

الجزء  
الأول

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم

# الرياضيات

فريق التأليف:

أ. سرين أبو عيشة

أ. مؤيد الحنجوري

أ. أحلام صلاح

أ. وهبة ثابت

د. تحسين المغربي (منسقاً)

أ. نايف الطبطي



أ. نسرين دويكات

أ. قيس شبانة

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين  
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨ م

الإشراف العام

د. صبري صيدم	رئيس لجنة المناهج
د. بصري صالح	نائب رئيس لجنة المناهج
أ. ثروت زيد	رئيس مركز المناهج

كمال فحماوي	الدائرة الفنية: الإشراف الإداري
منال رمضان	التصميم الفني

د. عمر غنام	التحكيم العلمي:
أ. وفاء جويوسي	التحرير اللغوي:
أ. سالم نعيم	الرسومات:
د. سميرة النخالة	المتابعة للمحافظات الجنوبية:

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©



mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2969350 | فاكس +970-2-2969377

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطلاب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكمة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طبيعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، واللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

## وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقلب عصري؛ ليكون امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسلة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستويات الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من ثلاث وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الأولى منه الاقترانات وتمثيلاتها البيانية، وبعض التحويلات الهندسية عليها، أمّا الوحدة الثانية فتناولت الأسس واللوغاريتمات والاقترانات الأسّيّة واللوغرتميّة وتمثيلاتها، وتناولت الوحدة الثالثة الإحصاء والاحتمالات، فقدّمت معادلة خطّ الانحدار، ومعامل الارتباط، ونظرية ذات الحدّين.

أملنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطيني واقعيّ منظم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

# المحتويات

٨	الدرس الأول: الاقتران الزوجي والاقتران الفردي .....
١٥	الدرس الثاني: تمثيل الاقترانات باستخدام الانسحاب .....
٢٠	الدرس الثالث: تمثيل الاقترانات باستخدام الانعكاس .....
٢٤	الدرس الرابع: اشارة الاقتران .....
٣١	الدرس الخامس: حل المتباينات .....
٣٤	الدرس السادس: الاقترانات متعددة القاعدة .....
٣٨	الدرس السابع: اقتران القيمة المطلقة .....
٤٢	الدرس الثامن: اقتران أكبر عدد صحيح .....
٤٧	الدرس التاسع: تمارين عامة .....
٥٣	الدرس الأول: الأسس واللوغاريتمات .....
٦١	الدرس الثاني: الاقتران الأسّي .....
٦٧	الدرس الثالث: الاقتران اللوغاريتمي .....
٧٣	الدرس الرابع: تمارين عامة .....
٨٠	الدرس الأول: الارتباط الخطي .....
٨٤	الدرس الثاني: معامل ارتباط بيرسون .....
٨٩	الدرس الثالث: معامل ارتباط سبيرمان .....
٩٤	الدرس الرابع: الانحدار الخطي البسيط .....
٩٨	الدرس الخامس: مبدأ العدّ .....
١٠٢	الدرس السادس: التباديل .....
١٠٥	الدرس السابع: التوافيق .....
١٠٨	الدرس الثامن: نظرية ذات الحدين .....
١١١	الدرس التاسع: تمارين عامة .....

الوحدة الأولى

الوحدة الثانية

الوحدة الثالثة

## الاقترانات ورسومها البيانية (Functions and Their Graphs)

الوحدة  
الأولى



### مطرزات فلسطينية

تشتهر فلسطين بمطرزاتها التي قد تظهر فيها رسومات تشبه منحنيات  
لاقترانات متعددة، أتأمل اللوحة، وأصف جمال المطرزات.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التّعرف إلى الاقتران الزوجي والاقتران الفرديّ.
- استخدام التحويلات الهندسيّة في رسم منحنى اقترانٍ ما، في المستوى الديكارتي.
- تحديد إشارة بعض الاقترانات.
- حلّ المتباينات من الدرجة الثّانية بمتغيّر واحد.
- تمثيل اقترانٍ متعدد القاعدة بيانيّاً.

## الاقتران الزوجي والاقتران الفردي (Even and Odd Functions)

(١ - ١)

الرحلات المدرسية من النشاطات اللاصفية التي يُنفذها الطلبة؛ ونظراً لِمَنع أطفالنا من دخول المدن الفلسطينية في الداخل، فإنَّ هذه الرحلات قد اقتصرَت على مدن الضفة الغربية؛ ومن أجل اجتذاب الرحلات والزائرين عمدت معظم المُتنزهات والملاهي إلى توفير ألعابٍ متميزةٍ فيها.



أتأملُ اللعبة في الصورة، ( تُسمَّى هذه اللعبة الدولاب الدوار )

ذهب محمد مع عائلته الى مدينة الملاهي، وعندما ركب في الدولاب لاحظ أن حركة الدوران في الجهة اليمنى من مكان الركوب تكون للأعلى وبالتالي تعطى المواقع إشارة موجبة، بينما تكون حركة الدوران في جهة اليسار للأسفل فإن المواقع تعطى إشارة سالبة. في كل موقع يصنع محور العربة في ذلك الموقع مع محور موقع البداية زاوية مركزية قياسها بين الصفر و  $180^\circ$ .

## ١ الاقترانات

بدأ الدولاب بالدوران وعندما وصلت عربة محمد الى الموقع رقم ٥، توقف الدولاب للحظة من أجل أن يركب أشخاص اخرون فكان قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة يساوي  $75^\circ$ .

واصل الدولاب حركته وعندما وصلت عربة محمد الموقع رقم ٧ توقف الدولاب مرةً أخرى فكان قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة = .....

بدأ الدولاب حركته من جديد ووصل الى الموقع -٧، قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة = .....  
ليكن الاقتران ق: رقم الموقع الذي تقف فيه العربة ← قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة:

فإن ق(٧) = ق(-٧) = .....

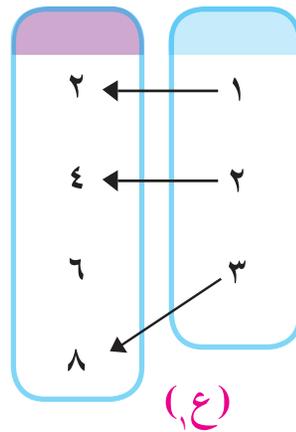
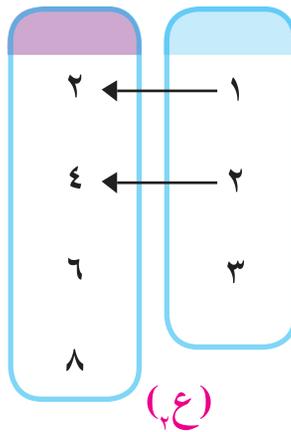
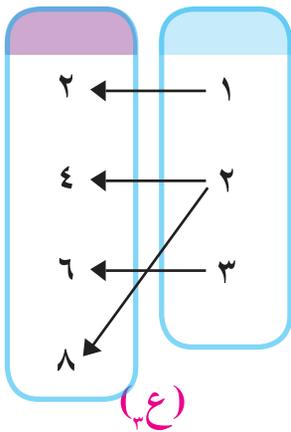
ق(٥) = ق(-٥) = .....

ماذا نستنتج؟

**أذكر** الاقتران: هو علاقة من المجموعة  $A$  إلى المجموعة  $B$ ، بحيث يرتبط كلُّ

عنصرٍ من عناصر المجموعة  $A$  بعنصرٍ واحدٍ فقط من عناصر المجموعة  $B$ .

أيُّ من العلاقات الآتية تمثلُ اقتراناً؟



ع: س ← ص ، ص ≤ س

- ع١: .....
- ع٢: ليست اقتراناً؛ لأنّ العنصر ٣ ليس له صورة.
- ع٣: .....
- ع٤: .....

يُراعي المصمّمون في مجال الهندسة المعماريّة بناءً تصاميمٍ مُتماثلة؛ لأنّ هذا النوع من التصاميم يُعطي الأبنية مِيزةً مُقاومة الزلازل من ناحية، ويُضفي عليها مَسحةً جماليّةً من ناحيةٍ أُخرى.



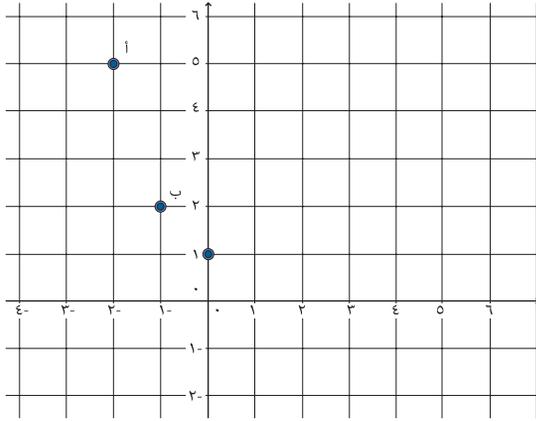
- أرسمُ محورَ تماثلٍ للمبنى في الصورة.
- أبحثُ في مكانٍ سكني عن أبنيةٍ لها محاورُ تماثل، أرسمُها أو أُصوِّرها، وأعيِّنُ عليها محورَ التماثل.
- هل التماثلُ يقتصرُ على تصاميمِ الأبنية؟ أذكرُ أمثلةً من البيئة الطبيعيّة يظهر فيها التماثل.

أمثّلُ بيانياً الاقتران ق على ح ، حيث ق (س) =  $s^2 + 1$  ، س  $\in$  ح  
أكملُ الجدول الآتي:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ق(س)	$10 = 1 + 2^2(3)$			١			

# ١ الاقترانات



أعینُ النقاط (س، ق (س) في المستوى الديكارتي:

أصلُ بين النقاط، وأكملُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ أنَّ منحنى الاقتران ق متماثل حول

.....

ليكن الاقترانُ ق على ح ، حيث ق(س) = س<sup>٤</sup> ، س ∈ ح

أجدُ: ق(٣) = ٨١ ، ق(٣-) = ٨١

ق(٢) = ..... ، ق(٢-) = .....

ق(١) = ..... ، ق(١-) = .....



نشاط

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: الاقتران الزوجي ق على ح: هو الاقتران الذي يحقق ق(-س) = ق(س) ، لكل س ∈ ح

وأن منحناه متماثل حول محور الصادات.

أبينُ بمثالٍ عدديٍّ أنَّ: الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س<sup>٢</sup> + س

ليس اقتراناً زوجياً.

أجد: ق(٢-) = (٢-) + (٢-) = ٢

ق(٢) = .....



نشاط

ألاحظُ أنَّ: .....

أبين جبرياً أن: الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) =  $s^2 - 2$ ، س  $\exists$  ح اقتران زوجي.  
 ق(س) =  $(-s)^2 - 2 = s^2 - 2$   
 ق(س) = .....  
 أقارن بين: ق (س)، ق (س).



الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) =  $s^3$ ، س  $\exists$  ح  
 ق(٤) =  $64$ ، ق(٤-) =  $-64$ ، ق(٤) =  $-64$ ، إذن: ق(٤-) =  $-64$ ، ق(٤) =  $64$   
 ق(٣) = .....، ق(٣-) = .....، ق(٣) = .....  
 إذن: .....  
 ق(٢) = .....، ق(٢-) = .....، ق(٢) = .....  
 إذن: .....



ألاحظ أن: ق(س-) = .....

أتعلم: الاقتران الفردي ق على ح: هو الاقتران الذي يحقق ق(س-) = -ق(س)، لكل س  $\exists$  ح

اعتماداً على الاقتران ق(س) =  $s^3$ ، في نشاط (٨)  
 أكمل الجدول الآتي:

٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	س
			٠			$27 = 3^3$	ق(س)



- أعيّن النقاط (س، ق(س)) في المستوى الديكارتي.
- أصل بين النقاط، وأرسم منحنى الاقتران.

أتعلم: الاقتران الفردي متماثل حول نقطة الأصل.

أَبِينُ جبريًّا أَنَّ:

الاقتران  $ق$  الذي قاعدته  $ق(س) = س^3 - س$  ،  $س \in ح$  هو اقترانٌ فرديٌّ.

أَجِدْ:  $ق(-س) = (-س)^3 - (-س) = س^3 + س$

$ق(س) = \dots\dots\dots$

أُقارنُ بين  $ق(-س)$  ،  $ق(س)$ .



أَبِينُ بمثالٍ عدديٍّ: هل الاقتران  $ق(س) = س^3 + س^2$  ، زوجيٌّ، أم فرديٌّ،

أم غير ذلك؟



أُلاحِظُ أَنَّ:  $ق(٥) = (٥)^2 + (٥)^3 = ٢٥ + ١٢٥ = \dots\dots\dots$

$ق(-٥) = \dots\dots\dots$

$ق(٥) = \dots\dots\dots$

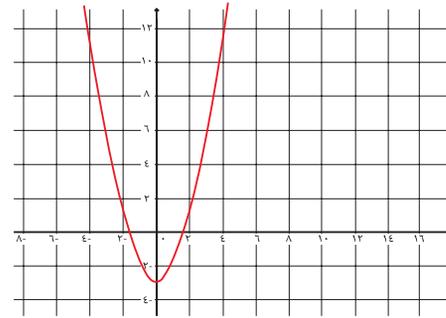
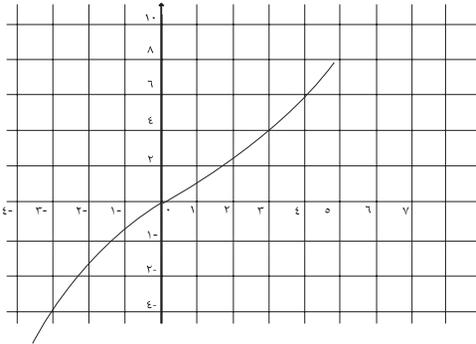
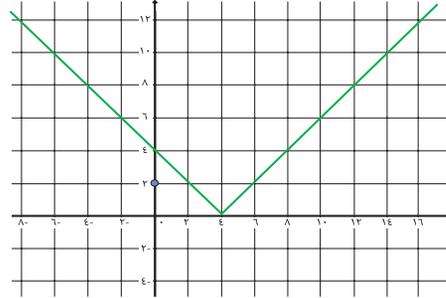
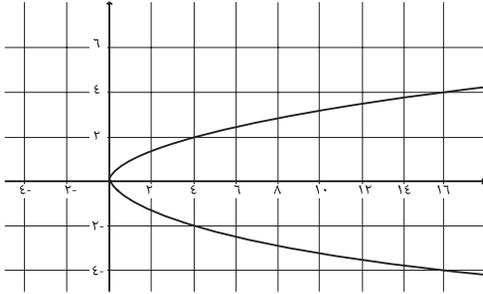
أُقارنُ بين:  $ق(٥)$  ،  $ق(-٥)$

وأستنتجُ أَنَّ: الاقتران  $ق$ :  $\dots\dots\dots$

أَتَعَلَّمُ: إذا لم يكن الاقتران زوجيًّا فليس من الضرورة أن يكون اقتراناً فرديًّا.

## تمارين ومسائل:

(١) أيُّ من المنحنيات الآتية يمثِّل اقتراناً، وإذا كان اقتراناً، فأَيُّ منها زوجيٌّ، وأيُّها فرديٌّ أو غير ذلك؟



(٢) أتَحَقِّقُ جبريًّا ممَّا يأتي:

أ) الاقتران  $q(s) = s^3 + 2s$  ، اقترانٌ فرديٌّ.

ب) الاقتران  $q(s) = s^4 - s^2$  ، اقترانٌ زوجيٌّ.

(٣) أبينُّ بمثالٍ عدديٍّ: هل الاقتران  $q(s) = s^5 + s^3$  ، زوجيٌّ، أم فرديٌّ، أم غير ذلك؟

(٤) أتَحَقِّقُ جبريًّا من صحَّةِ العبارة: حاصلُ ضربِ اقترانينِ زوجيينِ هو اقترانٌ زوجيٌّ.

## تمثيل الاقتارات باستخدام الإنسحاب (Translation)

( ٢ - ١ )

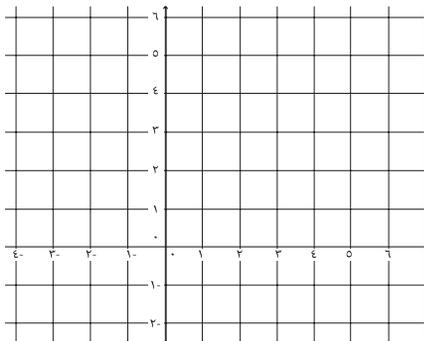
شاركت فلسطين في بطولة العالم للشطرنج في النرويج مع ١٧٨ دولة، حيث انتقلت فلسطين من المرتبة رقم ١٦٣ إلى المرتبة ١٠٣ على مستوى العالم؛ إذ تفوقت على دول عربية متميزة في هذه اللعبة، وحصلت على مكانة دولية فيها. تتحرك أحجار الشطرنج وفق قواعد محددة.



- يتحركُ الملكُ بمقدار وحدةٍ واحدةٍ في جميع الاتجاهات.
- يتحركُ الفيلُ .....
- تتحركُ القلعةُ .....
- يتحركُ الوزيرُ .....

تُسمَّى مثلُ هذه الحركاتِ في المستوى تحويلاتٍ هندسيَّةً.

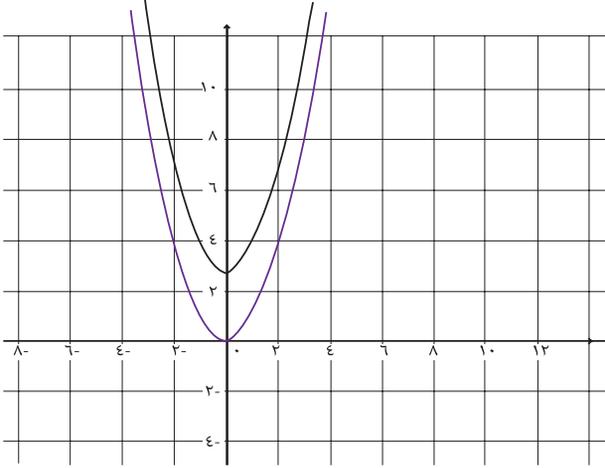
أعيِّنُ النِّقاطَ: م (٢، ١)، ب (٣-، ١-)، ج (٥-، ٢)، ثمَّ أرسمُ المثلثَ أ ب ج في المستوى الديكارتي.



- صورة النقطة م (٢، ١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: م' (٤، ٢).
- صورة النقطة ب (٣-، ١-) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: ب' (.....، .....).
- صورة النقطة ج (٥-، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: ج' (.....، .....).
- أرسمُ المثلثَ م' ب' ج' في المستوى الديكارتي.

ألاحظُ أن: النقطة (س، ص) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: النقطة (س، ص+٣).

## ١ الاقترانات



في الشكل المجاور ، أنظرُ إلى  
منحنى الاقتران  
ق(س) = س<sup>٢</sup> ، س ∋ ح ،  
ومنحنى الاقتران  
ل(س) = س<sup>٢</sup> + ٣

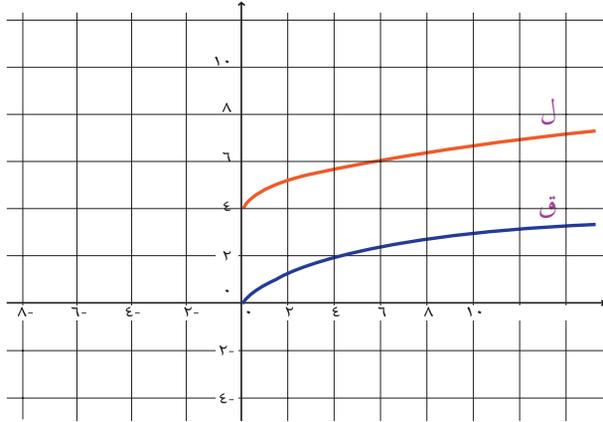


**الأحظ أن:** منحنى ل(س) هو انسحاب لمنحنى ق(س) بمقدار ..... للأعلى.

. أمثلُ بيانياً منحنى الاقتران: ه(س) = س<sup>٢</sup> - ٤ .

**أتعلم:** منحنى الاقتران ل(س) = ق(س) + ج هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار ج وحدة إلى الأعلى إذا كانت ج < صفر ، وانسحاب بمقدار |ج| وحدة إلى الأسفل إذا كانت ج > صفر.

أنظرُ إلى منحنى الاقتران: ق(س) = √س ، س ≤ صفر ومنحنى ل في الشكل الآتي:



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق بمقدار .....

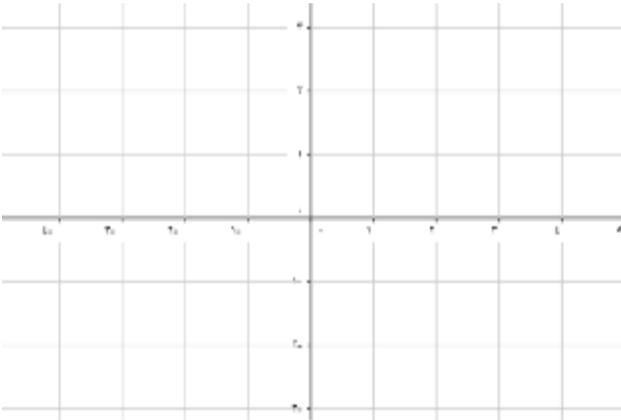
. قاعدة الاقتران ل هي: .....

