\ ٢ < \text{س} \le ١٠ \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ،\ ١ < \text{س} < ٢ \\ ٤ & ،\ ٢ < \text{س} < ١٠ \\ \text{غير موجودة} & ،\ \text{س} = ١ ،\ ١٠ ،\ ٢ \end{cases}$$

$\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}'(١٠)$: غير موجودة عند الأطراف

ندرس الاتصال $\text{ق}(\text{س})$ عند س $=٢$

$$\lim_{\text{س} \to ٢^+} \text{ق}(\text{س}) \ne \lim_{\text{س} \to ٢^-} \text{ق}(\text{س})$$

$\therefore$ $\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند س $=٢$

$\therefore$ $\text{ق}'(٢)$: غير موجودة

---

٤) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ،\ -٢ \le \text{س} \le ١ \\ ٢\text{س} & ،\ ١ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ ثم جد $\text{ق}'(٠)$:

الحل :

---

٥) إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٩}{\sqrt{\text{س}} - ٣} & ،\ \text{س} \ne ٩ \\ ٦ & ،\ \text{س} = ٩ \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(٩)$:

الحل : $\text{ق}(٩) = ٦$ ، $\lim_{\text{س} \to ٩} \text{ق}(\text{س}) = ٦$ $\Leftarrow$ $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س $= ٩$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} + ٣ & ،\ \text{س} \ne ٩ \\ ٦ & ،\ \text{س} = ٩ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢ \times \sqrt{\text{س}}} \longrightarrow \text{ق}'(٩) = \frac{١}{٦}$$

---

٦) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & ،\ \text{س} \ne ٣ \\ ٩ & ،\ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(\text{س})$:

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ،\ \text{س} \ne ٣ \\ ٦ & ،\ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند س $= ٣$ لأن $\text{ق}(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$

$\text{ق}'(٣) = ٢ \times ٣ = ٦$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٥ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

جد $\text{قَ}(\text{س})$:

الحل :

$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & ، \text{س} \neq ١ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

ق(س) غير متصل عند س = ١ ، لذلك قَ(١) غير موجودة

---

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \left| \text{س} - ٢ \right|$ ، فابحث في قابلية الاقتران ق(س) للاشتقاق على ح (جد قَ(س)) :

الحل :

$\left| \text{س} - ٢ \right| = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٤} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٢ \\ ٦\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣} & ، \text{س} < ٢ \\ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٢ لأن $\text{ق}(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) = ٠$

$\text{قَ}_{+}(٢) = ٨$

$\text{قَ}_{-}(٢) = -٨$

$\text{قَ}_{+}(٢) \neq \text{قَ}_{-}(٢)$

∴ قَ(٢) : غير موجودة

---

٩) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left|\text{س}\right| + \left|\text{س} - ١\right|$ ، جد قَ(س) :

الحل :

$\left|\text{س}\right|$:   -س | ٠ | س

٠   س   ١   س

$\left|\text{س} - ١\right|$:   ١ - س | ١ | س − ١

١ - س   ٠   ١ − س   ١

ق(س) :   ١ − ٢س | ٠ | ١ | ١ | ٢س − ١

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ - ٢\text{س} & ، \text{س} < ٠ \\ ١ & ، ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} -٢ & ، \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٢ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٠ ، لكن $\text{قَ}_{+}(٠) \neq \text{قَ}_{-}(٠)$

لذلك قَ(٠) : غير موجودة

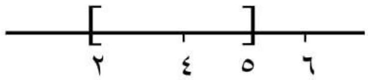
ق(س) متصل عند س = ١ ، لكن $\text{قَ}_{+}(١) \neq \text{قَ}_{-}(١)$

لذلك قَ(١) : غير موجودة

١٠) إذا كان ق(س) = $\dfrac{س^{٢}}{\left[\frac{س}{٢}+١\right]}$ ، س ∈ [٢، ٥]

جد ق َ(س) :

الحل : ل = ٢



$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢}}{٢} & ، ٢ \le س \le ٤ \\[2ex] \dfrac{س^{٢}}{٣} & ، ٤ \le س \le ٥ \end{cases}$$

$$ق َ(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س}{٢} & ، ٢ < س < ٤ \\[2ex] \dfrac{٢س}{٣} & ، ٤ < س < ٥ \end{cases}$$

ق َ(٢) ، ق َ(٥) : غير موجودة (أطراف) ، ق(س) غير متصل عند س = ٤ لذلك ق َ(٤) غير موجودة

---

١١) $$ق(س) = \begin{cases} [س] & ، ١ \le س < ٢ \\ |س - ٣| & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$$

ابحث في قابلية ق للاشتقاق على مجاله واكتب قاعدة ق َ(س) :

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٣ - س & ، ٢ \le س \le ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ < س \le ٤ \end{cases}$$

$$ق َ(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٢ \\ ١- & ، ٢ < س < ٣ \\ ١ & ، ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ ، ٤ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$$

ق َ(١) ، ق َ(٤) : غير موجودة (أطراف)

* ق(س) متصل عند س = ٢ لكن $ق َ_{+}(٢) \ne ق َ_{-}(٢)$

لذلك ق َ(٢) غير موجودة

* ق(س) متصل عند س = ٣ لكن $ق َ_{+}(٣) \ne ق َ_{-}(٣)$

لذلك ق َ(٣) غير موجودة

---

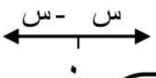
١٢) إذا كان ق(س) = |س - ٢| + |س| ، بين أن

ق َ(٠) : غير موجودة :

الحل : نعيد تعريف ق(س) حول العدد س = ٠

ق(٠) = ٢ + ٠ = ٢

$\underset{س \to ٠}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ (٢ − س) + (|س|)



$\underset{س \to ٠^{+}}{نهـا}$ (٢ − س) + (س) ، $\underset{س \to ٠^{-}}{نهـا}$ (٢ − س) + (- س)

$\underset{س \to ٠^{+}}{نهـا}$ (٢) = ٢ ، $\underset{س \to ٠^{-}}{نهـا}$ (٢ − ٢س)

ق(س) متصل عند س = ٠

$ق َ_{+}(٠) = ٠$ ، $ق َ_{-}(٠) = ٢-$ ⟵ ق َ(٠) غير موجودة

---

١٣) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + [س + ٣] ، جد ق َ(٣) :

الحل : ندرس اتصال ق(س) عند س = ٣

ق(٣) = ٩ + ٦ = ١٥

$\underset{س \to ٣}{نهـا}$ ق(س) : غير موجودة

$\underset{س \to ٣^{+}}{نهـا}$ ($س^{٢}$ + (٦)) = ١٥ ، $\underset{س \to ٣^{-}}{نهـا}$ ($س^{٢}$ + (٥)) = ١٤

ق(س) غير متصل عند س = ٣ ، لذلك ق َ(٣) غير موجودة

---

١٤) ق(س) = $(س - ١٠)^{٣}$ $\left[\frac{س}{٢}\right]$ ، جد ق َ(١٠) :

الحل :

١٥) $ق(س) = \frac{[س + ٣,٠]}{س + ٥}$ ، جد $قَ(٢)$:

الحل :

---

١٦) $ق(س) = |س^{٢} - ٤س + ٤|$ ، جد $قَ(س)$:

الحل : $ق(س) = |(س - ٢)^{٢}| = (س - ٢)^{٢}$

$قَ(س) = ٢(س – ٢)^{١} \times ١$

---

١٧) $ق(س) = \begin{cases} ٢س + أ & ، س \geq ١ \\ ب س^{٢} + ١ & ، س < ١ \end{cases}$

جد أ ، ب علماً بأن ق قابل للاشتقاق عند س = ١ :

الحل : $ق(١) = \lim_{س \to ١} ق(س)$

$\boxed{٢ + أ = ب + ١}$

$قَ_{+}(١) = قَ_{-}(١) \longleftarrow ٢ = ٢ب \longleftarrow \boxed{ب = ١}$

$٢ + أ = ٢ \longleftarrow \boxed{أ = ٠}$

---

١٨) $ق(س) = \begin{cases} أ س + ٢ & ، س < ٣ \\ س^{٢} + ب & ، س \geq ٣ \end{cases}$

جد أ ، ب بحيث $قَ(٣)$ موجودة :

الحل : $ق(٣) = \lim_{س \to ٣} ق(س)$

$\boxed{٩ + ب = ٣أ + ٢}$

$قَ_{+}(٣) = قَ_{-}(٣) \longleftarrow \boxed{أ = ٦}$

$٩ + ب = ٢٠ \longleftarrow \boxed{ب = ١١}$

---

١٩) $ق(س) = \begin{cases} أ س^{٢} - ب س & ، س \leq ٢ \\ ٤ – ب س^{٣} + أ س & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق اقتراناً للاشتقاق عند س = ٢

، فجد كلاً من الثابتين أ ، ب :

الحل : $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$

$٤أ – ٢ب = ٤ – ٨ب + ٢أ$

$٢أ + ٦ب = ٤ \longleftarrow \boxed{أ + ٣ب = ٢}$ ....(١)

$قَ_{+}(٢) = قَ_{-}(٢) \longleftarrow -١٢ب + أ = ٤أ - ب$

$\boxed{٣أ + ١١ب = ٠}$ ....(٢)

$٣أ + ١١ب = ٠$

$-٣أ - ٩ب = -٦$

$٢ب = -٦ \longleftarrow \boxed{ب = -٣}$

$أ – ٩ = ٢ \longleftarrow \boxed{أ = ١١}$

٢٠) ق(س) = { $\frac{٤}{|س|}$ ، س ≥ ٢ ؛ أس^{٢} + ب س ، س < ٢ }

جد قيم أ ، ب التي تجعل ق قابل للاشتقاق عند س = ٢

الحل : ق(س) = { $\frac{٤}{س}$ ، س ≥ ٢ ؛ أس^{٢} + ب س ، س < ٢ }

ق(٢) = نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ⟵ ٢ = ٤أ + ٢ب

$\boxed{٢أ + ب = ١}$ ١

ق'$_{+}$(٢) = ق'$_{-}$(٢) ⟵ $\boxed{-١ = ٤أ + ب}$ ٢

$\boxed{أ = -١}$ $\boxed{ب = ٣}$

---

٢١) ق(س) = { س^{٣} + ٤س ، س ≥ ١ ؛ ٧س − ٢ ، س < ١ }

هـ(س) = س^{٢} + ٣س^{٤} ، جد (ق × هـ)'(١) :

الحل : (ق × هـ)'(١) = ق(١) × هـ'(١) + هـ(١) × ق'(١)

ق'(س) = { ٣س^{٢} + ٤ ، س > ١ ؛ ٧ ، س < ١ ؛ ٧ ، س = ١ }

ق(س) متصل عند س = ١ ⟵ ق'$_{+}$(١) = ق'$_{-}$(١) = ٧

هـ'(س) = ٢س + ١٢س^{٣} ⟵ هـ'(١) = ١٤

(ق × هـ)'(١) = (٥×١٤) + (٤×٧) = ٩٨

---

٢٢) إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≥ ج ؛ ل'(ج) (س − ج) ، س < ج }

وكان ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = ج ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = ج ، فأثبت أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ج ، ثم جد ق'(ج) :

الحل : ق'(س) = { ل'(س) ، س > ج ؛ ل'(ج) ، س < ج }

ق(س) متصل عند س = ج ، من معطيات السؤال

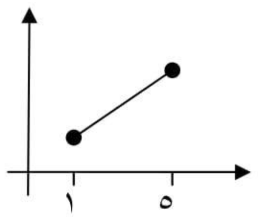
ق'$_{+}$(ج) = ل'(ج)

ق'$_{-}$(ج) = ل'(ج)

