الوحدة الأولى
النهايات والأتصال
ثاني ثانوي علمي
حل أسئلة الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩ ٥٩٠٧١

١) معتمدًا الشكل (١-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{س \to ٦^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \to ٦^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

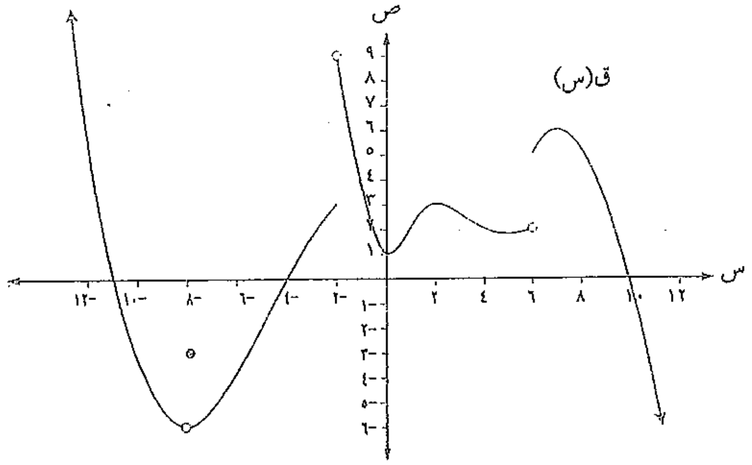
جـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)

د) $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}}$ ق (س)

هـ) $\underset{س \to -٨^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

و) $\underset{س \to -٨^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ز) $\underset{س \to ١٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)



الشكل (١-١٠)

٢) معتمدًا الشكل (١-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{س + ٤}$

جد كلًّا مما يأتي:

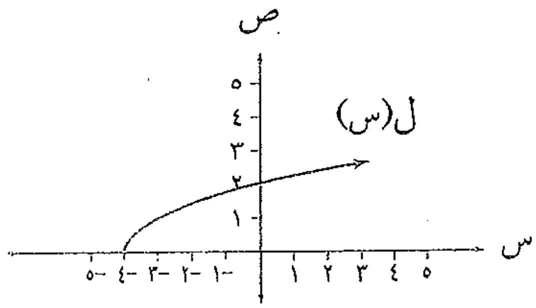
أ) مجال الاقتران ل

ب) $\underset{س \to -٤^{+}}{\text{نهــا}}$ ل(س)

جـ) $\underset{س \to -٤^{-}}{\text{نهــا}}$ ل(س)

د) $\underset{س \to -٤}{\text{نهــا}}$ ل(س)

هـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ل(س)



الشكل (١-١١)

٣) معتمدًا الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:

أ) مجموعة قيم أ حيث:

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ ع(س) = ١

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

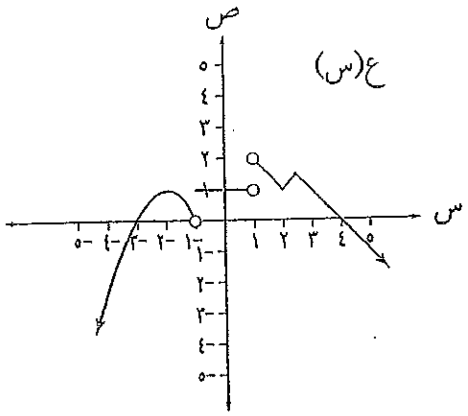
$\underset{\text{س} \to \text{جـ}^{+}}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ١

جـ) مجموعة قيم ك حيث:

$\underset{\text{س} \to \text{ك}}{\text{نهـــا}}$ ع(س) غير موجودة

د) مجموعة قيم ل حيث:

$\underset{\text{س} \to \text{ل}}{\text{نهـــا}}$ ع(س) = صفرًا



الشكل (١-١٢)

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \text{٢س + ١} & \text{، س} \in \text{ص} \\ \text{س}^{٢} \text{ + ٤} & \text{، س} \notin \text{ص، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة} \end{cases}$

فجد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ل(س)

س١ أ) $\lim_{س \to ٦^{+}}$ ق(س) = ٥

ب) $\lim_{س \to ٦^{-}}$ ق(س) = ٣

جـ) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١

د) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) = غير موجودة

هـ) $\lim_{س \to -٨^{+}}$ ق(س) = -٦

و) $\lim_{س \to -٨^{-}}$ ق(س) = -٦

ز) $\lim_{س \to ١٠}$ ق(س) = صفر .

جـ) $\lim_{س \to -٤^{-}}$ ل(س) = غير موجودة

د) $\lim_{س \to -٤}$ ل(س) = غير موجودة

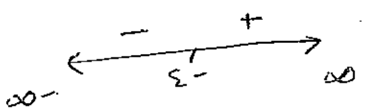
هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ل(س) = ٢

س٢ ل(س) = $\sqrt{س+٤}$

أ) مجال الاقتران ل .

نبحث في إشارة الاقتران س+٤

س+٤ = صفر ⟸ س = -٤



المجال [-٤ ، ∞)

ب) $\lim_{س \to -٤^{+}}$ ل(س) = صفر

س٣ أ) مجموعة قيم أ حيث

$\lim_{س \to أ}$ ع(س) = ١

أ) (١، ٢) ∪ {-٢، ٢، ٣} .

ب) [-١، ١) ∪ {-٢، ٢، ٣} .

جـ) {١، -١} .

د) {-٣، ٤} .

س٤ $\lim_{س \to ٢}$ ل(س) = ٢² + ٤

= ٨

تمارين ومسائل

١) إذا كان ق(س) = س^{٢} − س − ٦ ، ل(س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} \times \text{ل(س)}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ل(س)}\right)^{٤}$

هـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}}$

و) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ل (س)}}{\text{ق (س)}}$

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ٢\,\text{ع(س)} = ١٠$ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\ ٣\,\text{ل(س)} + ١ = ٧$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(٢\,\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right)$

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{ل (س)}}}{\text{ع (س)}}$

د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

ب) $\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٢٥\right|$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}} \left|\text{س} - ٢\right|$

د) $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \left|\text{س}^{٢} - ٦٤\right|$

هـ) $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهــا}} [\text{س} - ٢]$

و) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{س}\,[\text{س}] + |\text{س}|\right)$

ز) $\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}} \sqrt{٥ - \text{س}}$

ح) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

ط) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\displaystyle\lim_{\text{س}\to\text{جـ}} \sqrt{\text{٦} - \text{س}}$ غير موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = [٢,٠ س]، فجد قيم جـ التي تجعل $\displaystyle\lim_{\text{س}\to\text{جـ}} [\text{٢,٠ س}] = -١$

٦) إذا كان

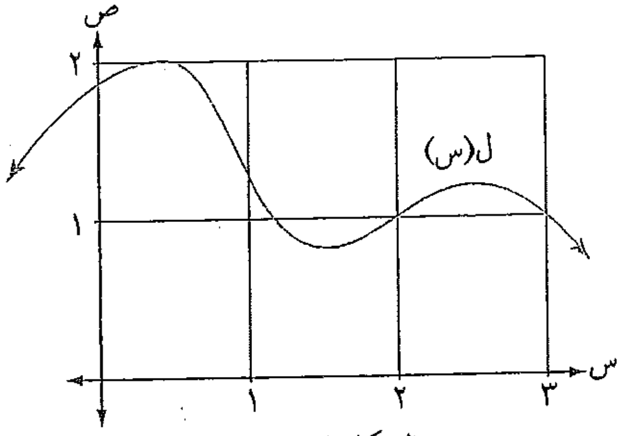
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - \text{٤ أ} & \text{، س} \geq ٣ \\ [\text{٦} - \text{س}] & \text{، س} < ٣ \end{cases}$$

وكانت $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٣} \text{ق(س)}$ موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٧) معتمدًا الشكل (١–١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

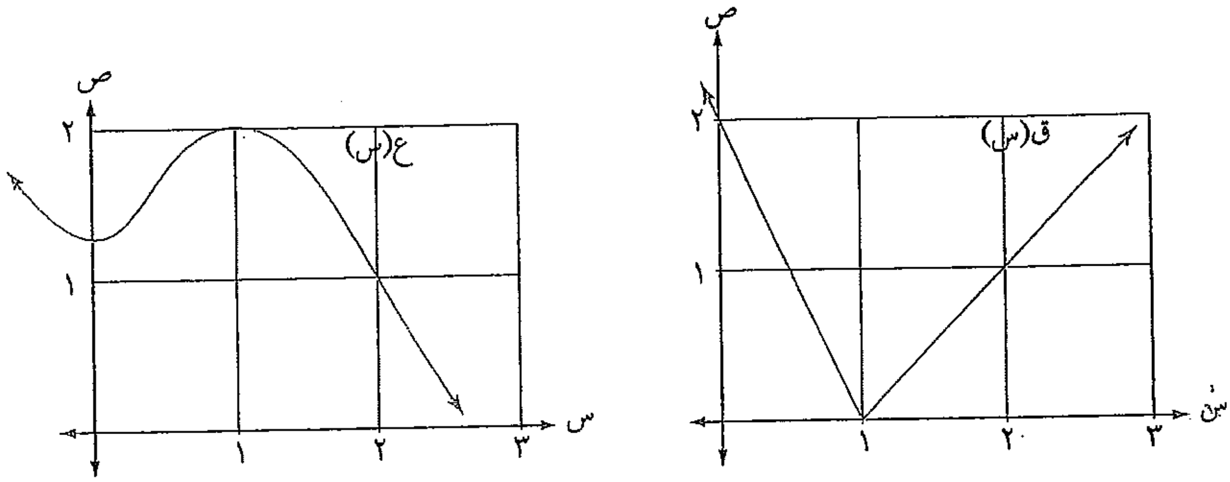
أ) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٢} \text{ل(٣ س} - ٣)$

ب) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٢} (\text{س} + \text{ل(س)})$



الشكل (١–١٥)

٨) معتمدًا الشكل(١–١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٦)

أ) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ١} (\text{ق(س)} + \text{ع(س)})$

ب) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٢} (\text{ق(س)} \times \text{ع(س)})$

جـ) $\lim_{س \leftarrow 1} \left(2\,ق(س-1) + ع(س) \right)$

إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤)، وكانت $\lim_{س \leftarrow -3} \left(س - ل(س) \right) = -10$

فجد $\lim_{س \leftarrow -3} \left(ق^2(س) - 2\,ل(س) \right)$

) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي٥ ، فجد

$\lim_{س \leftarrow 2} \left(3\,ع(س) + 4\,س^2 \right)$

س١ ن(س) = س² − س − ٦ ، ل(س) = س² − ٢س − ٣

أ) $\text{نها}_{س \to ١} \left(\text{ن(س)} + \text{ل(س)}\right) =$

$(١ - ١ - ٦) + (١ - ٢ - ٣) = -١٠$

ب) $\text{نها}_{س \to ١} \left(\text{ن(س)} \times \text{ل(س)}\right) =$

$-٦ \times -٤ = ٢٤$

جـ) $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\text{ل(س)}}{\text{ن(س)}} = \dfrac{-٤}{-٦} = \dfrac{٢}{٣}$