أمثلُ بيانياً منحنيات الاقترانات الآتية:

ك(س) = √س - ٢ .

ه(س) = √س + ١ .

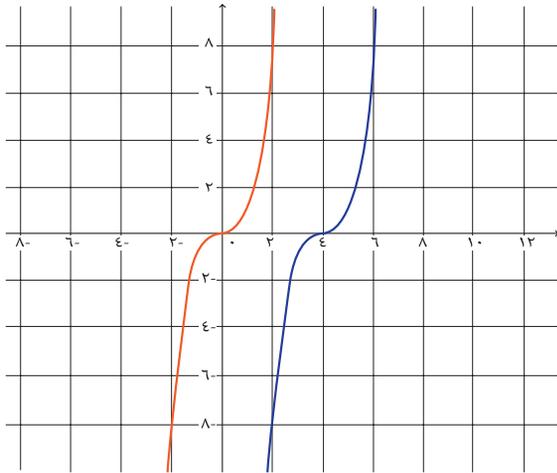
## ١ الاقترانات



أعيّنُ النقاط:  $P(1, 3)$ ،  
ب  $(-1, -1)$ ، ج  $(0, -2)$ ،  
د  $(2, 2)$ ، وأرسمُ الشكل الرباعي  
ب ج د في المستوى  
الديكارتي:



- صورة النقطة  $P(1, 3)$  بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي:  $P(4, 3)$ .
- صورة النقطة ب  $(-1, -1)$  بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: ب  $(2, -1)$ .
- صورة النقطة ج  $(0, -2)$  بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: ج  $(3, -2)$ .
- صورة النقطة د  $(2, 2)$  بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: د  $(5, 2)$ .
- أرسمُ الشكل الرباعي  $P$  ب ج د في المستوى الديكارتي.
- ألاحظ أن النقطة  $(س, س)$  بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي النقطة:  $(س+٣, س)$ .



اعتماداً على منحنى  
ق  $(س) = س^٣$ ،  $س \in ح$   
ومنحنى الاقتران:  
ل  $(س) = (س - ٤)^٣$



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لـ ..... بمقدار ..... وحدات.

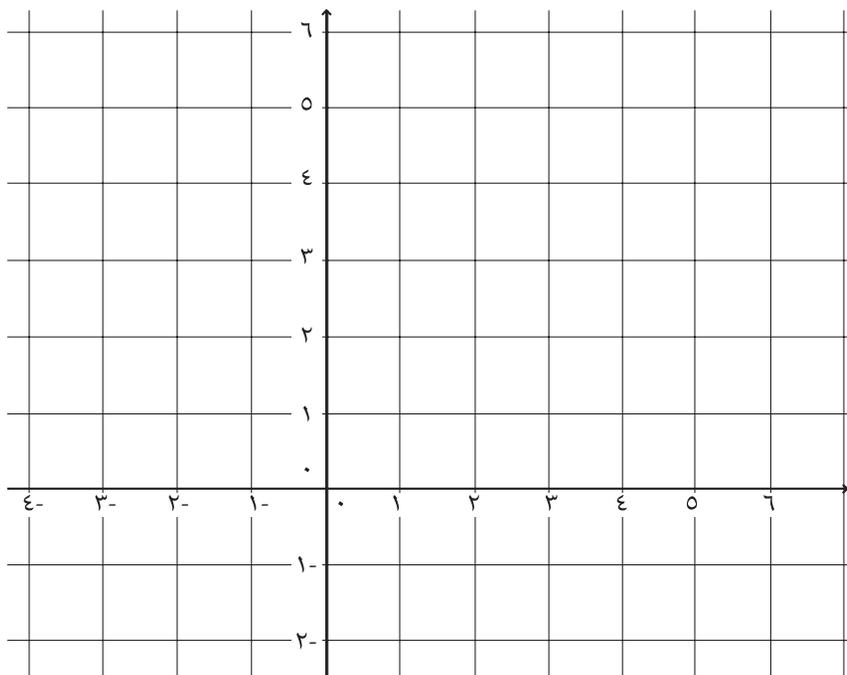
أمثّلُ منحنيات الاقترانات: هـ  $(س) = (س + ٥)^٣$ ، ك  $(س) = (س + ٣)^٣ - ٢$ ، في المستوى الديكارتي.

**أتعلمُ:** منحنى الاقتران ق  $(س + ج)$  هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى الاقتران ق  $(س)$  بمقدار ج وحدة، إذا كانت ج < ٠، وانسحاب إلى اليمين بمقدار |ج| وحدة، إذا كانت ج > ٠.



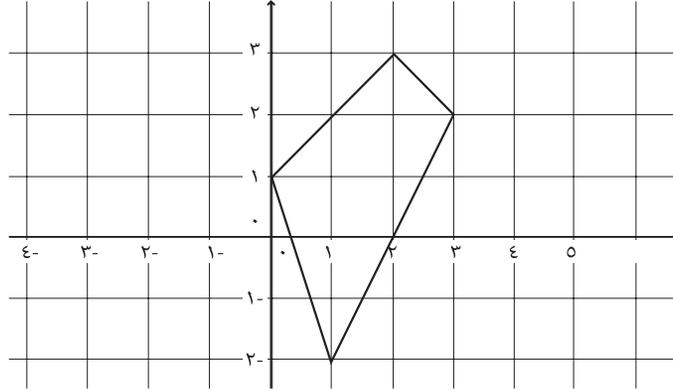
أستخدمُ طريقة إكمال المربع؛ لمعرفة التحويلات الهندسيّة التي أُجريت على منحنى الاقتران:  
ق(س) =  $s^2 + 4s$  ، ثم أرسمه، باستخدام تلك التحويلات.

- أجدُ المقدار:  $\left(\frac{معامل\ س}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \dots\dots\dots$
- أكتبُ قاعدة الاقتران بالصورة: ق(س) =  $(s^2 + 4s + \dots\dots\dots) - \dots\dots\dots$
- ومنها: ق(س) =  $(s + \dots\dots\dots)^2 - \dots\dots\dots$  ، (لماذا؟)
- أصفُ بالكلمات التحويلات الهندسيّة الناتجة  $\dots\dots\dots$
- أرسمُ منحنى الاقتران ق في المستوى الديكارتي.

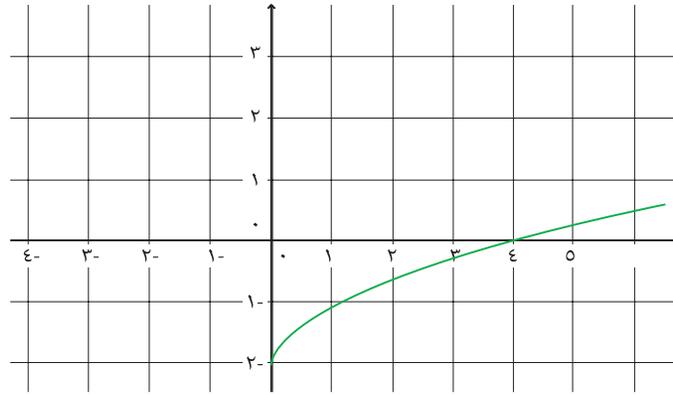


## تمارين ومسائل:

(١) أرسم الشكل الرباعيّ المرسوم في المستوى الديكارتي بعد انسحابه وحدتين إلى اليسار، ومن ثم ٣ وحداتٍ إلى الأسفل.



(٢) بالاعتماد على منحنى  $v = q(s)$  ،  $s \leq 0$  الممثل في المستوى الديكارتي، أمثل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه



أ)  $h(s) = q(s) - 5$

ب)  $l(s) = q(s) + 4$

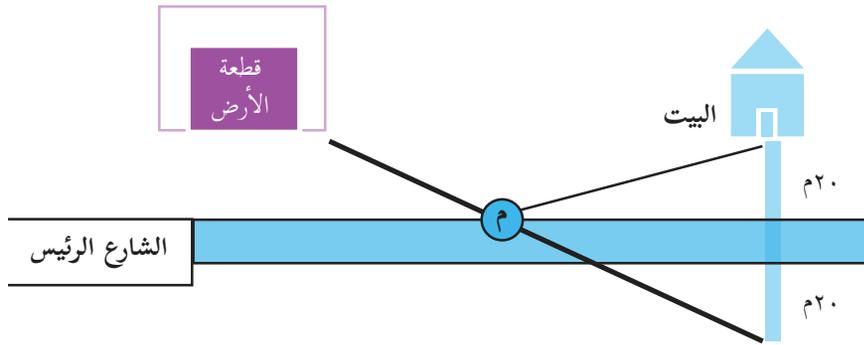
ج)  $d(s) = q(s) + 3 + (1 - s)$

(٣) باستخدام طريقة إكمال المربع، أرسم منحنى الاقتران:  $h(s) = s^2 - 10s + 27$  ، اعتماداً على منحنى  $q(s) = s^2$

## تمثيل الاقترانات باستخدام الإنعكاس ( Reflection )

( ٣ - ١ )

تهتم وزارة الزراعة بشق طرقٍ زراعيّةٍ في القرى الفلسطينيّة؛ لزيادة الاهتمام بالأراضي والثروة الزراعيّة. طلب مُزارعٌ من الوزارة مساعدته في شقّ طريقٍ بين بيته وقطعة الأرض التي يملكها ويربطه مع الشارع الرئيسي، فذهب مهندسُ البلديّة لمُعاينة الموقع، وارتأى أن تُشقّ الطريقُ، كالمخطّط الذي يظهرُ في الشكل.



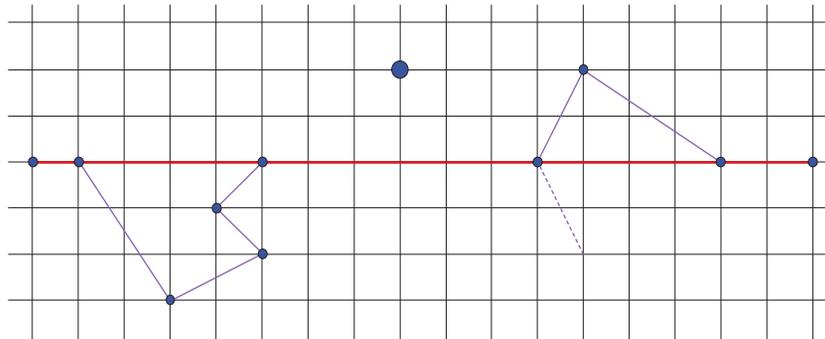
المخطّط الذي رسمه المهندس.



لماذا أصبحت التكاليف أقلّ ما يمكن، عند تحديد موقع النقطة م على الشارع، كما تراه في المخطّط؟



أكمل رسم الأشكال الآتية، باعتبار الخطّ الأحمر محور انعكاس:



**أتذكر** انعكاس النقطة  $P$  (س، ص) في محور السينات هي النقطة  $P^{-}$  (س، -ص).

أكمل الجدول الآتي:

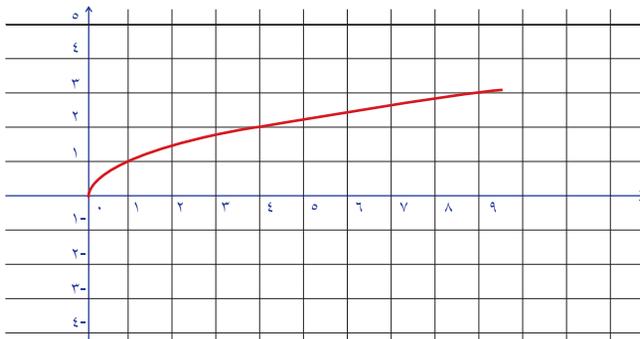
٢-	١-	٠	١	٢	س
٧-		١			ق(س) = $١ + ٢س$
				٩-	ق(س) - = $(١ + ٢س)$



- أعيّن النّقاط من الجدول في المستوى الديكارتي، وأمثّل منحنى الاقتران ق(س).
- أعيّن النّقاط من الجدول في المستوى نفسه، وأمثّل منحنى الاقتران -ق(س).

ألاحظُ أنّ: .....

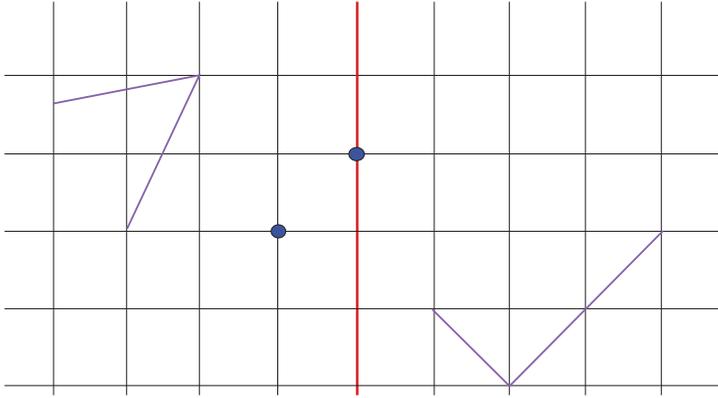
**أتعلّم:** منحنى الاقتران -ق(س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور السينات.



يُمثّل الشكلُ الآتي منحنى الاقتران:  
ق(س) =  $\sqrt{س}$  ،  $س \leq$  صفر .



أمثّل منحنى الاقتران ل(س) =  $-\sqrt{س}$  على المستوى نفسه.

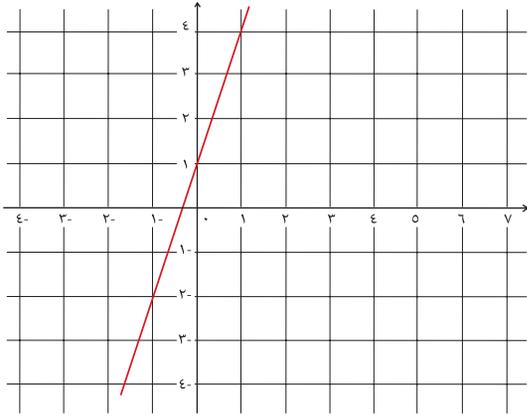


أكمل رسم الأشكال الآتية،  
باعتبار الخطّ الأحمر  
محور انعكاس:



انعكاس النقطة  $P$  (س، ص) في محور الصادات هي النقطة  $P'$  (-س، ص).

أتذكر



يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران  
ق(س) = ٣س + ١  
أكمل: بالاعتماد على القاعدة، يكون  
ق(-س) = ٣(-س) + ١ = .....



١-	٠	٣	س
	١		ق(-س)

بالاعتماد على الجدول، أمثل منحنى الاقتران ق(-س) في المستوى الديكارتي.

أتعلم: منحنى الاقتران ق(-س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور الصادات.

## تمارين ومسائل:

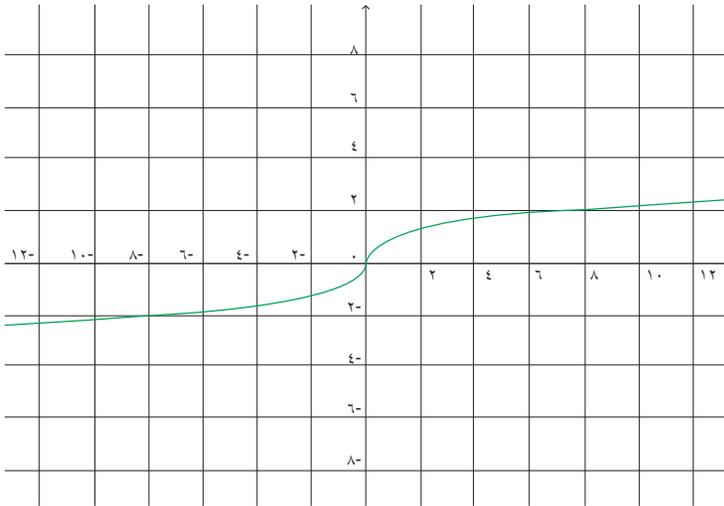
- (١) أكتب الزوج المرتب الذي يمثل التحويلات الهندسية على النقطة (٣، -٤)، في الحالات الآتية:
- أ) انعكاس في محور الصادات.
- ب) انعكاس في محور السينات.

(٢) أصف بالكلمات التحويلات الهندسية الآتية على منحنى ق(س):

أ) ق(س)

ب) ق(س) + ١

ج) ق(س) - ٢ + ٣



(٣) اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم،

أرسم منحنيات الاقتارات الآتية:

أ) ق(س) - ١

ب) ق(س) + ١

ج) ق(س)

## إشارة الاقتران (Sign of a Function)

( ١ - ٤ )

تهتم وزارة التجارة والصناعة بتحسين الوضع الاقتصادي، ودعم التجارة في فلسطين. أبو ياسين تاجر أحذية، ينال خصميات على المستحقات المترتبة عليه؛ نظراً لالتزامه بواجباته تجاه الوزارة، طلب أبو ياسين من محاسب المحال التجاري تزويده بالوضع المالي لإحداها خلال السنة السابقة، فقدم له المحاسب الوضع المالي كما في الجدول الآتي:



الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
الوضع المالي	-	+	+	+	.	-	-	+	+	+	.	-

- الأشهر التي ربح المحلّ فيها هي: .....
- الأشهر التي خسر فيها المحلّ هي: .....
- ماذا نستنتج عن الوضع المالي في شهريّ: أيار، تشرين ثاني؟

هل الجدول يعطي صورة شاملة عن الوضع المالي للمحلّ؟

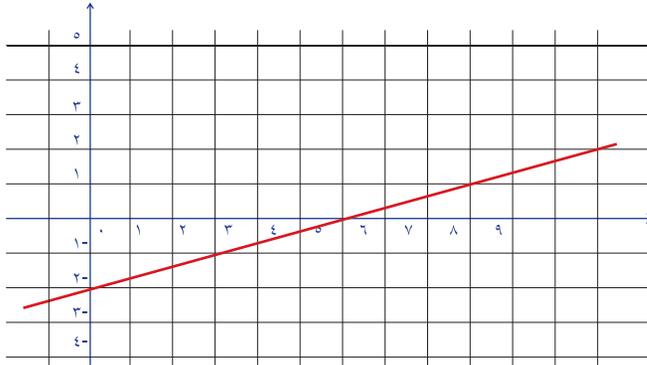
أناقش

أولاً: إشارة الاقتران الثابت

- أعطي أمثلة على اقترانات ثابتة.
- ق(س) = ١٢، وإشارته موجبة.
  - ق(س) =  $\pi$ ، وإشارته سالبة.
  - ل(س) = -٢٣، وإشارته .....
  - ك(س) = .....، وإشارته موجبة.
  - ه(س) = .....، وإشارته .....



أتعلّم: إشارة الاقتران الثابت ق(س) = ج، ج  $\in$  ح، هي إشارة ج نفسها.



## ثانياً: إشارة الاقتران الخطي

يبين الشكل المجاور

منحنى اقتران خطي ،

$$\text{قاعدته ق(س)} = \frac{1}{3} \text{س} - 2$$



- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي:  $(\dots, \dots)$ .
- صفر الاقتران هو:  $\dots$
- الفترة التي وقع فيها المنحنى فوق محور السينات هي:  $\dots$  ، وتكون إشارته  $\dots$
- الفترة التي وقع فيها المنحنى تحت محور السينات هي:  $\dots$  ، وتكون إشارته  $\dots$
- أعيّن إشارة الاقتران على خط الأعداد:

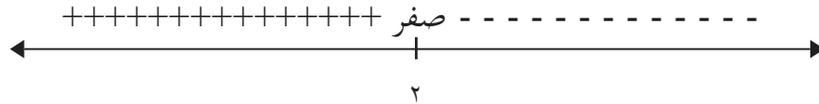


**أتعلم:** إشارة الاقتران الخطي ق(س) =  $a$ س + ب ،  $\exists$  ح ،  $a \neq 0$  صفر هي نفس إشارة معامل س ، لكل س أكبر من صفر الاقتران ، وعكس إشارة معامل س ، لكل س أصغر من صفر الاقتران .