∴ ق'(ج) = ل'(ج) قابل للاشتقاق عند س = ج

---

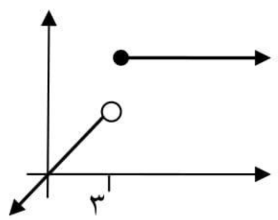
٢٣)



ق'(١) : غير موجودة
ق'(٥) : غير موجودة
} أطراف

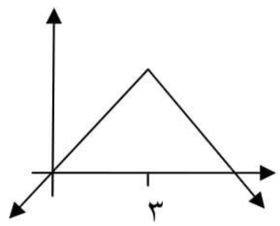
---

٢٤)



ق'(٣) : غير موجودة } لأن ق(س) غير متصل عند س = ٣

٢٥)



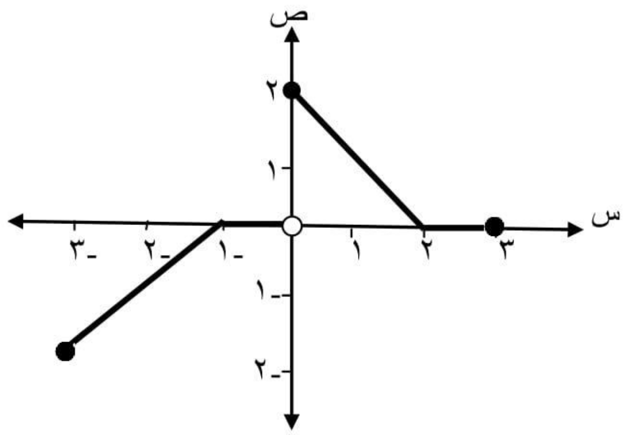
قَ(٣) : غير موجودة } عدد لا نهائي من المماسات رأس مدبب

---

٢٦) اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [-٣ ، ٣] ، جد كلاً مما يأتي :

أ) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل .

ب) قيم س حيث -٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق .



الحل : س ∋ { ٠ }

س ∋ {٠،٢،-١}

<u>المشتقات العليا :</u>

١) قَ(س) ، صَ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، المشتقة الأولى .

٢) قً(س) ، صً ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ ، المشتقة الثانية .

٣) قًً(س) ، صًً ، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ ، المشتقة الثالثة .

٤) ق$^{(٤)}$(س) ، ص$^{(٤)}$ ، $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}}$ ، المشتقة الرابعة .

---

١) إذا كان ق(س) = ٤س^{٥} - ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١ ، فجد قًً(س) :

الحل : قَ(س) = ٢٠س^{٤} - ٦س^{٢} + ١٢س

قً(س) = ٨٠س^{٣} - ١٢س + ١٢

قًً(س) = ٢٤٠س^{٢} - ١٢

---

٢) إذا كان ق(س) = ٥س^{٣} - ٤س^{٢} + ٦س + ١ ، فجد قً(-١) :

الحل : قَ(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦

قً(س) = ٣٠س - ٨

قً(-١) = -٣٠ – ٨ = -٣٨

---

٣) إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} ، جد أصفار قً(س) :

الحل : قَ(س) = ٦س^{٢} - ٢س

قً(س) = ١٢س – ٢ = ٠

١٢س = ٢ ⟵ $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٦}}$

---

٤) ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} ، جد أصفار المشتقة الأولى حيث س ∋ [-٣ ، ٤] :

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} - ١٢س = ٠

٣س (س – ٤) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$ $\boxed{\cancel{\text{س} = ٤}}$ مرفوضة

٥) $ص = \frac{س^٢ + ١}{س}$ ، جد $ص''$:

الحل : $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^٢}$

$ص'' = \frac{١ \times ٢س}{س^٤} = \frac{٢}{س^٣}$

---

٦) إذا كان كل من ل ، ل' ، ل'' ، قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان

$ق(س) = س^٢ ل(س)$ ، فجد $ق''(س)$ ، $ق'''(س)$:

الحل : $ق'(س) = س^٢ ل'(س) + ٢س ل(س)$

$ق''(س) = س^٢ ل''(س) + ٢س ل'(س) + ٢س ل'(س) + ٢ل(س)$

$\boxed{ق''(س) = س^٢ ل''(س) + ٤س ل'(س) + ٢ل(س)}$

$ق'''(س) = س^٢ ل'''(س) + ٢س ل''(س) + ٤س ل''(س)$

$+ ٤ل'(س) + ٢ل'(س)$

$\boxed{ق'''(س) = س^٢ ل'''(س) + ٦س ل''(س) + ٦ل'(س)}$

---

٧) إذا كان $ق(س) = (س^٢ + ٣س)|س|$ ، جد $ق''(س)$:

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٣س^٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٣ - ٣س^٢ & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٦س & ، س > ٠ \\ -٣س^٢ - ٦س & ، س < ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \end{cases}$$

$$ق''(س) = \begin{cases} ٦س + ٦ & ، س > ٠ \\ -٦س - ٦ & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \end{cases}$$

$ق(س)$ متصل عند س = ٠

$ق'_+(٠) = ق'_-(٠) \longrightarrow ق'(٠) = ٠$

$ق''_+(٠) \neq ق''_-(٠) \longrightarrow ق''(٠)$ غير موجودة

---

٨) $ق(س) = م س^٣ + \frac{س^٤}{٤}$ وكانت $ق'''(٢) = ٢٠$ ، جد م :

الحل : $ق'(س) = ٣م س^٢ + س^٣$

$ق''(س) = ٦م س + ٣س^٢$

$ق'''(س) = ٦م + ٦س$

$ق'''(٢) = ٢٠ \longrightarrow ٦م + ١٢ = ٢٠ \longrightarrow \boxed{م = \frac{٤}{٣}}$

---

٩) $ق(س) = م س^٤ + \frac{١٦}{س}$ ، م ثابت ، وكان $ق'''(٢) = ٩٠$

، فجد قيمة الثابت م :

الحل : $ق(س) = م س^٤ + ١٦س^{-١}$

$ق'(س) = ٤م س^٣ - ١٦س^{-٢}$

$ق''(س) = ١٢م س^٢ + ٣٢س^{-٣}$

$ق'''(س) = ٢٤م س - ٩٦س^{-٤}$

$ق'''(٢) = ٤٨م - \frac{٩٦}{١٦} = ٩٠$

$٤٨م - ٦ = ٩٠ \longrightarrow ٤٨م = ٩٦ \longrightarrow \boxed{م = ٢}$

---

١٠) إذا كان $ق(س) = س^ن$ ، وكان $ق'''(س) = ٢٤ س^{ن-٣}$

، فجد قيمة ن :

الحل : $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

$ق''(س) = ن(ن - ١) س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = ن(ن - ١)(ن - ٢) س^{ن-٣} = ٢٤ س^{ن-٣}$

ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ٢٤

الأعداد هي ٢ ، ٣ ، ٤

أي أن ن = ٤

١١) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{١٠}$ س^ن ، وكان ق'''(س) = أ س^٢

، فجد قيمة الثابت أ :

الحل :

---

١٢) إذا كانت ق(س) = س^٤ + ٣س^٣ - ٦س^٢ - س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) ق''(س) = ٠ ب) ق''(س) ≤ ٠ جـ) ق''(س) < ٠

الحل : ق'(س) = ٤س^٣ + ٩س^٢ - ١٢س - ١

ق''(س) = ١٢س^٢ + ١٨س – ١٢

أ) ١٢س^٢ + ١٨س – ١٢ = ٠ ⟵ ٢س^٢ + ٣س - ٢ = ٠

(٢س - ١) (س + ٢) = ٠ ⟵ س = { $\frac{١}{٢}$ ، -٢ }

ب) + + + + + + + + - - - - - + + + + + + +

(-٢ ، $\frac{١}{٢}$)

س ∈ (- ∞ ، -٢] ∪ [$\frac{١}{٢}$ ، ∞)

جـ) س ∈ (-٢ ، $\frac{١}{٢}$)

---

١٣) إذا كان ق(س) = ٨س – ٤(م – ٣) س^٢

، فجد قيم الثابت م التي تجعل ق''(س) < ٠ :

الحل :

---

١٤) ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن

س^٢ص'' + ٣س ص' + ص = ٠

الحل : ص' = $\frac{-١}{س^٢}$ ، ص'' = $\frac{٢}{س^٣}$

= س^٢ص'' + ٣س ص' + ص

= س^٢ × $\frac{٢}{س^٣}$ + ٣س × $\frac{-١}{س^٢}$ + $\frac{١}{س}$

= $\frac{٢}{س}$ - $\frac{٣}{س}$ + $\frac{١}{س}$ = ٠

---

١٥) إذا كان كل من الاقترانين ل ، هـ قابلاً للاشتقاق مرتين ، فأثبت أن :

(ل×هـ)''(س) = (ل''هـ)(س) + ٢(ل'×هـ')(س) + (ل×هـ'')(س)

الحل :

(ل×هـ)'(س) = ل(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ل'(س)

(ل×هـ)''(س) = ل(س) × هـ''(س) + هـ'(س) × ل'(س)

\+ هـ'(س) × ل'(س) + هـ(س) × ل''(س)

= (ل''هـ)(س) + ٢(ل'×هـ')(س) + (ل×هـ'')(س)

---

١٦) إذا كانت ل ، ق ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان هـ(س) = ل(س) × ق(س)

، ل'(س) × ق'(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فأثبت أن :

هـ'''(س) = ل(س) × ق'''(س) + ق(س) × ل'''(س)

الحل : هـ'(س) = ل(س) × ق'(س) + ق(س) × ل'(س)

هـ''(س) = ل × ق'' + ق' × ل' + ق × ل'' + ق' × ل'

$\boxed{\text{هـ''(س) = ل × ق'' + ق × ل'' + ٢جـ}}$

هـ'''(س) = ل × ق''' + ق'' × ل' + ق × ل''' + ل'' × ق'

= ل × ق''' + ق × ل''' + $\boxed{\text{ق'' × ل' + ل'' × ق'}}$

= ل × ق''' + ق × ل''' + ٠

١٧) جد قاعدة اقتران كثير حدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه $\text{ق}(١) = ٣$ ، $\text{ق}'(١) = -٢$ ، $\text{ق}''(١) = ٤$:

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\,\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٢\,\text{أ}$

$\text{ق}''(١) = ٢\,\text{أ} = ٤ \longrightarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$

$\text{ق}'(١) = ٢\,\text{أ} + \text{ب} = -٢ \longrightarrow ٤ + \text{ب} = -٢ \longrightarrow \boxed{\text{ب} = -٦}$

$\text{ق}(١) = \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = ٣ \longrightarrow -٤ + \text{جـ} = ٣ \longrightarrow \boxed{\text{جـ} = ٧}$

مشتقة الاقترانات الدائرية :

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\,\boxed{\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}}{\boxed{\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}} \times ٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\right)}{٢}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ق}'(\text{س}) = \text{جتا}\left(\frac{٢\text{س}}{٢}\right) = \text{جتا}\,\text{س}}$$

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$ ، أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة :

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{جتا}\,\text{ع} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\,\boxed{\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}}{\boxed{\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}} \times ٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\right)}{٢}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ق}'(\text{س}) = -\,\text{جا}\left(\frac{٢\text{س}}{٢}\right) = -\,\text{جا}\,\text{س}}$$

٣) استخدم تعريف المشتقة الأولى لايجاد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,\text{س}$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}\,\text{ع} - \text{ظا}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\text{جا}\,\text{ع}}{\text{جتا}\,\text{ع}} - \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\,\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{ع}\,\text{جا}\,\text{س}}{(\text{ع} - \text{س})\,\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\boxed{\text{جا}(\text{ع} - \text{س})}}{\boxed{(\text{ع} - \text{س})}\,\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١}{\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{س}}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}} = \text{قا}^{٢}\,\text{س}}$$