د) $\text{نها}_{س \to ٢} \left(\text{ل(س)}\right)^{٤} =$

$\left(٢^{٢} - ٢ \times ٢ - ٣\right)^{٤} = (-٣)^{٤}$

$= ٨١$

هـ) $\text{نها}_{س \to ٢} \sqrt[٣]{١ - \text{ل(س)}} =$

$\sqrt[٣]{١ - -٣} = \sqrt[٣]{٤}$

و) $\text{نها}_{س \to -١} \dfrac{\text{ل(س)}}{\text{ن(س)}} =$

$\dfrac{١ + ٢ - ٣}{١ + ١ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{-٤}$

= صفر

س٢ $\text{نها}_{س \to ٢}\ ٢\text{ع(س)} = ١٠ \Leftarrow$

$\dfrac{٢}{٢} \text{نها}_{س \to ٢} \left(\text{ع(س)}\right) = \dfrac{١٠}{٢} \Leftarrow$

$\boxed{\text{نها}_{س \to ٢} \text{ع(س)} = ٥}$

$٣ \,\text{نها}_{س \to ٢} \text{ل(س)} + ١ = ٧ \Leftarrow ٣ \,\text{نها}_{س \to ٢} \text{ل(س)} = ٦$

$\Leftarrow \boxed{\text{نها}_{س \to ٢} \text{ل(س)} = ٢}$

أ) $\text{نها}_{س \to ٢} \left(٢\text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right) =$

$٢ \times ٥ + ٢ = ١٢$

ب) $\text{نها}_{س \to ٢} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) =$

$٥^{٣} - ٢^{٢} = ١٢٥ - ٤ = ١٢١$

جـ) $\text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{\sqrt{\text{ل(س)}}}{\text{ع(س)}} = \dfrac{\sqrt{٢}}{٥}$

د) $\text{نها}_{س \to ٢} \left(\text{ع}^{٢}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right) =$

$= ٥^{٢} - ٢^{٢}$

$٢٥ - ٤ = ٢١$

س٣

أ) $\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نها}} |س^{٢} - ٢٥|$

$س^{٢} - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س = \mp ٥$

$\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نها}} |س^{٢} - ٢٥| = \underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نها}} (س^{٢} - ٢٥)$

= صفر

ب) $\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}} |س^{٢} - ٢٥| = \underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}} (٢٥ - س^{٢})$

= صفر

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}} |س - ٢| = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}} (٢ - س)$

= صفر

د) $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} |س^{٢} - ٦٤|$

$\underset{س \leftarrow ٨^{+}}{\text{نها}} س^{٢} - ٦٤$ = صفر

$\underset{س \leftarrow ٨^{-}}{\text{نها}} ٦٤ - س^{٢}$ = صفر

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} |س^{٢} - ٦٤|$ = صفر

هـ) $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نها}} [س - ٣]$

ل = ١

$[س-٣] = \begin{cases} -٧ ، & -٥ \leqslant س < -٤ \\ -٦ ، & -٤ \leqslant س < -٣ \end{cases}$

$\underset{س \leftarrow -٤^{+}}{\text{نها}} [س-٣] = -٦$

$\underset{س \leftarrow -٤^{-}}{\text{نها}} [س-٣] = -٧$

$\Leftarrow \underset{س \leftarrow -٤}{\text{نها}} [س-٣]$ غير موجودة

و) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} (س[س] + |س-١|)$

$[س] = \begin{cases} ٠ ، & ٠ \leqslant س < ١ \\ ١ ، & ١ \leqslant س < ٢ \end{cases}$

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}} (س \times ٠ + س) = ٠ + ١ = ١$

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}} (س \times ١ + س) = ١ + ١ = ٢$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} (س[س] + |س-١|)$ = غير موجودة

ز) $\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}} \sqrt{٥ - س}$

$٥ - س = ٠$

$س = ٥$

$\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نها}} \sqrt{٥ - س}$ = صفر

تابع س٣

ح) $\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢}$

$١ - س^٢ =$ صفر $\leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$\lim_{س \to ١^+} \sqrt{١ - س^٢} =$ غير موجودة

$\lim_{س \to ١^-} \sqrt{١ - س^٢} =$ صفر

$\lim_{س \to ١} \sqrt{١ - س^٢} =$ غير موجودة

ط) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}$

$\lim_{س \to -٢} \sqrt{(س+٢)^٢} = \lim_{س \to -٢} |س+٢|$

$س + ٢ = ٠$

$س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} |س+٢| =$ صفر

$\lim_{س \to -٢^-} |س+٢| =$ صفر

$\lim_{س \to -٢} |س+٢| =$ صفر

س٤ $\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$

$٦ - س =$ صفر $\leftarrow س = ٦$

$\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجودة على $[٦ ، \infty)$

س٥ $ق(س) = [٠٫٢س] = [\frac{٢}{١٠} س]$

$ل = \frac{١}{\frac{٢}{١٠}} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$ق(س) = \{ -١ ، -٥ \leq س < ٠$

$\lim_{س \to جـ} [٠٫٢س] = -١$

قيم جـ هي $(-٥ ، ٠)$

س٦ $[٦ - س] = ٣ ، ٢ < س \leq ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} س^٢ - ٤م = \lim_{س \to ٣^-} ٣$

$٩ - ٤م = ٣ \leftarrow \frac{٤م}{٤} = \frac{٦}{٤}$

$\Leftarrow م = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$.

س٧ أ) نهـا ل(٣س − ٣)
س ← ٢

ص = ٣س − ٣

س ← ٢ ⟸ ص ← ٣

نهـا ل(٣س − ٣) = نهـا ل(ص)
س ← ٢ ص ← ٣

= ١

ب) نهـا (س + ل(س)) =
س ← ٢

نهـا س + نهـا ل(س)
س ← ٢ س ← ٢

٢ + ١ = ٣

س٨

أ) نهـا (هـ(س) + ع(س)) =
س ← ١

نهـا هـ(س) + نهـا ع(س) =
س ← ١ س ← ١

صفر + ٢ = ٢

ب) نهـا (هـ(س) × ع(س)) =
س ← ٢

نهـا هـ(س) × نهـا ع(س)
س ← ٢ س ← ٢

١ × ١ = ١

ج) نهـا (٢ هـ(س − ١) + ع(س))
س ← ١

ص = س − ١
س ← ١
ص ← صفر

٢ نهـا هـ(ص) + نهـا ع(س)
ص ← ٠ س ← ١

٢ × ٢ + ٢ = ٦

س٩ هـ كثير حدود ويمر بالنقطة (−٣، ٤)
فيكون هـ(−٣) = ٤ ومنه نهـا هـ(س) = ٤
س ← −٣

نهـا (س − ل(س)) = −١٠
س ← −٣

−٣ − نهـا ل(س) = −١٠ ⟸
س ← −٣

نهـا ل(س) = ٧
س ← −٣

نهـا هـ^٢(س) − نهـا ٢ل(س)
س ← −٣ س ← −٣

٤^٢ − ٢ × ٧ = ١٦ − ١٤ = ٢

س١٠ لأن ع كثير حدود وباقي القسمة
على س − ٢ يساوي ٥ فيكون

ع(٢) = ٥ ومنها نهـا ع(س) = ٥
س ← ٢

∴ نهـا (٣ع(س) + ٤^٢) =
س ← ٢

٣ × ٥ + ٤(٢)^٢

١٥ + ١٦ = ٣١

تمارين ومسائل

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س}+١)^{٢} - ٨١}{(\text{س}-٨)}$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{٤ - \dfrac{\text{س}}{٢}}$

جـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}}\left(\dfrac{١}{(٢+\text{س})^{٢}} - \dfrac{١}{٤}\right)$

د) $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{٥ - |٣\text{س}+١|}{\text{س}^{٣}+٨}$

هـ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{٦ - \text{س}\sqrt{\text{س}+١}}{٩ - ٣\text{س}}$

و) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٢٥}}{\text{س} - ٥}$

ز) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$

ح) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ١}$

ط) $\underset{\text{س}\leftarrow ٧^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤٩}}{\sqrt{\text{س} - ٧}}$

ي) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢,٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\text{س}^{٢} - ٢٥}$

ك) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{١+\text{س}^{٢}} - \sqrt{١-\text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}$

٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق(س)} + ٥}{\text{س} - ٣} = ٤$ ،

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \left(\text{ق(س)} - ٢\text{س} + ٣\,\text{ب}\right) = ٧$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ - \text{س}}{|\text{س} - ٣|} & ، \text{س} \geq ٣ \\ \text{جـ س}^{٢} - ٤ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت جـ.

٤) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{أس}^{٢} + ٢\text{ب س} + ٢}{\text{س} - ١} = ١$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

٥) جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{(٦٤)^{\text{س}} - ٨^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

٦) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٨} & ، \text{س} \geq \text{ع} \\ \text{س} + ٥ & ، \text{س} < \text{ع} \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{ع}}$ ل(س) موجودة.

٧) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق(س) غير موجودة.

٨) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{ق(س)} - ٦}{\text{س} - ١} = ٨$ ، وكانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{ق(س)} - ٦} + \text{ب} = \dfrac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

٩) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \dfrac{\text{هـ(س)} + ٥}{\text{س}} = \dfrac{١}{٢}$ ،

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \left(\text{هـ(س)} - ٥ + ٣\text{جـ}\right) = ٢$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

س1) أ) $\lim\limits_{س \to 8} \frac{(س+1)^2 - 81}{س - 8} = \frac{0}{0}$ نحلل

$\lim\limits_{س \to 8} \frac{(س+1-9)(س+1+9)}{س-8}$

$\lim\limits_{س \to 8} \frac{\cancel{(س-8)}(س+10)}{\cancel{س-8}} = 8 + 10 = 18$

ب) $\lim\limits_{س \to 8} \frac{\sqrt[3]{س} - 2}{4 - \frac{س}{2}} \times \frac{\sqrt[3]{س^2} + 2\sqrt[3]{س} + 4}{\sqrt[3]{س^2} + 2\sqrt[3]{س} + 4}$

$\lim\limits_{س \to 8} \frac{س - 8}{\frac{1}{2}(8 - س)(4+4+4)}$

$\lim\limits_{س \to 8} \frac{-1}{\frac{1}{2} \times 12} = \frac{-1}{6}$

جـ) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{(س+2)^2} - \frac{1}{4}\right) =$

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{4 - (س+2)^2}{4(س+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{4 - (س^2 + 4س + 4)}{4(س+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{س}\left(\frac{-س^2 - 4س - \cancel{4 + 4}}{4(س+2)^2}\right)$

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{1}{\cancel{س}}\left(\frac{\cancel{س}(-س - 4)}{4(س+2)^2}\right) = \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4}$

د) $\lim\limits_{س \to -2} \frac{5 - |3س + 1|}{س^3 + 8}$

نعيد تعريف $|3س+1|$

$3س + 1 =$ صفر $\leftarrow س = \frac{-1}{3}$

$-3س - 1$ (−) | $3س + 1$ (+) عند $\frac{-1}{3}$

$\lim\limits_{س \to -2} \frac{5 - (-3س - 1)}{س^3 + 8} =$

$\lim\limits_{س \to -2} \frac{5 + 3س + 1}{(س+2)(س^2 - 2س + 4)}$

$\lim\limits_{س \to -2} \frac{3س + 6}{(س+2)(س^2 - 2س + 4)} = \lim\limits_{س \to -2} \frac{3(س+2)}{(س+2)(س^2 - 2س + 4)}$

$= \frac{3}{4+4+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

هـ) $\lim\limits_{س \to 3} \frac{6 - س\sqrt{س+1}}{9 - 3س} \times \frac{6 + س\sqrt{س+1}}{6 + س\sqrt{س+1}}$

$\lim\limits_{س \to 3} \frac{36 - س^2(س+1)}{(9 - 3س)(6 + 3\sqrt{3+1})} = \lim\limits_{س \to 3} \frac{36 - س^3 - س^2}{12 \times (9 - 3س)}$

$\lim\limits_{س \to 3} \frac{-س^3 - س^2 + 36}{12 \times 3(3 - س)}$

نقسم $(-س^3 - س^2 + 36)$ على $(س - 3)$ قسمة تركيبية أو خوارزمية القسمة.

