الوحدة الثانية
التفاضل
ثاني ثانوي علمي
حل أسئلة الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩ ٥٩٠٧١

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ – س ، فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق إذا تغيرت س من :

أ) ٣ إلى ٤ ب) $س_{١}$ = ٢ إلى $س_{٢}$ = ٢ + هـ

٢) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ – ٣ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (١) إلى (١ + هـ).

٣) تحرك جُسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (٢، ٥). إذا كانت Δس = ١,٠ ، Δ ص = ٠,٦ فجد إحداثيي النقطة أ.

٤) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٦سم إلى ٦,١ سم، فَجِد معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها.

٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [–١ ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ٤ $س^{٢}$ – ٣ق(س) على الفترة نفسها .

٦) قُذف جسم رأسيًا للأعلى بحيث يكون بُعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بَعد (ن) ثانية معطىً بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن – ٥$ن^{٢}$ جد:

أ) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥].

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة Δ ن ؛ إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن.

اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، جد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = $ق^{٢}$(س) على الفترة [١ ، ٤] .

كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، و كان معدل تغيره على رة [٥ ، ٩] يساوي ١٤، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٩].

Scanned by CamScanner

٩) إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد ق(١).

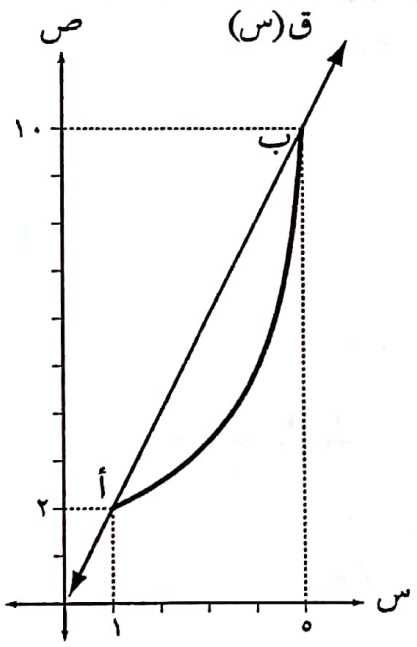
١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |٢س - ٣| & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ [س + ١] & ، \quad ٢ \leq س < ٦ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

١١) إذا كان ق(س) = $(س^{٢} + س)^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $س_{٢}$ يساوي $(-\frac{١}{٣})$ ، فجد قيمة $س_{٢}$ حيث $س_{٢} > ٠$

١٢) يمثل الشكل (٢-٢) منحنى الاقتران ق على الفترة [١، ٥] .

جد ميل العمودي على القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$.



الشكل (٢-٢)

Scanned by CamScanner

معدل التغير

١ المطلوب مقدار التغير في قيمة الاقتران = $\Delta ص$.

أ) $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ٤$

$\Delta ص = ن(٤) - ن(٣)$

$= ٤^٢ - ٤ - (٣^٢ - ٣)$

$= ١٢ - ٦ = ٦$.

ب) $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٢ + هـ$

$\Delta ص = ن(٢ + هـ) - ن(٢)$

$= (٢ + هـ)^٢ - (٢ + هـ) - (٢^٢ - ٢)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢$

$= ٣هـ + هـ^٢$.

٢ $ن(س) = س^٢ - ٣$ ، $س_١ = ١$

$س_٢ = ١ + هـ$.

معدل التغير $= \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ن(١ + هـ) - ن(١)}{١ + هـ - ١}$

$= \frac{(١ + هـ)^٢ - ٣ - (١^٢ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ٣ + ٢}{هـ}$

$= \frac{٢هـ + هـ^٢}{هـ}$

$= \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢ + هـ$.

٣ $س$ م $(س، ص)$ ، ب $(٢، ٥)$

$\Delta س = او$ ، $\Delta ص = ٦$. جد م ؟

$\Delta س = س_٢ - س_١$

$او = ٢ - س$

$س = ٢ - او$

$س = ٩و١$

$\Delta ص = ٥ - ص$

$٦ = ٥ - ص$

$ص = ٥ - ٦$

$ص = ٤و٤$

$\therefore$ م $(٩و١ ، ٤و٤)$

٤ $س_١ = ٦$ ، $س_٢ = ١و٦$

المساحة = (الضلع)^٢

م $= س^٢$.

معدل التغير $= \frac{\Delta م}{\Delta س}$

$= \frac{م(١و٦) - م(٦)}{١و٦ - ٦} = \frac{٤١و٢٧ - ٣٦}{او}$

$= \frac{٤١و١}{١٠} = ١و٤١$.

٥ معدل تغير $ن = \frac{ن(٢) - ن(-١)}{٢ - -١}$

$٥ = \frac{ن(٢) - ن(-١)}{٣}$

$\boxed{١٥ = ن(٢) - ن(-١)}$

معدل تغير $هـ = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٢ - -١}$

Scanned by CamScanner

تابع س٥

معدل تغير الاقتران هـ $= \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٣}$

$= \frac{٤ \times ٤ - ٣ و(٢) - (٤ - ٣ و(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٣ و(٢) - ٤ + ٣ و(-١)}{٣}$

$= \frac{١٢ - ٣(و(٢) - و(-١))}{٣}$

$= \frac{١٢ - ١٥ \times ٣}{٣} = \frac{١٢ - ٤٥}{٣} = \frac{-٣٣}{٣} = -١١$

س٦ $ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢$

أ) السرعة المتوسطة $= \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{٦٠ \times ٥ - ٥ \times ٢٥ - (٦٠ \times ٢ - ٥ \times ٤)}{٣}$

$= \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) السرعة المتوسطة $= \frac{ف(٥ن) - ف(ن)}{٥ن}$

$= \frac{٦٠ \times ٥ن - ٥(٥ن)^٢ - صفر}{٥ن}$

$= \frac{٥ن(٦٠ - ٥ \times ٥ن)}{٥ن}$

$= ٦٠ - ٢٥ن$

س٧ معدل تغير و $= \frac{و(٤) - و(١)}{٤ - ١}$

$٣ = \frac{و(٤) - و(١)}{٣}$

$٩ = و(٤) - و(١)$

معدل تغير هـ $= \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{(و(٤))^ج - (و(١))^ج}{٣}$ فرق بين مكعبين