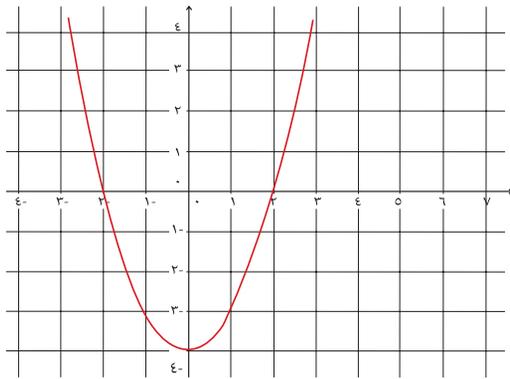
يُمكنُ توضيحُ ذلك على خط الأعداد:



- مثال (١): أعيّن إشارة الاقتران ق(س) =  $2 - 4$  س
- الحل: صفر الاقتران = ٢، إذن: يقطع منحنى الاقتران محور السينات في النقطة (٢، ٠).
- إشارة الاقتران (+) موجبة "عكس إشارة معامل س"، لكل  $س > ٢$ .
  - إشارة الاقتران (-) سالبة "إشارة معامل س نفسها"، لكل  $س < ٢$ .
  - أعيّن الإشارة على خط الأعداد الآتي:

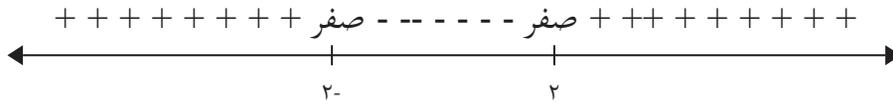


- يُمكن كتابة الحل بالصورة: ق(س) < صفر (موجبا)، في الفترة ]٢، ∞[
- ق(س) > صفر (سالبا)، في الفترة ]∞، ٢[
- ق(س) = صفر، عندما  $س = ٢$ .



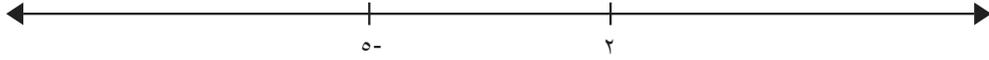
### ثالثا: إشارة الاقتران التربيعي

أتأمل منحنى الاقتران المرسوم ق(س) =  $س^2 - ٤$ ،  
وإشارة الاقتران الموضحة على خط الأعداد:



- يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين: (.....، .....)، (.....، .....)
- يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة .....
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....
- إشارة الاقتران موجبة في الفترة .....، بينما إشارته سالبة في الفترة .....
- أصفار الاقتران هي: .....

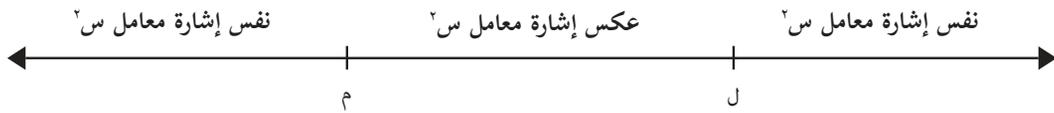
- أعَيِّنُ إشارة الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٣س - ١٠ .
- أصفار الاقتران هي: .....
  - أرسم خط الأعداد، وأعَيِّنُ عليه أصفار الاقتران.



- ق(-٦) = ٣٦ + ١٨ - ١٠ = ٤٨ < صفر (قيمة موجبة).
- ق(-٧) = .....
- ق(-٣) = ٩ + ٩ - ١٠ = ٨ > ١٠- صفر (قيمة سالبة).
- ق(١) = .....
- ق(٤) = ١٦ + ١٢ - ١٠ = ١٨ < صفر (قيمة موجبة).
- ق(٦) = .....
- أعَيِّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد.
- أكتب الفترات التي فيها يكون ق(س) موجباً، والفترات التي يكون فيها الاقتران سالباً.

**أتعلّم:** إشارة الاقتران التربيعي تكون عكس إشارة معامل س<sup>٢</sup> بين صفري الاقتران، وما عدا ذلك فهي إشارة معامل س<sup>٢</sup>.

ويمكن توضيح ذلك بالشكل؛ حيث ل، م هما صفر الاقتران ق ، ل < م :

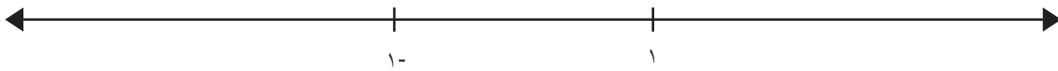


أعَيِّنْ إشارة الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ١ - س<sup>٢</sup>

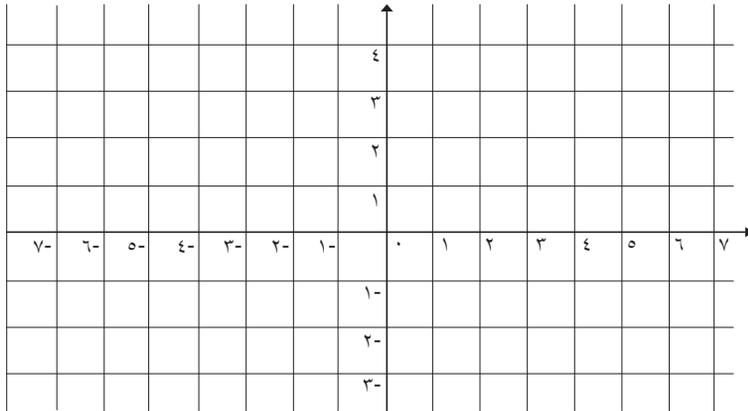
- أصفار الاقتران هي: .....
- إشارة معامل س<sup>٢</sup> هي: .....
- إشارة الاقتران موجبة (عكس إشارة معامل س<sup>٢</sup>) في الفترة .....
- إشارة الاقتران سالبة (نفس إشارة معامل س<sup>٢</sup>) في الفترة .....



• أرسمُ خطَّ الأعداد، وأعَيِّنْ عليه إشارة الاقتران:



- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....
- يقعُ منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة .....



أرسمُ منحنى الاقتران:

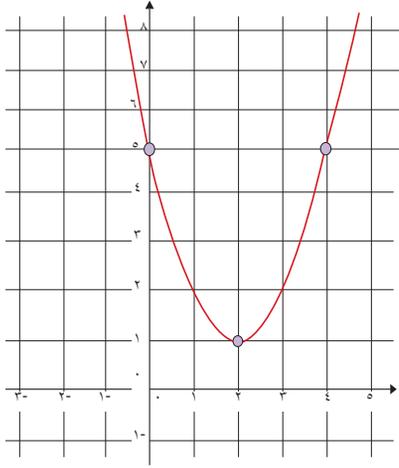
$$ق(س) = ٩ + س^٢$$



- أصفار الاقتران هي: .....
- إشارة معامل س<sup>٢</sup> هي: .....
- أعَيِّنْ إشارة الاقتران على خط الأعداد.
- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....

**أتعلَّم:** إشارة الاقتران التربيعي: هي إشارة معامل س<sup>٢</sup>، إلا عند صفر الاقتران، إذا كان له صفر واحد فقط.

## ١ الاقترانات



أتملُّ منحنى الاقتران في الشكل المجاور ،  
ثم أُجيبُ عن الأسئلة التي تليه :



- هل قطع المنحنى محور السينات ؟
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة.....
- أعيِّنُ إشارة ق(س) على خط الأعداد وأكتب قاعدته.....

أتعلَّمُ: إشارة الاقتران التربيعي هي إشارة معامل س<sup>٢</sup>، إذا لم يقطع منحناهُ محور السينات.

ما العلاقة بين مُميِّز العبارة التربيعية (ب<sup>٢</sup> - ٤ أ ج) المرافقة للاقتران التربيعي وإشارته ؟



## رابعاً: إشارة الاقتران النسبي

يُسمَّى الاقتران ق اقتراناً نسبياً إذا كانت قاعدته على الصورة الآتية:

$$ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)} \text{ حيث ل، م كثيرا حدود ، م(س) } \neq \text{ صفر.}$$

أعيِّنُ إشارة الاقتران: ق(س) =  $\frac{س + ٣}{س^٢ - ٣س - ٣}$  ، س  $\neq ٣$  ، ١ -



← أعيِّنُ إشارة البسط (س + ٣)، كاقترانٍ خطيٍّ على خطِّ الأعداد:

← أعيِّنُ إشارة المقام (س<sup>٢</sup> - ٣س - ٣)، كاقترانٍ تربيعيٍّ على خطِّ الأعداد



← أعيِّنُ إشارة الاقتران النسبي ق على خطِّ الأعداد:

أعِينُ إشارة الاقترانِ ق الذي قاعدته: ق(س) =  $\frac{٥}{س + ١}$  ، س  $\neq ١ -$



- إشارة البسط هي ....
- أعِينُ إشارة البسط على خطّ الأعداد:
- أعِينُ إشارة المقام (س+١) على خط الأعداد:
- أعِينُ إشارة الاقتران النسبي ق على خط الأعداد:

## تمارين ومسائل:

(١) أعِينُ إشارة كلِّ من الاقترانات الآتية:

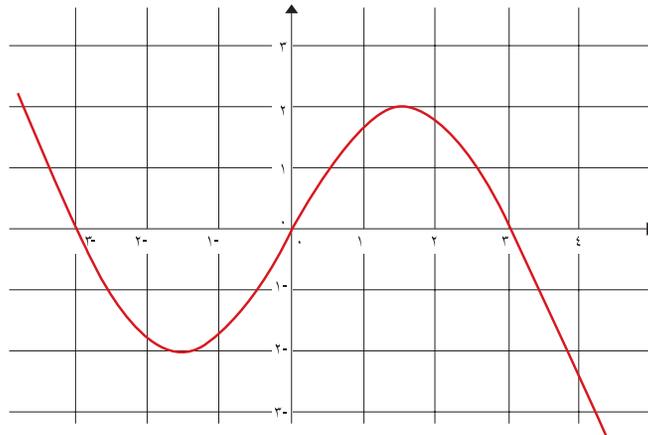
أ ( هـ ) س = ٤ - س

ب ( ع ) س = ٤ - ٤س - س<sup>٢</sup>

ج ( م ) س =  $\frac{١-}{س}$  ، س  $\neq$  صفر

د ( ك ) س =  $\frac{٥ + س٦ + س٢}{٤ - س}$  ، س  $\neq$  ٤

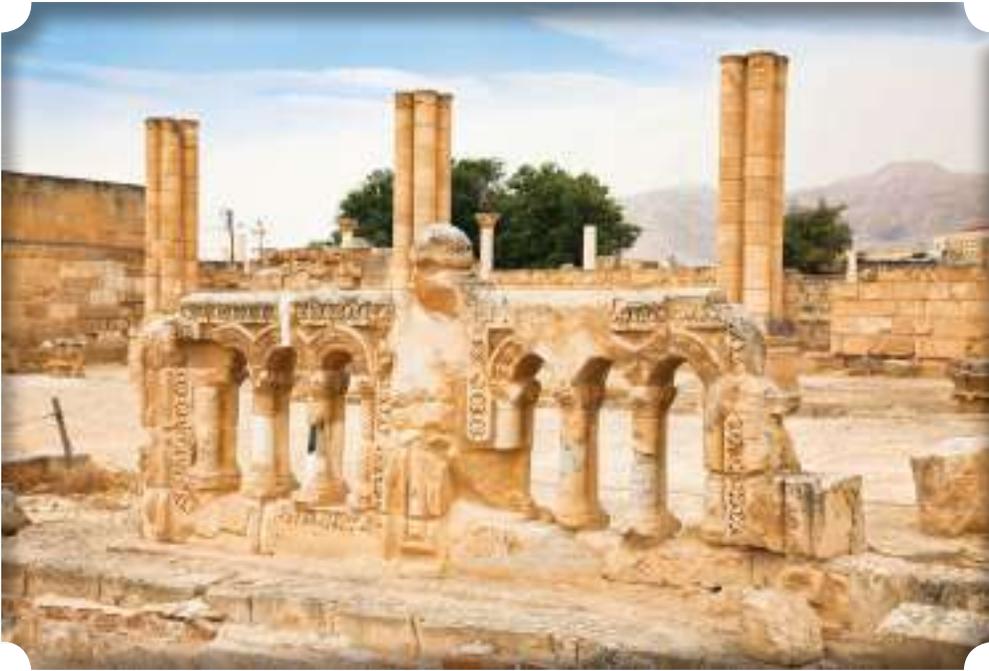
(٢) أعِينُ إشارة الاقترانِ ق على الفترة [-٣ ، ٤]:



## حلُّ المُتباينات (Solving Inequalities)

(٥ - ١)

السياحةُ الداخليَّةُ في فلسطينَ من مصادر الدخل. عرضتْ شركةُ سياحةٍ وسفرٍ عروضاً للسفر في الصيف، في العَرَضِ الأوَّل، يدفعُ الشخصُ مبلغَ ٧٠ ديناراً، و٢٠ ديناراً، عن كلِّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق. وفي العَرَضِ الثَّاني يدفعُ الشخصُ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ، و١٥ ديناراً، عن كلِّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق.



درسَ أمينُ العرضين، واختارَ العَرَضَ الثَّاني:

- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ليَليتين، فإنَّه يدفعُ: ١٣٠ ديناراً
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٥ ليالٍ، فإنَّه يدفعُ: ..... دينار
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٩ ليالٍ، هل كان العرض الذي اختاره أفضل من العرض الأول؟
- ما أقل عدد ممكن من الليالي يقيم أمينٌ في الفندق؛ ليكون العرض الذي اختاره أقلَّ تكلفةً؟

أحلُّ المتباينة:  $2(s - 1) > 3$ ، وأمثلة مجموعة الحل على خط الأعداد.

أطبق خواص التباين:  $2s - 2 > 3$ .

أحلُّ المتباينة:  $2s > 5$  إذن  $s > 2.5$  .....

مجموعة الحل هي: .....

أمثلة مجموعة الحل على خط الأعداد:  $\leftarrow \rightarrow$

الفترة التي تمثل مجموعة الحل هي: .....



لدى مزارع حديقة منزلية مساحتها  $350 \text{ م}^2$ ، ولديه سياج من الأسلاك طوله  $60 \text{ م}$ .

استخدم المزارع كامل هذا السياج لتسييج جزء مستطيل الشكل من حديقته، لا تقل مساحته

عن  $200 \text{ م}^2$ ، أكمل:

محيط المستطيل =  $2s + 2ص$ ، حيث:  $s$  = طول المستطيل،  $ص$  = عرض المستطيل.

إذن:  $60 = \dots + \dots$

$ص = (30 - s)$

مساحة المستطيل =  $s \times ص$

أحلُّ المتباينة:  $s(30 - s) \leq \dots$

الأبعاد الممكنة للجزء الذي تم تسييجه من الحديقة:

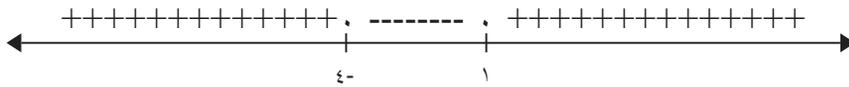
$s$ : .....

$ص$ : .....

مثال (١): ما مجموعة حل المتباينة:  $s^3 + 2s > 4$  ؟

( لماذا )  $s^3 + 2s - 4 > 0$  صفر

$s^3 + 2s - 4 = (s - 1)(s + 4)$



مجموعة حل المتباينة هي:  $[-4, 1)$ ، ويمكن كتابتها:  $-4 < s < 1$

أتعلم: يمكن كتابة مجموعة الحل على شكل فترة، أو باستخدام علاقات الترتيب  $<$  أو  $>$

أحلّ المتباينة:  $s^2 + s - 12 \geq 0$  صفر .  
أحدّد إشارة العبارة:  $s^2 + s - 12$ ، وأُعيّن ذلك على خطّ الأعداد:



مجموعة حلّ المتباينة وفق إشارتها ( $\geq$  صفر) هي: .....  
أكتب مجموعة الحلّ بطريقة أخرى: .....



أحلّ المتباينة:  $s^2 - 6s + 9 < 0$  صفر.  
أُعيّن إشارة العبارة:  $s^2 - 6s + 9$ ، وأُعيّن ذلك على خطّ الأعداد:



مجموعة حلّ المتباينة وفق إشارتها ( $<$  صفر) هي: .....  
أكتب مجموعة الحلّ بطريقة أخرى: .....



## تمارين ومسائل:

(١) ما مجموعة حلّ المتباينات الآتية؟

أ)  $(s + 1) \geq 3(s - 1)$

ب)  $s^2 + s + 1 > 0$  صفر

(٢) ما هي الأعداد التي مربع كل منها أصغر من العدد نفسه؟

(٣) أكتب المتباينة من الدرجة الثانية التي تظهر مجموعة حلّها على خطّ الأعداد الآتي:



(٤) محلّ لبيع الفطائر حدّد ربحه بالعلاقة:

الربح =  $1000 - (s - 175) + 300$ ، حيث  $s$  سعر بيع الفطيرة الواحدة، فكم ديناراً

يربح صاحب المحلّ (يزيد الربح كلما كان سعر الفطيرة أقل):

أ) إذا باع الفطيرة بسعر ١,٥ دينار.

ب) إذا باع الفطيرة بسعر ٣,٧٥ دينار.

ج) ما السعر الذي يُمكن أن يبيعه الفطيرة؛ ليكون ربحه أكثر من ٢٧٥ ديناراً؟

## الاقترانات متعددة القاعدة (Piecewise Functions) (١ - ٦)

تُشجّع وزارة التربية والتعليم الرّحلات الترفيهيّة والعلميّة، ليقوم الطلبة بزيارة الأماكن الأثريّة، والتعليميّة، والترفيهيّة في فلسطين، ومن الأماكن الترفيهيّة التي يزورها الطلبة مدن الملاهي، التي تعمل على اجتذاب الزائرين، بإعلان خصميّات على سعر تذاكر الدخول. عمدت إحدى مدن الملاهي إلى نشر الإعلان الآتي للزائرين:



عدد الأفراد	مجموع سعر التذاكر (بالدينار)
$\geq 1$ عدد الأفراد $> 5$	عدد الأفراد $\times 10$
$\geq 5$ عدد الأفراد $> 10$	$20 + (\text{عدد الأفراد} \times 5)$
$\geq 10$ عدد الأفراد $> 40$	$40 + (\text{عدد الأفراد} \times 3)$
$\geq 40$ عدد الأفراد	١٥٠

- المبلغ الذي تدفعه عائلة مكونة من ٤ أفراد = .....
  - المبلغ الذي تدفعه عائلة مكونة من ٨ أفراد = .....
  - المبلغ الذي تدفعه مجموعة مكونة من ١٨ طالباً = .....
  - المبلغ الذي يدفعه ٥٥ طالباً = .....
  - المبلغ الذي تدفعه كل مجموعة من الأشخاص يتغيّر بتغيّر .....
- تُسمى مثل هذه العلاقة اقتراناً متعدد القاعدة

من الأمثلة على الاقترانات متعددة القاعدة:



$$(1) \text{ ق(س) } = \left. \begin{array}{l} \text{س} + 1, \text{ س} \leq 1 \\ \text{س}^2, \text{ س} > 1 \end{array} \right\}$$

$$(2) \text{ ق(س) } = \left. \begin{array}{l} \text{س}^2, \text{ س} \geq 0 \\ \text{س} > 0, \text{ س} > 0 \\ \text{س} - 3, \text{ س} \leq 0 \end{array} \right\}$$

(3) أعطِ مثلاً لاقتران متعدد القاعدة

تمثيلُ الاقترانات متعددة القاعدة بيانياً:

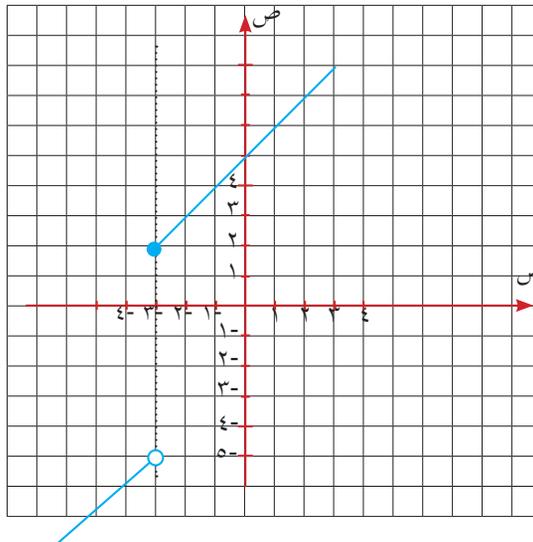
$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - 2, \text{ س} > 3 \\ \text{س} + 5, \text{ س} \leq 3 \end{array} \right\} = \text{أمثلُ بيانياً الاقترانَ الذي قاعدته: ق(س)}$$

أكملُ الجدولَ الآتي:



س	٨-	٦-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	٣	٥
ص	٨-			٢			٥		

. أعيِّنُ النقاطَ في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.



$$\left. \begin{array}{l} * 3- \geq s \quad , \quad 5 + 2s \\ 1 > s > 3- \quad , \quad 2s \\ 1 \leq s \quad , \quad s^2 \end{array} \right\} = \text{أمثلُ بيانياً الاقترانَ الذي قاعدته: ق(س)}$$

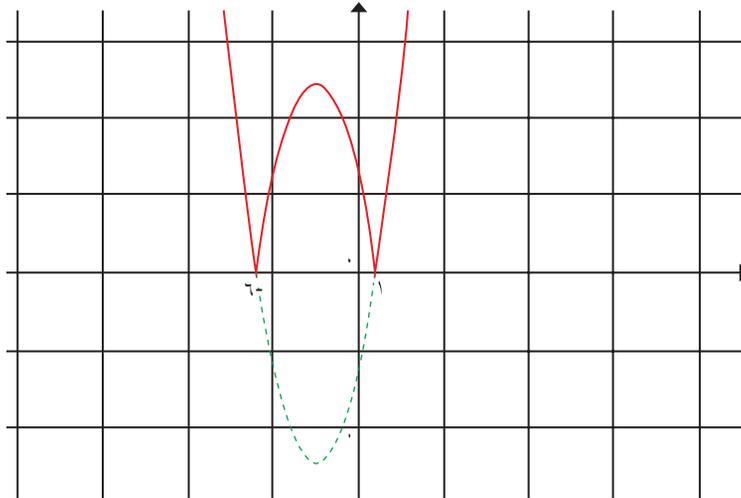


أكملُ الجدولَ الآتي:

س	٨-	٦-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٧-			١-		٢-		١				

أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران:

$$\left. \begin{array}{l} 6- \geq s \quad , \quad 5 + 2s \\ 1 > s > 6- \quad , \quad (6 - 5 + 2s) - \\ 1 \leq s \quad , \quad 6 - 5 + 2s \end{array} \right\} = \text{مثال: أمثلُ بيانياً الاقتران ق(س)}$$



\* عند التمثيل البياني لاقتران متعدد القاعدة يتم تعويض نقطة التحول في القاعدتين ونضع دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا تنتمي إليها النقطة.