تابع حل فرع (هـ).

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}^٢+٤\text{س}+١٢)}{٣\cancel{(\text{س}-٣)}\times ١٢} =$$

$$\frac{٣^٢+١٢+١٢}{٣٦} = \frac{٣٣}{٣٦} = \frac{١١}{١٢}.$$

(و) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢-١٠\text{س}+٢٥}}{\text{س}-٥} =$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(\text{س}-٥)^٢}}{\text{س}-٥} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{|\text{س}-٥|}{\text{س}-٥}$$

س − ٥ = ٠ ← س = ٥

$$|\text{س}-٥| = \begin{cases} \text{س}-٥ \text{ ، } \text{س} \geq ٥ \\ ٥-\text{س} \text{ ، } \text{س} < ٥ \end{cases}$$

$$\underset{\text{س}\to ٥^+}{\text{نها}} \frac{\text{س}-٥}{\text{س}-٥} = \underset{\text{س}\to ٥^+}{\text{نها}} ١ = ١$$

$$\underset{\text{س}\to ٥^-}{\text{نها}} \frac{٥-\text{س}}{\text{س}-٥} = \underset{\text{س}\to ٥^-}{\text{نها}} -١ = -١$$

$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}} \frac{|\text{س}-٥|}{\text{س}-٥}$ غير موجودة .

(ز) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢-١}}{\sqrt{\text{س}-١}}$

س² − ١ = ٠ ← س = ∓١

س − ١ = ٠ ← س = ١

$\sqrt{\text{س}^٢-١}$ ، $\sqrt{\text{س}-١}$ غير معرفة على يسار العدد (١)

لذلك $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢-١}}{\sqrt{\text{س}-١}}$ غير موجودة

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢-١}}{\sqrt{\text{س}-١}}$ غير موجودة

(ح) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣+٣\text{س}-٤}{\text{س}^٢-١}$

ناتج تعويض العدد (١) في البسط = صفر ← (١) أحد الأصفار ⇐ (س−١) أحد العوامل ⇐ نقسم البسط على (س−١) فينتج

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^٢+\text{س}+٤)}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

(ط) $\underset{\text{س}\to ٧^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢-٤٩}}{\sqrt{\text{س}-٧}}$

س² − ٤٩ = ٠ ← س = ∓٧

س − ٧ = ٠ ← س = ٧

كل س $\sqrt{\text{س}^٢-٤٩}$ ، $\sqrt{\text{س}-٧}$ معرف على يمين العدد (٧)

لذلك $\underset{\text{س}\to ٧^+}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢-٤٩}{\text{س}-٧}} = \underset{\text{س}\to ٧^+}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\cancel{(\text{س}-٧)}(\text{س}+٧)}{\cancel{\text{س}-٧}}}$

$$\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}+٧} = \sqrt{١٤}\ .$$

تابع سؤال فرع (ي)

(ي) $\text{نها}_{س \leftarrow ٢٫٥} \dfrac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٢٥}$

نعيد تعريف $[٢س]$ ل $= \frac{١}{٢}$

٢ ، ٢٫٥ ، ٣

$[٢س] = \begin{cases} ٥ \text{ ، } ٢٫٥ \leq س < ٣ \\ ٤ \text{ ، } ٢ \leq س < ٢٫٥ \end{cases}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢٫٥^+} \dfrac{\cancel{٢س - ٥}}{(\cancel{٢س - ٥})(٢س + ٥)} = \dfrac{١}{١٠}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٢٫٥^-} \dfrac{٢س - ٤}{(٢س - ٥)(٢س + ٥)} = \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

= غير موجودة

$\Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٢٫٥} \dfrac{٢س - [٢س]}{٤س^٢ - ٢٥} =$ غير موجودة.

(ل) $\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\sqrt{١ + س^٢} - \sqrt{١ - س^٢}}{س^٢} \times \dfrac{\sqrt{١ + س^٢} + \sqrt{١ - س^٢}}{\sqrt{١ + س^٢} + \sqrt{١ - س^٢}}$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{١ + س^٢ - (١ - س^٢)}{س^٢ (\sqrt{١ + س^٢} + \sqrt{١ - س^٢})}$.

$\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \dfrac{١ + س^٢ - ١ + س^٢}{س^٢ \times ٢} = \dfrac{٢س^٢}{٢س^٢} = ١$

سؤال بما أن $\text{نها}_{س \leftarrow ٣} \dfrac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$

$\Leftarrow$ النهاية موجودة.

لكن ناتج تعويض المقام = صفر $\Leftarrow$

ناتج تعويض البسط = صفر

$ق(٣) + ٥ = \text{صفر} \Leftarrow ق(٣) = -٥$.

ومنه $\text{نها}_{س \leftarrow ٣} ق(س) = -٥$ لأنه ق كثير حدود

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣} (ق(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$

$ق(٣) - ٦ + ٣ب = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$-١١ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ١٨ \leftarrow ب = ٦$

سؤال ٣ $|س - ٣| = س - ٣$ عندما $س > ٣$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣^+} \dfrac{٣ - س}{|س - ٣|} = \text{نها}_{س \leftarrow ٣^-} (جـ س^٢ - ٤)$

$\text{نها}_{س \leftarrow ٣^+} \dfrac{٣ - س}{س - ٣} = ٩جـ - ٤$

$-١ = ٩جـ - ٤$

$+٤ \qquad +٤$

$\dfrac{٣}{٩} = \dfrac{٩جـ}{٩}$

$جـ = \dfrac{١}{٣}$

س٤ النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر
فيكون تعويض البسط = صفر

$\Leftarrow$ أ + ٢ب + ٢ = صفر

٢ب = −٢ − أ $\leftarrow$ $\boxed{ب = -١ - \frac{أ}{٢}}$

$$\lim_{س \to ١} \frac{أس^٢ + ٢(-١ - \frac{أ}{٢})س + ٢}{س - ١} = ١$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{أس^٢ - ٢س - أس + ٢}{س - ١} = ١$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{أس^٢ - أس}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{٢\cancel{(١ - س)}}{\cancel{س - ١}} = ١$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{أس\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}} + -٢ = ١$$

$$\lim_{س \to ١} أس - ٢ = ١$$

أ − ٢ = ١

$\boxed{أ = ٣}$

ب = −١ − $\frac{أ}{٢}$

ب = −١ − $\frac{٣}{٢}$

$\boxed{ب = \frac{-٥}{٢}}$

س٥ $$\lim_{س \to ٠} \frac{(٦٤)^س - ٨^س}{١ - ٨^س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{٨^{٢س} - ٨^س}{١ - ٨^س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٨^س\cancel{(٨^س - ١)}}{\cancel{١ - ٨^س}}$$

$$\lim_{س \to ٠} ٨^س \times -١ = ١ \times -١ = -١$$

س٦ $\lim_{س \to ع}$ ل(س) موجودة $\Leftarrow$

$$\lim_{س \to ع^+} ل(س) = \lim_{س \to ع^-} ل(س)$$

$$\lim_{س \to ع^+} \frac{(س - ٣)\cancel{(س^٢ + ٣س + ٩)}}{٢\cancel{(س^٢ + ٣س + ٩)}} = \lim_{س \to ع^-} (س + ٥)$$

$$\frac{ع - ٣}{٢} = ع + ٥$$

ع − ٣ = ٢ع + ١٠
+٣ +٣

ع = ٢ع + ١٣
−٢ع −٢ع

−ع = ١٣ $\Leftarrow$ ع = −١٣

٧ حل نهـا ق(س) غير موجودة ⇐
$س \to أ$

المقام = صفر

$س^٢ - ٥س + ٦ = صفر$

$(س - ٣)(س - ٢) = صفر$

س = ٣ ، ٢ .

٨ حل بقسمة البسط والمقام على س − ١

$$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}}{\frac{ق(س) - ٦}{س - ١}} =$$

$$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{\frac{(س+٣)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}}}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} + ب = \frac{٣}{٢}$$

$$-\frac{١}{٢} \qquad -\frac{١}{٢}$$

$$ب = \frac{٢}{٢} = ١$$

٩ حل النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر

فيكون تعويض البسط = صفر

هـ(١) + ٥ = صفر ⇐ هـ(١) = −٥

$\underset{س \to ٠}{نهـا}$ هـ(س) = −٥ لأن هـ كثير حدود

$$\underset{س \to ٠}{نهـا} \left(هـ(س) - ٥ + ٣جـ \right) = ٢$$

$$-٥ - ٥ + ٣جـ = ٢$$

$$-١٠ + ٣جـ = ٢$$

$$+١٠ \qquad +١٠$$

$$\frac{٣جـ}{٣} = \frac{١٢}{٣}$$

$$\boxed{جـ = ٤}$$

تمارين ومسائل

جد النهاية المطلوبة في كلٍّ من التمارين من (١) إلى (٢١) :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا ٨س}}{\text{٦س}}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س + ظا٢س − جا س}}{\text{س}}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{قاس + ظا ٥س})$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{٧ س}^{٣} \text{ ظتا}^{٢} \text{ (٢س) قتا (٥س)}\right)$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + جتا ٤س − ٢ جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتاس}}{\text{س جا س}}$

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{٢س} - \pi}$

٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س − جا س}}{\text{س}}$

٩) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جا س}}{(\pi - \text{٢س})^{٢}}$

١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا(٢س) − ١}}{\text{س}^{٢}}$

١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢س}^{٢} \text{ + س ظا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{ س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتا ٦س}}{\text{جتا ٨س − ١}}$

١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ ٣س(ظتا ٢س + قتا ٣س)}$

١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢س}}$

١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س − ١}}$

١٧) $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

١٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}}$

١٩) $\underset{\text{س}\to ٣\pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\dfrac{\text{س}}{٣} - \pi}$

٢٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا } \pi \text{س}}$

٢١) $\underset{\text{س}\to -\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س} + \text{جا أ}}{\text{س} + \text{أ}}$ (إرشاد: $\text{جا س} + \text{جا ص} = ٢ \text{ جا}\left(\dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right) \text{جتا}\left(\dfrac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$)

٢٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا أس}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } ٣\text{س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٦$ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

٢٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{جا}(٢\pi - ٢\text{س})}{-٥\text{س}}$ ، فجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

س1 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,8س}{6س} = \dfrac{8}{6}$.