$= \frac{(و(٤) - و(١))((و(٤))^٢ + و(١) و(٤) + (و(١))^٢)}{٣}$

$= \frac{٩ \times ٢}{٣} = ٦$

س٨ معدل تغير و $= \frac{و(٥) - و(٢)}{٥ - ٢}$ [٥،٢]

$٧ = \frac{و(٥) - و(٢)}{٣}$

$١٢ = و(٥) - و(٢)$

معدل تغير و $= \frac{و(٩) - و(٥)}{٩ - ٥}$ [٩،٥]

$١٤ = \frac{و(٩) - و(٥)}{٤}$

$٥٦ = و(٩) - و(٥)$

Scanned by CamScanner

تابع س٨

$$\frac{\text{ق}(٣)-\text{ق}(٥)}{٢} + \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(٩)}{٥٦} = \frac{\text{ق}(٩)-\text{ق}(٢)}{٧٧}$$

المطلوب معدل تغير ق في الفترة $[٢، ٩]$

$$\frac{\text{ق}(٩)-\text{ق}(٢)}{٩-٢} = \frac{٧٧}{٧} = ١١$$

س٩ ميل القاطع $= \frac{\text{ق}(٢)-\text{ق}(١)}{٢-١}$

$$\frac{\text{ق}(١)-٤}{١} = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{ق}(١)-٤ = -١$$

$$\text{ق}(١) = ٤-١ = ٣$$

س١٠ معدل التغير $= \frac{\text{ق}(٤)-\text{ق}(١)}{٤-١}$

$$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

س١١ $\text{س}_{١} = ١$ و $\text{س}_{٢} = \text{س}_{٣} = \text{س}_{٤}$ و $\text{ق}' = -\frac{١}{٣}$

$$\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١}) = -\frac{١}{٣}$$

$$(\text{س}_{٢}^{٢} + ٢\text{س}_{٢})^{-١} - ٢^{-١} = -\frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + ٢\text{س}_{٢}} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{\text{س}_{٢}^{٢} + ٢\text{س}_{٢}} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$$

$$\Leftarrow \text{س}_{٢}^{٢} + ٢\text{س}_{٢} = ٦$$

$$\text{ص}_{٢}^{٢} + ٢\text{ص}_{٢} - ٦ = \text{صفر} \Leftarrow (\text{ص}_{٢}+٣)(\text{ص}_{٢}-٢) = \text{صفر}$$

$\text{س}_{٢} = -٣$ و $\text{ص}_{٢} = ٢$

لكن $\text{س}_{٢} > \text{صفر} \Leftarrow \text{ص}_{٢} = ٢$

س١٢ ميل القاطع $= \frac{\text{ق}(٥)-\text{ق}(١)}{٥-١}$

$$= \frac{١٠-٢}{٤}$$

$$= \frac{٨}{٤} = ٢$$

فيكون ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$.

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = س^{٣} + س^{٢} ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د) ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ < س \geq ٣ \\ ٥س - ٩ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = |س^{٢} − ٤| ، س = ١ ، س = ٢

و) ص = $\frac{٢س}{س + ٣}$ ، س = −١

٢) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ) ص = س^{٢} − $\frac{٤}{س}$ ، س ≠ ٠

ب) ص = $\sqrt{٢س - ٦}$ ، س > ٣

جـ) ص = س^{٣}

د) ص = $\sqrt[٣]{س}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

أ) نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(س+هـ) - ق(س-هـ)}{هـ}$ = ٢قَ(س)

ب) نهـا$_{ع \to س}$ $\frac{ع\ ق(س) - س\ ق(ع)}{ع - س}$ = ق(س) − س قَ(س)

Scanned by CamScanner

جـ) $\lim_{ع \to س} \frac{٣ ع ق(ع) - ٣س ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣س قَ(س)$

٤) إذا كان قَ(٥) = ٦ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٥ - ٢هـ) - ق(٥ + ٤هـ)}{هـ}$

٥) إذا كان ق(س) = (س – أ) ل(س) ، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، أ ثابت، فبيِّنْ باستخدام تعريف المشتقة أن قَ(أ) = ل(أ) .

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظًا على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

٧) إذا كان معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^{٢}هـ – ٣س هـ^{٢})، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد قَ (–٢).

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظًا على شكله، جد معدّل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتَيْ طولٍ.

٩) أثبت أنَّ معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

Scanned by CamScanner

أ) $م(س) = ٨ - ٥س$

$$م'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(٣+هـ) - م(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٥(٣+هـ) - (٨ - ٥\times٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ - ٨ + ١٥}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$$

ب) $م(س) = س^٣ + س^٤$ ، $س = -١$

$$م'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{م(س) - م(-١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٣ + س^٤ - ((-١)^٣ + ١)}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٣ + س^٤}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{س^٤(س+١)}{س+١}$$

$$= \lim_{س \to -١} س^٤$$

$$= (-١)^٤$$

$$= ١$$

جـ) $ل(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $س \geq ١$ ، $س = ٥$

$$ل'(٥) = \lim_{س \to ٥} \frac{ل(س) - ل(٥)}{س - ٥}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س-١} + ٢}{\sqrt{س-١} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س-١} + ٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$$

د) $ع(٠)$ ، $ع(٦)$ غير معرفة $\Rightarrow ع'(٠)$ ، $ع'(٦)$ غير موجودة

$$ع'(٣)^+ = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ع(س) - ع(٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ٩ - ٦}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س-٣)}{س-٣} = ٥$$

$$ع'(٣)^- = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س-٣)(س+٢)}{س-٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} س + ٢ = ٥$$

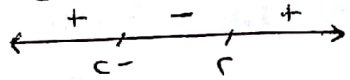
$ع'(٣)^+ = ع'(٣)^-$

$\Rightarrow ع'(٣) = ٥$

Scanned by CamScanner

تابع س١

هـ) $س^٤ - ٤ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$



$|س^٤ - ٤| = \begin{cases} س^٤ - ٤ & ، س < -٢ \text{ أو } س \geq ٢ \\ ٤ - س^٤ & ، -٢ \leq س < ٢ \end{cases}$

$ل'(١) = \text{نها}_{س \to ١} \frac{ل(س) - ل(١)}{س - ١}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٤ - س^٤ - ٣}{١ - س} = \text{نها}_{س \to ١} \frac{١ - س^٤}{١ - س}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{(١ - س)(١ + س)}{١ - س}$ (١)

$= \text{نها}_{س \to ١} (١ + س) = ٢$

$ل'(٢)^+ = \text{نها}_{س \to ٢^+} \frac{س^٤ - ٤ - ٠}{س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٢ + ٢ = ٤$.