## تمارين ومسائل:

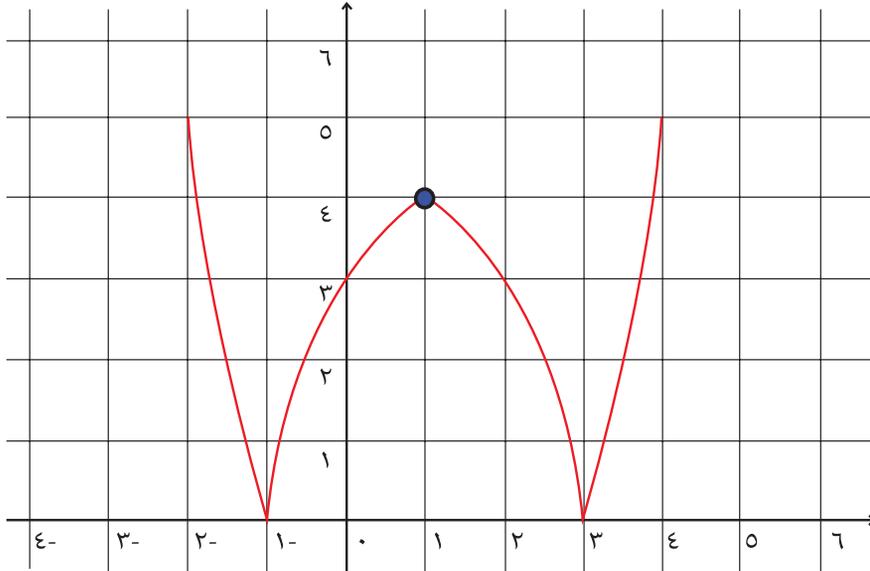
(١) أرسمُ منحنى كلِّ من الاقترانات الآتية:

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \text{ ، } ٤- > \text{س} \\ ٢ \geq \text{س} \geq ٤- \text{ ، } \text{س} \\ ٢ < \text{س} \text{ ، } ٦+ \text{س}- \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢\text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} > \text{صفر} \\ \text{س} \leq \text{صفر} \text{ ، } ٢\text{س} \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

(٢) للاقتران الذي يظهرُ منحناه في المستوى الديكارتي أدناه:

• ما إحداثياتُ نقطة الرأس؟ وما معادلةُ محور تماثل المنحنى؟



## اقتران القيمة المطلقة\* (Absolute Value)

(٧ - ١)



المحافظة على جسم سليم تساعد في بناء عقلٍ سليم، والكتلة عند أبناء الجيل الواحد تكون متقاربةً بالمعدل، فكانت كتلة ليلي (٦٠ كغم)، وكتلة مها (٥٥ كغم)، وعند إيجاد الفرق بين كتلتيهما يكون الفرق المطلق يساوي:



$$\dots\dots\dots = |60 - 55| = |55 - 60|$$

هناك كميات لا يمكن أن تكون إلا على صورة واحدة، وهي الصورة الموجبة. أعط أمثلةً أخرى لكميات لا يمكن أن تكون إلا موجبة: .....

أجد ناتج ما يأتي:



$$\dots\dots\dots = |3 - 1|, \dots\dots\dots = |4|, \dots\dots\dots = |3 - 1|$$

$$\dots\dots\dots = |12 - 0|, \dots\dots\dots = |4 - 1|, \dots\dots\dots = |3 - 4|$$

يُسمى الاقتران المكتوب على صورة  $ق(س) = |س|$  **اقتران القيمة المطلقة**، ويمكن كتابة الاقتران  $ق(س)$ ، دون استخدام رمز القيمة المطلقة، كما يأتي:

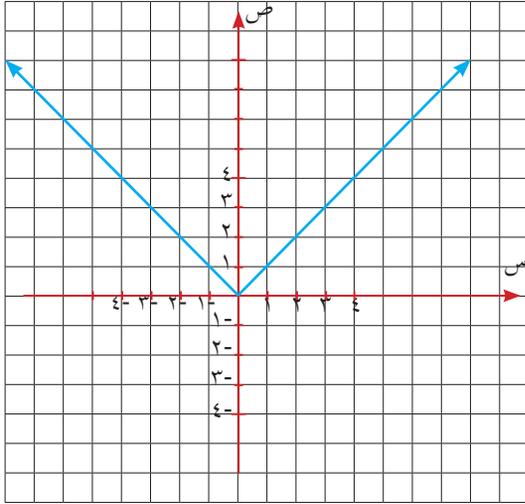
$$ق(س) = |س| = \begin{cases} س & ، س \leq \text{صفر} \\ س - & ، س > \text{صفر} \end{cases}$$

ملاحظة

\* يعتبر اقتران القيمة المطلقة من الاقترانات متعددة القاعدة.

# ١ الاقترانات

عند تمثيل الاقتران ق(س) = |س| في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل:



أجب عمّا يلي:

أ) مجال الاقتران هو ح.

ب) مدى الاقتران هو .....

ج) أرسم محور التماثل.

د) أحدّد صفر الاقتران .....

هـ) هل الاقتران واحد لواحد؟ لماذا؟

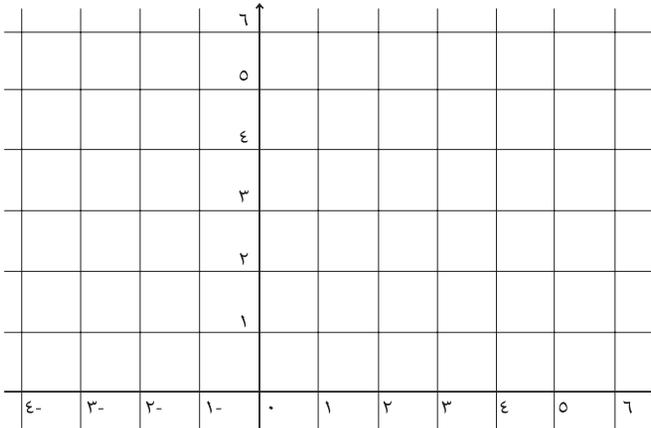
و) هل الاقتران زوجياً أم فردياً أم غير ذلك؟



أعيدُ تعريف الاقتران ق(س) = |س - ٣|، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم أمثله بيانياً:

$$\left. \begin{array}{l} ٣ - س \leq \text{صفر} \\ ٣ - س > \text{صفر} \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \\ ٣ > س \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$



مجال ق(س): .....

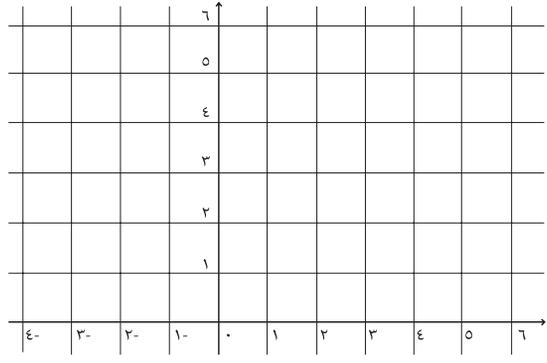
مدى ق(س): .....

منحنى ق(س) = |س - ٣|

انسحاب لمنحنى |س| .....

وحدة إلى .....

أمثل باستخدام التحويلات الهندسية ق(س) = |س| + ١  
منحنى ق(س) هو انسحاب لمنحنى |س| بمقدار ..... إلى .....

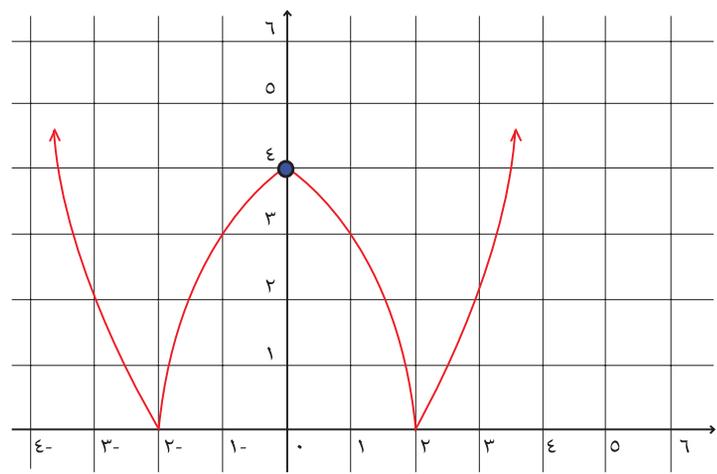
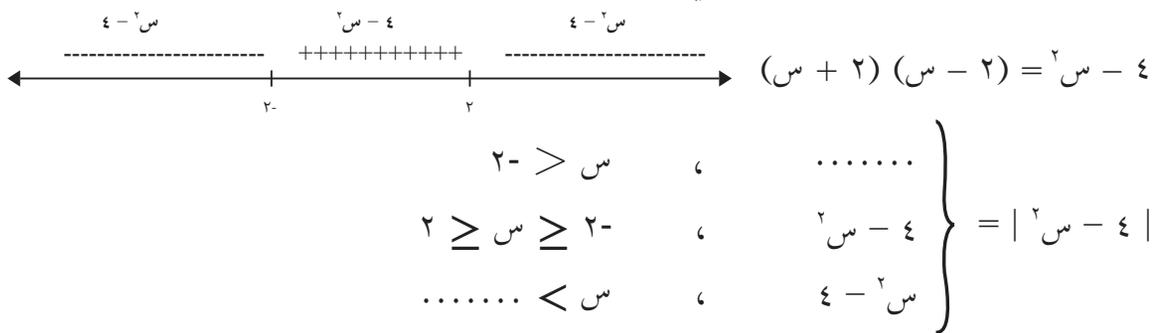


أعيد تعريف ق(س) = |س - ٤| + ٢ ثم أمثله بيانياً.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \leq ٢س - ٤ \\ \bullet > ٢س - ٤ \end{array} \right\} = |٢س - ٤|$$



لحل المتباينات نبحث في إشارة ٢س - ٤



التمثيل:

## تمارين ومسائل:

(١) إذا كان: ق(س) =  $|س - ٣|$ ، هـ(س) =  $|س - ٢|$ ، أجد:

ق(٢)، ق(-٥)، هـ(-١)، هـ(٠)، ق( $\frac{٢}{٣}$ )

(٢) أعيّد تعريف الاقترانات الآتية، دون استخدام رمز القيمة المطلقة وأمّثلها بيانياً:

أ) ق(س) =  $|س + ٣|$       ب) ق(س) =  $|س - ٤|$

ج) ق(س) =  $|س + ٣| - ٣$       د) ق(س) =  $|س - ١| - \frac{١}{٢}$

(٢) أجد مجال ومدى وأصفار الاقترانات السابقة.

(٣) أمّثل منحني كلّ من الاقترانات الآتية باستخدام التحويلات الهندسية:

أ) ق(س) =  $|س + ٢|$

ب) ق(س) =  $|س| - ١$

ج) ق(س) =  $|س - ٣| + ٢$

(٤) أعيّد تعريف كلّ من ثم أمّثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) =  $|س - ٥| + ٢$

ب) ق(س) =  $|س - ٥| + ٦$

## اقتران أكبر عدد صحيح (Greatest Integer Function)

(١ - ٨)

لِضمانِ حقوقِ العمّالِ والموظفين، ضِمّنَ قانونِ الضمانِ الاجتماعي، شجّعَ الرئيسُ الفِلَسطينيُّ إنشاءَ الجمعياتِ الاستهلاكيّة، والتمويّنة؛ لتشجيعِ الشراء، واستهلاكِ الموادّ التمويّنة الوطنيّة. تمنحُ هذه الجمعياتُ زبائنَها نقاطَ شراءٍ، إذ تقومُ الجمعيةُ بتسجيلِ عددِ نقاطِ شراءٍ، بحيث يساوي العددُ الصحيحُ من قيمةِ مشترياتِ الزبونِ من الموادّ التمويّنة الوطنيّة، دون اعتبارٍ لِمنازلِ الأجزاءِ العشريّةِ من تلك القيمة، وتُحفظُ تلك النقاطُ في ملفٍّ خاصٍّ بالزبون، وفي نهايةِ كلّ شهرٍ تقومُ الجمعيةُ بإعطاءِ الزبونِ وثيقةً تضمّنُ عددَ النقاطِ الممنوحةِ له، ليقومَ باستبدالها ببعضِ المشترياتِ من الجمعية.

أكملُ الجدولَ الآتي بنقاطِ شراءِ زبونٍ في أحدِ الأسابيع:



٨٥,٩	٣٥,١	٣٥,٥	٣٢٤,٨	٢٩,٩	١٢٠,٦	١٢٠	٢٥٠,٨	٢٥٠,٥	١١٧,٤	قيمة المشتريات
	٣٥					١٢٠				عدد نقاط الشراء

تعريف: أكبر عدد صحيح للعدد الحقيقي س: هو أكبر عدد صحيح أقلّ من أو يساوي العدد س، ويُرمزُ له بالرمز [ ].

أكملُ الجدولَ الآتي :

[٠,٧-]	[١٨,٥-]	[٦٨]	[١,٦-]	[٢٧-]	[٧,٣-]	[٣٢]	[٥٩,٩]	[٢٢,٥]
		٦٨			٨-			٢٢



أتعلّم: لكلّ س  $\exists$  ح،  $\nu = [س]$ ، حيث  $\nu \geq س$  و  $\nu + ١ > س$ ،  $\exists \nu$  ص.

إذا كان ق(س) =  $[س + ب]$ ، فإنّ  $\nu = [س + ب]$ ، حيث  $\nu \geq س + ب$  و  $\nu + ١ > س + ب$ .

مثال (١): أحلّ المعادلة:  $٧ = [ ١ + ٢س ]$

الحلّ:  $٧ \geq ١ + ٢س > ٨$

$٦ \leq ٢س < ٧$  ومنها  $٣ \leq س < ٣,٥$

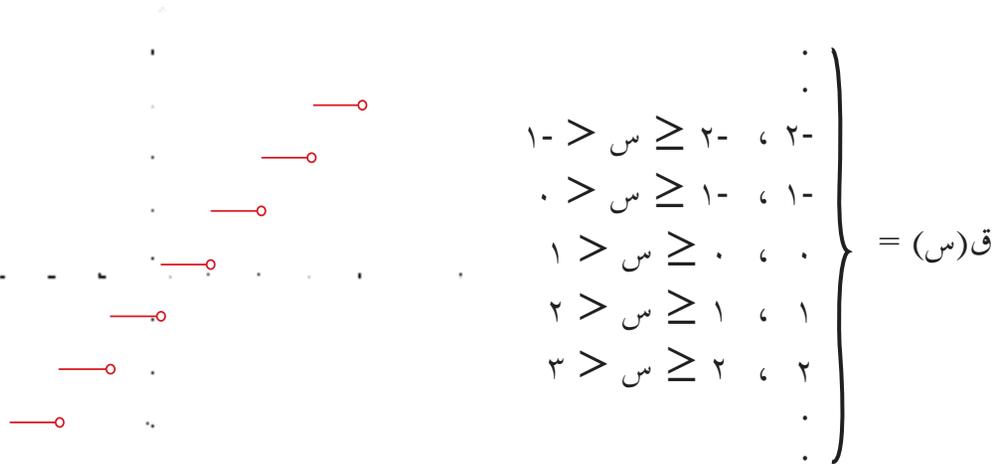
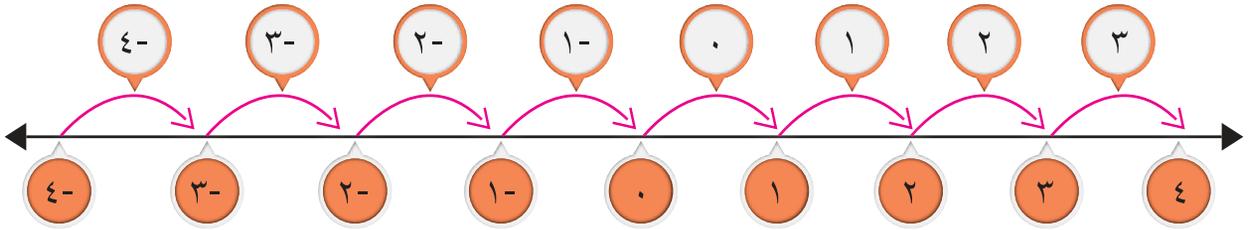
أحلّ المعادلة:  $١ = [ ٢س - ١ ]$  و أمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد  
 . أضع المعادلة على شكل متباينة بالصورة .....  
 . أحلّ المتباينة الناتجة .



مثال (٢): أكتب ق (س) = [ س ] ، باعتباره اقتراناً متعدّد القاعدة، ثمّ أمثله في المستوى الديكارتي .

الحل: أصفارُ الاقتران هي: [ س ] = صفر:  $١ \geq س > ١$

طول الفترة الجزئية: صفر  $\geq س > ١$  يساوي ١



**الاحظ:** . نظراً لشكل منحنى الاقتران في المستوى يُطلقُ عليه الاقتران السُّلمي

. يسمى المقدار  $\frac{1}{|معامل س|}$  طول درجة الاقتران

أكتبُ الاقتران: ق(س) = [س٢]، باعتباره اقتراناً متعدد القاعدة، في الفترة [ ١- ، ١ ]

. طول الدرجة =  $\frac{1}{٢}$

. أصفار الاقتران: [س٢] = صفر إذن صفر  $\geq$  س٢ > ١

. أكتبُ ق(س) باعتباره اقتراناً متعدد القاعدة = { ..... }

. أمثلُ منحنى الاقتران بيانياً.



أكتبُ الاقتران الذي قاعدته: ق(س) = [ ٣ -  $\frac{1}{٢}$  س ] ، في الفترة [ ٢- ، ٧ ] ،

باعتباره اقتراناً متعدد القاعدة، ثم أمثله بيانياً في المستوى الديكارتي.

. طول درجة الاقتران ق = .....

. أصفار الاقتران: [ ٣ -  $\frac{1}{٢}$  س ] = صفر  $\Leftrightarrow$  صفر  $\geq$  ٣ -  $\frac{1}{٢}$  س > ١

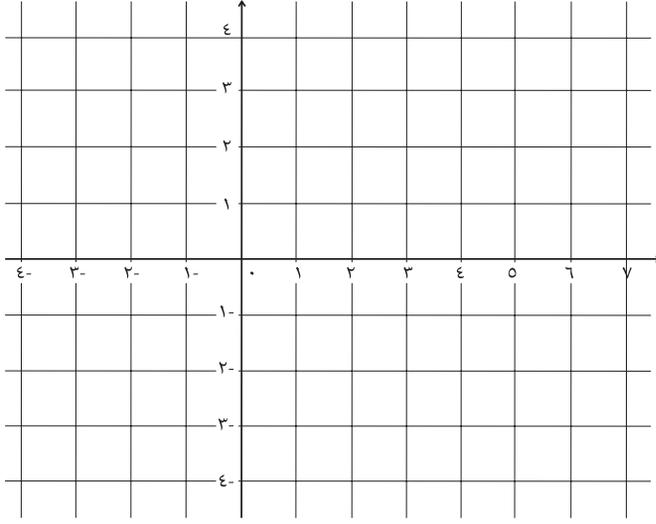
وعليه: ..... > س  $\geq$  .....

. أكتبُ الاقتران ق(س)، باعتباره اقتراناً متعدد القاعدة:

$$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ ١ > ٢ > س \geq ٤ \\ ٠ > ٤ > س \geq ٦ \\ ١- > ٦ > س \geq ٧ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$



## ١ الاقترانات



. أمثلُ منحنى الاقتران، في المستوى الديكارتي.