س2 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{س + \text{ظا}\,2س - \text{جا}\,س}{س} =$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \left(\dfrac{س}{س} + \dfrac{\text{ظا}\,2س}{س} - \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \right) =$

$1 + 2 - 1 = 2$

س3 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \left(\text{قا}\,س + \text{ظا}\,5س \right) =$

$1 + 0 = 1$

س4 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \left(7س^{3}\ \text{قتا}^{2}(2س)\ \text{قتا}(5س) \right)$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \left(7س^{3} \times \dfrac{1}{\text{ظا}^{2}\,2س} \times \dfrac{1}{\text{جا}\,5س} \right)$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \left(7 \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,2س} \times \dfrac{س}{\text{ظا}\,2س} \times \dfrac{س}{\text{جا}\,5س} \right) =$

$7 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{20}$

س5 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{1 + \text{جتا}\,4س - 2\,\text{جتا}^{2}س}{س^{2}}$

تذكر : $1 - 2\,\text{جتا}^{2}س = -\text{جتا}\,2س$

$= \underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,4س - \text{جتا}\,2س}{س^{2}} =$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{-2\,\text{جا}\left(\frac{4س+2س}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{4س-2س}{2}\right)}{س^{2}} =$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{-2\,\text{جا}\,3س\ \text{جا}\,س}{س^{2}} =$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} -2 \times \dfrac{\text{جا}\,3س}{س} \times \dfrac{\text{جا}\,س}{س} = -2 \times 3 \times 1$

$= -6$

س6 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}\,س}{س\ \text{جا}\,س} \times \dfrac{1 + \text{جتا}\,س}{1 + \text{جتا}\,س}$.

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}^{2}س}{س\ \text{جا}\,س(1 + \text{جتا}\,س)} = \underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{2}س}{س\ \text{جا}\,س(1 + \text{جتا}\,س)}$

$\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} \times \underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{1}{1 + \text{جتا}\,س} =$

$1 \times \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

س7 $\underset{س\to0}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,س}{2س - \pi}$

تعويض مباشر

$\dfrac{\text{جتا}\,0}{2 \times 0 - \pi} = \dfrac{1}{0 - \pi}$

$= -\dfrac{1}{\pi}$.

س٨ $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{س} =$

$\lim\limits_{س \to 0} \left(\dfrac{\text{ظاس}}{س} - \dfrac{\text{جاس}}{س} \right) = 1 - 1 = \text{صفر}$

س٩ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{جاس}}{(\pi - 2س)^2} \times \dfrac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}} =$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{جا}^2س}{(\pi - 2س)^2} \times \dfrac{1}{1+1} =$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جتا}^2س}{(\pi - 2س)^2} \times \dfrac{1}{2} =$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2(\frac{\pi}{2} - س)}{\left(2(\frac{\pi}{2} - س)\right)^2} \times \dfrac{1}{2} =$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{جا}^2(\frac{\pi}{2} - س)}{8(\frac{\pi}{2} - س)^2}$

$ص = \frac{\pi}{2} - س$
$س \to \frac{\pi}{2}$
$ص \to \text{صفر}$

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{\text{جا}^2ص}{8ص^2}$

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{\text{جاص}}{8ص} \times \dfrac{\text{جاص}}{ص} =$

$\dfrac{1}{8} \times 1 = \dfrac{1}{8}$.

س١٠ $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{قا}(2س) - 1}{س^2} \times \dfrac{\text{قا}(2س) + 1}{\text{قا}(2س) + 1}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{قا}^2(2س) - 1}{س^2(1+1)} = \lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{ظا}^2 2س}{2س^2}$

$\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\text{ظا}2س}{2س} \times \dfrac{\text{ظا}2س}{س} = 1 \times 2 = 2$

س١١ $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{2س^2 + س\,\text{ظا}2س}{\text{جا}^2س}$ توزيع البسط على المقام

$\lim\limits_{س \to 0} \left(\dfrac{2س^2}{\text{جا}^2س} + \dfrac{س\,\text{ظا}2س}{\text{جا}^2س} \right)$

$\lim\limits_{س \to 0} \left(\dfrac{2س}{\text{جاس}} \times \dfrac{س}{\text{جاس}} + \dfrac{س}{\text{جاس}} \times \dfrac{\text{ظا}2س}{\text{جاس}} \right) =$

$2 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 2 = 4$.

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على $س^2$

س١٢ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جتا}^2س - \text{جا}^2س}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جتا}2س}{س - \frac{\pi}{4}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جا}\,2(\frac{\pi}{4} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$

$ص = \frac{\pi}{4} - س$
$س \to \frac{\pi}{4}$
$ص \to 0$

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{\text{جا}2ص}{-ص} = -2$

س١٣

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ \frac{1-\text{جتا}6\text{س}}{\text{جتا}8\text{س}-1}\times\frac{1+\text{جتا}6\text{س}}{1+\text{جتا}6\text{س}}\times\frac{\text{جتا}8\text{س}+1}{\text{جتا}8\text{س}+1}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ \frac{1-\text{جتا}^2 6\text{س}}{\text{جتا}^2 8\text{س}-1}\times\frac{\text{جتا}8\text{س}+1}{1+\text{جتا}6\text{س}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ \frac{\text{جا}^2 6\text{س}}{-\text{جا}^2 8\text{س}}\times\frac{(1+1)}{(1+1)} =$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ \frac{\text{جا}6\text{س}}{-\text{جا}8\text{س}}\times\frac{\text{جا}6\text{س}}{\text{جا}8\text{س}}\times 1 =$$

$$-\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}\times 1 = -\frac{36}{64} = \frac{-9}{16}$$

س١٤

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ 3\text{س}\,(\text{ظتا}2\text{س}+\text{قتا}3\text{س}) =$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\ 3\text{س}\left(\frac{1}{\text{ظا}2\text{س}}+\frac{1}{\text{جا}3\text{س}}\right) =$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\left(\frac{3\text{س}}{\text{ظا}2\text{س}}+\frac{3\text{س}}{\text{جا}3\text{س}}\right) =$$

$$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

س١٥

$$\text{نها}_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{\text{ظتاس}}{\pi-2\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}\ \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{2}-\text{س})}{2(\frac{\pi}{2}-\text{س})}$$

$\text{ص} = \frac{\pi}{2}-\text{س}$
$\text{س}\to\frac{\pi}{2}$
$\text{ص}\to 0$

$$= \text{نها}_{\text{ص}\to 0}\ \frac{\text{ظاص}}{2\text{ص}}$$

$$\frac{1}{2}\ .$$

س١٦

$$\text{نها}_{\text{س}\to 1}\ \frac{\text{س جا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س}-1} = \text{نها}_{\text{س}\to 1}\ \frac{\text{س جا}(\pi-\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س}(1-\frac{1}{\text{س}})}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 1}\ \frac{\text{جا}\,\pi(1-\frac{1}{\text{س}})}{(1-\frac{1}{\text{س}})}$$

$\text{ص} = 1-\frac{1}{\text{س}}$
$\text{س}\to 1$
$\text{ص}\to 0$

$$\text{نها}_{\text{ص}\to 0}\ \frac{\text{جا}\,\pi\text{ص}}{\text{ص}} = \pi\ .$$

س١٧

$$\text{نها}_{\text{س}\to -4}\ \frac{\text{جا}(\text{س}+4)}{\text{س}^2-16} = \text{نها}_{\text{س}\to -4}\ \frac{\text{جا}(\text{س}+4)}{(\text{س}+4)(\text{س}-4)}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to -4}\left(\frac{\text{جا}(\text{س}+4)}{\text{س}+4}\times\frac{1}{\text{س}-4}\right)$$

$\text{ص} = \text{س}+4$
$\text{س}\to -4$
$\text{ص}\to 0$

$$\text{نها}_{\text{ص}\to 0}\ \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}\times\frac{1}{-8}$$

$$1\times\frac{1}{8}- = -\frac{1}{8}\ .$$

س١٨

$$\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}} = \sqrt{1-(1-2\text{جا}^2\text{س})} =$$

$$\sqrt{2\text{جا}^2\text{س}} = \sqrt{2}\,|\text{جاس}|\ .$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0^+}\ \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0^+}\ \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0^+}\left(\frac{2\text{س}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}-\frac{\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0^-}\ \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0^-}\ \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{-\sqrt{2}\,\text{جاس}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0^-}\left(\frac{2\text{س}}{-\sqrt{2}\,\text{جاس}}+\frac{\text{جاس}}{\sqrt{2}\,\text{جاس}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}+1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \text{نها}_{\text{س}\to 0}\ \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{\sqrt{1-\text{جتا}2\text{س}}}\ \text{غير موجودة}\ .$$

س١٩

$$\text{نها}_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا } س}{\frac{س}{3} - \pi} = \text{نها}_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا}(3\pi - س)}{\frac{س}{3} - \pi}$$

$$\text{نها}_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا } 3(\pi - \frac{س}{3})}{\frac{س}{3} - \pi}$$

ص $= \pi - \frac{س}{3}$
س $\to 3\pi$
ص $\to 0$

$$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جا } 3ص}{-ص} = -3$$

س٢٠

$$\text{نها}_{س \to 2} \frac{س - 2}{\text{ظا } \pi س} = \text{نها}_{س \to 2} \frac{س - 2}{-\text{ظا}(2\pi - \pi س)}$$

$$\text{نها}_{س \to 2} \frac{س - 2}{-\text{ظا } \pi(2 - س)}$$

ص $= 2 - س$
س $\to 2$
ص $\to 0$

$$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{-ص}{-\text{ظا } \pi ص} = \frac{1}{\pi}$$

س٢١

$$\text{نها}_{س \to -أ} \frac{\text{جا } س + \text{جا } أ}{س + أ} =$$

$$\text{نها}_{س \to -أ} \frac{2 \text{ جا}(\frac{س + أ}{2}) \text{ جتا}(\frac{س - أ}{2})}{س + أ}$$

ص $= س + أ$
س $\to -أ$
ص $\to 0$

$$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{2 \text{ جا} \frac{ص}{2}}{ص} \times \text{جتا}(\frac{-أ-أ}{2})$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \text{جتا}(-أ) =$$

$$\text{جتا } أ$$

س٢٢

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا } أس}{2س} = \frac{أ}{2} = 6 \Leftarrow أ = 12$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا } 3س}{ب س - س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا } 3س}{س(ب - 1)} = \frac{3}{ب - 1} = 6$$

$$3 = 6ب - 6 \Leftarrow \frac{6ب}{6} = \frac{9}{6} \Leftarrow ب = \frac{3}{2}$$

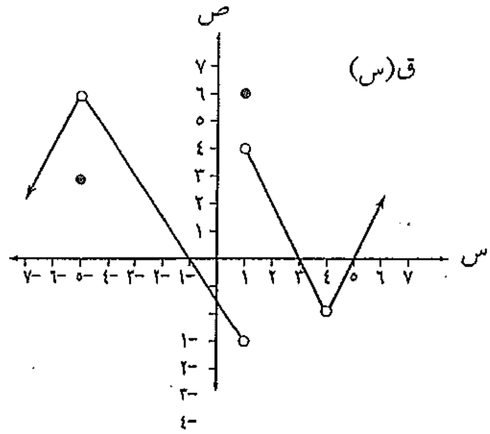
س٢٣

$$\text{جا}(2\pi - 2س) = -\text{جا } 2س$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(2\pi - 2س)}{-5س} =$$

$$\text{نها}_{س \to 0} \frac{-\text{جا } 2س}{-5س} = \frac{2}{5}$$

١) معتمدًا الشكل (١–٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟



الشكل (١–٢٧)