$ل'(٢)^- = \text{نها}_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^٤ - ٠}{س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٢^-} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س - ٢}$ (-١)

$= -(٢ + ٢) = -٤$.

$ل'(٢)^+ \neq ل'(٢)^-$

$\Leftarrow ل'(٢)$ غير موجودة

و) $ق(س) = \frac{س^٢}{س + ٣}$ ، $س = -١$

$ق'(-١) = \text{نها}_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{س+٣} - \frac{-٢}{٢}}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{\frac{٢س}{س+٣} + ١}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{٣س^٢ + ٢س + ٣}{س + ٣} \times \frac{١}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{٣(س + ١)}{س + ٣} \times \frac{١}{س + ١}$

$= \frac{٣}{٢}$.

ز) $ص = س^٤ - \frac{٤}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^٤ - \frac{٤}{ع} - س^٤ + \frac{٤}{س}}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^٤ - س^٤}{ع - س} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{س} - \frac{٤}{ع}}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤ع - ٤س}{ع س (ع - س)} \times \frac{١}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} (ع + س) + \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤}{ع س} \times \frac{١}{ع - س}$

$= (س + س) + \frac{٤}{س^٢}$

$= ٢س + \frac{٤}{س^٢}$.

Scanned by CamScanner

س ب) ص = $\sqrt{٦-٢س}$ ، س < ٣

$\frac{دص}{دس}$ = نهاـ $\frac{\sqrt{٦-٢ع} - \sqrt{٦-٢س}}{ع - س}$ × $\frac{\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س}}{\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س}}$

ع→س

= نهاـ $\frac{٦-٢ع - ٦+٢س}{(ع-س)(\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س})}$

ع→س

= نهاـ $\frac{-٢(ع-س)}{(ع-س)(\sqrt{٦-٢ع} + \sqrt{٦-٢س})}$ × $\frac{١}{\sqrt{٦-٢س} + \sqrt{٦-٢س}}$

ع→س

= $\frac{١}{\sqrt{٦-٢س}}$.

جـ) ص = $س^{٣}$

$\frac{دص}{دس}$ = نهاـ $\frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$

ع→س

= نهاـ $\frac{(ع-س)(ع^{٢} + سع + س^{٢})}{ع - س}$

ع→س

= $س^{٢} + س^{٢} + س^{٢} = ٣س^{٢}$.

د) ص = $\sqrt[٣]{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = نهاـ $\frac{\sqrt[٣]{ع} - \sqrt[٣]{س}}{ع - س}$ ×

ع→س

$\frac{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}{\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$\frac{دص}{دس}$ = نهاـ $\frac{ع - س}{(ع-س)(\sqrt[٣]{ع^{٢}} + \sqrt[٣]{ع} \times \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}})}$

ع→س

= $\frac{١}{٣(\sqrt[٣]{س})^{٢}}$.

س ٣ ب) طرح واضافة ه(س)

نهاـ $\frac{ه(س+هـ) - ه(س) + ه(س) - ه(س-هـ)}{هـ}$

هـ→٠

نهاـ $\frac{ه(س+هـ) - ه(س)}{هـ}$ + نهاـ $\frac{ه(س) - ه(س-هـ)}{هـ}$

هـ→٠ هـ→٠

س - هـ = ص ، س = هـ + ص

عندما هـ→٠ فإن ص→س

نهاـ $\frac{ه(ا+هـ) - ه(ا)}{هـ}$ + نهاـ $\frac{ه(ص+هـ) - ه(ص)}{هـ}$

هـ→٠ هـ→٠

ه′(س) + ه′(ص) = ه′(س) + ه′(س)

= ٢ه′(س) .

ب) طرح واضافة سـ ه(س) .

نهاـ $\frac{ع ه(س) - س ه(ا) + س ه(ا) - س ه(ع)}{ع - س}$

ع→س

نهاـ $\frac{ه(س)(ع-س)}{ع-س}$ + نهاـ $\frac{س(ه(ا) - ه(ع))}{ع - س}$

ع→س ع→س

= ه(س) + س × - ه′(س)

= ه(س) - س ه′(س) .

Scanned by CamScanner

س٣ ب) طرح واضافة ٣س د(ع).

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع د(ع) - ٣س د(ع) + ٣س د(ع) - ٣س د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٣ \frac{د(ع)(ع - س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} ٣س \frac{(د(ع) - د(س))}{ع - س}$$

$$= ٣ د(س) + ٣س \times د'(س) .$$

س٤ طرح واضافة د(٥) .

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥ - ٢هـ) - د(٥) + د(٥) - د(٥ + ٤هـ)}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥ - ٢هـ) - د(٥)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥) - د(٥ + ٤هـ)}{هـ}$$

نفرض $-٢هـ = و$ ، $٤هـ = م$

$$\Leftarrow هـ = \frac{-و}{٢} = \frac{م}{٤}$$

$هـ \to ٠ \Rightarrow و \to ٠$ ، $هـ \to ٠ \Rightarrow م \to ٠$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{د(٥ + و) - د(٥)}{\frac{-و}{٢}} + \lim_{م \to ٠} \frac{د(٥) - د(٥ + م)}{\frac{م}{٤}}$$

$$-٢ \lim_{و \to ٠} \frac{د(٥ + و) - د(٥)}{و} - ٤ \lim_{م \to ٠} \frac{د(٥ + م) - د(٥)}{م}$$