أتعلمُ: الاقتران ق(س) = [-س] هو انعكاس للاقتران ق(س) = [س] في محور الصّادات.

## تمارين ومسائل:

(١) أحلُّ المعادلات الآتية:

أ (  $4 = [1 + 3s]$  )

ب (  $4- = [3 - 2s]$  )

(٢) أمثل كلَّ من الاقترانات الآتية ؟

أ ( ق(س) =  $[10 - 5s]$  )

ب ( هـ(س) =  $[3 - s]$  )

ج ( ق(س) =  $[2 + \frac{1}{3}s]$  )

(٣) أتحمق من خطأ العبارات الآتية، بأمثلة عددية:

أ (  $a \times [b] = [a \times b]$  ) ، حيث  $a$  ،  $b$  أعداد حقيقية.

ب (  $1,5 + [s] = [1,5 + s]$  )

## ( ١ - ٩ ) : تمارين عامة

### السؤال الأول:

أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ فرديٌّ؟

- ( أ ) ق (س) =  $s^2 - s^3$  (ب) هـ (س) =  $\sqrt{s}$   
( ج ) ل (س) =  $s^2 - 1$  (د) ع (س) =  $s^2 + s$

(٢) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ زوجيٌّ؟

- ( أ ) ق (س) =  $s^3$  (ب) هـ (س) =  $s^0 - s$   
( ج ) ل (س) =  $s^4 - 1$  (د) ع (س) =  $s^4 + s$

(٣) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق (س) وحدثين إلى اليسار، ثم وحدثين إلى الأعلى؟

- ( أ ) ق (س) + ٤ (ب) ق (س) - ٤ (ج) ق (س) + (٢ + ٢) (د) ق (س) - (٢ + ٢)

(٤) ما صورة منحنى ق (س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية؟

- ( أ ) ق (-س) (ب) -ق (-س) (ج) -ق (س) (د) ق (س - ١)

(٥) أيُّ من العبارات الآتية عبارة صائبة؟

- ( أ ) محور السينات محور تماثل للاقتران الفردي. (ب) محور الصادات محور تماثل للاقتران الفردي.  
( ج ) محور السينات محور تماثل للاقتران الزوجي. (د) محور الصادات محور تماثل للاقتران الزوجي.

(٦) ما طول درجة الاقتران ق (س) = [  $s^2 - 3$  ]؟

- ( أ )  $\frac{1}{3}$  (ب)  $\frac{1}{2}$  (ج) ٢ (د) ١

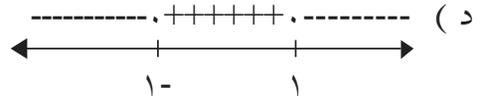
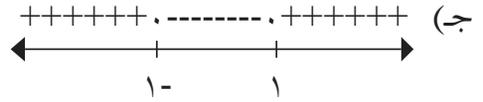
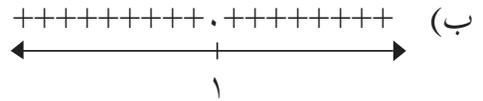
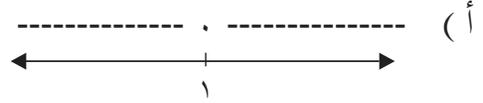
(٧) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيٌّ؟

- ( أ )  $\frac{3}{\sqrt{s}}$  (ب)  $\frac{s - \frac{1}{s}}{s}$  (ج)  $\frac{1}{s}$  (د)  $\frac{s - 1}{s} \sqrt{s}$

(٨) محور تماثل ق(س) =  $|١٠ - ٢س|$  ، هو الخط المستقيم:

أ)  $س = ٥$       ب)  $س = -٥$       ج)  $ص = ٥$       د)  $ص = -٥$

(٩) أيُّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) =  $(س - ١)(١ - س)$  ؟



(١٠) ليكن: ق(س) =  $|٣س + ٤|$  فما قيمة ق(-٣) ؟

أ) -٥      ب) ٣      ج) ٥      د) ١٣

### السؤال الثاني:

أتحقَّق من أن: حاصل ضرب اقترانين فرديَّين هو اقترانٌ زوجيٌّ.

### السؤال الثالث:

أمثِّلُ منحنياتِ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا مستعيناً بالتحويلات الهندسية الملائمة:

أ) ت(س) =  $س^٢ + ٣$       ب) ه(س) =  $(س + ٣)^٢$

ج) ل(س) =  $-(س - ١)$       د) ك(س) =  $س^٢ + ٦س + ٦$

هـ) ع(س) =  $\sqrt{س - ٤}$  ،  $س \leq ٤$

### السؤال الرابع:

أبحثُ في إشارة كلِّ من الاقترانات الآتية:

أ ( ل(س) = س<sup>٢</sup> + س<sup>٣</sup> + ٢ )

ب ( م(س) = ٨ - ٢س )

ج ( ق(س) =  $\frac{ل(س)}{م(س)}$  ، م(س) ≠ صفر.

### السؤال الخامس:

أجدُ مجموعة حلِّ المتباينة: (س - ١)<sup>٢</sup> - ٤ ≤ صفر، ثم أمثلها على خطِّ الأعداد.

### السؤال السادس:

أكتبُ الاقترانات الآتية، باعتبارها اقتراناتٍ متعدِّدة القاعدة ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ ( ق(س) = |٦ + ٢س| )

ب ( ل(س) = |س<sup>٢</sup> - ٢٥| )

ج ( ك(س) =  $[\frac{١}{٢}س - ٣]$  )

د ( ع(س) =  $[\frac{١}{٣}س - ٥]$  )

### السؤال السابع:

طارق صاحب محلات لبيع الملابس الرياضية، طلب من محاسب محلاته تزويده بعلاقة رياضية تربط ربحه السنوي بسعر القطعة. وبعد دراسة الوضع لاحظ المحاسب أن المحل يبيع عدداً أكبر من القطع عندما ينخفض السعر، لكن ربحه يتغير حسب المعادلة:

ص = ١٥٠س<sup>٢</sup> + ٦٠٠س + ٥٠ حيث س سعر الزي الرياضي بالدينار.

- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٢٥ دينار.
- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٤٢ دينار.
- حدد مجال الأسعار التي تحقق ربحاً للتاجر.
- ما هو السعر الذي يحقق للتاجر أعلى ربح.

## أقيّم ذاتي:



متدني	متوسط	ممتاز	المهارة
			اميز بين الاقتران الزوجي والاقتران الفردي
			ارسم الاقترانات باستخدام التحويلات الهندسية
			احدد اشارة اقتران نسبي
			احل متباينة تربيعية بمتغير واحد

## فكرة رياضية:



قدّمت شركة اتصالات فلسطينية عرضاً للاشتراك معها: العرض الأول يدفع المشترك ٢٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ٢٠ قرشاً، عن كلّ دقيقة اتصال، أو جزءٍ منها.  
العرض الثاني: يدفع المشترك ٣٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ١٠ قروش، عن كلّ دقيقة اتصال، أو جزءٍ منها.

أراد أمير الاشتراك مع هذه الشركة.

- أبين العلاقات الرياضية اللازمة، لتصحح أميراً في اختيار العرض المناسب له.

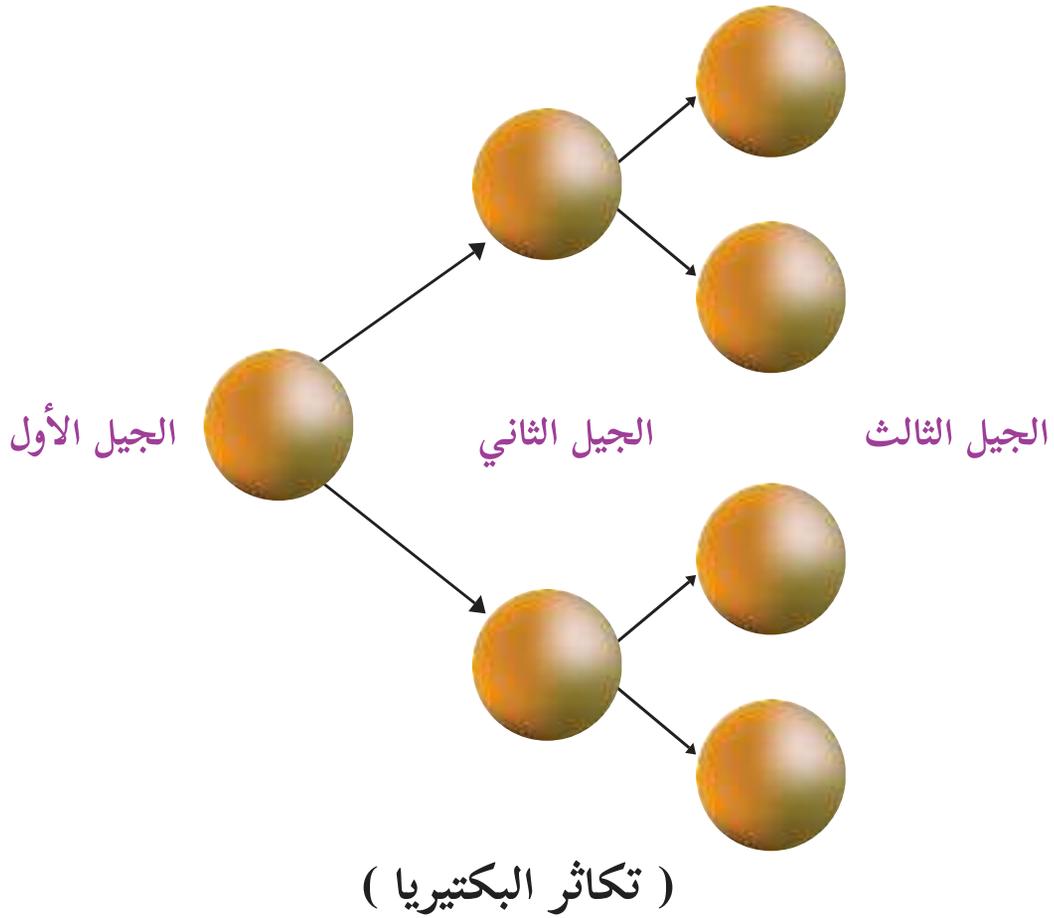
[www.alentum.com](http://www.alentum.com)

[www.desmos.com/calculator](http://www.desmos.com/calculator)

روابط الكترونية:

## الأسس واللوغاريتمات Logarithm and Exponential

الوحدة  
الثانية



أفكّر: تتضاعف بعض أنواع خلايا البكتيريا، بحيث تصبح الخلية الواحدة خليتين كل دقيقة.  
كم يصبح عدد الخلايا الناتجة من تضاعف خلية واحدة بعد ساعة واحدة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات الأسية واللوغاريتمية في الحياة العملية من خلال الآتي:

- التعرف إلى مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالأسس.
- استنتاج قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أسية أو لوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسية بيانياً.
- استنتاج خصائص الاقتران الأسّي.
- تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً.
- استنتاج خصائص الاقتران اللوغاريتمي.
- توظيف التحويلات الهندسيّة المختلفة في رسم الاقترانات اللوغاريتمية والأسية.
- استنتاج العلاقة بين الاقترانين الأسّي واللوغاريتمي.

## الأسس واللوغاريتمات

(٢ - ١)

قررت وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية تصميم مجموعة لمدارس التعلم الذكي، بحيث اشترطت على كل عضو إضافة عضو آخر كل أسبوع. إذا بدأت المجموعة بـ (١٠) أعضاء، أكمل الجدول الآتي:



		٢٨	٢١	١٤	٧	٠	عدد الأيام
	٣٢٠		٨٠		٢٠	١٠	عدد الأعضاء

عدد الأعضاء بعد ٥٦ يوماً = ..... عضواً.

يبلغ عدد الأعضاء ٣٢٠ عضو بعد ..... يوماً تقريباً.

عدد الأيام ليصبح عدد أعضاء المجموعة ١٢٨٠ عضو.  
عدد الأعضاء بعد شهرين من تصميم المجموعة.

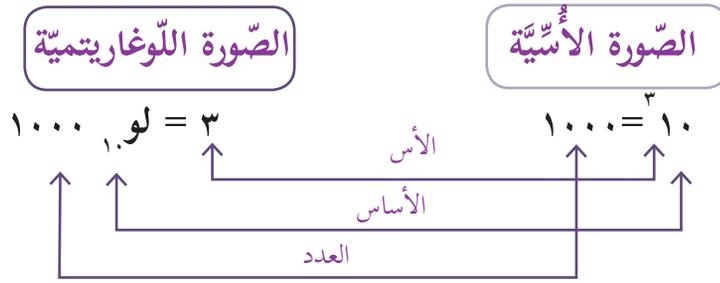


أكمل الجدول الآتي:

$1^{-4} \times 4^4$	$\frac{1}{3^2}$	$5^7 \div 5^9$	$4^0$	$\frac{1}{7^3}$	$3^{-2}$	$2^2$	المقدار
					$\frac{1}{9}$	٨	قيمة المقدار



تعريف: إذا كان  $a = m^x$ ، حيث  $x \in \mathbb{R}$ ،  $a > 0$ ، نسمي  $x$  لوغاريتم العدد  $a$  للأساس  $m$ ، ويُعبّر عنه رياضياً:  $\log_m a = x$  (ص) =  $(a, m)$  (الصورة اللوغاريتمية)، ويُقرأ لوغاريتم  $a$  للأساس  $m$  يساوي  $x$ . المثال الآتي يوضح العلاقة بين الصورة الأسية، والصورة اللوغاريتمية:



أكمل الجدول الآتي بما يناسبه:



$1 = 9^0$	$\frac{1}{81} = 3^{-4}$		$8 = 2^3$	الصورة الأسية
$0 = 10^0$		$4 = (10000)_{10}$	_____	الصورة اللوغاريتمية

أحول الآتي من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:



- (أ)  $3 = 1^3$       (ب)  $2 = 1^2$       (ج)  $1 = 3^0$
- (د)  $1 = 5^0$       (هـ)  $81 = 3^4$       (و)  $32 = 2^5$
- (أ) لو<sub>٣</sub>(٣) = ١      (ب) لو<sub>٢</sub>(٢) = \_\_\_\_\_      (ج) لو<sub>١</sub>(١) = صفر
- (د) لو<sub>١</sub>(١) = \_\_\_\_\_      (هـ) لو<sub>٨١</sub>(٤) = \_\_\_\_\_      (د) لو<sub>٣٢</sub>(٤) = \_\_\_\_\_

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: لو<sub>٢</sub>(٢) = ١ ، لو<sub>١</sub>(١) = صفر، لو<sub>٢</sub>(٢) = ١

أجد قيمة اللوغاريتمات الآتية:



- (١) لو<sub>٢</sub>(٢) = ١
- (٢) لو<sub>٧</sub>(٧) = \_\_\_\_\_
- (٣) لو<sub>٩</sub>( $\frac{1}{9}$ ) = \_\_\_\_\_

أكمِل الجدول الآتي ثم أجب عما يليه:



٣٢	١٦	٨		٢	س
٥	٤	٣	٢	١	لوم (س)
	٢			$\frac{1}{2}$	لوم (س)

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{لوم } (2) &= (4 \times 2) = 8, \quad \text{لوم } (2) + \text{لوم } (4) = 2 + 3 = 5 \\ (2) \quad \text{لوم } (2) &= (8 \times 2) = 16, \quad \text{لوم } (2) + \text{لوم } (8) = 2 + 32 = 34 \\ (3) \quad \text{لوم } (2) &= (4 \times 2) = 8, \quad \text{لوم } (2) + \text{لوم } (4) = 2 + 3 = 5 \\ (4) \quad \text{لوم } (2) &= (8 \times 2) = 16, \quad \text{لوم } (2) + \text{لوم } (8) = 2 + 32 = 34 \end{aligned}$$

ماذا تلاحظ؟

**أتعلم:** إذا كان س، ص عددَيْن حقيقيَيْن موجِبَيْن، وكان  $\mu$  عدداً حقيقياً موجِباً غير الواحد، فإن: لوم (س × ص) = لوم (س) + لوم (ص).

أكمِل الجدول الآتي ثم أجب عما يليه:



	٨١	٢٧		٣	س
٥			٢	١	لوم (س)

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{لوم } \left(\frac{81}{27}\right) &= \text{لوم } (3) = 1, \quad \text{لوم } (81) - \text{لوم } (27) = 3 - 1 = 2 \\ (2) \quad \text{لوم } \left(\frac{243}{9}\right) &= \text{لوم } (27) - \text{لوم } (9) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

ماذا تلاحظ؟

**أتعلم:** إذا كان  $s$ ،  $v$  عددَيْن حقيقيَّين موجِبَيْن، وكان  $n$  عدداً حقيقياً موجِباً غير الواحد،  
فإن:  $\log\left(\frac{s}{v}\right) = \log(s) - \log(v)$

قام كل من عمر وندى بإيجاد قيمة كلٍّ من:  $\log(3 \times 3)$ ،  $\log(3)^2$ ، كالآتي:



نشاط ٨

عمر	ندى
$\log(3)^2 = 2 \log 3$	$\log(3 \times 3) = \log 3 + \log 3$
$2 = 1 \times 2 =$	$2 = 1 + 1 =$

ماذا تلاحظ؟

**أتعلم:** إذا كان  $v$  عدداً حقيقياً موجِباً، فإن:  $\log(v) = \log(v)$ ، بحيث  $m \in \mathbb{R}$ .\*

أكتب كل ممَّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

(١)  $\log(8) - \log(v) = \log\left(\frac{8}{v}\right)$

(٢)  $\log(4) + \log(s) - \log(3) = \log\left(\frac{4s}{3}\right)$

\_\_\_\_\_ =

إذا كان  $\log(7) = 0,81$ ، أجد قيمة كل ممَّا يأتي:

(١)  $\log(28)$       (٢)  $\log(7)$       (٣)  $\log(3,5)$

$$(1) \text{ لو}_7(28) = \text{لو}_7(7 \times 4) = \text{لو}_7(7) + \text{لو}_7(4) = (7) + (4) = 2,81 = 4,81$$

$$(2) \text{ لو}_7(7) = \text{لو}_7(7) \times \text{لو}_7(3) = \text{لو}_7(8,43) = \text{لو}_7(7) + \text{لو}_7(3) = 1 + 0,56 = 1,56$$

$$(3) \text{ لو}_7(3,5) = \text{لو}_7(7/2) = \text{لو}_7(7) - \text{لو}_7(2) = 1 - 0,36 = 0,64$$

$$= \text{لو}_7(7) - \text{لو}_7(2) = 1 - 0,36 = 0,64$$

أُكْمِلُ حَلَّ المعادلة الآتية:

$$(أ) 64 = 2^x$$



الطريقة اللوغاريتمية

$$\text{لو}_2(64) = x$$

$$\text{لو}_2(2^6) = x$$

$$6 = x$$

$$6 = x \text{، ومنها: } x = 6$$

الطريقة الأسية

$$2^x = 64$$

$$2^6 = 64$$

$$6 = x \text{ ومنها: } x = 6$$

ماذا تلاحظ؟

مثال: أحل المعادلة:  $\text{لو}_2(2 + x) - \text{لو}_2(1 - x) = 2$

$$\text{الحل: لو}_2(2 + x) - \text{لو}_2(1 - x) = 2$$

$$2 = \frac{2+x}{1-x}$$

$$2(1-x) = 2+x$$

$$2 - 2x = 2 + x \text{، ومنها: } x = 0$$

أحلّ المعادلة: لو<sub>١١</sub>(س) + لو<sub>١١</sub>(٣) = ٢

$$٢ = ( \quad )_{١١}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = {}^{٢}١٠$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = ١٠٠$$

$$\frac{١٠٠}{٣} = س$$



طلبت معلّمة الرياضيات من رؤى ورّبي إيجاد قيمة

لو<sub>٧</sub>(٤٩) ، أيّ منهما إجابتها صحيحة، وأذكر السّبب.