٢) إذا كان ق(س) = [٤س – ٤] ،فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ١,٢٥

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\frac{1 - س^2}{س - 1}$ عند س = ١

٤) ابحث في اتصال الاقتران هـ (س) = $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ عند س = ٢

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < 0 \\ 1 - جتا س & ، س \geq 0 \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٠

٦) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \sqrt{س - 3} & ، س > 3 \\ |س^2 - 9| & ، س \leq 3 \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ٣

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}| - ٢}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٥ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٨) إذا كان ك(س) = $\begin{cases} ٦ + \text{س} & ، -٢ \geq \text{س} \\ ٢ - \text{س} & ، ٢ > \text{س} \geq -٢ \\ ٢\text{س} - ١ & ، ٢ \leq \text{س} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س= ٢

٩) إذا كان ع (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^{٢} & ، ٢ \geq \text{س} > ٠ \\ [\text{س}] + ٣ & ، ٣ > \text{س} > ٢ \\ ٧ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

متصلًا عند س= ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٥\text{س} - ١ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س= ١

١١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} & ، ٢ > \text{س} \\ [\text{س} + ٤] & ، \text{س} = ٢ \\ \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥} + \dfrac{٦}{\text{س}} & ، ٢ < \text{س} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

١٢) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ب} & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ |\text{س}| - ٥ & ، \quad ٢ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣\text{س} + ٥ & ، \quad \text{س} \in \text{ص} \\ ٢\text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} \notin \text{ص} \end{cases}$ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

الاتصال عند نقطة

س1 الاقتران ق غير متصل عند

س = 4 ، 1 ، -5.

السبب: ق(4) غير معرف

$\lim_{س \to 1}$ ق(س) غير موجودة

ق(-5) $\neq$ $\lim_{س \to -5}$ ق(س).

س2 ق(س) = $[4س - 4]$

ل = $\frac{1}{4}$ = 0.25

ق(س) = $\begin{cases} 0 ، & 1 \le س < 1.25 \\ 1 ، & 1.25 \le س < 1.5 \end{cases}$

1) ق(1.25) = 1

2) $\lim_{س \to 1.25^+}$ ق(س) = 1 ، $\lim_{س \to 1.25^-}$ ق(س) = 0 $\Leftarrow$ $\lim_{س \to 1.25}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = 1.25.

س3 ق(س) = $\frac{1 - س^2}{1 - س}$ عند س = 1

1) ق(1) غير معرف $\Leftarrow$

ق(س) غير متصل عند س = 1

س4 هـ(س) = $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ عند س = 2

هـ(2) غير معرف $\Leftarrow$ هـ(س) غير متصل عند س = 2

س5 ق(س) = $\begin{cases} \frac{|ظاس|}{س} ، & س < 0 \\ 1 - جتاس ، & س \ge 0 \end{cases}$

ق(س) = $\begin{cases} \frac{-ظاس}{س} ، & س < 0 \\ 1 - جتاس ، & س \ge 0 \end{cases}$

1) ق(1) = 1 - جتا0 = 1 - 1 = صفر

2) $\lim_{س \to 1^+}$ ق(س) = 1 - 1 = صفر

$\lim_{س \to 1^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to 1^-} \frac{-ظاس}{س}$ = -1

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to 1}$ ق(س) غير موجودة.

$\Leftarrow$ ق(س) غير متصل عند س = 1

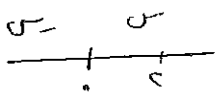
س6 1) ل(3) = صفر

2) $\lim_{س \to 3^-}$ ل(س) = صفر ، $\lim_{س \to 3^+}$ ل(س) = صفر $\Leftarrow$ $\lim_{س \to 3}$ ل(س) = صفر

3) $\lim_{س \to 3}$ ل(س) = ل(3)

∴ ل(س) متصل عند س = 3

س٧ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠



|س| = س حول س = ٢

ه(س) = { (س - ٢)/(س - ٢) = ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٥ ، س = ٢

١) ه(٢) = ٥

٢) نها ه(س) = ١ (س ← ٢)

٣) نها ه(س) ≠ ه(٢) (س ← ٢) ⟸ ه غير متصل عند س = ٢

س٨ ١) ل(٢) = ٢ × ٢ - ١ = ٣

٢) نها ل(س) = ٣ (س ← ٢⁺)
نها ل(س) = ٢ - ٢ = ٠ (س ← ٢⁻)
⟸ نها ل(س) (س ← ٢) غير موجودة

⟸ ل(س) غير متصل عند س = ٢

س٩ ع(س) متصل عند س = ٢

نها ع(س) (س ← ٢⁻) = نها ع(س) (س ← ٢⁺)

أ/٢ + ٤ = ٢ + ٣

أ/٢ + ٤ = ٥

أ/٢ = ١

⟸ أ = ٢

س١٠ ١) ل(١) = ٥ × ١ - ١ = ٤

٢) نها ل(س) (س ← ١) = نها (س³ + س² + ٢س - ٤)/(س - ١) (س ← ١)

= نها (س - ١)(س² + ٢س + ٤)/(س - ١) (س ← ١)

= ١ + ٢ + ٤ = ٧

٣) ل(١) ≠ نها ل(س) (س ← ١) ∴ ل(س) غير متصل عند س = ١

س١١ ١) ه(٢) = [٢ + ٤] = ٦

٢) نها ه(س) (س ← ٢⁺) = √(٤ + ٥) + ٦/٢ = ٣ + ٣ = ٦

نها ه(س) (س ← ٢⁻) = ٢² + ٢ = ٦

نها ه(س) (س ← ٢) = ٦

٣) نها ه(س) (س ← ٢) = ه(٢)

∴ ه متصل عند س = ٢

س١٢ نها ل(س) (س ← ٢⁺) = نها ل(س) (س ← ٢⁻)

٢ - ٥ = ٤ + ب ⟸ -٣ = ٤ + ب

⟸ ب = -٧

س١٣ ١) ه(٣) = ٣ × ٣ + ٥ = ١٤

٢) نها ه(س) (س ← ٣) = ١٤

٣) نها ه(س) (س ← ٣) = ه(٣)

∴ ه متصل عند س = ٣

١) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥} & \text{،}\quad \text{−٢} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{٨ س} & \text{،}\quad \text{١} \leq \text{س} \leq \text{٢} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ٢].

٢) إذا كان ل(س) = |٢س − ١٠ |، فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة[−١٠، ٨].

٣) إذا كان $\text{ع(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{\text{٣} - \text{س}} & \text{،}\quad \text{س} < \text{٣} \\ \text{٥} + \text{س} & \text{،}\quad \text{س} \geq \text{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.

٤) إذا كان $\text{ل(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{٤} - \text{س}} & \text{،}\quad \text{س} < \text{٤} \\ |\text{س}^{\text{٢}} - \text{١٦}| & \text{،}\quad \text{س} \geq \text{٤} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

٥) إذا كان $\text{ع(س)} = \begin{cases} \text{٥} & \text{،}\quad \text{س} = \text{٣} \\ [\text{س}] + \text{٥} & \text{،}\quad \text{٣} < \text{س} < \text{٤} \\ \text{٤} & \text{،}\quad \text{س} = \text{٤} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة [٣، ٤].

) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س} + ١} & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ [٠,٢٥\,\text{س} + ٢] & ، \quad ٣ \leq \text{س} < ٦ \\ |٩ - \text{س}| & ، \quad \text{س} = ٦ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦].

١) إذا كان الاقتران $\text{ع(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢(\text{هـ} - ١)\,\text{س} - ٤\text{هـ}}{\text{س} - ٢} & ، \quad \text{س} \neq ٢ \\ \text{س} + ٥ & ، \quad \text{س} = ٢ \end{cases}$

متصلًا على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

) إذا كان $\text{ع(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \quad \text{س} < ٢ \\ [٠,٥\,\text{س} + ٢] & ، \quad ٢ \leq \text{س} < ٤ \\ \dfrac{٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} & ، \quad \text{س} \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س}] + \text{س} & ، \quad -١ \leq \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٣\text{س}^{٢}}{٥} + \sqrt{\text{س}} & ، \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−١، ٢].

١) إذا كان $\text{ل(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢}{\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

حل: ٣س^٢ + ٥ كثير حدود متصل على (-٢، ١)

٨س كثير حدود متصل على (١، ٢)

نبحث الاتصال عند س = -٢ ، ١ ، ٢

س = -٢

١) ق(-٢) = ٣×٤ + ٥ = ١٧

٢) نها ق(س) عندما س ← -٢⁺ = ١٧

٣) نها ق(س) عندما س ← -٢⁺ = ق(-٢) ∴ ق متصل عند س = -٢

س = ١

١) ق(١) = ٨

٢) نها ق(س) عندما س ← ١⁺ = ٨ ، نها ق(س) عندما س ← ١⁻ = ٣(١) + ٥ = ٨ ← نها ق(س) عندما س ← ١ = ٨

٣) نها ق(س) عندما س ← ١ = ق(١) ∴ ق متصل عند س = ١

س = ٢

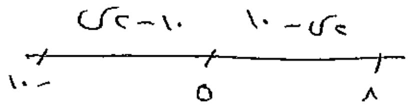
١) ق(٢) = ٨×٢ = ١٦

٢) نها ق(س) عندما س ← ٢⁻ = ١٦

٣) نها ق(س) عندما س ← ٢⁻ = ق(٢) ∴ ق متصل عند س = ٢

ق متصل على [-٢، ٢].

حل: ق(س) = { ٢س - ١٠ ، ٥ ≤ س ≤ ٨ ؛ ١٠ - ٢س ، -١٠ ≤ س < ٥ }



٢س - ١٠ كثير حدود متصل على (٥، ٨)

١٠ - ٢س " " " على (-١٠، ٥)

س = ٥

١) ق(٥) = ٠

٢) نها ق(س) عندما س ← ٥⁺ = ٠ ، نها ق(س) عندما س ← ٥⁻ = ٠ ⟸ نها ق(س) عندما س ← ٥ = ٠

٣) نها ق(س) عندما س ← ٥ = ق(٥) ∴ ق متصل عند س = ٥

س = ٨

١) ق(٨) = ١٦ - ١٠ = ٦

٢) نها ق(س) عندما س ← ٨⁻ = ٦

٣) نها ق(س) عندما س ← ٨⁻ = ق(٨) ∴ ق متصل عند س = ٨

س = -١٠

١) ق(-١٠) = ١٠ - ٢×-١٠ = ٣٠

٢) نها ق(س) عندما س ← -١٠⁺ = ٣٠

٣) نها ق(س) عندما س ← -١٠⁺ = ق(-١٠)

∴ ق متصل عند س = -١٠

ق متصل على [-١٠، ٨].