$$= -٢ \times د'(٥) - ٤ \times د'(٥)$$

$$-٦ \times د'(٥) \quad \text{لكن } د'(٥) = ٦$$

$$-٦ \times ٦ = -٣٦$$

س٥ $د'(ع) = \lim_{س \to ع} \frac{د(س) - د(ع)}{س - ع}$

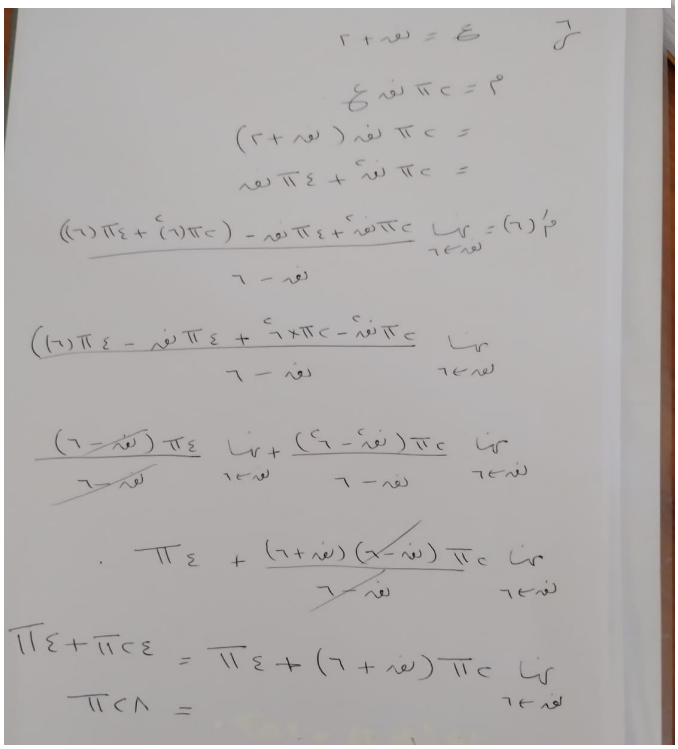
$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) ك(س) - (ع - ٢) ك(ع)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) ك(س)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} ك(س)$$

$$= ك(٢) .$$

س٦ ع = نهـ + ٢ .



Scanned by CamScanner

المشتقة الأولى

٧ مقدار التغير $= 6x^2h - 3xh^2$

معدل التغير $= \frac{\text{مقدار التغير}}{h}$

$= \frac{6x^2h - 3xh^2}{h}$

$= \frac{h(6x^2 - 3xh)}{h}$

$= 6x^2 - 3xh$

$\text{مـ}'(x) = $ نهـا معدل التغير $_{h \to 0}$

$= $ نهـا $(6x^2 - 3xh)_{h \to 0}$

$\text{مـ}'(x) = 6x^2$

$\text{مـ}'(-2) = 6 \times 4 = 24$

٨ $\text{ع} = s^3$

$\text{ع}'(2) = $ نهـا $\frac{s^3 - 2^3}{s - 2}$ $_{s \to 2}$

$= $ نهـا $\frac{(s-2)(s^2 + 2s + 4)}{s - 2}$ $_{s \to 2}$

$= s^2 + 2s + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

٩ $\text{ع} = \frac{4}{3}\pi \text{نق}^3 \leftarrow$ حجم الكرة

$\text{ع}' = $ نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi s^3 - \frac{4}{3}\pi \text{ع}^3}{s - \text{ع}}$ $_{s \to \text{ع}}$

$= $ نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi (s^3 - \text{ع}^3)}{s - \text{ع}}$ $_{s \to \text{ع}}$

$= $ نهـا $\frac{\frac{4}{3}\pi (s - \text{ع})(s^2 + s\text{ع} + \text{ع}^2)}{s - \text{ع}}$ $_{s \to \text{ع}}$

$= $ نهـا $\frac{4}{3}\pi (s^2 + s\text{ع} + \text{ع}^2)$ $_{s \to \text{ع}}$

$= \frac{4}{3}\pi (\text{ع}^2 + \text{ع}^2 + \text{ع}^2)$

$= \frac{4}{3}\pi \times 3\text{ع}^2$

$= 4\pi \text{ع}^2$ مساحة سطح الكرة.

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = $\frac{س}{س-١}$ ، س = ١

ب) ع(س) = (س − ٢)[س] ، س = ٢

جـ) ل(س) = [٣ − ٢س] ، س = $\frac{١}{٤}$ ، س = − ١

د) ك(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، \ ٠ \geq س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ، \ ٣ < س \geq ٥ \end{cases}$ س = ٠ ، س = ٣، س = ٥

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، \ س \neq ٩ \\ ٦ & ، \ س = ٩ \end{cases}$

فجد قَ(٩) إن وُجدت.

٣) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، \ س \geq ١ \\ ٢س + أ & ، \ س < ١ \end{cases}$

اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ١ ، فَجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -١ - ٢س & ، \ س < -١ \\ س^{٢} & ، \ -١ \leq س \leq ١ \\ س & ، \ س > ١ \end{cases}$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، \ س < ٢ \\ ٢س - س^{٢} & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ع للاشتقاق عند س = ٢

Scanned by CamScanner

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٠ & ، \quad س \geq ٠ \\ ٥ - س & ، \quad ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{٥ - س} & ، \quad س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ (س).

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\, س \,] & ، \quad ١ \leq س < ٢ \\ |س - ٣| & ، \quad ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

Scanned by CamScanner

أ) $ق(س) = \frac{س}{س-1}$ ، $س = 1$

$ق$ غير متصل عند $س = 1$ لذلك $ق$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$

ب) $ع(س) = (س-2)[س]$ ، $س = 2$

$ل = 1$

$[س] = \begin{cases} 1 & ، 1 \leq س < 2 \\ 2 & ، 2 \leq س < 3 \end{cases}$

$ع(س) = \begin{cases} (س-2) & ، 1 \leq س < 2 \\ 2(س-2) & ، 2 \leq س < 3 \end{cases}$

نبحث الاتصال عند $س = 2$

1) $ع(2) =$ صفر

2) $\lim_{س \to 2^+} ع(س) =$ صفر

$\lim_{س \to 2^-} ع(س) =$ صفر

$\Rightarrow \lim_{س \to 2} ع(س) =$ صفر

3) $\lim_{س \to 2} ع(س) = ع(2)$

$\therefore ع(س)$ متصل عند $س = 2$

$ع'(س) = \begin{cases} 1 & ، 1 < س < 2 \\ 2 & ، 2 < س < 3 \end{cases}$

$ع'(2)^+ = 2$

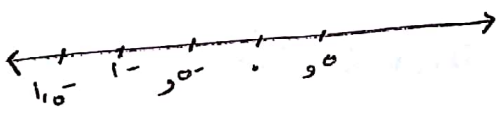
$ع'(2)^- = 1$

$\Rightarrow ع'(2)$ غير موجودة

لأن $ع'(2)^+ \neq ع'(2)^-$.