رّبي

رؤى

$$\text{لو}_{٧}(٤٩) = ص$$

$$٤٩ = ص \left( \frac{١}{٧} \right)$$

$${}^٢ ٧ = ص (٧^{-١})$$

$${}^٢ ٧ = ص^{-٧}$$

$$٢ = ص$$

$$\text{لو}_{٧}(٤٩) = ص$$

$$\frac{١}{٧} = ص ٤٩$$

$${}^{١-} ٧ = ص (٧^٢)$$

$${}^{١-} ٧ = ص^٢ ٧$$

$$١ = ص ٢$$

$$\frac{١}{٢} = ص$$

## تمارين ومسائل:

(١) أحسب قيمة كل من:

$$\text{أ) لو}_٣(٦٤) \quad \text{ب) لو}_٣(٨١)$$

(٢) أحوّل من الصورة الأسّيّة إلى اللوغاريتميّة:

$$\text{أ) } ٢^٤ = ١٦ \quad \text{ب) } ١٠ = ٠,١٠$$

(٣) أحوّل من الصورة اللوغاريتميّة إلى الصورة الأسّيّة:

$$\text{أ) لو}_٣ ١ = ٠ \quad \text{ب) لو}_٣(٠,٠٠١) = -٣$$

(٤) إذا كان لو٣(٧) = ٢,٨١ ، لو٣(٥) = ٢,٣٢ ، أجد قيمة ما يأتي:

$$\text{أ) لو}_٣(٣٥) \quad \text{ب) لو}_٣\left(\frac{٧}{١٠}\right)$$

(٥) أجد قيمة كل ممّا يأتي:

$$\text{أ) لو}_٣\sqrt{٣٢} + \sqrt{٢} \quad \text{ب) لو}_٣(٨١) - \text{لو}_٣(٩) \quad \text{ج) لو}_٣(٥)^٢$$

(٦) أكتب ما يأتي بصورة لوغاريتم لمقدار واحد:

$$\text{أ) } ٣ \text{ لو}_٣(س + ٦) - \left(\frac{١}{٣}\right) \text{ لو}_٣(س - ٥).$$

$$\text{ب) } ٧ \text{ لو}_٣(أ) + \text{لو}_٣(ب) - ٢ \text{ لو}_٣(٨ج).$$

(٧) أجد مفكوك كل لوغاريتم ممّا يأتي، حيث س، ص عدنان حقيقيّان موجبان:

$$\text{أ) لو}_٣\left(\frac{س}{ص}\right) \quad \text{ب) لو}_٣(٣س)$$

(٨) أحلُّ المعادلات الآتية:

$$(أ) \log_7 (س) = \log_7 (س + ١٢) \quad (ب) \log_5 (٣ - س) - \log_5 (س + ١) = ٠$$

(٩) لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعلومات، يتم اختبارهم بعد وقت من تعلُّمها، ويمكن تقدير علامة الطالب في اختبار للرياضيات باستخدام العلاقة:

ص = س - ٦ لو (ت + ١)، حيث ت عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي، س علامة الطالب في نهاية الفصل الدراسي، إذا حصل إبراهيم على العلامة ٨٥، أجد:

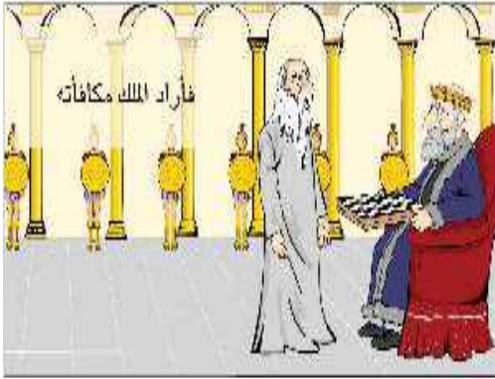
أ ( قدر علامة إبراهيم بعد مضي ثلاثة أشهر.

ب) بعد كم شهر يكون تقدير علامة إبراهيم ٦٧.

## الاقتران الأسّي (Exponential Function)

(٢ - ٢)

يُحكى أنّ حكيماً قدّم رقعة شطرنج هديةً إلى ملك بلاد الفرس، فأراد الملك مكافأته. فطلب الحكيم أن تكون مكافأته ملاءً مربعاتِ رقعة الشطرنج بالقمح؛ بحيثُ يضعُ حبةً



في الخانة الأولى، وحبّتين في الخانة الثانية، وأربع حباتٍ في الخانة الثالثة وهكذا، ضحك الملك وحاشيته من طلب الحكيم المتواضع.

أكمل: عدد حباتِ القمح في الخانة الرابعة = ٨

عدد حباتِ القمح في الخانة الخامسة = .....

عدد حباتِ القمح في الخانة السادسة = .....

- إذا علمت أن الكيلوغرام من القمح يحتوي على ٧٠٠٠ حبة تقريباً. أقدّر كمية القمح التي طلبها الحكيم. هل نتوقع أن يتمكن الملك من مكافأة الحكيم؟ أفسّر إجابتي.

أتعلم: يُسمّى الاقتران اقتراناً أسياً إذا كان على الصورة:  $y = a^x$  ،  $a \neq 1$  ،

$a > 0$  ،  $s \in \mathbb{R}$

لماذا  $a > 0$  ،  $a \neq 1$  ؟

أناقش

أي من الاقترانات الآتية اقتران أُسِّيٌّ ؟

ألاحظُ أنّ: ق(س) =  $s^2$  اقتران أُسِّيٌّ؛ لأنّ .....

بينما هـ(س) =  $s(3-s)$  ليس اقتراناً أُسياً؛ لأنّ الأساس  $3-s > 0$ .

وعليه فإنّ: ل(س) =  $s^2$  هو اقترانٌ .....؛ لأنّ المتغير ليس أُسّاً.

م(س) =  $(\frac{1}{s})^3$  هو اقترانٌ .....؛ لأنّ .....



أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) =  $s^2$  ، س  $\exists$  ح في المستوى الديكارتي.

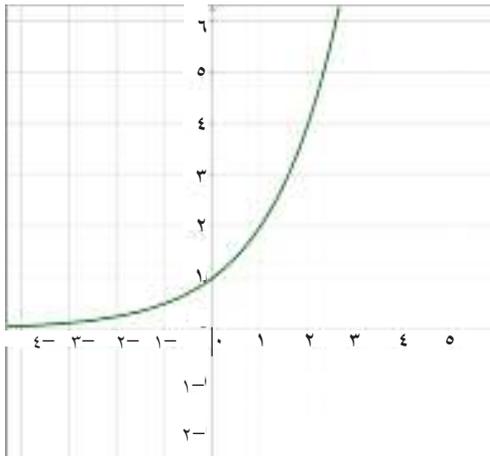
أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:



	٢-	١-	٠	١	٢	٣	س
ق(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	١			٨	

• أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،

وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى الاقتران الأسي ( $1 < p$ ):

(١) مدى الاقتران الأسي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

(٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

(٣) كلّما زادت قيمُ س تزداد قيمُ ص المُناظرة لها.

هل يقطع منحنى الاقتران ق محور السينات؟



أكمل الجدول الآتي لقيم س ، ص للاقتران هـ(س) =  $3^s$ ، ثم ارسم منحنى الاقتران:

س	٣	٢	٠	١-	٢-	٣-
هـ (س)			٣		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



• أدون ملحوظاتي حول منحنىي الاقترانين هـ(س) =  $3^s$  و ق(س) =  $2^s$ .

أكمل الجدول الآتي لقيم س ، ص للاقتران ق(س) =  $2^s$ ، ثم ارسم منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١	١-	٢-	٣-
ق(س) = $(\frac{1}{2})^s$	$\frac{1}{8}$		١	٢	٤	



أعيّن النقاط على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

• ألاحظ من الرسم أنّ منحنى ق(س) =  $2^s$  هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) =  $(\frac{1}{2})^s$  في محور الصادات، أوضح ذلك جبرياً.

• من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظ أهمّ خصائص الاقتران الأسّي:

ق(س) =  $2^s$  ،  $0 < 2 < 1$  وهي:

(١) مدى الاقتران الأسّي هو: .....

(٢) يقطع منحنى الاقتران محور الصادات في النقطة: .....

(٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيم ص المناظرة لها .....



## تمارين ومسائل:

(١) أيُّ من الاقترانات الآتية يُعدُّ اقتراناً أُسيّاً؟ مع بيان السبب.

أ ( ق(س) = ٥<sup>س</sup>

ب ( م(س) = ٤<sup>-س</sup>

ج ( هـ(س) = ٢<sup>س٣</sup>

د ( ص = (٢-)<sup>س</sup>

هـ ( ص = (٢/٣)<sup>س</sup>

(٢) أمثلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ ( ص = ٣<sup>-س</sup> - ٢

ب ( ص = ٥ - ٢<sup>س</sup>

ج ( ص = ٤<sup>-س</sup>

د ( ص = (١/٤)<sup>-س</sup>

(٣) استخدمُ منحنى ق(س) = هـ<sup>س</sup>، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ ( ق(س) = هـ<sup>-س</sup>

ب ( ق(س) = ٣ - هـ<sup>س</sup>

ج ( ق(س) = هـ<sup>(١-س)</sup>

(٤) أجدُ قيمة كلِّ من:  $f$ ، ب لمنحنى ق(س) =  $f = (٣)^س + ب$ ، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١، ٣)، (٠، ٢).

(٥) أُدخِلت سيدةٌ مجمَّع فلسطينَ الطبيِّي في مدينة رام الله، لارتفاع نسبة الالتهاب في جسمها. أُعطيت جرعةٌ من البنسلين في الدم. لوحظ أن ٦٠٪ من جرعة البنسلين فقط بقيت في الدم بعد مرور ساعةٍ على تناولها. وعند متابعة حالتها لوحظ أنَّ جسمها يُدمَّر البنسلين بالنمطِ نفسه، وفي نهاية كلِّ ساعة يتبقى فقط ٦٠٪ من البنسلين الموجود في نهاية الساعة السابقة.

إذا أُعطيت السيدة ٣٠٠ ملغرام من البنسلين الساعة الثامنة صباحاً، أكمل الجدول الآتي (بعد نقله إلى دفتر الإجابة)، لحساب كمية البنسلين في الدم نهاية كلِّ ساعة، خلال الفترة بين الثامنة والحادية عشرة صباحاً:

الساعة	٨:٠٠ صباحاً	٩:٠٠ صباحاً	١٠:٠٠ صباحاً	١١:٠٠ صباحاً
البنسلين (ملغرام)	٣٠٠			

أمثلُ البيانات السابقة في المستوى الديكارتي، وألاحظُ الشكل الناتج.

## الاقتران اللوغاريتمي (Logarithmic Function)

(٢ - ٣)

يستخدمُ مشفى المُطَّلَع في مدينة القدس مادة اليود (١٣١) المشعة في تشخيص أمراض الغدة الدرقية، علماً بأنّ المادة تخسرُ نصفَ كتلتها خلال ٨ أيام (تسمى هذه الفترة فترة عمر النصف). فإذا حصل المشفى على ٢ غم من اليود (١٣١)، أجب عما يأتي:  
أكمل الجدول الآتي:



عدد الأيام	٨ أيام	١٦ يوماً	
مقدار المادة المتبقية			$\frac{1}{4}$ غم

تبقي من المادة بعد مضي ٢٠ يوماً ..... تقريباً.  
يلزم من الوقت كي تصبح كتلتها ٠,٠٠١ غم ..... تقريباً.



أجد قيمة ما يأتي:

$$\log_{\frac{1}{4}} 64 = \dots\dots\dots$$

$$\log_{10} 100 = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\frac{1}{8}} 1 = \dots\dots\dots, \quad \log_{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots, \quad \log_{\frac{1}{49}} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



أتعلم: الاقتران على الصورة  $Q(s) = \log_p s$ ، حيث  $p > 0$ ،  $p \neq 1$ ،  $s > 0$ .  
يسمى اقتراناً لوغاريتمياً.

لماذا  $p > 0$ ،  $p \neq 1$  ؟





**ملحوظة:** من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتب عادةً على الصورة  $\log_s = \log$ ،  $s > 0$  (لا يُكتب له الأساس ١٠). وإذا كان الأساس العدد  $e$  يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة:  $\log_e(s) = \ln s$ .

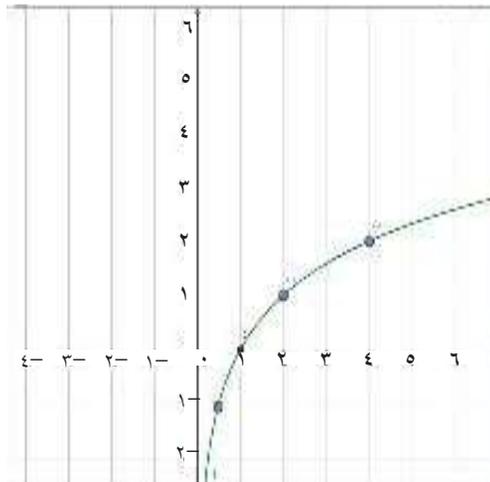
أكوّن جدولاً لقيم  $s$ ،  $\log(s)$  المناظرة لها، للاقتزان  $\log(s) = \ln s$ ، ثم أرسّم منحنى الاقتزان.



	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٤	٨	$s$
٣-	٢-		١		٣	$\log(s) = \ln s$

$$\text{أتذكر أن: } \log_4 2 = \frac{1}{2} \text{ لأن } 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

أعيّن النقاط في المستوى البياني، وأرسّم منحنى الاقتزان، كما هو في الشكل (٣-٢):



من منحنى الاقتران  $v = \log_2 u$ ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران  $v = \log_2 u$ ، حيث  $u > 1$  :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: ..... ومداه هو: .....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: .....
- كلما زادت قيم  $u$  فإنَّ قيم  $v$  ص المناظرة لها .....

أرسم منحنى  $v = \log_2 u$  على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران  $v = \log_2 u$  ثم أقارنُ بين منحنَيّ الاقترانين.



أمثلُ منحنى الاقتران  $q(s) = \log_2(1-s)$  في المستوى الديكارتي، وأقارنُ منحناه مع منحنى الاقتران  $h(s) = \log_2 s$ .



أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨	س
	٢-			١	٢ = ١ - ٣	ق(س) = $\log_2(1-s)$

أرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ أنَّ منحنى  $q(s) = \log_2(1-s)$ ، هو انسحابُ لمنحنى الاقتران  $h(s) = \log_2 s$  وحدةً واحدةً إلى الأسفل.

أتعلَّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيَّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

أكوّن جدولاً لقيم  $s$  ،  $q(s)$  المناظرة لها للاقتران  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، ثم أرسم منحناه:



$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		١	٢	٤	٨	$s$
		١	٠		٢-		$q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$

- من منحنى الاقتران  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، أستنتج خصائص الاقتران  $v = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، حيث  $1 > v > 0$  .
- ألاحظ أنّ: الاقتران  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، هو اقتران مجاله ..... ، ومداه .....
  - تقلّ قيم  $q(s)$  كلما زادت قيم  $s$  المناظرة لها، ويمرّ منحناه في النقطة  $(1, 0)$  .

ما العلاقة بين منحنى  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ومنحنى  $h(s) = \log_2 s$  ؟ أتحرّق من العلاقة التي توصلت إليها جبرياً.



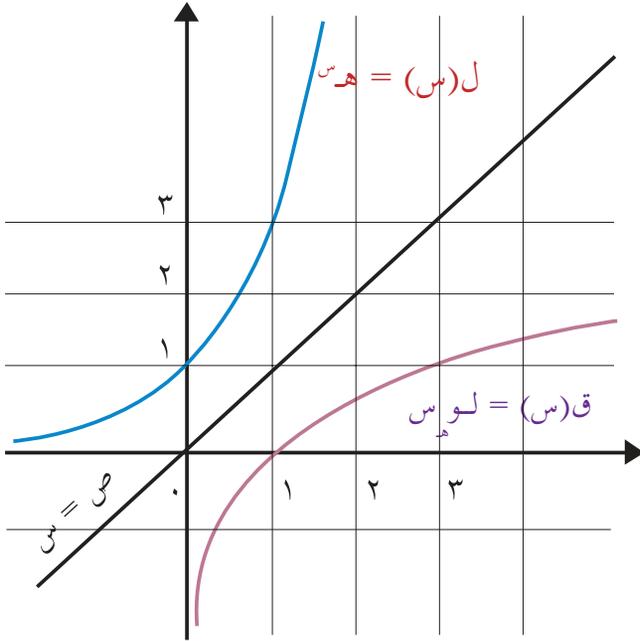
أكوّن جدولاً لقيم  $s$  ،  $h(s)$  المناظرة لها للاقتران  $h(s) = \log_2 s$  ، ثم أرسم منحنى هذا الاقتران على منحنى  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، وأقارن بينهما.



	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩	$s$
٣	٢				٢-	$h(s) = \log_2 s$

مثال (١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّي الطبيعي  $l(s) = \log_2 s$  ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسم منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$

الحل: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران  $q(s) = \log_{\frac{1}{2}} s$  ، هو انعكاس لمنحنى  $v = \log_2 s$  في المستقيم  $v = s$  .



نرسم منحنى ل(س) = هـ س، ثم نرسم انعكاسه في الخط المستقيم ص = س، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.

أجد مجال كل من الاقترانات الآتية:

- ق(س) = لو (س - ٣)
- هـ(س) = لو (س<sup>٢</sup> - ١)



مجال الاقتران اللوغاريتمي هو ح<sup>+</sup>، فإن مجال ق(س) معرف عندما  $س - ٣ < ٠$  .  
مجال ق(س) هو : .....

أما مجال هـ(س) فهو معرف عندما  $س^٢ - ١ < ٠$  .  
وعليه فإن: مجال هـ(س) هو : .....

## تمارين ومسائل:

(١) احسب قيمة ما يأتي:

أ ( لو<sub>٣</sub> ٧٢٩ )

ب ( لو<sub>٤</sub> ٠,٠٤ )

ج ( لو<sub>١٠٠٠١</sub> ٠,٠٠٠١ )

(٢) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لوس، أمثلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ ( ه(س) = لوس - ١ )

ب ( ل(س) = لو<sub>٣</sub> (س + ٢) )

ج ( م(س) = -لو<sub>٣</sub> (س + ١) )

(٣) أجدُ مجال كلِّ من الاقترانات الآتية:

أ ( ق(س) = لو<sub>٥</sub> (س - ٢) )

ب ( ق(س) = لو<sub>٣</sub> (س - ٣) )

(٤) بدأ عالمٌ تجربته ب ٥٠٠٠٠٠٠٠ خلية، ولاحظ أنَّ ٤٥٪ من الخلايا تموت كلَّ دقيقة. كم تستغرق من الزمن حتى يصبح عددها أقلَّ من ١٠٠٠ خلية؟

## (٢ - ٤): تمارين عامة

### السؤال الأول:

أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيمة لو ١٢٥؟

(أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ١ (د) ٥-

(٢) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أسّيٌّ؟

(أ)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  (ب)  $3^2$  (ج)  $(-5)^3$  (د)  $5^3$

(٣) أيُّ العبارات الآتية عبارة صائبة بالنسبة للاقتران  $q = 3^s$ ؟

(أ) مجال الاقتران ومداه هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

(ب) مجال الاقتران هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح، بينما مداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح+.

(ج) مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة  $(ح+)$ ، بينما مداه هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

(د) مجاله ومداه هما مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

(٤) أيُّ الاقترانات الآتية هو انعكاس لمنحنى الاقتران  $q = 2^s$  في محور الصادات؟

(أ)  $ه = (س)$  لوس (ب)  $ه = (س) - 2$  (ج)  $ه = (س) - 2$  (د)  $ل = (س) = ه$

(٥) إذا كان  $q = 4^s$ ، حيث  $1 < 4$ ؟ فإن إحدى العبارات الآتية صائبة بخصوص منحنى ق:

(أ) يقطع محوريّ الإحداثيات في النقطتين:  $(1, 0)$ ،  $(0, 1)$  على الترتيب.

(ب) يقطع محور الصادات في النقطة  $(1, 0)$ .

(ج) يقطع محور السينات في النقطة  $(0, 1)$ .

(د) لا يقطع أيّاً من المحورين.

(٦) أيُّ الاقترانات الآتية ليس اقتراناً لوغاريتمياً؟

أ)  $ق(س) = \frac{1}{3} لوس$       ب)  $ق(س) = لوس$

ج)  $ق(س) = لوس$       د)  $هـ(س) = لوس$

(٧) أيُّ العبارات الآتية عبارة خاطئة حول منحنى الاقتران  $ق(س) = لوس$ ؟

أ) كلما زادت قيمة  $س$  زادت قيمة  $ص$  المناظرة لها.

ب) هو انعكاس لمنحنى الاقتران  $ق(س) = ٣^ص$  في محور الصادات.

ج) هو انعكاس لمنحنى الاقتران  $ق(س) = لوس$  في محور السينات.

د) هو انعكاس لمنحنى الاقتران  $ق(س) = ٣^ص$  في الخط المستقيم  $ص = س$ .

(٨) ما مجال الاقتران  $ق(س) = لو(س - ١)$ ؟

أ) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة  $ح +$ .

ب) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة  $]-١، ١[$ .

ج) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ما عدا  $]-١، ١[$ .

د) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة  $]-١، ٠[$ .

(٩) ما الاقتران الناتج من انعكاس منحنى الاقتران  $ل(س) = هـ^ص$  في الخط المستقيم  $ص = س$ ؟

أ)  $ق(س) = هـ^ص$

ب)  $ق(س) = لو^ص$

ج)  $ق(س) = هـ^{-ص}$

د)  $ق(س) = - (هـ^ص)$

(١٠) ما قاعدة الاقتران  $ق(س) = لو^ص$  ، عند إجراء انسحاب وحدتين لليمين؟

ب)  $هـ(س) = لو^ص + ٢$

أ)  $هـ(س) = لو^ص + ٢$

د)  $هـ(س) = لو^ص - ٢$

ج)  $هـ(س) = لو^ص + ٢$

(١١) أيُّ من التحويلات الهندسية الآتية تم الاعتماد عليها لتمثيل ل(س) = ٣ - لو<sub>٣</sub> باستخدام منحني ق(س) = لو<sub>٣</sub> ؟

- أ ( انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات، ثم انعكاس في محور السينات .  
 ب) انعكاس في محور الصادات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات .  
 ج) انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب إلى اليمين ٣ وحدات .  
 د ( انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات .

### السؤال الثاني:

أحسب قيمة كلٍّ من الآتية :

ب) لو<sub>٢٥٦</sub> ١

أ ( لو<sub>١٦</sub> - لو<sub>١٢٨</sub>

د) لو<sub>٦٤</sub>

ج) لو<sub>٩</sub> - لو<sub>٢٤</sub> - لو<sub>٣</sub>

### السؤال الثالث:

أجد قيمة كلٍّ مما يأتي، لأقرب ثلاث منازل عشرية، باستخدام الآلة الحاسبة:

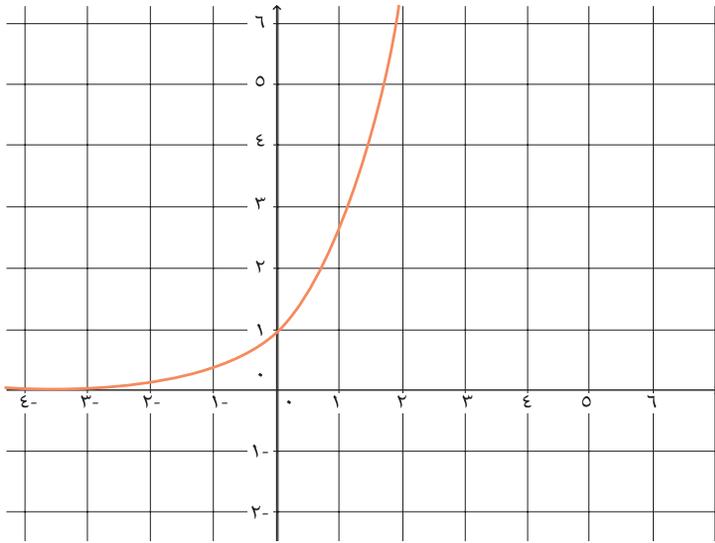
أ) هـ<sup>٢</sup> + ٣

ب) هـ<sup>٤</sup> - ٥

ج) لو<sub>١٠</sub>

### السؤال الرابع:

يمثل الشكل الآتي منحنى الاقتران ق(س) =  $2^s$  ،  $2 \neq 1$   
أرسم - مستعيناً بالشكل - منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية، موضحاً الحل:



أ)  $ص = لو_٢$

ب)  $ص = لو_٢(١ - س)$

ج)  $ص = لو_{\frac{1}{2}}$

د)  $ص = ١ - ق(س)$

هـ)  $ص = ٢^{(١-س)}$

### السؤال الخامس:

أدرس سلوك الاقتران ق(س) = لو(٢س + ٣) من حيث : مجاله ، ومداه ، وكل من مقطعيه السيني والصادي .

### السؤال السادس:

إذا كانت العلاقة بين شدة التيار الكهربائي (ت)، المارّ في سلك بالأمبير، والزمن بالثواني (٧)، تعطى بالعلاقة  $٧ = لو_٢$  أمثلاً بيانياً العلاقة بين شدة التيار والزمن، ثم أجد من الرسم شدة التيار بعد زمن قدره ثانية ونصف . (استخدم برنامج الرسم جيوجبرا GeoGebra في تحديد الزمن).

أقيم ذاتي:



أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر اثارة في هذه الوحدة.

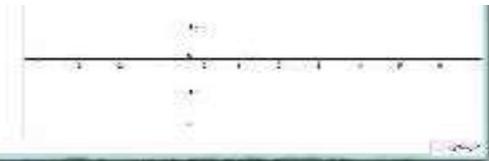
## فكرة رياضية:



بالرجوع إلى مركز الإحصاء الفلسطيني، أو شبكة الإنترنت، احصل على عدد سكان بلدتك (قريتك) لهذا العام، ومعدل تزايد السكان، ثم قدر عدد السكان في العام ٢٠٢٥م. أقرن الزيادة في أعداد السكان مع الزيادة في معدل النمو الاقتصادي، أبحث عن فكرة رياضية لزيادة معدل النمو الاقتصادي، أدرس هذه الفكرة من حيث النجاحات والمخاطر، ثم قرر مدى ملاءمتها لتوفير الاحتياجات الضرورية للمواطنين.

## تطبيقات حاسوبية:

(١) باستخدام برنامج رسم الاقترانات جيوجبرا (GeoGebra)، أرسم منحني كل من الاقترانات:



$$ص = هـ٣ ، ص = هـ٢ ، ص = هـ٣$$

(٢) ما العلاقة بين منحني الاقتران  $ص = هـ٣$

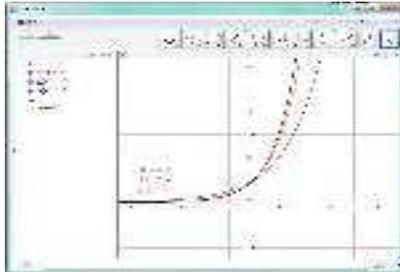
ومنحني الاقترانين:  $ص = هـ٢$  ،  $ص = هـ٣$  ؟

إرشاد: لرسم الاقترانات الواردة في السؤال اتبع الخطوات الآتية:

- الدخول إلى شاشة البرنامج.
- إدخال قاعدة الاقتران الأول في شريط الأوامر.

وذلك بطباعة

اضغط زر Enter → × → اشارة القوة (٨) → ٢



• لطباعة قاعدة الاقتران  $ص = هـ٣$ ، اتبع الخطوات السابقة

مع استبدال الرقم ٢ بالرقم ٣.

• لطباعة  $ص = هـ٣$ ، اتبع الخطوات السابقة مع استبدال

الرقم ٢ بالرمز (e)، واختياره من قائمة الرموز.

ماذا تلاحظ؟

(٣) استخدم الحاسوب وبرنامج رسم الاقترانات جيوجبرا لرسم كل من  $ص = هـ٣$  ،  $ص = هـ٣$  ، وتحقق من

صحة رسمك في مثال (١) صفحة ٥٨.

# الإحصاء والاحتمالات Statistics and Probability

الوحدة  
الثالثة



تفيد إحصاءات منظمة الصحة العالمية أنّ عدد الأسرّة في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان هو سرير لكل ٢٩٤ نسمة، بينما في فلسطين فهو سرير لكل ٧٨٠ نسمة، فإذا تمّ بناء ١٠ مستشفيات خلال عامين، في كل مستشفى ١٠٠ سرير، فما مدى اقتراب فلسطين من النسبة العالمية في عدد الأسرّة في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الارتباط ونظرية ذات الحدين في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- رسم شكل الانتشار الذي يمثّل العلاقة بين متغيّرين.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- إيجاد معامل ارتباط سبيرمان.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتيّة.
- حساب التباديل الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- حساب التوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدّين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.

## الارتباط الخطي (Linear Correlation)

(٣ - ١)

تُمثّل صحراء النقب أكثر من ثلث مساحة فلسطين، فيها العديد من المدن مثل حورة وعرعر. ذهب أحمد في رحلة مدرسية إلى منطقة النقب، وتعرّف إلى العديد من المدن الفلسطينية، وعند عودته إلى مدرسته أحضر الخريطة، وبدأ بدراسة توزيع المدن الفلسطينية في تلك المنطقة ليقدم تقريراً عن الرحلة. أمثّل المدن الفلسطينية الآتية: اللقية، رهط، كسيفة، وبئر السبع بنقاط في المستوى الديكارتي.



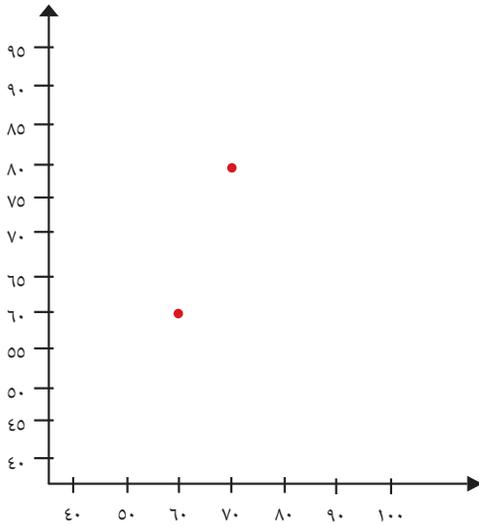
كيف تتوزع المدن في المستوى؟

في دراسةٍ قام بها معلّم الرياضيات في مدرسة العودة الثانوية، لمعرفة العلاقة بين علامات مبحثيّ الرياضيات والعلوم لمجموعة من طلبة الصف العاشر، حصل على البيانات في الجدول الآتي:



٩٠	٧٥	٦٥	٨٠	٥٥	٧٠	٦٠	علامة الرياضيات س
٨٥	٧٥	٧٠	٩٠	٥٠	٨٠	٦٠	علامة العلوم ص

أعيدُ كتابة البيانات في الجدول، على شكل أزواجٍ مرتبة: (٦٠، ٦٠) ..... أكملُ .....  
أمثّلُ كلَّ زوجٍ مرتّبٍ بنقطة في المستوى الديكارتي:



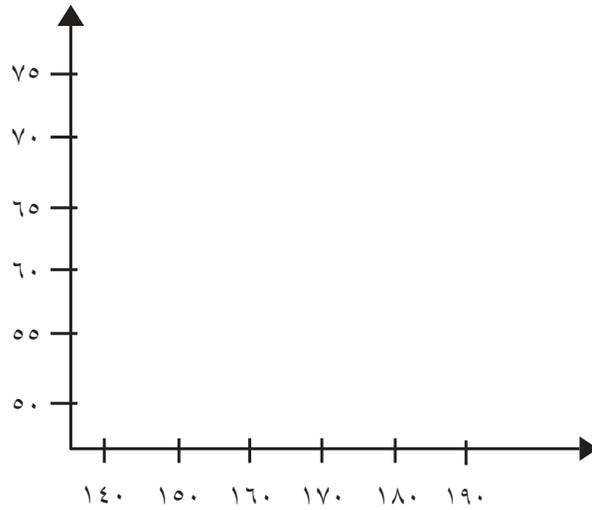
**أتعلمُ:** الشكل الناتج من تعيين النقاط في المستوى الديكارتي يسمى شكل الانتشار.

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكتلهم، فكانت كما في الجدول الآتي:



١٥٨	١٦٧	١٥٠	١٦٢	١٥٥	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٧٠	الطول بالسنتيمتر
٥٦	٦٨	٥٥	٦٠	٥٨	٦٠	٦٢	٦٥	٧٠	الكتلة بالكيلوغرام

أمثل شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته؟
- هل يمكن رسم مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط؟

**أتعلم:** إذا أمكن رسم مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيرين خطية، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطي.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيرين؟

**أستنتج:** شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطية، أو غير خطية بين متغيرين، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيرين؛ لأنَّ تقديره يختلف باختلاف الشخص الذي يقوم بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجب استخدام طريقة أكثر دقة، يتمُّ بواسطتها تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيرين، وهي ما يسمى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلمه في الدرس القادم.

## تمارين ومسائل:

(١) يمثل الجدول الآتي علامات مجموعة من الطلبة في مبحثي الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).  
أرسم شكل الانتشار، وأبين نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

(٢) في الجدول الآتي أعمار مجموعة من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباط خطي بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

(٣) في محل لبيع الأحذية، وجد صاحب المحل أن هناك علاقة بين سعر الحذاء وعدد القطع المباعة من ذلك النوع، فسجل بياناته في أحد الأشهر، في الجدول الآتي:

سعر الحذاء بالدينار	١٠	٢٠	١٥	١٢	٣٠	٤٠	٢٢	٣٥	٢٥
عدد القطع المباعة في الشهر	٦٠	٤٠	٢٥	٥٥	١٠	١٥	٢٥	٥	٢٠

أرسم، شكل الانتشار، وأبين نوع الارتباط.

## معامل ارتباط بيرسون (Pearson Correlation Coefficient)

( ٢ - ٣ )

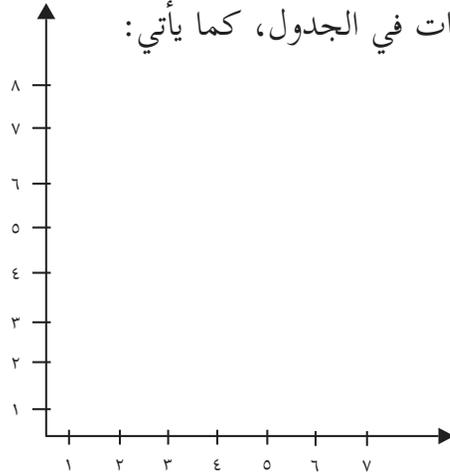


تشتهر محافظة الخليل بزراعة العنب، وحسب إرشادات وزارة الزراعة الفلسطينية، وخبرة المزارعين توجد علاقة بين عدد مرات حراثة الأرض ومحصول العنب. قام الحاج شحده بمتابعة قطعة أرضه، فجمع البيانات الآتية:



٥	٤	٣	٢	١	عدد مرات حراثة الأرض في السنة
٥,٥	٥	٤	٣	٢	إنتاج العنب بالطن

أرسم شكل الانتشار للبيانات في الجدول، كما يأتي:



- تزداد كمية إنتاج العنب بزيادة عدد مرات حراثة الأرض.
- إذا اتخذ شكل الانتشار خطاً مستقيماً فهناك ارتباط بين المتغيرين، يُمكن التعبير عنه عددياً بمعامل ارتباط، يُسمى معامل ارتباط بيرسون.



**تعريف:** إذا كانت  $s$ ،  $v$  مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرف معامل ارتباط بيرسون  $r$  كما يأتي:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n s_k v_k - n \bar{s} \bar{v}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n s_k^2 - n \bar{s}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2 - n \bar{v}^2}}$$

حيث:  $\bar{s}$  الوسط الحسابي لمجموعة قيم  $s$ ،  $\bar{v}$  الوسط الحسابي لمجموعة قيم  $v$ ،  $n$  عدد القيم.

خالد ورفاقه في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمين في نابلس، استلموا علاماتهم المدرسيّة، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسة العلاقة بين علاماتهم في مبحثيّ اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.



٣٠	١٥	٢٠	٢٥	٢٠	اللغة العربية س
٣٠	٢٠	١٨	٢٢	٢٥	اللغة الانجليزية ص

أكمل الجدول الآتي

س	ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>	س ص
٢٠	٢٥			
٢٥	٢٢		٤٨٤	
٢٠	١٨	٤٠٠		
١٥	٢٠			
٣٠	٣٠			٩٠٠
١١٠	١١٥		٢٧٣٣	
المجموع				

$$\sum_{ك=١}^{\sim} س ص = \dots\dots$$

$$\sum_{ك=١}^{\sim} ص^٢ = \dots\dots$$

$$\sum_{ك=١}^{\sim} س^٢ = \dots\dots$$

• أحسب:

$$\overline{ص} = \dots\dots$$

$$\overline{س} = \dots\dots$$

• أحسب معامل ارتباط بيرسون:

$$r = \frac{٢٣ \times ٢٢ \times ٥ - ٢٦١٠}{\sqrt{(٢٣) \times ٥ - ٢٧٣٣} \sqrt{(٢٢) \times ٥ - ٢٥٥٠}}$$

$$r = \dots\dots$$

أتعلم:  $١ \geq r \geq -١$

في إحدى العيادات الصحيّة تمّ قياسُ ضغطِ الدمِ الأعلى لخمسَةِ مرضى من أعمارٍ مختلفة، وُبُوِيَت البياناتُ في الجدول الآتي:

٤٠	٤٥	٦٠	٥٥	٥٠	العمر س
١٣٠	١٥٠	١٣٠	١٤٠	١٢٠	ضغط الدم ص



لحسابِ معاملِ ارتباطِ بيرسون أكوّنُ جدولاً، وأجدُ:

$$\sum_{k=1}^n s_k v_k = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n s_k^2 = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 = \dots$$

$$\overline{v} = \dots$$

$$\overline{s} = \dots$$

$$\dots = r$$

## تمارين ومسائل:

(١) حسب تائر معدل درجات الحرارة في قريته، في الأسابيع الثمانية من شهري كانون أول وكانون ثاني، وعدد أسطوانات الغاز التي تستهلكها أسرته للتدفئة في كل أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

٨	١٠	٢-	٠	١٢	٨	٥	١-	درجة الحرارة س
٢	١	٣	٢	١	٢	٢	٣	عدد أسطوانات الغاز ص

أحسب معامل ارتباط بيرسون.

(٢) قام طلبة الصف العاشر الأساسي في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقة بين عدد أفراد الأسرة لدى طلبة الصف، وكمية استهلاك الماء شهرياً، فجمعوا البيانات، وحصلوا على النتائج الآتية، علماً بأن عدد الأسر خمس. أحسب معامل ارتباط بيرسون.

$$٢٠ = \sum_{ك=١}^٧ س$$

$$١١٠ = \sum_{ك=١}^٧ ص$$

$$٤٩٠ = \sum_{ك=١}^٧ س ص$$

$$٩٠ = \sum_{ك=١}^٧ س^٢$$

$$٢٧٠٠ = \sum_{ك=١}^٧ ص^٢$$

(٣) أحسب معامل ارتباط بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

١٥	٦	١٦	٥	٨	١٠	س
١٢	٦	١٥	٥	٧	٩	ص

## معامل ارتباط سبيرمان (Spearman Correlation Coefficient)

( ٣ - ٣ )

تُعدُّ فلسطينُ من البلدان ذات النسبِ العاليةِ في عدد المعاقين حركياً مقارنةً مع عدد السكان، ويعود ذلك إلى ممارسات الاحتلال، فقد أظهرت دراسةً قام بها الجهازُ المركزيُّ للإحصاء للعام ٢٠١١، النسبَ المئوية للإعاقات الحركية مقارنةً مع عدد السكان، لبعض المحافظات فكانت كما يأتي:



المحافظة	جنين	طولكرم	بيت لحم	الخليل	طوباس	القدس	غزه
نسبة الاعاقة المئوية	٤,١	٣,٢	٣	٣,٦	٣,١	١,٤	٢,٥

- المحافظة الأقل نسبة في عدد المعاقين حركياً....
- أرتبُ المحافظات من الأعلى إلى الأدنى في نسب الإعاقات، في الجدول الآتي:

الترتيب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المحافظة	جنين	....	طولكرم	....	....	....	....

قام معلمُ الصفِّ الثالثِ الأساسي في مدرسة فلسطين الأساسية بدراسة العلاقة بين تقديراتِ مبحثي اللغة العربية والرياضيات، لأربعة طلابٍ، ودون النتائج في الجدول الآتي:



اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	جيد	ضعيف	ممتاز	مقبول
الرياضيات ص	مقبول	جيد	جيد جدا	ضعيف

- أراد المعلم أن يُحدّد العلاقة بين تحصيل الطلبة في مبحثيّ اللغة العربية والرياضيات، وإيجاد معامل ارتباط بينهما، فهل يستطيع إيجاد معامل ارتباط بيرسون لهذه البيانات؟ لماذا؟
- أُعبر عن البيانات الوصفية بقيم عددية، بإعطاء رُتب للطلبة في المبحثين. أكمل الجدول الآتي:

شادي	ناجح	أيمن	سعيد	اسم الطالب
الثالث	الأول	الرابع	...	اللغة العربية س
...	...	...	الثالث	الرياضيات ص

تعريف: يُعرّف معامل ارتباط سبيرمان بين متغيرين، ويُرمز له بالرمز  $r_s$  حسب القانون:

$$r_s = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n d_k^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث:

ف: الفرق بين رُتب المتغير س والمتغير ص.

ن: عدد قيم كل من المتغيرين.