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{قتا}\,\text{س}$ ، اثبت باستخدام تعريف المشتقة الأولى أن $\text{ق}'(\text{س}) = -\,\text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}$:

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \dfrac{\text{قتا}\,\text{ع} - \text{قتا}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{١}{\text{جا}\,\text{ع}} - \frac{١}{\text{جا}\,\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{ع}}{(\text{ع} - \text{س})\,(\text{جا}\,\text{ع})(\text{جا}\,\text{س})}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\,\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{(\text{جا}\,\text{ع})(\text{جا}\text{س})(٢)\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}\right)}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}}{(\text{جا}\,\text{ع})(\text{جا}\text{س})(-٢)}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} \times \frac{١}{\text{جا}\,\text{س}} = -\,\text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}}$$

٥) إذا كان ق(س) = ظتاس ، استخدم تعريف المشتقة لإيجاد قَ(س) :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتاع} - \text{ظتاس}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جتاع}}{\text{جاع}} - \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاع جاس} - \text{جاع جتاس}}{(\text{ع} - \text{س})\ \text{جاع جاس}}$

$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\boxed{\text{جا(س - ع)}}}{\boxed{(\text{ع} - \text{س})}\ \text{جاع جاس}}$

$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \dfrac{-١}{\text{جاس جاس}} = \dfrac{-١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = -\ \text{قتا}^{٢}\text{س}}$

٦) أوجد باستخدام تعريف المشتقة الأولى لايجاد قَ(س) للاقتران ق(س) = س جاس :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع} - \text{س جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع} - \text{س جاع} + \text{س جاع} - \text{س جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع جاع} - \text{س جاع}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جاع} - \text{س جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{ع} - \text{س})\ \text{جاع}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س (جاع - جاس)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{جاس} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\ (٢\ \text{جتا}\ \dfrac{\text{ع} + \text{س}}{٢}\ \boxed{\text{جا}\ \dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}})}{٢ \times \boxed{\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}}$

$= \text{جاس} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س جتا}\ \dfrac{\text{ع} + \text{س}}{٢}}{٢}$

$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \text{جاس} + \text{س جتاس}}$

٧) استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد قَ(س) للاقتران ق(س) = قا ٢س :

الحل : $\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا٢ع} - \text{قا٢س}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{جتا٢ع}} - \dfrac{١}{\text{جتا٢س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا ٢س} - \text{جا ٢ع}}{(\text{ع} - \text{س})\ \text{جتا ٢ع جتا ٢س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢\text{جتا}\ \dfrac{٢\text{س} + ٢\text{ع}}{٢}\ \text{جا}\ \dfrac{٢\text{س} - ٢\text{ع}}{٢}}{(\text{ع} - \text{س})\ \text{جتا ٢ع جتا ٢س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢\ \text{جا (س + ع)}}{\text{جتا ٢ع جتا ٢س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (س - ع)}}{(\text{ع} - \text{س})}$

$\boxed{\therefore \text{قَ(س)} = \dfrac{-٢ \times \text{جا ٢س}}{\text{جتا}^{٢}\ ٢\text{س}} \times -١ = ٢\ \text{ظا ٢س قا ٢س}}$

الاقتران الدائري	مشتقة الاقتران الدائري
جا ( )	جتا ( ) × مشتقة الزاوية
جتا ( )	- جا ( ) × مشتقة الزاوية
ظا ( )	$\text{قا}^{٢}$( ) × مشتقة الزاوية
ظتا ( )	- $\text{قتا}^{٢}$( ) × مشتقة الزاوية
قا ( )	قا ( ) ظا ( ) × مشتقة الزاوية
قتا ( )	- قتا ( ) ظتا ( ) ×مشتقة الزاوية

أمثلة متنوعة :

٨)

الاقتران	المشتقة
جـا (س^{٢} + ٣)	
جـا (١ – ٥س)	
جـا $\left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣}\right)$	

٩)

الاقتران	المشتقة
جتـا (س^{٢} + ١)	
جتـا (١ – ٧س)	
جتـا $\left(\frac{س^{٢} + ٧}{١ + ٥س}\right)$	

١٠)

الاقتران	المشتقة
ظـا (س^{٢} + ١)	
ظـا (١ – ٥س)	
ظـا $\left(\frac{٧}{س^{٢} + ١}\right)$	

١١)

الاقتران	المشتقة
قـا (٥س + ١)	
قـا (٧س^{٢} + ١)	
قـا ٧س	

١٢)

الاقتران	المشتقة
ظتـا (س^{٧} + ١)	
ظتـا (١ – ٧س)	
ظتـا $\left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٧} + ٢}\right)$	

١٣)

الاقتران	المشتقة
قتـا (٧س + ١)	
قتـا (س^{٢} + ١)	
قتـا ٥س	

كمان أسئلة متنوعة :

١٤) ق(س) = جتا (س + جا س)

ق َ(س) = - جا (س + جاس) (١ + جتا س)

١٥) ق(س) = ظا (جاس + $\text{س}^{٢}$)

ق َ(س) = $\text{قا}^{٢}$ (جا س + $\text{س}^{٢}$) (جتا س + ٢س)

١٦) ق(س) = ظا (جاس)

ق َ(س) = $\text{قا}^{٢}$(جا س) × جتا س

١٧) ق(س) = ظا $\left(\frac{\text{جتا س}}{\text{س}^{٢} + ١}\right)$

الحل :

١٨) ق(س) = قا (جاس)

ق َ(س) = قا (جا س) × ظا (جا س) × جتا س

١٩) ق(س) = $(\text{جاس + جتا س})^{٥}$

ق َ(س) = ٥ $(\text{جاس + جتا س})^{٤}$ × (جتا س – جا س)

٢٠) ق(س) = $(\text{جاس + جتا س})^{\frac{٩}{٢}}$

ق َ(س) = $\frac{٩}{٢}$ $(\text{جاس + جتا س})^{\frac{٧}{٢}}$ × (جتا س – جا س)

٢١) ق(س) = $\sqrt{\text{جاس + جتا س}}$

ق َ(س) = $\frac{\text{جتاس - جا س}}{٢\sqrt{\text{جاس + جتا س}}}$

٢٢) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{قا س}}$

ق َ(س) = $\frac{٢\text{س} + ٣\text{س}^{٢} + \text{قا س ظا س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣} + \text{قا س}}}$

٢٣) أوجد ق َ(س) للاقتران ق(س) = $\frac{\text{جا س + جتا س}}{\text{س}^{٢} + \text{ظتا س}}$

الحل :

أسئلة متنوعة :

١) أذا كان ق(س) = ٢ جا س + ٦ س ، فجد ق َ$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$:

الحل : ق َ(س) = ٢ جتا (س) + ٦

ق َ$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = ١ + ٦ = ٧

٣) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ ، فجد ق َ$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$:

الحل : ق َ(س) = $\frac{\text{- س جا س - جتا س}}{\text{س}^{٢}}$

ق َ$\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = $\frac{-\frac{\pi}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}}{\left(\frac{\pi}{٣}\right)^{٢}}$

= $\frac{-٣\sqrt{٣}}{٢\pi} - \frac{٩}{٢\pi^{٢}}$

٣) إذا كان ص = م جاس + ب جتا س ، م ، ب ∈ ح

، فأثبت أن ص ً + ص = ٠ :

الحل : ص َ = م جتاس - ب جا س

ص ً = - م جاس - ب جتا س = - (م جاس + ب جتا س)

أي أن ص ً = - ص ومنه ص ً + ص = ٠

٤) إذا كان ق(س) = قتا س + ظتا س، فأثبت أن

$ق'(س) = \frac{١}{جتا س - ١}$:

الحل : ق'(س) = - قتاس ظتاس – قتا^٢ س

$= \frac{-١}{جاس} \times \frac{جتا س}{جاس} - \frac{١}{جا^٢ س}$

$= \frac{- جتا س - ١}{جا^٢ س} = \frac{-(جتا س + ١)}{(١ - جتا س)(١ + جتا س)}$

$= \frac{-١}{١ - جتا س} = \frac{١}{جتا س - ١}$

---

٥) أثبت أن كلاً من ص = جتا س ، ص = جا س

، يعتبر حلاً للمعادلة ص + ص'' = ٠ :

الحل :

ص = جتا س	ص = جا س
ص' = - جا س	ص' = جتا س
ص'' = - جتا س	ص'' = - جا س
ص + ص'' = جتا س – جتا س	ص + ص'' = جا س – جا س
= ٠	= ٠

---

٦) ص = م جاس + ب جتا س ، م ، ب ∈ ح

، أثبت أن : $(ص')^٢ + ص^٢ = م^٢ + ب^٢$:

الحل :

٧) إذا كانت ص = س جتا س – ٤ جا س ، جد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$:

الحل : ص' = - س جا س + جتا س – ٤ جتا س

$\boxed{ص' = - س جا س - ٣ جتا س}$

ص'' = - س جتاس - جا س + ٣جا س

$\boxed{ص'' = - س جتا س + ٢ جا س}$

---

٨) إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} جتا س & ، س \leq ٠ \\ م س + ب & ، س > ٠ \end{cases}$

جد م ، ب التي تجعل ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٠

الحل :

٩) إذا كان ق(س) = |جا س| ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = π :

الحل :

١٠) إذا كان ق(س) = جا س – $\frac{١}{٢}$ س ، س $\in$ [٠ ، ٢π] ، فجد قيمة (قيم) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقياً :

الحل : ق َ(س) = جتا س – $\frac{١}{٢}$ = ٠

جتا س = $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

١١) جد قيم س في الفترة [-٢π ، ٢π] التي تحقق المعادلة ق َ(س) = ٠ في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = س + جتا س

ب) ق(س) = قا س

الحل : أ) ق َ(س) = ١ - جا س = ٠

جا س = ١

س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-٣\pi}{٢}$

ب) ق َ(س) = قا س ظا س = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

= $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = ٠

جا س = ٠ $\longleftarrow$ س = -π ، ٠ ، π

١٢) إذا كان ص = (قا س + ظا س)^{٢} ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٠ :

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢(قاس+ظاس)^{١} × (قاس ظاس + قا^{٢}س)

= ٢(١ + ٠)(٠ + ١) = ٢

١٣) إذا كان ص = ظا^{٤}س ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : ص = (ظاس)^{٤}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤(ظاس)^{٣} × قا^{٢}س

= ٤ ظا^{٣}س × قا^{٢}س

١٤) إذا كان ص = جتا^{٣}(س^{٢} - ١)^{٢} ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

(٣جتا^{٢}(س^{٢} - ١)^{٢})(-جا(س^{٢} - ١)^{٢})(٢(س^{٢} - ١)×٢س)

= -١٢س(س^{٢} - ١) جتا^{٢}(س^{٢} - ١)^{٢} جا(س^{٢} - ١)^{٢}

١٥) ق(س) = جا^{٢}٣س فإن ق َ($\frac{\pi}{١٢}$) تساوي :

أ) ٣ ب) ٠ جـ) $\sqrt{٢}$ د) ١

الحل :

١٦) ق(س) = قا^{٣}٢س ، أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$:

الحل : ص = (قا٢س)^{٣}

ص َ = ٣(قا٢س)^{٢} × قا٢س ظا ٢س × ٢

ص َ($\frac{\pi}{٦}$) = ٦قا^{٣} $\frac{\pi}{٣}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ = ٤٨$\sqrt{٣}$

١٧) إذا كان ص = جا^{٣} ٤س ، أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = $\frac{\pi}{١٢}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ جا^{٢} ٤س × جتا ٤س × ٤