ج) $ل(س) = [3 - 2س]$ ، $س = \frac{1}{2}$ ، $س = -1$

$ل = \frac{1}{2}$



$ل(س) = \begin{cases} 5 & ، -1.5 < س \leq -1 \\ 4 & ، -1 < س \leq -0.5 \\ 3 & ، -0.5 < س \leq 0 \\ 2 & ، 0 < س \leq 0.5 \end{cases}$

عندما $س = \frac{1}{4} \Rightarrow ل(س) = 2$ ، $0 < س \leq 0.5$

$\therefore$ اقتران ثابت متصل عند $س = \frac{1}{4}$.

$ل'(\frac{1}{4}) = \lim_{س \to \frac{1}{4}} \frac{ل(س) - ل(\frac{1}{4})}{س - \frac{1}{4}}$

$= \lim_{س \to \frac{1}{4}} \frac{2-2}{س - \frac{1}{4}} =$ صفر .

عندما $س = -1$

1) $ل(-1) = 5$

2) $\lim_{س \to -1^-} ل(س) = 5$

$\lim_{س \to -1^+} ل(س) = 4$

$\Rightarrow \lim_{س \to -1}$ ل(س) = غير موجودة

$\therefore ل(س)$ غير متصل عند $س = -1$

$\therefore ل'(-1)$ غير موجودة .

Scanned by CamScanner

س١ د) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ج س & ، 0 \le س < 3 \\ 6 - 2س & ، 3 < س \le 5 \end{cases}$

$س = 0 \Rightarrow ج = 3 \Rightarrow س = 5$

الحل: $ق'(1)$ ، $ق'(5)$ غير موجودة لأنها أطراف الفترة.

عند $س = 3$ ، $ق(3)$ غير معرفة

$\Rightarrow ق(س)$ غير متصل عند $س = 3$ لذلك $ق'(3)$ غير موجودة.

س٢ $م(س) = \begin{cases} \frac{س - 9}{\sqrt{س} - 3} & ، س \neq 9 \\ 6 & ، س = 9 \end{cases}$

عند $س = 9$

أ) $م(9) = 6$

ب) $\lim_{س \to 9} م(س) = \lim_{س \to 9} \frac{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)}{\sqrt{س} - 3}$

$= 3 + 3 = 6$

ج) $\lim_{س \to 9} م(س) = م(9)$

$\therefore م$ متصل عند $س = 9$.

$م'(9) = \lim_{س \to 9} \frac{م(س) - م(9)}{س - 9}$

$= \lim_{س \to 9} \frac{\frac{س - 9}{\sqrt{س} - 3} - 6}{س - 9}$

$= \lim_{س \to 9} \frac{(\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} + 2) - 6}{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)}$

$= \lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س} - 3}{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)} = \frac{1}{6}$.

س٣ $ه$ قابل للاشتقاق عند $س = 1$ فهو متصل عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^-} س^3 = \lim_{س \to 1^+} (أ س + ج)$

$1 = أ + ج \Rightarrow ج = 1 - أ$.

س٤ عند $س = -1$

أ) $م(-1) = 1$

ب) $\lim_{س \to -1^+} م(س) = 1$

$\lim_{س \to -1^-} م(س) = 1$ $\Rightarrow \lim_{س \to -1} م(س) = 1$

ج) $م(-1) = \lim_{س \to -1} م(س)$ $\therefore م$ متصل عند $س = -1$

عند $س = 1$

أ) $م(1) = 1$

ب) $\lim_{س \to 1^+} م(س) = 1$

$\lim_{س \to 1^-} م(س) = 1$ $\Rightarrow \lim_{س \to 1} م(س) = 1$

ج) $\lim_{س \to 1} م(س) = م(1)$ $\therefore م$ متصل عند $س = 1$

$م'(س) = \begin{cases} -2 & ، س < -1 \\ ج & ، -1 < س < 1 \\ 1 & ، س > 1 \end{cases}$

$م'(1)^+ = 1$ ، $م'(1)^- = 2$ $\Rightarrow م'(1)$ غير موجودة

$م'(-1)^+ = -2$ ، $م'(-1)^- = -2$ $\Rightarrow م'(-1) = -2$.

Scanned by CamScanner

س٥ ع(٢) = صفر

١) نهاس→٢ ع(س) = صفر

٢) نهاس→٢ ع(س) = صفر ⇐ نهاس→٢⁻ ع(س) = صفر ، نهاس→٢⁺ ع(س) = صفر

٣) نهاس→٢ ع(س) = ع(٢) ⇐ ع متصل عند س = ٢

ع′(س) = { ٢س − ٢ ، ٢ > س ؛ ٢ − س ، ٢ < س < ٣ }

ع′(٢)⁻ = −٢ ، ع′(٢)⁺ = ٢ ⇐ ع′(٢) غير موجودة

س٦ عند س = ٠

١) هـ(٠) = ٠

٢) نهاس→٠ هـ(س) = ٠ ⇐ نهاس→٠⁺ هـ(س) = ٠ ، نهاس→٠⁻ هـ(س) = ٠

٣) نهاس→٠ هـ(س) = هـ(٠) ∴ هـ متصل عند س = ٠

عند س = ٤

١) هـ(٤) = ١

٢) نهاس→٤ هـ(س) = ١ ⇐ نهاس→٤⁺ هـ(س) = ١ ، نهاس→٤⁻ هـ(س) = ١

٣) نهاس→٤ هـ(س) = هـ(٤) ∴ هـ متصل عند س = ٤

هـ غير معرفة عند س = ٥ لذلك

هـ(٥) غير موجودة

عـ(س) = { صفر ، س < ٠ ؛ −١ ، ٠ < س < ٤ ؛ ١/(٥−س)^٢ ، س > ٤ ، س ≠ ٥ }

عـ(٠)⁺ = −١ ، عـ(٠)⁻ = صفر ⇐ عـ(٠) غير موجودة

عـ(٤)⁺ = ١ ، عـ(٤)⁻ = −١ ⇐ عـ(٤) غير موجودة

س٧

هـ(س) = { ١ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٣ − س ، ٢ ≤ س < ٣ ؛ س − ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٤ }