س٣ $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ لنبين متصل على ح

٥ + س كثير حدود متصل لجميع قيم س > ٣

نبحث الاتصال عند س = ٣

١) ع(٣) = ٥ + ٣ = ٨

٢) $\lim_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ =

$= \lim_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{س - ٣}$

$= -(٩ + ٩ + ٩) = -٢٧$

$\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ع(س) = ٥ + ٣ = ٨

$\lim_{س \leftarrow ٣}$ ع(س) غير موجودة

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٣

ع(س) متصل على ح − {٣}

س٤ |س² − ١٦| = س² − ١٦ عند س ≥ ٤

$\sqrt{٤ - س}$ | س² − ١٦
٤

$\sqrt{٤ - س}$ متصل على (−∞، ٤) لأن ما داخل الجذر متصل وموجب.

س² − ١٦ كثير حدود متصل على (٤، ∞)

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ل(٤) = صفر

٣) $\lim_{س \leftarrow ٤^{+}}$ ل(س) = ٠
$\lim_{س \leftarrow ٤^{-}}$ ل(س) = ٠
⟸ $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ل(س) = ٠

٢) $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ل(س) = ل(٤)

ل(س) متصل عند س = ٤

ل(س) متصل على ح.

س٥ [س] = ٣ ، ٣ < س < ٤

ع(س) = { ٥ ، س = ٣
٨ ، ٣ < س < ٤
٤ ، س = ٤ }

٨ متصل على (٣، ٤) (ثابت)

$\boxed{\text{عند س = ٣}}$

١) ع(٣) = ٥

٢) $\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ع(س) = ٨

٣) $\lim_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ع(س) ≠ ع(٣)

ع(س) غير متصل عند س = ٣

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ع(٤) = ٤

٢) $\lim_{س \leftarrow ٤^{-}}$ ع(س) = ٨

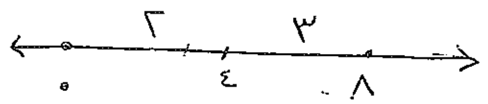
٣) $\lim_{س \leftarrow ٤^{-}}$ ع(س) ≠ ع(٤)

ع(س) غير متصل عند س = ٤

ع(س) متصل على (٣، ٤).

س٦ $[\,٠٫٢٥ ، \text{س}+٢\,]$

$\text{ل} = \frac{١}{٠٫٢٥} = \frac{١}{\frac{١}{٤}} = ٤$



$$\text{د(س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س}+١} & ، ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٢ & ، ٣ \le \text{س} < ٤ \\ ٣ & ، ٤ \le \text{س} < ٦ \\ |\text{س}-٩| & ، \text{س} = ٦ \end{cases}$$

$\sqrt{\text{س}+١}$ متصل على (٠،٣) لأن ما داخل الجذر متصل وموجب.

٢ متصل على (٣،٤) (ثابت)

٣ متصل على (٤،٦) (ثابت)

$\boxed{\text{عند س} = ٣}$

١) د(٣) = ٢

٢) $\lim_{\text{س}\to ٣^-} \text{د(س)} = ٢$ ، $\lim_{\text{س}\to ٣^+} \text{د(س)} = ٢$ $\Leftarrow$ $\lim_{\text{س}\to ٣} \text{د(س)} = ٢$

٣) $\lim_{\text{س}\to ٣} \text{د(س)} = \text{د(٣)}$ ∴ د متصل عند س = ٣

$\boxed{\text{عند س} = ٤}$

١) د(٤) = ٣

٢) $\lim_{\text{س}\to ٤^+} \text{د(س)} = ٣$ ، $\lim_{\text{س}\to ٤^-} \text{د(س)} = ٢$ $\Leftarrow$ $\lim_{\text{س}\to ٤} \text{د(س)}$ غير موجودة

د غير متصل عند س = ٤ .

$\boxed{\text{عند س} = ٠}$

١) د(٠) = ١

٢) $\lim_{\text{س}\to ٠^+} \text{د(س)} = ١$

٣) $\lim_{\text{س}\to ٠^+} \text{د(س)} = \text{د(٠)}$

∴ د متصل عند س = ٠

$\boxed{\text{عند س} = ٦}$

١) $\text{د(٦)} = |٦-٩| = ٣$

٢) $\lim_{\text{س}\to ٦^-} \text{د(س)} = ٣$

٣) $\lim_{\text{س}\to ٦^-} \text{د(س)} = \text{د(٦)}$

∴ د متصل عند س = ٦

∴ د(س) متصل على $[٠ ، ٦] - \{٤\}$.

س٧ ع(س) متصل عند س = ٢ $\Leftarrow$

$\lim_{\text{س}\to ٢} \text{ع(س)} = \text{ع(٢)}$.

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{هـ س} - ٢\text{س} - ٤\text{هـ}}{\text{س} - ٢} = ٥ + ٢$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}-٢} + \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\text{هـ س} - ٤\text{هـ}}{\text{س}-٢} = ٧$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢} + \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\text{هـ}(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢} = ٧$$

$$٢ + ٢\text{هـ} = ٧$$

$$\frac{٢\text{هـ}}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{هـ} = \frac{٥}{٢}$$

س٨ [٠.٥س + ٢]

ل = ١ / ٠.٥ = ١ / (١/٢) = ٢

٠ ، ٢ ، ٤

[٠.٥س + ٢] = ٣ ، ٢ ≤ س < ٤

ع(س) =
- ٢س ، س < ٢
- ٣ ، ٢ ≤ س < ٤
- ٥س / (س² − ٣٦) ، س ≥ ٤

٢س كثير حدود متصل لجميع قيم س < ٢

٣ ثابت متصل على (٢ ، ٤)

٥س / (س² − ٣٦) نسبي متصل (٤ ، ∞) − {٦} .

$\boxed{\text{عند س = ٢}}$

١) ع(٢) = ٣

٢) نها ع(س) (س ← ٢⁺) = ٣ ، نها ع(س) (س ← ٢⁻) = ٤ ⟸ نها ع(س) (س ← ٢) غير موجودة

ع(س) غير متصل عند س = ٢

$\boxed{\text{عند س = ٤}}$

١) ع(٤) = (٥ × ٤) / (١٦ − ٣٦) = ٢٠ / −٢٠ = −١

٢) نها ع(س) (س ← ٤⁺) = −١ ، نها ع(س) (س ← ٤⁻) = ٣ ← نها ع(س) (س ← ٤) غير موجودة

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٤

ع(س) متصل على ح − {٢ ، ٤ ، ٦}

س٩ [س] = −١ ، −١ ≤ س < ٠

ه(س) =
- −١ + س ، −١ ≤ س < ٠
- ٣س²/٥ + √٧س ، ٠ ≤ س ≤ ٢

−١ + س كثير حدود متصل على (−١ ، ٠)

٣س²/٥ + √٧س متصل على (٠ ، ٢) لأنه ٣/٥ س² كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب .

$\boxed{\text{عند س = ٠}}$

١) ه(٠) = ٠

٢) نها ه(س) (س ← ٠⁻) = −١ ، نها ه(س) (س ← ٠⁺) = ٠ ⟸ نها ه(س) (س ← ٠) غير موجودة

∴ ه(س) غير متصل عند س = ٠

$\boxed{\text{عند س = −١}}$

١) ه(−١) = −٢

٢) نها ه(س) (س ← −١⁺) = −٢

٣) نها ه(س) (س ← −١⁺) = ه(−١)

ه متصل عند س = −١

$\boxed{\text{عند س = ٢}}$

١) ه(٢) = ١٢/٥ + √٧٢

٢) نها ه(س) (س ← ٢⁻) = ١٢/٥ + √٧٢

٣) نها ه(س) (س ← ٢⁻) = ه(٢)

ه متصل عند س = ٢

ه متصل [−١ ، ٢] − {٠} .

س١٠ يجب أن يكون المقام ≠ صفر ⟸ العبارة التربيعية لا تحلل ⟸ المميز سالب

$\boxed{\text{أ = أ / ب = ١ / جـ = ٣}}$

ب² − ٤ أ جـ < صفر

١ − ٤ أ × ٣ < صفر

١ − ١٢ أ < صفر

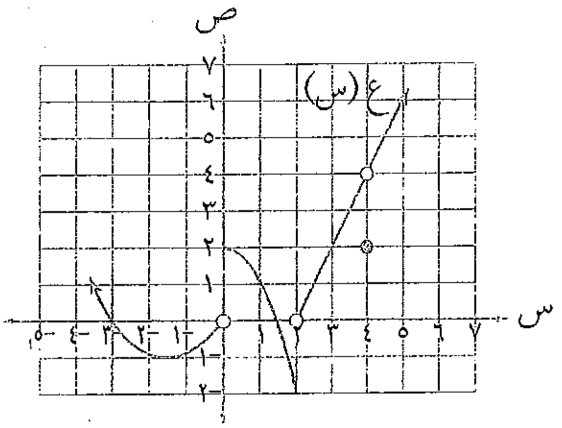
١/١٢ < ١٢أ/١٢

١/١٢ < أ

+ + | − −

١/١٢

١) معتمدًا الشكل (١-٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١-٣٠)

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow {}^{+}\cdot}{\text{نهـا}}$ ع(س)

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}$ ع(س)

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ع(س)

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ع(س)

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ع(س) غير موجودة.

و) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب .

٢) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦ ، فجد قيمة:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}^{٢}\,(٢\,\text{س}+١) - \text{س} + ٢\right)$$

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ - \text{س}}{|\text{س} - ٣|} & ،\quad \text{س} > ٣ \\ \text{جـ}\,\text{س}^{٢} - ٤ & ،\quad \text{س} < ٣ \end{cases}$

وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + (\text{أ}+١٣)\,\text{س} + \text{أ}}{\text{س} - ٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ، س > ٥ \\ أ \text{ جتا } \dfrac{\pi}{٥} س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٦) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س - \text{جا } س}{\sqrt{١ - \text{جتا } ٢س}}$

ب) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س + \text{جا } ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim_{س \to ١} \dfrac{١}{س - ١} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

هـ) $\lim_{س \to -٣} \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{٣}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

و) $\lim_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س^٣} - ٢|س|}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

ز) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س^٢ + \text{جا } ٢س}{٣س}$

ح) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \dfrac{\text{جتا } س - \sqrt{٣} \text{ جا } س}{٦س - \pi}$

ط) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{قا}٢س - ١}{س^٢}$

ي) $\lim_{هـ \to ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - \text{جتا}(\dfrac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

ك) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{جتا } ٣س - \text{جتا } ٥س}{٢س^٢}$

٧) إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٤س^٢ - \text{جا ب س}}{\text{ب س} - \text{ظا } ٤س} = \dfrac{١}{٤}$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨) إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{|س^٢-٤|}{س-٢} & ، س \neq ٢ \\ ٢+س & ، س = ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٢

٩) إذا كا ن ع(س) =
$$\begin{cases} \left|\dfrac{س}{٢} - ١\right| & ، -١ \leq س < ٣ \\ [٠,٥س + ٣] & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س= ٣

١٠) إذا كان ل(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} & ، \dfrac{-١}{٣} < س < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \dfrac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \dfrac{١}{٣} < س < \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\frac{١}{٣}$

١١) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{[س] + س}$ على الفترة (١، ٢] .

١٢) إذا كان هـ(س) =
$$\begin{cases} س^٣ & ، س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - 1}{س + 1} &، \quad -2 \le س < -1 \\ س[س] &، \quad -1 \le س < 1 \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ١).