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{١٢}}$ = ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ × جتا $\frac{\pi}{٣}$ × ٤

= ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ٤ = $\frac{٩}{٢}$

١٨) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للعلاقة التالية ص = جا(ظا^{٢}س) :

الحل :

١٩) إذا علمت أن ص = (قا س + ظا س)^{ن} أثبت أن

ص$'$ = ن ص قا س :

الحل :

ص$'$ = ن (قاس + ظاس)$^{ن-١}$ × (قاس ظاس + قا^{٢}س)

ص$'$ = ن (قاس + ظاس)$^{ن-١}$ × قاس (ظاس + قاس)

ص$'$ = ن قاس (قاس + ظاس)^{ن}

ص$'$ = ن قاس ص   <u>وهو المطلوب</u>

٢٠) إذا كان ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س

، أثبت أن ص$'$ = قا^{٤}س :

الحل : ص$'$ = قا^{٢}س + $\frac{١}{٣}$ × ٣ ظا^{٢}س × قا^{٢}س

ص$'$ = قا^{٢}س (١ + ظا^{٢}س)

∴ ص$'$ = قا^{٢}س قا^{٢}س = قا^{٤}س

٢١) إذا كان ص = جا^{٤}س ، أثبت أن

ص$''$ + ١٦ص = ١٢ جا^{٢}س :

الحل :

٢٢) ص = ظا^{٢}س ، أثبت أن

ص$''$ = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص) :

الحل :

٩) إذا كان ق(س) = |جا س| ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = π :

الحل :

١٠) إذا كان ق(س) = جا س − $\frac{1}{2}$ س ، س ∈ [٠ ، ٢π] ، فجد قيمة (قيم) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقياً :

الحل : ق'(س) = جتا س − $\frac{1}{2}$ = ٠

جتا س = $\frac{1}{2}$

س = $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$

١١) جد قيم س في الفترة [-٢π، ٢π] التي تحقق المعادلة ق'(س) = ٠ في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = س + جتا س

ب) ق(س) = قا س

الحل : أ) ق'(س) = ١ - جا س = ٠

جا س = ١

س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{-3\pi}{2}$

ب) ق'(س) = قا س ظا س = $\frac{1}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

= $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ = ٠

جا س = ٠ ⟵ س = -π ، ٠ ، π

١٢) إذا كان ص = (قا س + ظا س)^2 ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ٠ :

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢(قاس+ظاس)^1 × (قاس ظاس + قا^{2}س)

= ٢(١ + ٠)(٠ + ١) = ٢

١٣) إذا كان ص = ظا^{4}س ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : ص = (ظاس)^4

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤(ظاس)^3 × قا^{2}س

= ٤ ظا^{3}س × قا^{2}س

١٤) إذا كان ص = جتا^3(س^2 - ١)^2 ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

(٣جتا^2(س^2 - ١)^2)(-جا(س^2 - ١)^2)(٢(س^2 - ١)×٢س)

= -١٢س(س^2 - ١) جتا^2(س^2 - ١)^2 جا(س^2 - ١)^2

١٥) ق(س) = جا^2 ٣س فإن ق'($\frac{\pi}{12}$) تساوي :

أ) ٣ ب) ٠ ج) $\sqrt{2}$ د) ١

الحل :

١٦) ق(س) = قا^3 ٢س ، أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = $\frac{\pi}{6}$:

الحل : ص = (قا ٢س)^3

ص' = ٣(قا ٢س)^2 × قا ٢س ظا ٢س × ٢

ص'($\frac{\pi}{6}$) = ٦قا^3 $\frac{\pi}{3}$ ظا $\frac{\pi}{3}$ = ٤٨$\sqrt{3}$

١٧) إذا كان ص = جا^{٣} ٤س ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = $\frac{\pi}{١٢}$:

الحل : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ جا^{٢} ٤س × جتا ٤س × ٤

$\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=\frac{\pi}{١٢}}$ = ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ × جتا $\frac{\pi}{٣}$ × ٤

= ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ٤ = $\frac{٩}{٢}$

١٨) جد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة التالية ص = جا(ظا^{٢}س) :

الحل :

١٩) إذا علمت أن ص = (قا س + ظا س)^{ن} أثبت أن

ص′ = ن ص قا س :

الحل :

ص′ = ن (قاس + ظاس)$^{ن-١}$ × (قاس ظاس + قا^{٢}س)

ص′ = ن (قاس + ظاس)$^{ن-١}$ × قاس (ظاس + قاس)

ص′ = ن قاس (قاس + ظاس)^{ن}

ص′ = ن قاس ص <u>وهو المطلوب</u>

٢٠) إذا كان ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س

، أثبت أن ص′ = قا^{٤}س :

الحل : ص′ = قا^{٢}س + $\frac{١}{٣}$ × ٣ ظا^{٢}س × قا^{٢}س

ص′ = قا^{٢}س (١ + ظا^{٢}س)

∴ ص′ = قا^{٢}س قا^{٢}س = قا^{٤}س

٢١) إذا كان ص = جا^{٤}س ، أثبت أن

ص″ + ١٦ص = ١٢ جا^{٢}س :

الحل :

٢٢) ص = ظا^{٢}س ، أثبت أن

ص″ = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص) :

الحل :

<u>قاعدة السلسلة :</u>

$\text{ص} \Leftarrow \text{ع} \Leftarrow \text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

---

١) $\text{ص} = ٣\text{ع}^{٣} + ٢$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٤$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٩\text{ع}^{٢}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= (٩\text{ع}^{٢})(٢\text{س}) = ٩(\text{س}^{٢} + ٤)^{٢}(٢\text{س})$$

---

٢) $\text{ع} = \text{ص}^{٢} + \text{ص} + ١$ ، $\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}}$ ، جد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = ٢\text{ص} + ١$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{دع}}{\text{دص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$= (٢\text{ص} + ١)\left(\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}\right) = \left(٢ \times \frac{٢}{\text{س}} + ١\right)\left(\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}\right)$$

$$= \frac{-٨}{\text{س}^{٣}} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}}$$

---

٣) $\text{ص} = \text{ع}^{٢} - \frac{٨}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} \neq ٠$ ، $\text{ع} = ٢\text{س}\sqrt{\text{س}}$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ص = ٠ :

الحل : $\text{ص} = \text{ع}^{٢} - \frac{٨}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٢\text{ع} + \frac{٨}{\text{ع}^{٢}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

عندما ص = ٠ ← $٠ = \text{ع}^{٢} - \frac{٨}{\text{ع}}$ ← $\text{ع}^{٣} = ٨$ ← $\boxed{\text{ع} = ٢}$

$\text{ع} = ٢$ ← $٢ = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(٢\text{ع} + \frac{٨}{\text{ع}^{٢}}\right) \times (٣\text{س}^{\frac{١}{٢}})$$

$$= \left(٤ + \frac{٨}{٤}\right) \times ٣ = ٦ \times ٣ = ١٨$$

---

٤) $\text{ص} = \text{ع}^{٣} - \text{ع}$ ، $\text{ع} = \text{ل}^{٣} + ١$ ، $\text{ل} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = -١ :

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٣\text{ع}^{٢} - ١$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دل}} = ٣\text{ل}^{٢}$ ، $\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٣}}$

$\boxed{\text{س} = -١ \text{ ، } \text{ل} = ١ \text{ ، } \text{ع} = ٢}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٣\text{ع}^{٢} - ١)(٣\text{ل}^{٢})\left(\frac{-٢}{\text{س}^{٣}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١١ \times ٣ \times ٢ = ١٦$$

---

٥) إذا كانت س = جاهـ ، $\frac{\text{دهـ}}{\text{دم}} = ٨$ ،

، جد $\frac{\text{دس}}{\text{دم}}$ عندما $\text{هـ} = \frac{٢\pi}{٣}$:

الحل :

---

٦) $\text{ص} = (\text{ع}^{٢} - ١٠\text{ع} + ١)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٣} + ١$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ع = ٩ :

الحل :

---

٧) إذا كان $\text{ص} = \text{ل}^{٦} + ٥\text{ل} + ١$ ، $\text{س} = ٥\text{ل}^{٢} + ٦$

، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = ٦\text{ل}^{٥} + ٥$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دل}} = ١٠\text{ل}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دس}} = \frac{٦\text{ل}^{٥} + ٥}{١٠\text{ل}} \quad \#$$

* هام (IMPORTANT)

العلاقة	المشتقة
ق(س)	قَ(س)
ق(٢س)	قَ(٢س) × ٢
ق(س^{٢})	قَ(س^{٢}) × ٢س
ق(جاس)	قَ(جاس) × جتاس
(ق(س))^{٣}	٣(ق(س))^{٢} × قَ(س)
(ق(س))^{١٠}	١٠(ق(س))^{٩} × قَ(س)
ق(س جاس)	(قَ(س جاس))(س جتاس + جاس)
(ق(س^{٢}))^{٥}	٥(ق(س^{٢}))^{٤} × قَ(س^{٢}) × ٢س
(ق(جاس))^{٢}	٢(ق(جاس)) × قَ(جاس) × جتاس
س^{٢} ق(٥س)	س^{٢} × قَ(٥س) × ٥ + ق(٥س) × ٢س

١) إذا كان ص = ق(س^{٢}) وكان ق(٩) = ١٠ ، أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٣ :

الحل : ص = ق(س^{٢}) ⟵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قَ(س^{٢}) × ٢س

⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س=٣}}$ = قَ(٩) × ٢ × ٣ = ١٠ × ٦ = ٦٠

٢) إذا كان ص = ق(٥س + ١) × س^{٢} وعلمت أن

قَ(١١) = ٧ ، ق(١١) = ٤ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٢ :

الحل :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ق(٥س + ١) × ٢س + س^{٢} × قَ(٥س + ١) × ٥

⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س=٢}}$ = ق(١١) × ٤ + ٤ × قَ(١١) × ٥

= (٤ × ٤) + (٤ × ٧ × ٥) = ١٥٦

٣) إذا كان ق(٢س) = س^{٣} + ٤س + ١ ، أوجد قَ(١٠) :

أ) ٣٠٤ ب) ٦٠٨ ج) ١٥٢ د) $\frac{٧٩}{٢}$

الحل : قَ(٢س) × ٢ = ٣س^{٢} + ٤

قَ(١٠) × ٢ = ٧٩

قَ(١٠) = $\frac{٧٩}{٢}$

٢س = ١٠
س = ٥

٤) إذا كان ق(٥س) = س^{٣} + ١ ، أوجد قَ(١٥) :

أ) ٦٧٥ ب) $\frac{٢٧}{٥}$ ج) $\frac{٥}{٢٧}$ د) $\frac{١}{٦٧٥}$

الحل : قَ(٥س) × ٥ = ٣س^{٢}

قَ(٥س) = $\frac{\text{٣س}^{٢}}{٥}$

قَ(١٥) = $\frac{٢٧}{٥}$

٥س = ١٥
س = ٣

٥) إذا كان س ق(٢س + ١) = ٢س^{٣} + ٢ ، أوجد قَ(٣) :

أ) ٠ ب) -١ ج) ١ د) ٢

الحل :

٦) إذا كان هـ(س) = ق(جا ٢س) ، وكان قَ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨ ، جد هـَ($\frac{\pi}{٦}$) :

الحل : هـَ(س) = قَ(جا ٢س) × جتا(٢س) × ٢

هـَ($\frac{\pi}{٦}$) = قَ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ٨

٧) إذا كان $ق(س^{٣} - ١) = \frac{١}{س} - س^{٢}$ ، فجد $ق'(٧)$:

الحل :

٨) إذا كان $ق(٤س) = \frac{د}{دس}(س^{٢} + ٣)$ ، جد $ق'(٤)$:

الحل : $ق'(٤س) \times ٤ = ٢س$

$\boxed{٤س = ٤ \quad س = ١}$

$ق'(٤) \times ٤ = ٢$

$ق'(٤) = \frac{١}{٢}$

٩) يقال للاقتران ق بأنه زوجي إذا كان $ق(-س) = ق(س)$ لجميع قيم س ، وأنه فردي إذا كان $ق(-س) = -ق(س)$ لجميع قيم س . أثبت ما يأتي :

أ) إذا كان $ق(س)$ اقتراناً فردياً قابلاً للاشتقاق ، فإن $ق'(س)$ اقتران زوجي .