عند س = ٢

هـ(٢) = نهاس→٢ هـ(س) = ١ ⇐ هـ متصل عند س = ٢

هـ(٣) = نهاس→٣ هـ(س) = صفر ⇐ هـ متصل عند س = ٣

هـ′(س) = { صفر ، ١ < س < ٢ ؛ −١ ، ٢ < س < ٣ ؛ ١ ، ٣ < س < ٤ }

هـ′(١) ، هـ′(٤) غير موجودة لأنها أطراف فترة

هـ′(٢)⁺ = −١ ، هـ′(٢)⁻ = صفر ⇐ هـ′(٢) غير موجودة

هـ′(٣)⁺ = ١ ، هـ′(٣)⁻ = −١ ⇐ هـ′(٣) غير موجودة

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = $\sqrt{٣٠}$ ب) ص = ٤ س^{١٠}

جـ) ص = ٤ π ^{٢} د) ق(س) = $(\frac{١}{٢}$ س$)^{٤}$

٢) جد $\frac{د ص}{د س}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ص = س^{٢} + ٣س − ٤ ب) ص = $\frac{١}{٤}$ (س^{٢} + ٨)

جـ) ص = $\frac{٤}{٣}$ π س^{٣} د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ، س = − ١

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] − ٤س^{٢} ، س = ٢,٤

د) ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − | س | ، س = − ١

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(− ٢) = ٤ ، هـَ(− ٢) = − ٣ ، فجد قَ(− ٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ (س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ل(س) + هـ (س) + س^{٣}

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ب س & ، س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س & ، س < ١ \end{cases}$

وكانت قَ (١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

Scanned by CamScanner

تابع تمارين وحسائل قواعد الاشتقاق (١)

٦) إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≥ جـ
لَ(جـ) (س−جـ) ، س < جـ

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س= جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.
فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

Scanned by CamScanner

س١ أ) $ق(س) = ٣٠$

$ق'(س) =$ صفر

ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

$ص' = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ (ثابت)

$ص' =$ صفر

د) $ق(س) = (\frac{١}{٢} س)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$

س٢ $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$

أ) $\frac{د ص}{د س} = ٢س + ٣$

ب) $ص = \frac{١}{٤} س^{٢} + ٢$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٤} \times ٢ س + ٠$

$= \frac{١}{٢} س$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ س^{٢}$

$= ٤ \pi س^{٢}$

د) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٤} \times ٤ س^{٣} + \frac{١}{٣} \times ٣ س^{٢} - ١$

$= س^{٣} + س^{٢} - ١$

س٣ أ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{٢} \times ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}$

$ق'(-١) = ٢(-١)^{٣} = ٢ \times -١ = -٢$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ عندما $س = ٣$

$|٣س - ٦| = ٣س - ٦$ عندما $س = ٣$

$ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$ق'(س) = ٢س + ٣$

$ق'(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

جـ) $[\frac{١}{٢} س + ٥]$ $ل = \frac{١}{٢}$

$[\frac{١}{٢} س + ٥] = ٦$ ، $٢ \leq س < ٤$

$ق(س) = ٦ - ٤ س$

$ق'(س) = -٨ س$

$ق'(٢,٤) = -٨ \times ٢,٤ = -١٩,٢$

د) $[س + ١٠] = -١$ حول $س = -١$

$ق(س) = ٣س - ١ + س$

$ق'(س) = ٤ س - ١$

$ق'(س) = ٤$

$ق'(-١) = ٤$

Scanned by CamScanner

٤) $ه(س) = ٦ل(س) - ٢هـ(س)$

$ه'(س) = ٦ل'(س) - ٢هـ'(س)$

$ه'(-٢) = ٦ل'(-٢) - ٢هـ'(-٢)$

$= ٦ \times ٤ - ٢ \times -٣$

$= ٢٤ + ٦ = ٣٠$

ب) $ه(س) = \frac{١}{٢}ل(س) + هـ(س) + س^{٣}$

$ه'(س) = \frac{١}{٢}ل'(س) + هـ'(س) + ٣س^{٢}$

$ه'(-٢) = \frac{١}{٢}ل'(-٢) + هـ'(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ + -٣ + ١٢$

$= ٢ - ٣ + ١٢$

$= ١١$

٦) $ه(س) = \begin{cases} ل(س) & ، س \geq ج \\ ل'(ج)(س - ج) & ، س < ج \end{cases}$

ه متصل عند $س = ٢$

$ه'(س) = \begin{cases} ل'(س) & ، س > ج \\ ل'(ج) \times ١ & ، س < ج \end{cases}$

$ه'(ج)^{+} = ل'(ج)$

$ه'(ج)^{-} = ل'(ج)$

$\therefore$ ه'(ج) موجودة $= ل'(ج)$.

٥) ه'(١) موجودة $\Leftarrow$ ه متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^{+}} ه(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ه(س)$

$ب + ج = ج + د - ٤$

$ب + ج = ج - ج$

$ب = -ج$

$\frac{٤}{٢} = \frac{٢ب}{٢} \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

$ه'(١)^{+} = ه'(١)^{-}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٢أ س + ب & ، س < ١ \\ -٢ب س + ج & ، س > ١ \end{cases}$

$٢أ + ب = -٢ب + ج$

$٢أ + ٢ = -٤ + ج$

$ج - ج$

$ج - ج = -٤$

$ج + ٢ = -٤$

$\boxed{ج = -٦}$

Scanned by CamScanner

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كلٍّ مما يأتي:

أ) ص = س^{٢} (١ + س^{٣})

ب) ص = (س^{٣} − ٢س + ١) (٤س − ٣)

جـ) ص = $\frac{\text{س}^{٣}}{١ - \text{س}}$

د) ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{٢\text{س} + ٣}$

٢) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = س(س + ٢) (س^{٢} − ٣س − ٦)

ب) ق(س) = | س − ٣ | (س^{٢} + س)

جـ) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٤}$

د) ق(س) = $\frac{|\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤|}{\text{س}(\text{س} - ١)}$ ، س ∈ (١، ٥]