١٤) إذا كان ل(س) = $\dfrac{س^2 - 1}{س + 2}$ ، هـ(س) = [س] ، فابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفترة [٠، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت $\lim_{س \to 3}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦، فما قيمة $\lim_{س \to 1}$ (ق^2 (٢س+١) − س+٧)؟

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

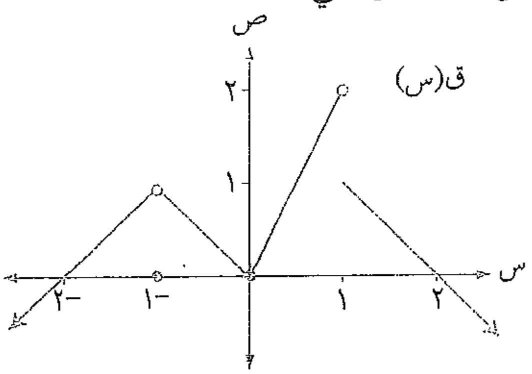
(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦، وكانت $\lim_{س \to 4^+}$ ق(س)=٤ب، فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) $\frac{1}{3}$ ب) ٢ جـ) $\frac{1}{2}$ د) −٢

(٣) إذا كان ق اقترانَ كثير حدود ، وكانت $\lim_{س \to 2} \dfrac{ق(س)}{س}$ = ٣ ، فإنَّ $\lim_{س \to 2} \dfrac{ق^2(س)}{س}$ تساوي:

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدًا الشكل(١-٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنَّ مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = صفرًا هي:



الشكل (١-٣١)

أ) {-٢ ، ٠}

ب) {٠}

جـ) {٠ ، ٢}

د) {-٢ ، ٠ ، ٢}

(٥) $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{٤ - س^{٢}}{٢ - س}$ تساوي:

أ) -١ ب) صفر جـ) -٣ د) ٣

(٦) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٦س^{٤} + ١٨س^{٢}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$ تساوي:

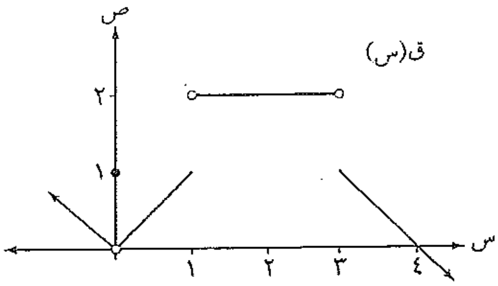
أ) -٦ ب) -٢ جـ) ٣ د) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، وكان ق(١) = ٤ ، فإنَّ

$\lim_{س \leftarrow ١^{+}} \left(\frac{|س-١|}{س-١} + ق(س) \right)$ تساوي:

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة

(٨) معتمدًا الشكل (١-٣٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة؟



الشكل (١-٣٢)

أ) {٠، ١، ٣} ب) {١، ٣، ٤} جـ) {٠، ١، ٣، ٤} د) {١، ٣}

(٩) إذا كان ل(س)= $\begin{cases} \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} & \text{، س} < \frac{\pi}{\text{٢}} \\ \text{أس}^{\text{٢}} + \pi^{\text{٢}} & \text{، س} \geq \frac{\pi}{\text{٢}} \end{cases}$

فإنَّ قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س= $\frac{\pi}{\text{٢}}$ هي:

أ) −٢ ب) صفر جـ) −٤ د) ٤

(١٠) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \text{٣} & \text{، س = ١} \\ [\text{س}] + \text{٥} & \text{، ١} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{٤} & \text{، س = ٢} \end{cases}$

فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة:

أ) [١، ٢] ب) (١، ٢) جـ) [١، ٢) د) (١، ٢]

س1) أ) $\lim\limits_{س \to 0^+} ع(س) = 3$

ب) $\lim\limits_{س \to -2} ع(س) = -2$

جـ) $\lim\limits_{س \to 3} ع(س) = 3$

د) $\lim\limits_{س \to 4} ع(س) = 4$

هـ) $\{0 ، 2\}$

و) $\{0 ، 2 ، 4\}$.

س2) $ص = 2س + 1$ ، $س \to 1$ ، $ص \to 3$

$\lim\limits_{ص \to 3} ل^2(ص) + \lim\limits_{س \to 1}(-س + 2)$

$\left(\lim\limits_{ص \to 3} ل(ص)\right)^2 + -1 + 2$

$4^2 + 1$

$16 + 1 = 17$

س3) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{3 - س}{س - 3} ، & س > 3 \\ جـ س^2 - 4 ، & س < 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{س \to 3^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to 3^-} ق(س)$

$\lim\limits_{س \to 3^+} \dfrac{3 - س}{س - 3} = 9جـ - 4$

$-1 = 9جـ - 4$

$\dfrac{3}{9} = \dfrac{9جـ}{9} \Leftarrow جـ = \dfrac{1}{3}$

س4) لأن النهاية موجودة وتعويض المقام = صفر
فيكون تعويض البسط = صفر .

$2^2 + 2 \times (أ + 13) + أ = صفر$

$4 + 2أ + 26 + أ = صفر$

$30 + 3أ = صفر \Leftarrow \dfrac{3أ}{3} = \dfrac{-30}{3}$

$أ = -10$

س5) $\lim\limits_{س \to 5^+} ل(س) = \lim\limits_{س \to 5^+} \dfrac{|س^2 - 4س - 5|}{|س - 5|}$

$\lim\limits_{س \to 5^+} \dfrac{\cancel{|س - 5|} \times |س + 1|}{\cancel{|س - 5|}} = |5 + 1| = 6$

$\lim\limits_{س \to 5^-} ل(س) = أ \text{ جتا } \pi + 5$

$= أ \times -1 + 5 = -أ + 5$

$\lim\limits_{س \to 5^-} ل(س) = \lim\limits_{س \to 5^+} ل(س)$

$-أ + 5 = 6 \Leftarrow -أ = 1$

$أ = -1$

س6) أ) فكرة موجود في التمارين صفحة 48 .

ب) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{جا س + جا 2س}{3س} = \lim\limits_{س \to 0}\left(\dfrac{جا س}{3س} + \dfrac{جا 2س}{3س}\right)$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

يمكن حل السؤال بقسمة كل حد على س .

الوحدة الأولى

أسئلة الوحدة — النهايات والاتصال — المنهاج الجديد (٢)

س٦ د) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\text{س}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}-1\right) =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{1}{\text{س}-1} \times \frac{1-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{1+\sqrt{\text{س}}}{1+\sqrt{\text{س}}} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\overset{-}{\cancel{1-\text{س}}}}{\cancel{(\text{س}-1)}(\sqrt{\text{س}})(1+\sqrt{\text{س}})} = \frac{-1}{(1)(2)} = \frac{-1}{2}$

ج) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2-3\text{س}}{\text{س}-\sqrt{\text{س}+1}-1} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2-3\text{س}}{\left((\text{س}-1)-\sqrt{\text{س}+1}\right)} \times \frac{(\text{س}-1)+\sqrt{\text{س}+1}}{(\text{س}-1)+\sqrt{\text{س}+1}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{4\times(\text{س}^2-3\text{س})}{(\text{س}-1)^2-(\text{س}+1)} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{4\times(\text{س}^2-3\text{س})}{\text{س}^2-2\text{س}+\cancel{1}-\text{س}-\cancel{1}} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{4\times\cancel{(\text{س}^2-3\text{س})}}{\cancel{\text{س}^2-3\text{س}}} = 4$

ﻫ) $\lim\limits_{\text{س}\to -3} \frac{\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{3}}{\text{س}^2+2\text{س}-3} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to -3} \frac{\cancel{3+\text{س}}}{3\text{س}} \times \frac{1}{(\text{س}-1)\cancel{(\text{س}+3)}} =$

$\frac{1}{(3\times-3)(-3-1)} = \frac{1}{-9\times-4}$

$= \frac{1}{36}$.

و) $|\text{س}-1| = \text{س}$ عند $\text{س} = 4$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}^3}-2\text{س}}{2\text{س}^2-5\text{س}-12} \times \frac{\sqrt{\text{س}^3}+2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^3}+2\text{س}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^3-4\text{س}^2}{(\text{س}-4)(2\text{س}+3)(8+8)} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^2\cancel{(\text{س}-4)}}{16\times(2\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-4)}} =$

$\frac{16}{16\times 11} = \frac{1}{11}$.

ز) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2+\text{جا}2\text{س}}{3\text{س}} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0}\left(\frac{\text{س}^2}{3\text{س}}+\frac{\text{جا}2\text{س}}{3\text{س}}\right) =$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{س} + \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$.

ح) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتاس}-\sqrt{3}\,\text{جاس}}{6\left(\text{س}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\text{س}-\frac{\pi}{6} = \text{ص}$ ، $\text{س}\to\frac{\pi}{6}$ ، $\text{ص}\to 0$.

$\text{س} = \text{ص}+\frac{\pi}{6}$.

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جتا}\left(\text{ص}+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\,\text{جا}\left(\text{ص}+\frac{\pi}{6}\right)}{6\,\text{ص}}$

$= \lim\limits_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جتاص}\,\text{جتا}\frac{\pi}{6}-\text{جاص}\,\text{جا}\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\left(\text{جاص}\,\text{جتا}\frac{\pi}{6}+\text{جتاص}\,\text{جا}\frac{\pi}{6}\right)}{6\,\text{ص}}$

تابع س٦ فرع ج .

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جتاس جتا}\frac{\pi}{6}-\text{جاس جا}\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\left(\text{جاس جتا}\frac{\pi}{6}+\text{جتاس جا}\frac{\pi}{6}\right)}{\text{٦س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتاس}-\frac{1}{2}\text{جاس}-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جاس}+\frac{1}{2}\text{جتاس}\right)}{\text{٦س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتاس}}-\frac{1}{2}\text{جاس}-\frac{3}{2}\text{جاس}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{جتاس}}}{\text{٦س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{-2\,\text{جاس}}{\text{٦س}}=-\frac{1}{3}\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ .$$

هـ) فكر (حلول في التمارين) .