ب) إذا كان $ق(س)$ اقتراناً زوجياً قابلاً للاشتقاق ، فإن $ق'(س)$ اقتران فردي .

الحل :

أ) ق اقتران فردي ، أي أن $ق(-س) = -ق(س)$

باشتقاق الطرفين :

$-ق'(-س) = -ق'(س) \longrightarrow ق'(-س) = ق'(س)$

$\therefore$ $ق'(س)$ اقتران زوجي

ب) ق اقتران زوجي ، أي أن $ق(-س) = ق(س)$

باشتقاق الطرفين :

$-ق'(-س) = ق'(س) \longrightarrow ق'(-س) = -ق'(س)$

$\therefore$ $ق'(س)$ اقتران فردي

١٠) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$ق(جا ٢س) = قتا(٢س)$ ، حيث $س \in]٠ ، \frac{\pi}{٣}[$ ، فجد

$ق'(\frac{١}{٢})$:

الحل :

$ق'(جا ٢س) \times جتا(٢س) \times ٢ = -قتا(٢س) ظتا(٢س) \times ٢$

$\boxed{جا(٢س) = \frac{١}{٢} \longrightarrow ٢س = \frac{\pi}{٦} \longrightarrow \boxed{س = \frac{\pi}{١٢}}}$

$ق'(\frac{١}{٢}) \times جتا(\frac{\pi}{٦}) \times ٢ = -قتا(\frac{\pi}{٦}) ظتا(\frac{\pi}{٦}) \times ٢$

$ق'(\frac{١}{٢}) \times ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٢ \times \sqrt{٣} \times ٢$

$ق'(\frac{١}{٢}) = -٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -٤$ #

١١) إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان $ص = جا^{ن}(هـ(س))$ ، حيث ن عدد صحيح فأثبت أن :

$\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن-١}(هـ(س)) جتا(هـ(س)) \times هـ'(س)$

الحل : نفرض أن : $ع = هـ(س)$

$ص = جا^{ن}(ع)$ ، $ع = هـ(س)$

$\frac{دص}{دع} = ن جا^{ن-١}(ع) \times جتا ع$ ، $\frac{دع}{دس} = هـ'(س)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن-١}(ع) \times جتا(ع) \times هـ'(س)$

$\frac{دص}{دس} = ن جا^{ن-١}(هـ(س)) \times جتا(هـ(س)) \times هـ'(س)$ #

*** تركيب الاقترانات :**

* (ق o هـ)(س) = ق(هـ(س))
* (ق o هـ)′(س) = ق′(هـ(س)) × هـ′(س)
* (ق o هـ)′(أ) = ق′(هـ(أ)) × هـ′(أ)
* (هـ o ق)′(أ) = هـ′(ق(أ)) × ق′(أ)
* (ق o هـ)′(٥) = ق′(هـ(٥)) × هـ′(٥)
* (هـ o ق)′(٥) = هـ′(ق(٥)) × ق′(٥)
* (ق″ o هـ)′(أ) = ق‴(هـ(أ)) × هـ′(أ)
* (ق′ o هـ″)′(أ) = ق″(هـ″(أ)) × هـ‴(أ)
* (ق″ o هـ′)′(أ) = ق‴(هـ′(أ)) × هـ″(أ)
* (ق o ق)′(أ) = ق′(ق(أ)) × ق′(أ)
* (ق″ o ق′)′(أ) = ق‴(ق′(أ)) × ق″(أ)
* (ق‴ o ق)′(أ) = ق⁗(ق(أ)) × ق′(أ)

١) إذا كان هـ(س)= $\sqrt{\text{س}}$ ، ق(س)= س^{٣} ، جد (ق o هـ)′(٤) :

الحل : (ق o هـ)′(٤) = ق′(هـ(٤)) × هـ′(٤)

ق′(س) = ٣س^{٢} ، هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، هـ′(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

= ق′(هـ(٤)) × هـ′(٤)

= ق′(٢) × هـ′(٤) = ١٢ × $\frac{١}{٤}$ = ٣

٢) إذا كان ق(س)=س^{٤} - ٢ ، فإن قيمة (ق o ق)′(١) تساوي :

أ) ٠   ب) ١   جـ) - ١٦   د) ١٦

الحل : ق(س)=س^{٤} - ٢ ⟵ ق′(س) = ٤س^{٣}

(ق o ق)′(١) = ق′(ق(١)) × ق′(١)

= ق′(-١) × ٤ = -٤ × ٤ = - ١٦

٣) إذا كان ق(س)= $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، وكان هـ(س)= أ س^{٣} وكان (هـ o ق)′(٣) = ١٢ ، فما قيمة الثابت أ :

الحل : (هـ o ق)′(٣) = هـ′(ق(٣)) × ق′(٣) = ١٢

ق′(س)= $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ١}}$ ⟵ ق′(٣)= $\frac{١}{٢ \times ٢}$ = $\frac{١}{٤}$

هـ′(٢) × $\frac{١}{٤}$ = ١٢ ⟵ هـ′(٢) = ٤٨

هـ′(س) = ٣ أ س^{٢} ⟵ هـ′(٢) = ١٢أ = ٤٨ ⟵ أ = ٤

٤) إذا كانت ق′(س)= $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، هـ(س) = ظا س أثبت أن : (ق o هـ)′(س) = ١ :

الحل : ق(س)= # ، هـ(س)= ظا س

ق′(س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، هـ′(س) = قا^{٢}س

(ق o هـ)′(س) = ق′(هـ(س)) × هـ′(س)

= ق′(ظا س) × قا^{٢}س

= $\frac{١}{\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١}$ × قا^{٢}س = $\frac{١}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ × قا^{٢}س = ١

٥) إذا كان ق(س)=س^{٣} + ٢س، هـ(س)=س^{٢} جد (ق′ o هـ)′(١) :

الحل : ق(س)=س^{٣} + ٢س ، هـ(س)=س^{٢}

ق′(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، هـ′(س)=٢س

ق″(س) = ٦س

(ق′ o هـ)′(١) = ق″(هـ(١)) × هـ′(١)

= ق″(١) × ٢

= ٦ × ٢ = ١٢

٦) إذا كان ق(س)=س^{٣} - ٢ ، فما قيمة (قَ o ق)َ(١) :

الحل :

---

٧) إذا كان (ق o هـ)(س) = س

وكان قَ(س) = ١ + (هـ(س))^{٢} اثبت أن هـَ(س) = $\frac{١}{١+\text{س}^{٢}}$

الحل :

---

٧) إذا كان ق(س)=س^{٢} × $|\text{س}|^{٥}$ ، هـَ(٢)=٤ ، هـ(٢)=-١ ، جد (ق o هـ)َ(٢) :

الحل : (ق o هـ)َ(٢) = قَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= قَ(-١) × ٤ = -٧ × ٤ = -٢٨

لإيجاد قَ(-١) ⟸ ق(س) = س^{٢}× - س^{٥} = -س^{٧}

قَ(س) = -٧ س^{٦}

قَ(-١) = -٧ × ١ = -٧

---

٨) إذا كان ق(س)= أ جا س ، حيث أ ثابت أ ≠ ٠ ، هـ(س) = $\frac{\text{٣س}}{\text{س}^{٢}+١}$ وكان (هـ o ق)َ($\frac{\pi}{٦}$) = ٠ ، جد مجموعة قيم أ :

الحل : قَ(س) = أ جتا(س)

هـَ(س) = $\frac{(\text{س}^{٢}+١)(٣) - (\text{٣س})(\text{٢س})}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}} = \frac{-\text{٣س}^{٢}+٣}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

(هـ o ق)َ($\frac{\pi}{٦}$) = هـَ(ق($\frac{\pi}{٦}$)) × قَ($\frac{\pi}{٦}$)

٠ = هـَ($\frac{١}{٢}$ أ) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ = ٠ ⟵ أ = ٠ (تهمل من الفرض)

هـَ($\frac{١}{٢}$ أ) = ٠ ⟵ $\frac{(\frac{-٣}{٤}\text{أ}^{٢}+٣)}{(\frac{١}{٤}\text{أ}^{٢}+١)^{٢}}$ = ٠

$\frac{-٣}{٤}$ أ^{٢} = -٣ ⟵ ٣أ^{٢} = ١٢ ⟵ أ^{٢} = ٤

$\boxed{\text{أ} = \pm ٢}$

---

٩) إذا كان ق(س)=س^{٣} ، هـ(٢)=٣ ، هـَ(٢)=-٢ ، هـً(٢)=٥ ، احسب (ق o هـ)ً(٢) :

الحل : ق(س)=س^{٣} ، هـ(٢)=٣

قَ(س) = ٣س^{٢} ، هـَ(٢)=-٢

قً(س) = ٦س ، هـً(٢)=٥

(ق o هـ)َ(٢) = قَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

(ق o هـ)ً(٢) = قَ(هـ(٢)) × هـً(٢)

+ هـَ(٢) × قً(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= (قَ(٣) × ٥) + (-٢ × ١٨ × -٢)

= (٢٧ × ٥) + (٤ × ١٨)

= ١٣٥ + ٧٢ = ٢٠٧

١٠) إذا كان ق(س)= $س^{٣}$ + ٢س ، هـ(س)= $٣س^{٢}$ ، فإن $(ق' \circ هـ)''(-١)$:

الحل : ق(س)= $س^{٣}$ + ٢س ، هـ(س) = $٣س^{٢}$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢$ ، $هـ'(س) = ٦س$

$ق''(س) = ٦س$ ، $هـ''(س) = ٦$

$ق'''(س) = ٦$

$(ق' \circ هـ)'(-١) = ق''(هـ(-١)) \times هـ'(-١)$

$(ق' \circ هـ)''(-١) = ق''(هـ(-١)) \times هـ''(-١)$

$+ هـ'(-١) \times ق'''(هـ(-١)) \times هـ'(-١)$

$= (ق''(٣) \times ٦) + (-٦ \times ٦ \times -٦)$

$= (١٨ \times ٦) + (٢١٦)$

$= ١٠٨ + ٢١٦ = ٣٢٤$

<u>الإشتقاق الضمني :</u>

١) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند (٣ ، ٤) :

الحل : $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠$

$\frac{٢ص}{٢س} \frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٢ص} \longrightarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{(٣،٤)} = \frac{-٣}{٤}$

٢) إذا كان $٤ص^{٢}$ - جاص = $س^{٢}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$:

الحل : $٨ص \frac{دص}{دس}$ - جتاص × $\frac{دص}{دس}$ = ٢س

$\frac{دص}{دس}$ (٨ص – جتاص) = ٢س

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٨ص - جتاص}$

٣) إذا كان س + $ص^{٢}$ + ٥سص = ٧س ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عند (١ ، ١) تساوي :

الحل : $١ + ٢ص \frac{دص}{دس} + ٥س \frac{دص}{دس} + ص \times ٥ = ٧$

$\frac{دص}{دس}(٢ص + ٥س) = ٦ - ٥ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٦ - ٥ص}{٢ص + ٥س}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{(١،١)} = \frac{٦ - ٥}{٢ + ٥} = \frac{١}{٧}$ #