٣) إذا علمت أنَّ هـ (س) قابلٌ للاشتقاق وأنَّ هـ (٢) = ٣ ، هـَ (٢) = −١، فجد قَ (٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = س هـ (س)

ب) ق(س) = ٣س^{٢}هـ (س) − ٥س

جـ) ق(س) = هـ (س) − $\frac{١}{\text{هـ}(\text{س})}$

د) ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{٣\ \text{هـ}(\text{س})}$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (−٢) = ٣ ،لَ(−٢) = − ١ ، هـ(−٢) = ٤ هـَ (−٢) = −٦ ، فجد قَ (−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ل(س) × هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س}) + ١}$

Scanned by CamScanner

قواعد الاشتقاق (٢)

٥) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي، عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ) ق(س) = س^{٢} − [٢س + ١] ، س = ١,٤

ب) ق(س) = $\frac{[\frac{١}{٤}\text{س} + ٣]}{|٢\text{س} - ١|}$ ، س = ٢

جـ) ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، س = −١

٦) إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أنَّ:

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س) × م(س) × هـ(س))

= ل(س) × م(س) × هـَ(س) + ل(س) × هـ(س) × مَ (س) + م(س) × هـ(س) × لَ(س)

٧) اعتمد على النتيجة في السؤال(٦) لإثبات أنَّ :

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س))^{٣} = ٣(ل(س))^{٢} × لَ(س)

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤\text{س}^{٣} & ، \text{س} \geq ١ \\ ٣\text{س}^{٤} + ١ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١ ، ثم اكتب قاعدة قَ(س).

٩) إذا كان ق(س) = | س | (س^{٢} + ٦س) ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح .

١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} - \text{ب س} & ، \text{س} \geq ٢ \\ ٤ - \text{ب س}^{٣} + \text{أس} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

وكان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ٢ ، فجد كلًّا من الثابتين أ ، ب .

Scanned by CamScanner

١ ص ٩) $ص = س^{٤}(١+س^{٣}) = س^{٤}+س^{٥}$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}+٥س^{٤}$.

ب) $ص = (س^{٣}-٢س+١)(٤س-٣)$

$\frac{دص}{دس} = (٣س^{٢}-٢)(٤س-٣)+٤\times(س^{٣}-٢س+١)$

ج) $ص = \frac{س^{٣}}{١-س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(١-س)\times٣س^{٢}-س^{٣}\times(-١)}{(١-س)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢}-٣س^{٣}+س^{٣}}{(١-س)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢}-٢س^{٣}}{(١-س)^{٢}}$.

د) $ص = \frac{س^{٤}-١}{٣س+٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(٣س+٢)\times٤س^{٣}-(س^{٤}-١)\times٣}{(٣س+٢)^{٢}}$

$= \frac{٤س^{٤}+٦س^{٣}-٣س^{٤}+٣}{(٣س+٢)^{٢}}$

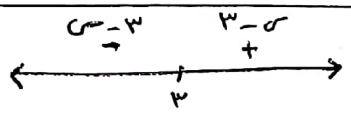
$= \frac{س^{٤}+٦س^{٣}+٣}{(٣س+٢)^{٢}}$.

٢ ص ٩) $ف(س) = س(س+٢)(س^{٣}-٣س-٦)$

$ف(س) = (س^{٢}+٢س)(س^{٣}-٣س-٦)$

$ف'(س) = (س^{٢}+٢س)(٣س^{٢}-٣)+(س^{٣}-٣س-٦)(٢س+٢)$

ب) $س-٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$



$ف(س) = \begin{cases} (س-٣)(س^{٣}+س) & ، س \geq ٣ \\ (٣-س)(س^{٣}+س) & ، س < ٣ \end{cases}$

ف متصل عند س = ٣ لأن ف(٣) = نهاية ف(س) = صفر
س→٣

$ف'(س) = \begin{cases} (س-٣)\times١+(س^{٣}+س)\times٢س & ، س > ٣ \\ (٣-س)\times(-١)+(س^{٣}+س)(٣س^{٢}+١) & ، س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \end{cases}$

$ف'(س) = \begin{cases} ٣س^{٣}-٤س-٣ & ، س > ٣ \\ -٣س^{٣}+٤س+٣ & ، س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \end{cases}$

ج) $ف'(س) = \frac{(س^{٣}+٤)(٢س-٤)-(س^{٢}-٢س+٤)\times٣س^{٢}}{(س^{٣}+٤)^{٢}}$

$ف'(س) = \frac{-٧-٣س^{٣}}{(س^{٣}+٤)^{٢}}$.

د) $س^3 - ٥س + ٤ = صفر$

$(س - ٤)(س - ١) = صفر$

$س = ٤ ، ١$

$(س-٤)(س-١)$ $-(س-٤)(س-١)$ $(س-٤)(س-١)$

$+$ $-$ $+$

١ ٤ ٥

$د(س) = \begin{cases} (س-٤)(س-١) & ، ٤ \leq س \leq ٥ \\ -(س-٤)(س-١) & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ، ٤ \leq س \leq ٥ \\ \frac{-(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س-٤}{س} & ، ٤ \leq س \leq ٥ \\ \frac{٤-س}{س} & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} ١ - \frac{٤}{س} & ، ٤ \leq س \leq ٥ \\ \frac{٤}{س} - ١ & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

$د'(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س^2} & ، ١ < س < ٤ \\ \frac{٤}{س^2} & ، ٤ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٤ ، س = ٥ \end{cases}$

$د'(٤)^+ \neq د'(٤)^- \Rightarrow د'(٤)$ غير موجودة

$د'(٥)$ غير موجودة لأنها طرف فترة.