ي) $$\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\text{جتا}\left(\frac{\pi}{3}+\text{هـ}\right)}{\text{هـ}}$$

$$\frac{1}{2}=\text{جتا}\frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{3}-\text{جتا}\left(\frac{\pi}{3}+\text{هـ}\right)}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\text{هـ}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-\text{هـ}}{2}\right)}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\text{هـ}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{-\text{هـ}}{2}\right)}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}-2\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\text{هـ}}{2}\right)\times\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{جا}\frac{-\text{هـ}}{2}}{\text{هـ}}$$

$$-2\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\times\frac{-1}{2}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

ل) $$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جتا ٣س}-\text{جتا ٥س}}{\text{٢س}^2}=$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\text{٣س}+\text{٥س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{٣س}-\text{٥س}}{2}\right)}{\text{٢س}^2}=$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{-\cancel{2}\,\text{جا ٤س جا}(-\text{س})}{\cancel{2}\text{س}^2}=$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}-\frac{\text{جا٤س}}{\text{س}}\times\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جا}(-\text{س})}{\text{س}}=$$

$$-4\times -1=4\ .$$

س٧ بالقسمة على س

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\frac{\text{٤س}^2}{\text{س}}-\frac{\text{جا ب س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ب س}}{\text{س}}-\frac{\text{ظا ٤س}}{\text{س}}}=\frac{1}{4}$$

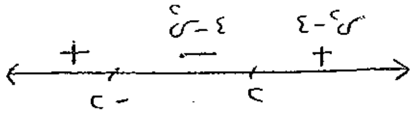
$$\frac{0-\text{ب}}{\text{ب}-4}=\frac{1}{4}$$

$$-4\text{ب}=\text{ب}-4$$

$$\frac{-5\text{ب}}{-5}=\frac{-4}{-5}$$

$$\text{ب}=\frac{4}{5}\ .$$

س٨) $س^٢ - ٤ = ٠ \leftarrow س = \mp ٢$



١) $ق(٢) = ٢ + ٢ = ٤$

٢) $\underset{س \to ٢^+}{نها} ق(س) = \underset{س \to ٢^+}{نها} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢^+}{نها} \frac{(\cancel{س-٢})(س+٢)}{\cancel{س-٢}}$

$= ٢ + ٢ = ٤ .$

$\underset{س \to ٢^-}{نها} ق(س) = \underset{س \to ٢^-}{نها} \frac{٤ - س^٢}{س - ٢}$

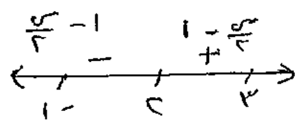
$= \underset{س \to ٢^-}{نها} \frac{(\cancel{٢-س})(س+٢)}{\cancel{س-٢}}$

$= -(٢+٢) = -٤$

$\underset{س \to ٢}{نها} ق(س) =$ غير موجودة

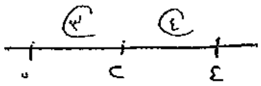
ق(س) غير متصل عند س = ٢

س٩) $\frac{س}{٢} - ١ = صفر \leftarrow \frac{س}{٢} = ١ \leftarrow س = ٢$



$\left|\frac{س}{٢} - ١\right| = \begin{cases} \frac{س}{٢} - ١ ، & ٢ < س < ٣ \\ ١ - \frac{س}{٢} ، & -١ \le س \le ٢ \end{cases}$

$[٠,٥ س + ٣]$ $ل = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$



$[٠,٥ س + ٣] = ٤ ، ٣ \le س < ٤$

$ع(س) = \begin{cases} \frac{س}{٢} - ١ ، & ٢ < س < ٣ \\ ١ - \frac{س}{٢} ، & -١ \le س \le ٢ \\ ٤ ، & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$

١) $ع(٣) = ٤$

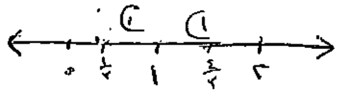
٢) $\underset{س \to ٣^+}{نها} ع(س) = ٤$

$\underset{س \to ٣^-}{نها} ع(س) = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \underset{س \to ٣}{نها} ع(س)$ غير موجودة

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٣

س١٠) $[٣س] = \begin{cases} ٠ ، & ٠ \le ٣س < ١ \\ ١ ، & ١ \le ٣س < ٢ \end{cases}$



$ل(س) = \begin{cases} \frac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{(١ - ٣س)^٢}} ، & -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ ، & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - صفر ، & \frac{١}{٣} \le س < ١ \\ -٦س - ١ ، & ١ \le س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

١) $ل(\frac{١}{٣}) = -٢$

٢) $\underset{س \to \frac{١}{٣}^+}{نها} ل(س) = -٢$

$\underset{س \to \frac{١}{٣}^-}{نها} ل(س) = \underset{س \to \frac{١}{٣}^-}{نها} \frac{٩س^٢ - ١}{|١ - ٣س|}$

←

تابع س١٠

$$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{|١ - ٣س|}$$

$١ - ٣س = ٠ \leftarrow س = \frac{١}{٣}$

$١ - ٣س$ + | $\frac{١}{٣}$ | − $٣س - ١$

$$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{|١ - ٣س|} = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{١ - ٣س}$$

$$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} -١(٣س + ١) = -١(١ + ١) = -٢$$

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{١}{٣}} ل(س) = -٢$

٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} ل(س) = ل\left(\frac{١}{٣}\right)$

∴ ل(س) متصل عند $س = \frac{١}{٣}$.

س١١ $ع(س) = \sqrt{[س] + س}$ ، $[١ ، ٢]$.

$$[س] = \begin{cases} ١ ، & ١ \le س < ٢ \\ ٢ ، & س = ٢ \end{cases}$$

$$ع(س) = \begin{cases} \sqrt{١ + س} ، & ١ \le س < ٢ \\ \sqrt{٢ + س} ، & س = ٢ \end{cases}$$

$\sqrt{١ + س}$ متصل على (١ ، ٢) لأنه ما داخل الجذر متصل وموجب.

$\boxed{عند\ س = ٢}$

١) $ع(٢) = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \sqrt{٣}$

٣) $ع(٢) \ne \lim_{س \to ٢^-} ع(س)$

ع(س) غير متصل عند س = ٢

∴ ع(س) متصل على (١ ، ٢) .

* لا نبحث الاتصال عند س = ١ لأن العدد (١) لا ينتمي للفترة (فترة مفتوحة).

س١٢ لأن $س^٣$ كثير حدود متصل على $(-\infty ، ١)$

$\sqrt{٢س} - ١$ متصل على $(١ ، \infty)$ لأن ٢س كثير حدود وما داخل الجذر متصل وموجب.

$\boxed{عند\ س = ١}$

١) $هـ(١) = \sqrt{٢} - ١ = ٢ - ١ = ١$

٢) $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ١$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١$

٣) $هـ(١) = \lim_{س \to ١} هـ(س)$

∴ هـ(س) متصل عند س = ١

∴ هـ(س) متصل على ح .

س١٣ [س] = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ -١ ، -١ ≤ س < ٠

ق(س) = {
- (س-١)(س+١) / (س+١) ، -٢ ≤ س < -١
- -س ، -١ ≤ س < ٠
- صفر ، ٠ ≤ س < ١

(س² - ١) / (س + ١) نسبي متصل على (-٢، -١) لأن أصفار المقام لا تنتمي للفترة.

-س كثير حدود متصل على (-١، ٠)

صفر ثابت متصل على (٠، ١)

عند س = -٢

١) ق(-٢) = -٢ - ١ = -٣

٢) نهـا ق(س) (س ← -٢⁺) = -٣

٣) نهـا ق(س) (س ← -٢⁺) = ق(-٢) ∴ ق متصل عند س = -٢

عند س = -١

١) ق(-١) = ١

٢) نهـا ق(س) (س ← -١⁺) = ١
نهـا ق(س) (س ← -١⁻) = -١ - ١ = -٢
⟸ نهـا ق(س) (س ← -١) غير موجودة

∴ ق غير متصل عند س = -١

عند س = ٠

١) ق(٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٠
نهـا ق(س) (س ← ٠⁻) = ٠
⟸ نهـا ق(س) (س ← ٠) = ٠

٣) نهـا ق(س) = ق(٠)

∴ ق متصل عند س = ٠

عند س = ١

١) ق(١) غير معرف

∴ ق غير متصل عند س = ١

∴ ق متصل على [-٢، ١) - {-١} .

س١٤ هـ(س) = [س] = {
- ١ ، ١ ≤ س < ٢
- ٠ ، ٠ ≤ س < ١
- ٢ ، س = ٢

ق(س) = (ل × هـ)(س) = {
- (س² - ١) / (س + ٢) ، ١ ≤ س < ٢
- ٠ ، ٠ ≤ س < ١
- ٢(س² - ١) / (س + ٢) ، س = ٢

(س² - ١) / (س + ٢) نسبي متصل على (١، ٢) لأن أصفار المقام لا تنتمي للفترة

٠ ثابت متصل على (٠، ١)

عند س = ١

١) ق(١) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ١⁺) = ٠
نهـا ق(س) (س ← ١⁻) = ٠

٣) نهـا ق(س) (س ← ١) = ق(١)

∴ ق متصل عند س = ١

عند س = ٢

١) ق(٢) = ٣/٢

٢) نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) = ٣/٤

٣) نهـا ق(س) (س ← ٢⁻) ≠ ق(٢)

∴ ق غير متصل عند س = ٢

عند س = ٠

١) ق(٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٠

٣) نهـا ق(س) (س ← ٠⁺) = ق(٠)

∴ ق متصل عند س = ٠

ق متصل على [٠، ٢) .

الوحدة الأولى

اسئلة الوحدة — النهايات والاتصال — المنهاج الجديد (٧)

س١ (١) ص = ٢ل + ١

س ← ١ ، ص ← ٣

نها (ق²(٢ل + ١) − س + ٧)
س←١

= نها ق²(ص) − ١ + ٧
ص←٣

= ٤² − ١ + ٧ = ٢٢ .

(٢) ٣ق(٤) = ٦ ⇐ ق(٤) = ٢

بما أن ق متصل عند س = ٤ ⇐

نها ق(س) = نها ق(س) = ق(٤)
س←٤⁺ ، س←٤⁻

نها ق(س) = ٤ب
س←٤⁺

٢ = ٤ب ⇐ ب = $\frac{١}{٢}$ (جـ)

(٣) نها $\frac{ق(س)}{س}$ = $\frac{ق(٢)}{٢}$ = ٣ (ق كثير حدود متصل)
س←٢

⇐ ق(٢) = ٦ .

نها $\frac{ق^2(س)}{س}$ = $\frac{ق^2(٢)}{٢}$ = $\frac{٦^2}{٢}$ = $\frac{٣٦}{٢}$
س←٢

= ١٨ (ب)

(٤) نها ق(س) = صفر هي
س←أ

{−٢ ، ٠ ، ٢} (د)

(٥) نها $\frac{٤ - س^2}{س - ٢}$ = نها $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{\cancel{س - ٢}}$ = صفر (ب)
س←٢

(٦) نها $\frac{٦س^4 + ١٨س^2}{٢س^2 - ٣س^4}$ = نها $\frac{\cancel{س^2}(٦س^2 + ١٨)}{\cancel{س^2}(٢ - ٣س^2)}$
س←٠

= $\frac{٠ + ١٨}{٢ - ٠}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ (د)

(٧) نها ($\frac{|س - ١|}{س - ١}$ + ق(س)) =
س←١⁺

نها $\frac{\cancel{س - ١}}{\cancel{س - ١}}$ + نها ق(س)
س←١⁺ ، س←١⁺

١ + ٤ = ٥ (جـ)

(٨) نها ق(س) غير موجودة عند أ ∈ {١ ، ٢} (ج)
س←أ

(٩) نها ٢ جتا² س = نها أ س² + π²
س←$\frac{π}{٢}^-$ ، س←$\frac{π}{٢}$

٢ جتا² $\frac{π}{٢}$ = $\frac{π^2}{٤}$ × أ + π²

صفر = $\frac{أπ^2}{٤}$ + π²

$\frac{أπ^2}{٤}$ = −π² ⇐ أ = $\cancel{-π^2 \times \frac{٤}{π^2}}$

أ = −٤ (جـ)

(١٠) ق(س) = { ٣ ، س = ١ .
٦ ، ١ < س < ٢
٤ ، س = ٢

ق متصل على الفترة (١ ، ٢) (ب)