٤) إذا كان $\text{س}^{\text{٣}} + \text{ص}^{\text{٣}} = \text{٦ س ص}$ ، جد ص' عند (٣ ، ٣) :

الحل : $\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}}\text{ص}' = \text{٦ س} \times \text{ص}' + \text{ص} \times \text{٦}$

$\text{٣ص}^{\text{٢}}\text{ص}' - \text{٦س ص}' = \text{٦ص} - \text{٣س}^{\text{٢}}$

$\text{ص}'(\text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٦س}) = \text{٦ص} - \text{٣س}^{\text{٢}}$

$$\text{ص}' = \frac{\text{٦ص} - \text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٦س}}$$

$$\text{ص}'\Big|_{(\text{٣،٣})} = \frac{\text{١٨} - \text{٢٧}}{\text{٢٧} - \text{١٨}} = -\text{١}$$

٥) إذا كان $\text{س ص}^{\text{٢}} - \text{ص س}^{\text{٢}} = \text{٢}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (١ ، ٢) :

الحل :

٦) إذا كان $\text{٢س ص} - \text{ص}^{\text{٣}} + \text{١} = \text{س} + \text{٢ص}$ ، أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

$$(\text{٢س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times \text{٢}) - \text{٣ ص}^{\text{٢}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{١} + \text{٢}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(\text{٢س} - \text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٢}) = \text{١} - \text{٢ص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١} - \text{٢ ص}}{\text{٢س} - \text{٣ص}^{\text{٢}} - \text{٢}}$$

٧) إذا كان $(\text{س} - \text{ص})^{\text{٥}} = \text{س}^{\text{٢}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (١ ، ٠) :

الحل : $\text{٥}(\text{س} - \text{ص})^{\text{٤}}(\text{١} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}) = \text{٢س}$

$$\text{١} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٢س}}{\text{٥}(\text{س} - \text{ص})^{\text{٤}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{١} - \frac{\text{٢س}}{\text{٥}(\text{س} - \text{ص})^{\text{٤}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(\text{١،٠})} = \text{١} - \frac{\text{٢}}{\text{٥} \times \text{١}} = \text{١} - \frac{\text{٢}}{\text{٥}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$$

٨) إذا كان $\frac{\text{٤}}{\text{س}} + \frac{\text{٢}}{\text{ص}} = \text{٣}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (٤ ، ١) :

الحل : $\frac{\text{٢}}{\text{ص}} = \text{٣} - \frac{\text{٤}}{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{٢}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣س} - \text{٤}}{\text{س}}$

$$\frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{س}}{\text{٣س} - \text{٤}} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{\text{٢س}}{\text{٣س} - \text{٤}}}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{٣س} - \text{٤})(\text{٢}) - (\text{٢س})(\text{٣})}{(\text{٣س} - \text{٤})^{\text{٢}}}$$

$$\text{ص}'\Big|_{(\text{٤،١})} = \frac{\text{١٦} - \text{٢٤}}{(\text{٨})^{\text{٢}}} = \frac{-\text{٨}}{\text{٦٤}} = \frac{-\text{١}}{\text{٨}}$$

٩) جد $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{دس}^{\text{٢}}}$ لكل مما يلي :

أ) $\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}} = \text{١٦}$

الحل : $\text{٨س} + \text{٦ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٠}$

$$\frac{\text{٦ص}}{\text{٦ص}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٨س}}{\text{٦ص}}$$

$$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٤ س}}{\text{٣ص}}}$$

$$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{دس}^{\text{٢}}} = \frac{-\text{٤}}{\text{٣}}\left(\frac{\text{ص} - \text{س ص}'}{\text{ص}^{\text{٢}}}\right)$$

$$= \frac{-\text{٤}}{\text{٣}}\left(\frac{\text{ص} - \text{س}\,\frac{-\text{٤س}}{\text{٣ص}}}{\text{ص}^{\text{٢}}}\right)$$

ب) جـاس = √ص + ٢

الحل : جتـاس = صَ / (٢√ص) ← صَ = ٢√ص جتـاس

صً = ٢√ص × - جـاس + جتـاس × ٢ × صَ / (٢√ص)

صً = -٢√ص جـاس + (صَ جتـاس) / √ص

صً = -٢√ص جـاس + (٢√ص جتـاس) / √ص × جتـاس

صً = -٢√ص جـاس + ٢ جتا^{٢} س

١٠) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١ ، أثبت أن :

ص^{٣} صً + ١ = ٠ :

الحل : ٢س + ٢ص صَ = ٠

٢ص صَ = -٢س ← صَ = -س / ص

صً = (ص × -١ - -س × صَ) / ص^{٢}

صً = (- ص + س × (-س / ص)) / ص^{٢} = (- ص^{٢} - س^{٢}) / ص^{٣}

صً = (- ص^{٢} - س^{٢}) / ص^{٣}

الأيمن : ص^{٣} صً + ١ = ص^{٣} × (- ص^{٢} - س^{٢}) / ص^{٣} + ١

= -١ + ١ = ٠ #

١١) إذا كان س = ظـاص ، أثبت أن :

صً (١ + س^{٢}) = - جـا ٢ص = ٠ :

الحل : ١ = قـا^{٢}ص × صَ ← صَ = ١ / قـا^{٢}ص

صَ = (جتـاص)^{٢}

صً = ٢(جتـاص)^{١} × - جـاص × صَ

صً = - جـا ٢ص × (جتـاص)^{٢}

الأيمن :

صً (١ + س^{٢}) = - جـا ٢ص × جتـا^{٢}ص (١ + ظـا^{٢}ص)

= - جـا ٢ص × جتـا^{٢}ص × قـا^{٢}ص

= - جـا ٢ص × جتـا^{٢}ص × ١ / جتـا^{٢}ص = - جـا ٢ص

١٢) إذا كان س = جـاص ، أثبت أن :

صً = ظـاص قـا^{٢}ص :

الحل : ١ = جتـاص × صَ

صَ = ١ / جتـاص = قـاص ← صَ = قـاص

صً = قـاص ظـاص × صَ

صً = ظـاص قـا^{٢}ص

١٣) إذا كان جتـاص – س ص = ٢س ، فأثبت أن :

صً (س + جـاص) + صَ (٢ + صَ جتـاص) = ٠ :

الحل : - جـاص صَ – (س صَ + ص) = ٢

-جـاص صً + صَ × -جتـاص صَ - (س صً + صَ + صَ) = ٠

جـاص صً + جتـاص (صَ)^{٢} + س صً + ٢صَ = ٠

صً (جـاص + س) + صَ (جتـاص × صَ + ٢) = ٠

١٤) س = ظتـا ٢ص ، أثبت أن :

صً = - صَ جـا ٤ص :

الحل : ١ = - قتـا^{٢}(٢ص) × ٢صَ

صَ = -١/٢ جـا^{٢}(٢ص)

صً = -١/٢ × ٢جـا(٢ص) × جتـا(٢ص) × ٢صَ

صً = -١/٢ جـا(٤ص) × ٢صَ

صً = - صَ جـا(٤ص) #

١٥) إذا كان س ص = جا س ، أثبت أن :

س صً + ٢صَ + س ص = ٠

الحل : س صَ + ص = جتا س

س صً + صَ + صَ = - جا س

س صً + ٢صَ + جا س = ٠

س صً + ٢صَ + س ص = ٠

---

١٦) إذا كان ص = $\sqrt{\text{٤ + ٣ جا س}}$ ، أثبت أن :

٢س صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤

الحل : $\boxed{\text{ص}^{٢} = \text{٤ + ٣ جا س}}$

٢ ص صَ = ٣ جتا س

٢ص صً + صَ × ٢صَ = -٣جا س

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ٣جا س = ٠

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} - ٤ = ٠

٢ص صً + ٢(صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤ #

---

١٧) جا ص = ظا س ، فأثبت أن :

$$\text{ظا ص} = \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}}$$

الحل : جتا ص × صَ = (قا س)^{٢}

جتاص×صً+صَ×- جاص×صَ = ٢(قاس)×قاس ظاس

جتاص×صً - جاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × ظاس

جتاص×صً - جاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × جاص

صً - ظاص×(صَ)^{٢} = ٢(قاس)^{٢} × ظاص

صً = ظاص(٢قا^{٢}س + (صَ)^{٢})

$$\text{ظا ص} = \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}} \quad \#$$

---

١٨) إذا كان س + ص = جا ص ، أثبت أن :

(صَ)^{٢} = صً(ظتا ص - قتا ص)

الحل : ١ + صَ = جتاص × صَ

صً = جتا ص × صً + صَ × - جا ص × صَ

صً = جتا ص × صً - جا ص × (صَ)^{٢}

جا ص × (صَ)^{٢} = جتا ص × صً - صً

(صَ)^{٢} = صً(ظتا ص - قتا ص) #

---

١٩) ص – س ص = جا س ، فأثبت أن :

$$\text{صً + ص} = \frac{\text{٢صَ}}{\text{١ - س}}$$

الحل : صَ – (س صَ + ص × ١) = جتا س

صَ - س صَ - ص = جتا س

صً - (س صً + صَ) - صَ = - جا س

صً - س صً - صَ - صَ + جا س = ٠

صً - س صً - ٢صَ + ص – س ص = ٠

صً(١ – س) + ص(١ – س) = ٢صَ

$$\text{صً + ص} = \frac{\text{٢صَ}}{\text{١ - س}} \quad \#$$

الاقترانات الوسيطية :

١) إذا كان $\text{ص} = \text{ن}^{٤}$ ، $\text{س} = ٦\text{ن} + ١$ ، فجد $\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}\right|_{\text{ن}=١}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$ (قاعدة السلسلة)

لتجد $\frac{\text{دن}}{\text{دس}}$ جد أولاً $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٦$ ومنه $\frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{١}{٦}$

$$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٤\text{ن}^{٣}) \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣}\text{ن}^{٣}}$$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٣ \times \frac{٢}{٣}\text{ن}^{٢} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$ (لأن الاشتقاق بالنسبة إلى س)

$= ٢\text{ن}^{٢} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}\text{ن}^{٢}$

$$\boxed{\text{عندما ن} = ١ \text{ ، } \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{١}{٣}}$$

٢) إذا كان $\text{س} = \text{جا } ٣\text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{جتا } ٣\text{ن}$ ، فجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$

عند $\text{ن} = \frac{\pi}{٣}$:

الحل : $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣\text{جتا}(٣\text{ن})$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٣\text{جا}(٣\text{ن})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{-٣\text{جا}(٣\text{ن})}{٣\text{جتا}(٣\text{ن})}$

$$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ظا}(٣\text{ن})}$$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -\text{قا}^{٢}(٣\text{ن}) \times ٣ \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= -\text{قا}^{٢}(٣\text{ن}) \times \cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}\text{جتا}(٣\text{ن})}$

$$\boxed{\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -\text{قا}^{٣}(٣\text{ن})}$$

$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}\right|_{\text{ن}=\frac{\pi}{٣}} = -\text{قا}^{٣}(\pi) = ١$

٣) $\text{ص} = \text{ع}^{٣} + ٥$ ، $\text{ع} = ٥\text{س} + ١$ ، جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$:

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ (قاعدة السلسلة)

$= (٣\text{ع}^{٢})\,(٥) = ١٥(٥\text{س} + ١)^{٢}$

$$\boxed{\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٣٠(٥\text{س} + ١)^{١} \times ٥}$$

٤) إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٥$ ، $\text{ع} = |\text{س}|$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

الحل :

٥) إذا كان جا ص = س ، $|\text{س}| < ١$ أثبت

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$ ، $\text{ص} \in (٠ \text{ ، } \frac{\pi}{٢})$