---

٣) $د(س) = س \, هـ(س)$

$د'(س) = س \, هـ'(س) + هـ(س) \times ١$

$د'(٢) = ٢ \, هـ'(٢) + هـ(٢)$

$= ٢ \times -١ + ٣ = -٢ + ٣ = ١$

ب) $د(س) = ٣س^2 \, هـ(س) - ٥س$

$د'(س) = ٣س^2 \, هـ'(س) + هـ(س) \times ٦س - ٥$

$د'(٢) = ٣ \times ٤ \times هـ'(٢) + هـ(٢) \times ٦ \times ٢ - ٥$

$= -١٢ + ٣ \times ١٢ - ٥$

$= -١٧ + ٢٦ = ١٩$

ج) $د(س) = \frac{١}{هـ(س)}$

$د'(س) = هـ'(س) + \frac{هـ'(س)}{(هـ(س))^2}$

$د'(٢) = هـ'(٢) + \frac{هـ'(٢)}{(هـ(٢))^2}$

$= -١ + \frac{-١}{٣^2} = -١ - \frac{١}{٩} = \frac{-١٠}{٩}$

د) $د(س) = \frac{٢س + ١}{٣ هـ(س)}$

$د'(س) = \frac{٢ \times ٣ هـ(س) - (٢س+١) \times ٣ هـ'(س)}{(٣ هـ(س))^2}$

$د'(٢) = \frac{٢ \times ٣ هـ(٢) - ٥ \times ٣ هـ'(٢)}{(٣ هـ(٢))^2}$

$= \frac{١٨ + ١٥}{٨١}$

$= \frac{٣٣}{٨١} = \frac{١١}{٢٧}$

Scanned by CamScanner

ش ٩) $م(س) = ل(س) \times هـ(س)$

$م'(س) = ل(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ل'(س)$

$م'(-٢) = ل(-٢) \times هـ'(-٢) + هـ(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٣ \times -٦ + ٤ \times -١$

$= -١٨ - ٤ = -٢٢$

ب) $م(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س) + ١}$

$م'(س) = \frac{(ل(س)+١) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$م'(-٢) = \frac{(ل(-٢)+١) \times هـ'(-٢) + هـ(-٢) \times ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{(٣+١) \times -٦ - ٤ \times -١}{(٣+١)^{٢}}$

$= \frac{-٢٤ + ٤}{١٦} = \frac{-٢٠}{٤} = \frac{-٥}{٤}$.

ب) $[\frac{١}{٤}س + ٣] = ٣$ ، $٠ \leq س < ٤$

$١ \leq \frac{١}{٤}س < ١$ ، $٣ \leq \frac{١}{٤}س + ٣ < ٤$

$[\frac{١}{٤}س + ٣] = ٣$ حول $س = ٢$

$م(س) = \frac{٣}{ك - ١}$

$م'(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(٢ك - ١)^{٢}}$

$م'(٢) = \frac{-٦}{٩} = \frac{-٢}{٣}$.

جـ) $م(س) = \frac{ك - ٣}{٢ك + ١}$ ، $س = -١$

$م'(س) = \frac{(٢ك+١) \times ١ - (ك-٣) \times ٢}{(٢ك+١)^{٢}}$

$م'(-١) = \frac{(-١) \times ٣ - (-٤) \times ٢}{(-١)^{٢}}$

$= \frac{-٣ + ٨}{١} = \frac{٥}{١}$.

ش ٥) $م(س) = س^{٣} - [٢ك + ١]$ ، $س = ١٫٤$

$[٢ك + ١] = ٣$ حول $س = ١٫٤$

$م(س) = س^{٣} - ٣$

$م'(س) = ٣ك^{٢}$

$م'(١٫٤) = ٣ \times ١٫٤^{٢}$

$= ٥٫٨٨$

$\frac{د}{دك}(ل \times م \times هـ) =$

$(ل \times م)' \times هـ + هـ \times (ل \times م)' =$

$ل \times م \times هـ' + هـ \times (ل \times م' + م \times ل') =$

$ل \times م \times هـ' + هـ \times ل \times م' + هـ \times م \times ل'$.

Scanned by CamScanner

٧ $\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣}$

$= \frac{د}{دس}(ل \times ل \times ل)$

$= ل' \times ل \times ل + ل \times ل' \times ل + ل \times ل \times ل'$

$= ل^{٢} \times ل' + ل \times ل' \times ل + ل^{٢} \times ل'$

$= ل'(ل^{٢} + ل + ل^{٢})$

$= ل' \times ٣ل^{٢} = ٣ل^{٢} \times ل'$.

٨ $هـ$ متصل عند $س = ١$ لأن

$هـ(١) = $ نهـا $هـ(س)$ $= ٠$

$هـ(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س < ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س > ١ \end{cases}$

$هـ'(١)^{+} = ١٢$

$هـ'(١)^{-} = ١٢$ $\Leftarrow$ $هـ'(١) = ١٢$.

٩ $هـ(س) = \begin{cases} س(س^{٢} + ٦ك) & ، س \leq ٠ \\ -س(س^{٢} + ٦ك) & ، س > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^{٣} + ٦ك^{٢} & ، س \leq ٠ \\ -س^{٣} - ٦ك^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

$هـ$ متصل عند $س = ٠$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٣ك^{٢} + ١٢ك & ، س < ٠ \\ -٣ك^{٢} - ١٢ك & ، س > ٠ \\ صفر & ، س = ٠ \end{cases}$

$هـ'(٠)^{+} = هـ'(٠)^{-} =$ صفر

١٠ $هـ$ متصل عند $س = ٢$

نهـا $هـ(س)$ $=$ نهـا $هـ(س)$
$س \to ٢^{+}$ $\quad$ $س \to ٢^{-}$

$٤ - ٨ب + ٢م = ٤م - ٢ب$

$٤ - ٦ب = ٢م \Leftarrow$ $\boxed{م = ٢ - ٣ب}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٤م س - ب & ، س > ٢ \\ -٣ب ك^{٢} + م & ، س < ٢ \end{cases}$

$هـ'(٢)^{+} = هـ'(٢)^{-}$

$-١٢ب + م = ٤م - ب$
$+ب \quad\quad + ب$

$-\frac{١١}{٣}ب = \frac{٣م}{٣} \Leftarrow$ $\boxed{م = -\frac{١١}{٣}ب}$

$-\frac{١١}{٣}ب = ٢ - ٣ب$ $\times ٣$

$-١١ب = ٦ - ٩ب$

$+٩ب \quad\quad +٩ب$

$-٢ب = ٦ \Leftarrow$ $\boxed{ب = -٣}$

$م = -\frac{١١}{٣}ب$

$م = -\frac{١١}{٣} \times -٣$

$\boxed{م = ١١}$

Scanned by CamScanner