الحل : $\text{جتا ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{جتا ص}}$

لكن

$\text{جتا}^{٢}\text{ص} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{ص} = ١ - \text{س}^{٢}$

$\text{جتا ص} = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ لأن $\text{ص} \in (٠ \text{ ، } \frac{\pi}{٢})$

$$\boxed{\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}}$$

النهاية التي تشبه المشتقة :

* $ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

* $ق''(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(س + هـ) - ق'(س)}{هـ}$

* $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

* $ق'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{ق(ع) - ق(أ)}{ع - أ}$

* $ق''(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{ق'(ع) - ق'(أ)}{ع - أ}$

* $\lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{ق(س + هـ) - ق(س)} = \frac{١}{ق'(س)}$

* $\lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ق'(ع) - ق'(س)} = \frac{١}{ق''(س)}$

١) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + ٢$ ، فإن

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$ تساوي :

أ) $٤س^{٣}$ ب) ٠ ج) $٣س^{٤}$ د) ١

الحل :

٢) إذا كان $ق'(س) = س(س^{٢} - ١)$ ، فإن

$\lim_{ع \to س} \frac{ق'(ع) - ق'(س)}{ع - س}$ تساوي :

أ) $س^{٢} + ٣س - ١$ ب) $٢س$

ج) $٢س^{٣} - س$ د) $٣س^{٢} - ١$

الحل :

٣) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + ٦$ ، فإن

$\lim_{ع \to ١} \frac{ق'(ع) - ق'(١)}{ع - ١}$ تساوي :

أ) ٤ ب) -٤ ج) ١٢ د) ٢٤

الحل :

٤) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، فإن

$\lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{٢ - ع}$ تساوي :

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٤}$ ج) $(٤)^{٢}$ د) $(٤)^{-٢}$

الحل :

٥) إذا كان $ق(س) = \frac{س}{٢}$ ، فإن

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(٢ + هـ) - ق'(٢)}{هـ}$ تساوي :

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٤ ج) ١ د) ٠

الحل :

٦) إذا كان $ق^{(٢٥)}(س) = س^{٣}$ ، فإن

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق^{(٢٧)}(٢ + هـ) - ق^{(٢٧)}(٢)}{٢هـ}$ تساوي :

أ) ١٢ ب) ٦ ج) ٣ د) ٢٤

الحل :

٧) إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ ، فإن

$\underset{س \to ١}{نهــا} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ تساوي :

أ) ٠ ب) ٢ جـ) ١٣ د) ٢٧

الحل :

---

٨) إذا كان ق$'$(٢) = ٩ ، فجد

$\underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٢ + ٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$ تساوي :

الحل : $\boxed{\text{بفرض أن } ٤هـ = م \Longleftarrow هـ = \frac{م}{٤} \quad \text{عندما } هـ \to ٠ \text{ فإن } م \to ٠}$

$\therefore \underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٢ + ٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$

$= \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٢ + م) - ق(٢)}{٦ \times \frac{م}{٤}}$

$= \frac{٢}{٣} \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٢ + م) - ق(٢)}{م}$

$= \frac{٢}{٣}$ ق$'$(٢) $= \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$

---

٩) إذا كانت ق$'$(٣) = ٥ ، جد

$\underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٣ + ٤هـ) - ق(٣)}{هـ}$:

الحل : $\boxed{م = ٤هـ \longrightarrow هـ = \frac{م}{٤} \quad \text{عندما } هـ \to ٠ \text{ فإن } م \to ٠}$

$= \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٣ + م) - ق(٣)}{\frac{م}{٤}}$

$= \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٣ + م) - ق(٣)}{م}$

$= ٤ \times$ ق$'$(٣) $= ٤ \times ٥ = ٢٠$

---

١٠) إذا كانت ق$'$(٠) = -٦ ، جد

$\underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٢هـ}$ تساوي :

الحل : $\boxed{م = ٥هـ \longrightarrow هـ = \frac{م}{٥} \quad \text{عندما } هـ \to ٠ \text{ فإن } م \to ٠}$

$= \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٠) - ق(م)}{٢ \times \frac{م}{٥}}$

$= \frac{-٥}{٢} \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(م) - ق(٠)}{م}$

$= \frac{-٥}{٢} \times$ ق$'$(٠) $= \frac{-٥}{٢} \times -٦ = ١٥$

---

١١) إذا كان ق$'$(٤) = ٦ ، جد

$\underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

الحل :

$\underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤)}{هـ} - \underset{هـ \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٤ + ٥هـ) - ق(٤)}{هـ}$

$\boxed{م = -٢هـ \longrightarrow هـ = \frac{م}{-٢}}$

$= \underset{م \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٤ + م) - ق(٤)}{\frac{م}{-٢}} = -٢$ ق$'$(٤)

$\boxed{ن = ٥هـ \longrightarrow هـ = \frac{ن}{٥}}$

$= \underset{ن \to ٠}{نهــا} \frac{ق(٤ + ن) - ق(٤)}{\frac{ن}{٥}} = -٥$ ق$'$(٤)

$\boxed{\begin{array}{l} -٢ \text{ ق}'(٤) - ٥ \text{ ق}'(٤) = -٧ \text{ ق}'(٤) \\ = -٧ \times ٦ = -٤٢ \end{array}}$

١٢) إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فأثبت أن :

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-٢\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤\,\text{ق}'(\text{س})$$

الحل : البرهان : بطرح وإضافة ق(س) في البسط

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-٢\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-٢\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-٢\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

* بفرض أن ل = ٢هـ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{\text{ل}}{٢}$

عندما ل ← ٠ فإن هـ ← ٠

* بفرض أن و = -٢هـ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{-\text{و}}{٢}$

عندما و ← ٠ فإن هـ ← ٠

$$= \underset{\text{ل}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\frac{\text{ل}}{٢}} + \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}+\text{و})}{\frac{-\text{و}}{٢}}$$

$$= ٢\underset{\text{ل}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{ل}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ل}} + \underset{\text{و}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{و}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{و}}$$

$$= ٢\,\text{ق}'(\text{س}) + ٢\,\text{ق}'(\text{س}) = ٤\,\text{ق}'(\text{س})$$

---

١٣) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢(\text{س}+\text{هـ}) - \text{جا}^٢(\text{س})}{\text{هـ}}$ تساوي :

الحل : ق(س) = $\text{جا}^٢\text{س}$

ق'(س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢س

---

١٤) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}+\text{هـ})^٣ - \text{س}^٣}{\text{هـ}}$ تساوي :

الحل : ق(س) = $\text{س}^٣$

ق'(س) = $٣\text{س}^٢$

---

١٥) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{(٢+\text{هـ})^٥ - ٣٢}{\text{هـ}}$:

الحل : = $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{(٢+\text{هـ})^٥ - (٢)^٥}{\text{هـ}}$ تساوي :

ق(س) = $\text{س}^٥$

ق'(س) = $٥\text{س}^٤$

ق'(٢) = ٥ × ١٦ = ٨٠

---

١٦) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٧(١+\text{هـ})^٨ - ٧}{\text{هـ}}$:

الحل : = $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٧(١+\text{هـ})^٨ - ٧(١)^٨}{\text{هـ}}$

ق(س) = $٧\text{س}^٨$

ق'(س) = $٥٦\text{س}^٧$

ق'(١) = ٥٦

---

١٧) إذا كان ق(٠) = ٨ ، ق'(٠) = ٣ ، جد

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}) - ٨}{\text{س} - ٢}$$:

الحل : $$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}) - \text{ق}(\text{جتا}\frac{\pi}{٢})}{\text{س} - ٢}$$

$$= \text{ق}'(\text{جتا}\frac{\pi}{٢}) \times -\text{جا}\frac{\pi}{٢} \times \frac{-\pi}{٤}$$

$$= \text{ق}'(٠) \times -١ \times \frac{-\pi}{٤} = \frac{٣\pi}{٤}$$

*** إثبات النظريات للوحدة الثانية :**

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، أثبت أن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{صفر}$

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{٠}{\text{ع} - \text{س}} = ٠$

٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})$ ، أثبت أن $\text{دَ}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{قَ}(\text{س})$ حيث جـ ثابت :

الحل : $\text{دَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جـ}\,\text{ق}(\text{ع}) - \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{جـ} \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{جـ}\,\text{قَ}(\text{س})$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$ ، أثبت أن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{لَ}(\text{س}) + \text{هـَ}(\text{س})$:

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) + \text{هـ}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{لَ}(\text{س}) + \text{هـَ}(\text{س})$

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{م}(\text{س})}$ ، $\text{م}(\text{س}) \neq ٠$ ، أثبت أن

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-\text{أ}\,\text{مَ}(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$:

الحل : باستخدام قاعدة القسمة

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{م}(\text{س}) \times ٠ - \text{أ} \times \text{مَ}(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

$= \frac{-\text{أ} \times \text{مَ}(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد موجب أثبت أن

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$:

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}^{\text{ن}-١} + \text{ع}^{\text{ن}-٢} \times \text{س}^{١} + \text{ع}^{\text{ن}-٣} \times \text{س}^{٢} + ... + \text{س}^{\text{ن}-١})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{س}^{\text{ن}-١} + \text{س}^{\text{ن}-١} + ... + \text{س}^{\text{ن}-١} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح سالب أثبت أن

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$:

الحل : نفرض أن $\text{ن} = -\text{م}$ ، م صحيح موجب

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-١ \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{(\text{س}^{\text{م}})^{٢}} = \frac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{\text{س}^{٢\text{م}}}$

$= -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١-٢\text{م}} = -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-١} = -\text{م}\,\text{س}^{\text{ن}-١} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

٧) إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ ، $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ عدد نسبي أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}-١}$:

الحل : $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ $\quad \text{ص}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن}}$ (نرفع للقوة م)

$\text{م}\,\text{ص}^{\text{م}-١}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{س}^{\text{ن}-١})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}}{\text{م}\,\text{ص}^{\text{م}-١}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\frac{\text{س}^{\text{ن}-١}}{(\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}})^{\text{م}-١}}$

$= \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\frac{\text{س}^{\text{ن}-١}}{\text{س}^{\text{ن}-\frac{\text{ن}}{\text{م}}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\text{ن}-١-\text{ن}+\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

$= \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}-١}$

٨) إذا كان $ق$(س) قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$ ، أثبت أنه يكون متصلاً عند س = $س_١$:

الحل:

$$ق(س) - ق(س_١) = \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times (س - س_١)،\ س \neq س_١$$

$\Longleftarrow$ بأخذ النهاية للطرفين : (عند س $\leftarrow$ $س_١$)

$$\lim_{س \leftarrow س_١} (ق(س) - ق(س_١))$$

$$= \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times \lim_{س \leftarrow س_١} (س \times س_١)$$

$$= \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س_١) = ق'(س_١) \times ٠$$

$$= \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - ق(س_١) = ٠$$

$$= \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) = ق(س_١)$$

$\therefore$ $ق$(س) متصل عند $س_١$ لأن النهاية = الصورة

* حصاد التفاضل :

* مقدار التغير في السينات : Δ س = هـ

Δ س = $\text{س}_٢$ − $\text{س}_١$

* مقدار التغير في الاقتران : Δ ص

Δ ص = $\text{ص}_٢$ − $\text{ص}_١$

Δ ق(س) = ق($\text{س}_٢$) − ق($\text{س}_١$)

$\boxed{\Delta\ \text{ق(س)} = \text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}$

تستخدم إذا لم تعطى قيم س أو إذا أعطيت قيم (Δ س ، هـ)

* معدل التغير : $\frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}}$

* أسماء أخرى لمعدل التغير : (ميل القاطع = $\frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}}$)

* السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta\ \text{ف}}{\Delta\ \text{ن}}$ = $\frac{\text{ف}(\text{ن}_٢) - \text{ف}(\text{ن}_١)}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١}$

إذا لم تعطى قيم س وعرفت (هـ = Δ س) فإن معدل التغير يساوي : $\frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}} = \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

* ملاحظات هامة :

١. معدل التغير للثابت = صفر
٢. معدل التغير للخطي = معامل س
٣. معدل التغير يتوزع على الجمع والطرح فقط
٤. أي شيء خارج الملاحظات على الأصل دوّر

* تعريف المشتقة الأولى :

ق′(س) = نهـا معدل التغير

ق′(س) = $\lim_{\Delta\text{س} \to ٠} \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}}$

Δ س = Δ س
Δ س = هـ
Δ س = ع - س

ق′(س) = $\frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$

ق′(س) = $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$ ....هام

* قواعد الاشتقاق :

① مشتقة الثابت = صفر

② مشتقة أس = أ

③ مشتقة أ$\text{س}^{\text{ن}}$ = أ × ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

④ مشتقة جمع وطرح الاقترانات (دون خوف)

ق(س) = هـ(س) + ل(س) − ع(س)

ق′(س) = هـ′(س) + ل′(س) − ع′(س)

⑤ مشتقة ضرب اقترانين : ق ٠ هـ

(الأول يبقى) (نشتق الثاني) + (الثاني يبقى) (نشتق الأول)

ق(س) × هـ′(س) + هـ(س) × ق′(س)

⑥ مشتقة قسمة اقترانين :

أ) $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ⇐ $\frac{\text{(مشتقة البسط × المقام) - (مشتقة المقام × البسط)}}{(\text{المقام})^٢}$

ب) $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ ⇐ $\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت}}$

جـ) $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ ⇐ $\frac{\text{- الثابت × مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^٢}$

⑦ مشتقة $(\text{اقتران})^{\text{قوة}}$:

$(\text{هـ(س)})^{\text{ن}}$ ⟵ ن $(\text{هـ(س)})^{\text{ن}-١}$ × هـ′(س))

ننزل القوة الحشوة كما هي (القوة – ١) × المشتقة الحشوة

⑧ الجذور رمز الجذور التربيعية تقود إلى أصلها

$\sqrt[\text{ج}]{(\ )^{\text{ن}}} = (\ )^{\frac{\text{ن}}{\text{ج}}}$

⑨ مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{٢ \times \sqrt{\text{نفسه}}}$

⑩ ثابت × اقتران ⟸ الثابت × مشتقة الاقتران

(٥ هـ(س) ⟵ ٥ هـ′(س))

($\frac{١}{٢}$ ل(س) ⟵ $\frac{١}{٢}$ ل′(س))

* لا تنسى دائماً :

نفك $\xrightarrow{\text{ثم}}$ نشتق

ق^{2}(س) ⟵ (ق(س))^{2} ⟵ ٢(ق(س))^{1} × ق َ(س))

هـ^{3}(س) ⟵ (هـ(س))^{3} ⟵ ٣(هـ(س))^{2} × هـ َ(س))

هـ^{ن}(س) ⟵ (هـ(س))^{ن} ⟵ ن(هـ(س))$^{ن-1}$ × هـ َ(س))

١١. مشتقة الاقترانات الدائرية :

١) جا(هـ(س)) ⟵ جتا(هـ(س)) × هـ َ(س)

٢) جتا(هـ(س)) ⟵ -جا(هـ(س)) × هـ َ(س)

٣) ظا(هـ(س)) ⟵ قا^{2}(هـ(س)) × هـ َ(س)

٤) ظتا(هـ(س)) ⟵ - قتا^{2}(هـ(س)) × هـ َ(س)

٥) قا(هـ(س)) ⟵ قا(هـ(س)) ظا(هـ(س)) × هـ َ(س)

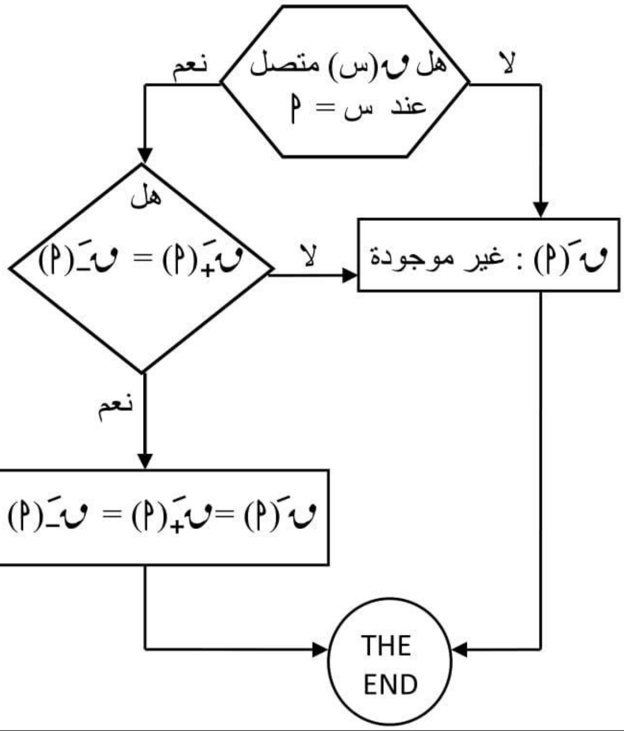
٦) قتا(هـ(س)) ⟵ -قتا(هـ(س)) ظتا(هـ(س)) × هـ َ(س)

مشتقة الاقتران المتشعب :

١) نشتق كل قاعدة على حدي ثم نزيل إشارة المساواة عند الفترات (المتباينات) .

٢) المشتقة عند الأطراف غير موجودة .

٣) المشتقة عند نقاط التحول :



* سيناريو المطلق والأكبر عدد صحيح :

① ق َ(س) نعيد التعريف الكامل .

② ق َ(م)

١. المجموعة الأولى : الاتصال

ق(م) =

نهـا ق(س) = (س ← م)

تم

٢. المجموعة الثانية : الاشتقاق

ق َ+(م) =

ق َ-(م) =

③ ق َ(م)

وحيد ، دوائر فقط

* المطلق : نعوض فيه فإذا كان :

١. ناتج التعويض موجب ننزل الحشوة ثم نشتق .

٢. ناتج التعويض سالب ننزل عكس الإشارة ثم نشتق.

٣. صفر : غير موجودة .

٤. الصحيح : صحيح ⟵ المشتقة غير موجودة ؛ كسر ⟵ المشتقة صفر

* المشتقات العليا :

ق َ(س) = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ق$^{(1)}$(س) = المشتقة الأولى

ق ً(س) = $\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{دس}^{2}}$ = ق$^{(2)}$(س) = المشتقة الثانية

ق ًَ(س) = $\frac{\text{د}^{3}\text{ص}}{\text{دس}^{3}}$ = ق$^{(3)}$(س) = المشتقة الثالثة

ق ًً(س) = $\frac{\text{د}^{4}\text{ص}}{\text{دس}^{4}}$ = ق$^{(4)}$(س) = المشتقة الرابعة

* ق(س) ⟵ ق َ(س) ⟵ ق ً(س) ⟵ ق ًَ(س) ⟵ ق$^{(4)}$(س)

* ق$^{(9)}$(س) ⟵ ق$^{(10)}$(س)

ملاحظات :

* كلمة أصفار : تعني جيب التي بعدها وساويها بالصفر .
* أصفار المشتقة الأولى ⟵ ق'(س) = ٠
* أصفار ق(س) ⟵ ق(س) = ٠
* صفر ، حل ،وجذر تعامل نفس المعاملة .

* الإثبات :

١) الطرف الأيمن ⟵ الطرف الأيسر

الطرف الأيسر ⟵ الطرف الأيمن

$\left.\begin{array}{r}\text{الطرف الأيمن}\\ \text{الطرف الأيسر}\end{array}\right\}$ مقدار نفسه

نبدأ بالطرف الذي فيه مشتقات ثم نميز مقاديره ثم نبدأ بعملية التجميع .

* النهاية التي تشبه المشتقة : (مشتقة ما بعد السالب)

$$\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع) - ق(س)}}{\text{ع - س}} = \text{ق}'(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{م}} \frac{\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}'(\text{م})}{\text{م - س}} = -\,\text{ق}''(\text{م})$$

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق(س + م هـ) - ق(س)}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{م}}{\text{ب}}\,\text{ق}'(\text{س})$$

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق(ب) - ق(ب + هـ)}}{\text{هـ}} = -\,\text{ق}'(\text{ب})$$

حذاري من التعويض المباشر أولاً ثم القاعدة وحذاري من الترتيب

$$\lim_{\text{س} \to \text{م}} \frac{\text{ق(س) - ق(ب)}}{\text{س - ب}} = \text{تعويض مباشر}$$

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(2-\text{هـ})^5 - 32}{\text{هـ}} \quad \text{استخدم هوبيتال (دوائر)}$$

$$= \frac{5(2-\text{هـ})^4 \times -1 - 0}{1} = -5 \times 16 = -80$$

* إذا تم لمح هـ فإننا نشتم رائحة المشتقة الأولى .
* إذا وجد مقدارين بـ هـ نطرح ونضيف .

قاعدة السلسلة :

ص ⟸ ع ⟸ س

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \qquad , \qquad \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} =$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$ (انتبه للكسر الأصلي)

مشتقة (فلاح) بالنسبة لـ(محمد)

ص = (فلاح) ، ع = محمد

نجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\quad} \times \frac{\quad}{\text{ءع}}$

* أثبت باستخدام السلسلة :

نفرض ع = تحت القوة ، تحت الجذر ، الزاوية

هام : يجب أن نميز بين :

$\text{ق}^{(2)}(\text{س})$ نشتق ⟵ $\text{ق}^{(3)}(\text{س})$

$\text{ق}^{2}(\text{س})$ نجهز نفك ⟵ $(\text{ق(س)})^2$ ⟵ $2(\text{ق(س)}) \times \text{ق}'(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}^2)$ ⟵ $\text{ق}'(\text{س}^2) \times 2\text{س}$ ⟵ لا تنسى

* الاشتقاق الضمني : عندما نشتق ص نضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\text{س}^2 + \text{ص}^2$ ⟵ $2\text{س} + 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\text{س}^2 \times \text{ص}^3$ ⟵ $\text{س}^2 \times 3\text{ص}^2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}^3 \times 2\text{س}$

لإيجاد المشتقة الثانية الضمنية نجد المشتقة الأولى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ثم نشتق مرة أخرى ثم نعوض مكان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فيها .

* انتبه في بعض الإثبات الضمني وذلك في الاشتقاق مرتين دون وجود وإيجاد صَ أولاً وهذه الحالة منطبقة على الضرب والجذور

* مشتقة التركيب : (ق o هـ) (س)

(ق o هـ) (س) = ق (هـ(س))

(ق o هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

(هـَ o ق)َ(أ) = هـً(ق(أ)) × قَ(أ)

أولاً نجهز المتوقعات لـ ق ، هـ في عدد المشتقات ثم نبدأ بالحل

(ق o هـَ)ً(أ)

نجد المشتقة الأولى فقط : قَ(هـَ(أ)) × هـً(أ)

نجد المشتقة الثانية حاصل ضرب ثم نعوض .

قَ(هـَ(أ)) × هـًّ(أ) + هـً(أ)) × قً(هـَ(أ)) × هـً(أ)

ص = ٣ع^{٢} + ٢ع و ع تعتمد على س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{٦ع} + ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} + ٢ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤ن} + ٥$ ، ن تعتمد على س

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٤ \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}$