يُمثل الجدول الآتي تقديرات ست طالبات في التربية الإسلامية (س)، والتنشئة الاجتماعية (ص):

اسم الطالبة	سلمى	هيفاء	ثورة	صبرا	ندى	هبة
التربية الإسلامية س	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	مقبول	جيد
التنشئة الاجتماعية ص	جيد	جيد	ممتاز	جيد جدا	ضعيف	جيد



أكمل الجدول الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف <sup>٢</sup>
جيد	جيد	٣,٥	٤	...	٠,٢٥
ضعيف	جيد	٦	٤	...	٤
ممتاز	ممتاز	١	...	٠	...
جيد جدا	جيد جدا	...	٢	٠	...
مقبول	ضعيف	...	٦	...	١
جيد	جيد	٣,٥	...	..,٥-	...
					٥,٥

ملاحظة: إذا تساوت الرتبُ نأخذ الوسط الحسابي لرتب القيم المكررة.

$$r_s = \frac{\sum_{k=1}^n f_k^2}{n(n-1)} - 1 = \dots\dots\dots$$

أحسب معامل ارتباط سبيرمان للبيانات في الجدول الآتي:

س	٦٠	٨٠	٦٥	٧٠	٦٥	٨٥	٦٥	٧٥	٥٥	٦٥	٩٠
ص	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٧٠	٨٠	٧٥	٦٥	٩٠



أكمل الجدول الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف <sup>٢</sup>
٦٠	٧٠	٩	٦	٣	
٨٠	٦٠				
٦٥	٧٠	٧			
٧٠	٩٠		١,٥		
٨٥	٧٠	٢		٤-	
٦٥	٦٠				
٧٥	٨٠		٣		
٥٥	٧٥				
٦٥	٦٥				
٩٠	٩٠	١			٠,٢٥

$$\dots = \bar{x}$$

$$\dots = \sum_{k=1}^n f_k^2$$

$$\dots = \checkmark$$

## تمارين ومسائل:

(١) يُمثّل الجدول الآتي الدخل الشهريّ (س) لستِ أُسْرٍ فلسطينيّة، ومجموع نفقاتها الشهريّة (ص)، بالدينار الأردنيّ:

٥٥٠	٦٥٠	٤٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٦٠٠	س
٤٠٠	٥٠٠	٥٠٠	٧٠٠	٧٥٠	٥٥٠	ص

أحسب معامل ارتباط الرتب (سبيرمان).

(٢) في دراسة لتحديد العلاقة بين عُمر الأم وعدد أطفالها في المجتمع الفلسطينيّ، قام باحثٌ بجمع البيانات الآتية عن عددٍ من الأسر:

٤٠	٣٨	٣٦	٣٤	٣٢	٣٠	٢٧	٢٥	٢٣	٢١	عمر الأم
٦	٧	٥	٦	٤	٣	٤	٤	٢	١	عدد الأطفال

أ) أحسب معامل ارتباط سبيرمان.

ب) أحسب معامل ارتباط بيرسون للبيانات نفسها.

(٣) إذا علمت أنّ مجموع مربعات فرّق الرتب بين متغيريّ الطول والكتلة لدى عيّنة من تسعة أطفال، يساوي ٢١، أحسب معامل ارتباط سبيرمان.

(٤) يمثّل الجدول الآتي تقديرات مجموعة من طلبة الصفّ الثاني، في الفصلين الأول والثاني:

ج	د	٢	ب	٢	ج	ب	٢	تقدير الفصل الأول
د	ج	ج	٢	٢	ب	ب	ب	تقدير الفصل الثاني

أحسب معامل ارتباط سبيرمان.

## الانحدار الخطي البسيط (Simple Linear Regression)

( ٣ - ٤ )



تشير الإحصاءات إلى أن عدد السيارات في فلسطين في السنوات الأخيرة ازداد بشكل ملحوظ؛ حيث أصبح ثلاثة أمثال ما كان عليه في العقد الماضي؛ ما أدى إلى الازدحامات والأزمات المرورية، وتأخر وصول المواطنين إلى الأماكن التي يقصدونها، في ساعات الصباح بخاصة، وساعات ما بعد الظهر.



أكتب معادلة تمثل عدد السيارات حالياً، مقارنة مع عددها في العقد الماضي.  
ص = ..... ، حيث: ص ..... ، س .....

### تعريف:

تسمى المعادلة  $\hat{ص} = أ س + ب$  التي تربط بين قيم المتغيرين س ، ص معادلة خط انحدار ص على س

$$\text{حيث: } أ = \frac{\sum_{ك=١}^{\text{ن}} س ك ص ك - \text{ن} \bar{س} \bar{ص}}{\sum_{ك=١}^{\text{ن}} س ك^٢ - \text{ن} \bar{س}^٢} \quad \text{و} \quad ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

$\bar{س}$  الوسط الحسابي لقيم المتغير س  
 $\bar{ص}$  الوسط الحسابي لقيم المتغير ص

أحسبُ كلاً من:  $\bar{s}$  ،  $\bar{ص}$  للبيانات في الجدول الآتي:



٥	٢-	٨	٦	٣	س
٤-	٦	٠	١	٧	ص

$$\bar{s} = \dots\dots\dots ، \bar{ص} = \dots\dots\dots$$

أكملُ الجدولَ الآتي:

س	ص	$s^2$	س ص
٣	٧		٢١
٦	١	٣٦	
٨	٠		
٢-	٦		
٥	٤-	٢٥	٢٠-

أجدُ معادلةَ خطِّ الانحدار:  $\hat{ص} = \mu_s + \mu_{ص}$

أحسبُ: قيمة  $\mu_s = \dots\dots\dots$  ، وقيمة  $\mu_{ص} = \dots\dots\dots$

معادلةَ خطِّ الانحدار:  $\hat{ص} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$

أراد أحد مصانع الألبان دراسة العلاقة بين نفقاته على الدعاية، وربحه اليومي بالدينار الأردني، فجمع البيانات الآتية:



١٠٠	٣٠٠	١٧٠	١٥٠	٢٠٠	نفقات الدعاية س
١٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	١٣٠٠	١٦٠٠	الربح ص

لإيجاد معادلة خط انحدار ص على س:  $\hat{ص} = اس + ب$ ، أحسب:

$$\dots = \sum_{ك=١}^ن س ك ص ك \quad \dots = \sum_{ك=١}^ن س ك^٢$$

$$\dots = \overline{ص} \quad \dots = \overline{س}$$

$$\dots = ب \quad \dots = ا$$

• معادلة خط انحدار ص على س هي: .....

• إذا أنفق المصنع ١٦٠ ديناراً على الدعاية، فسيكون ربحه:

$$\hat{ص} = اس + ب$$

$$\dots = \dots + ١٦٠ \times \dots = \dots \text{ ديناراً.}$$

أتعلم: يُمكن استخدام معادلة الانحدار في حساب قيم ص إذا عُلمت قيم س.

## تمارين ومسائل:

(١) أرسم شكل الانتشار، وأرسم الخطّ المستقيم، الذي يقع عليه أكبر عددٍ من النّقاطِ للبيانات، في الجدول الآتي:

١	٢	٣	٥	٣	١	س
٧	٥	٧	٦	٧	٣	ص

(٢) يُمثّل الجدول الآتي عددَ ساعاتِ الدراسةِ اليوميّة، ومعدّلَ الثانويّةِ العامّة، لدى مجموعةٍ من الطلبة:

٣	٥	٦	٤	٢	عدد ساعات الدراسة س
٧٠	٧٠	٨٠	٧٠	٦٠	معدل الثانوية العامة ص

• أجدُ معادلةَ خطّ انحدارِ ص على س.

• إذا درس طالب ٨ ساعات يومياً، فكم تتوقع المعدل الذي سيحصل عليه؟

(٣) إذا كانت معادلةُ خطّ الانحدارِ بين متغيرين هي  $\hat{ص} = ا + ب$  ، وكان معاملُ ارتباطِ بيرسون

بينهما يساوي  $ر$  ، أجدُ العلاقة بين  $ا$  و  $ر$  .

## مبدأ العدّ (Counting Principle)

(٣ - ٥)



يعاني الشعب الفلسطيني من إجراءات الاحتلال أثناء السفر والتنقل بين المدن الفلسطينية، سواء كانت حواجز، أو إغلاق طرق، أو غير ذلك من المضايقات اليومية.

فإذا أراد عليّ أن يسافر من الخليل إلى رام الله مروراً بالقدس، علماً أنّ بإمكانه أن يسافر من الخليل إلى القدس بإحدى ثلاث وسائل نقل هي: حافلة، سيارة أجرة، سيارة خاصة، ومن القدس إلى رام الله بإحدى وسيلتين هما: الحافلة، أو سيارة الأجرة.

- يُمكن لعليّ السفر من الخليل إلى القدس بالحافلة، أو ... ، أو .....
- عدد الطرق التي يُمكن أن يسافر بها = .....
- يمكنه السفر من القدس إلى رام الله بواسطة ..... ، أو ..... ، عدد الطرق = .....
- عدد الطرق التي يُمكن لعليّ أن يسافر بها من الخليل إلى رام الله مروراً بالقدس  
..... = ..... × ..... =

### مبدأ العدّ الأساسي:

إذا أمكننا إجراء عملية ما على خطواتٍ عددها  $k$ ، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها  $n_1$ ، وتتمُّ الثانية بطرقٍ عددها  $n_2$ ، وهكذا حتى الخطوة الأخيرة التي تتمُّ بطرقٍ عددها  $n_k$ ، فإنَّ عددَ الطرق الكلية التي تتمُّ بها هذه العملية هي:  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ .

يرادُ تكوينُ مجلسٍ إداريٍّ لشركةٍ ما، مكوّنٍ من رئيسٍ، ونائبٍ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوق، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلس، إذا كان عددُ الأشخاص المرشّحين ٥؟  
لاختيار الرئيس، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائب الرئيس، هناك ٤ طرقٍ مختلفة، لماذا؟

لاختيار أمين الصندوق، هناك ٣ طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس =  $3 \times \dots \times \dots =$  طريقة مختلفة.



نشاط

كم عدداً مكوّناً من منزلتين، يمكنُ تكوينه من مجموعة الأرقام:  $\{ 3, 5, 6, 8 \}$ ؟  
(أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العملية في مرحلتين: المرحلة الأولى اختيار منزلة الآحاد، وتتمُّ بـ ٤ طرق، واختيار منزلة العشرات، وتتمُّ أيضاً بـ ٤ طرق. إذن عددُ الطرق الكلية =  $4 \times 4 = 16$  طريقة.

(ب) إذا لم يُسَمَحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرق اختيار منزلة الآحاد... طرق، وعددُ طرق اختيار منزلة العشرات... طرق.

عدد الطرق المختلفة =  $4 \times 3 = 12$  طريقة، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.



نشاط

### مضروب العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسَةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسَةِ أماكنٍ في خطٍّ مستقيمٍ؟  
حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي  $5 \times \dots \times \dots \times \dots = 120$  طريقةٍ مختلفةً.  
اصطُلِحَ على كتابة حاصل الضرب  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  على الصورة  $5!$ ، وتُقرأ مضروب العدد ٥.

### تعريف:

إذا كان  $n$  عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروب العدد  $n$ ، ويُرمز له بالرمز  $n!$   
حيث:  $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$   
 $1 = 1!$

أحسب قيمة كلِّ مما يأتي:

أ)  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \dots$

ب)  $5! = \dots = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \dots$

ج)  $8! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 5!} = \dots$



أكتب  $\frac{n!}{(n-2)!}$  في أبسط صورة.

$\dots = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!}$

قيمة المقدار، عندما  $n = 5$  تساوي .....



## تمارين ومسائل:

(١) يقدم أحد المطاعم في مدينة نابلس ٣ أنواع من اللحوم، و ٤ أنواع من الحلوى، ونوعين من المشروبات. بكم طريقة يمكن لأحد مرتادي المطعم اختيار وجبة مكونة من نوع من اللحوم، ونوع من الحلوى، ومشروب؟

(٢) أقيمت قطعة نقد ٣ مرات، فما عدد النتائج الممكنة؟ أكتب النتائج في مجموعة.

(٣) كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل، يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام:  $\{ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ \}$ ؟

أ) إذا سمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

(٤) أحسب قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } ٨! - ٤! \quad \text{ب) } \frac{١٠! \times ٧!}{٥! \times ٩!}$$

(٥) أكتب المقدار:  $\frac{!(١ + \nu)}{!(١ - \nu)}$  ، حيث  $\nu \leq ١$  ، بأبسط صورة.

(٦) بكم طريقة يمكن لستة أشخاص الجلوس على ٨ كراسي، في خط مستقيم.

(٧) إذا كان  $٨! = ٥٠٤٠$  ، فما قيمة  $\nu$  ؟

(٨) كم عدداً زوجياً يمكن تكوينه من ثلاث منازل ، من ضمن الأرقام: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إذا سمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة ؟

## التباديل (Permutations)

(٦ - ٣)



لقد خُطتِ الرياضةُ الفلسطينيةُ في السنوات الأخيرة خُطواتٍ واسعةٍ، ولعلَّ أبرزَ دليلٍ على ذلك تأهُلُ منتخبِ فلسطينَ في كُرّةِ السلةِ لكأسِ أممِ آسيا، في العام ٢٠١٥.

فإذا أرادَ المنتخبُ الوقوفَ على خطِّ مستقيمٍ، لأخذِ صورةٍ تذكاريةٍ، فإنَّ عددَ الطرقِ الكليَّةِ

للفريق لأخذِ الصورة هي:  $5 \times \dots \times \dots = \dots$



نشاط

**أتعلّم:** عددُ الطرقِ المختلفةِ التي يمكنُ للفريقِ أن يقفَ فيها، لأخذِ الصورة، هي عددُ الترتيباتِ المختلفةِ للاعبين، وهو ما يُسمَّى التباديل.

### تعريف:

عددُ تباديل  $n$  من العناصر مأخوذةً جميعاً في كل مرة، هو  $n!$ ، ويُرمزُ له بالرمز  $(n, n)$ ، حيث  $n \in \mathbb{N}^+$

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n! = (n, n)$$

أجدُ قيمةَ:  $(6, 6)$ .

$$720 = 1 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \times 6 = (6, 6)$$

$$\dots = (5, 5) \quad \text{ماذا نلاحظ؟}$$



نشاط

أجدُ عددَ الأعدادِ المكوّنةِ من منزلتين، التي يمكنُ تكوينها من مجموعة الأرقام:  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، إذا لم يُسمحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوب هو عددُ الترتيباتِ الثنائيةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرطِ عدم التكرار، ويساوي  $\dots \times \dots = \dots$



نشاط

وهذا ما يُسمَّى التباديل الثنائية لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنَّ عددَ التباديل  
الرائية لمجموعةٍ مكوّنةٍ من (٧) من العناصر، ويُرمزُ له بالرمز ل(٧، ٣)،  
يساوي  $\frac{!٧}{!(٧-٣)}$  حيث ٧، ٣ عددان طبيعيان،  $٧ \geq ٣$

أجدُ قيمة كلِّ ممّا يأتي:

$$\text{أ) ل(٣، ٥)} = \frac{!٥}{!(٣-٥)} = \dots$$

$$\text{ب) ل(٣، ٧)} = \frac{!٧}{!(٣-٧)} = \dots$$



**أتعلمُ:** يمكنُ كتابة ل(٧، ٣) على الشكل:  $٧(١-٧)(٢-٧)(٣-٧)\dots(٧-٧)$ .

أتحقّقُ ممّا يأتي:

$$\text{أ) ل(١، ٧)} = \frac{!٧}{!(١-٧)} = \dots$$

$$\text{ب) ل(٠، ٧)} = \dots = ١$$

$$\text{ج) ل(٧، ٧)} = \dots = !٧$$



بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبٍ رئيسٍ، وأمينٍ سرٍّ من بين  
سبعة أشخاص؟

عددُ الطرق التي يمكنُ تشكيلُ اللجنة بها هي:

$$\text{ل(٧، ٣)} = \dots \times \dots \times \dots = ٢١٠ \text{ طرقٍ مختلفة.}$$



## تمارين ومسائل:

(١) أحسب قيمة ما يأتي:

$$\frac{ل(٢،٩)}{ل(٠،٩٠)} \quad (ب) \quad ل(٤،٦) \quad ل(٠،٩٠)$$

(٢) أراد أحمد وإخوانه الثلاثة الذهاب إلى المسجد الأقصى، واتفقوا على أن يدخل كل منهم من بابٍ مختلفٍ من أبواب القدس السبعة. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكن للإخوة الأربعة الوصول إلى المسجد الأقصى؟

(٣) أجد قيمة  $n$  في كلِّ ممَّا يأتي:

$$أ) ل(٢، ٧) = ٥٦$$

$$ب) ل(٣، ٧) = ٢١٠$$

$$ج) ل(٢، ٣ - ٧) = ٦$$

(٤) دُعِيَ خمسة رجالٍ وزوجاتهم الخمس لحضور حفلٍ تخرُّج طلبة الثانوية العامة، في القرية التي يسكنون فيها، بكم طريقةٍ يمكنُ لهم أن يجلسوا على ١٠ كراسي، في خطٍ مستقيم، بحيث يجلس الرجال متجاورين، والزوجات متجاورات؟

(٥) إذا كان  $ل(٧، ٨) = ١٢٠$ ، أجد قيمة  $n$ ،  $n$  الممكنة. كم حلًّا للسؤال؟

## التوافيق (Combinations)

(٣ - ٧)



تكثر المعالم الأثرية في فلسطين، مثل سبسطية في نابلس، وقصر هشام في أريحا، أقدم مدينة في العالم.



ذهب خمسة أصدقاء: محمد، ويزن، وخالد، وخليل، وعلاء، من الصف العاشر في رحلة إلى منطقة سبسطية الأثرية، وفي موعد الغداء اتفقوا على اختيار ثلاثة منهم لإعداد الطعام للجميع، فاقترح أحدهم أن يلجأوا إلى

القرعة، وذلك بعد تقسيم المجموعة إلى مجموعات ثلاثية مثل: {محمد، يزن، خالد}، {محمد، يزن، خليل}.

- أكمل باقي المجموعات.....

- هل يمكن أن تكون إحدى المجموعات: يزن، خالد، محمد؟ لماذا؟

- عدد المجموعات التي يمكن تكوينها..... مجموعة.

## تعريف:

عدد التوافيق الرائية لمجموعة فيها  $n$  من العناصر، ويُرمز له بالرمز:

$$r \leq n, \quad \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{L(n, r)}{r!} = \binom{n}{r}$$

لدى معرض سيارات ٦ أنواع من السيارات، يريد صاحب المعرض اختيار ٤ منها، لعرضها للزبائن.



أجد عدد الطرق التي يمكن بها الاختيار.

بما أن إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أن الترتيب غير مهم.

$$\text{إذن: عدد الطرق يساوي} = \binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!2!} = \dots$$

أحسبُ كلاً ممّا يأتي:



أ)  $..... = \frac{!8}{!4!4} = \binom{8}{4}$

ج)  $1 = ..... = \binom{52}{0}$

ب)  $6 = ..... = \binom{6}{1}$

د)  $..... = \binom{25}{25}$

أستنتجُ القواعد الآتية:



أ)  $1 = ..... = \frac{!n}{!0!(n-0)} = \binom{n}{0}$

ج)  $n = ..... = \binom{n}{1}$

ب)  $1 = ..... = \binom{n}{n}$

د)  $\binom{n}{r-n} = \binom{n}{r}$

## تمارين ومسائل:

(١) أحسب ما يأتي:

$$\begin{array}{lll} \text{أ)} & \binom{9}{5} & \text{ب)} \binom{9}{4} \\ \text{ج)} & \binom{75}{1} & \end{array}$$

(٢) أجد قيم  $n$  في كلِّ من الحالات الآتية:

$$\begin{array}{ll} \text{أ)} & 3 = \binom{n}{2} \\ \text{ب)} & \binom{n}{4} = \binom{n}{9} \end{array}$$

(٣) بكم طريقة يمكن تكوين فريق لكرة السلة، يتم اختياره من بين ثمانية لاعبين؟

(٤) صفٌّ مكوَّن من ٩ طلاب، و٧ طالبات، يُراد تشكيل لجنة مكوَّنة من ٣ طلاب، و٤ طالبات، بكم طريقة مختلفة يمكن تشكيل اللجنة؟

## نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem)

(٣ - ٨)

تعلمت في صفوفٍ سابقةٍ قانونَ التوزيع؛ لذا بإمكانك إيجاد مفكوك كلٍّ من الآتية:

$$= (b + a)^2$$

$$= (b + a)^3$$

$$= (b + a)^4$$

والآن، ماذا لو طُلب منك إيجاد مفكوك  $(b + a)^{10}$  ؟

لا شك أنك تستطيع ذلك وفق ما تعلمته سابقاً، بضرب المقدار  $b + a$  في نفسه خمس عشرة مرةً، وهي طريقةٌ طويلةٌ وشاقةٌ؛ لذا فهناك حاجةٌ لاستخدام نظرية ذات الحدين، لإيجاد مفكوكٍ من هذا النوع.

نظرية ذات الحدين:

$$(b + a)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \dots + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

حيث  $n$  عدداً طبيعياً

أجد مفكوك:  $(s + 2)^{\circ}$

$$(s + 2)^{\circ} = \sum_{r=0}^{\circ} \binom{\circ}{r} s^{\circ-r} 2^r$$

$$= s^{\circ} + 2 \times s^{\circ-1} + 4 \times s^{\circ-2} + 8 \times s^{\circ-3} + 16 \times s^{\circ-4} + \dots =$$

$$\dots =$$



لإيجاد مفكوك المقدار:  $(٢س - ١)^٢$  :

• أكتبه على الشكل:  $(٢س + ١)^٢$ .

• أجد مفكوك المقدار:  $(٢س + ١)^٢ = \binom{٢}{٠} (٢س)^٢ (١)^٠ + \dots$



أستنتج:

• عدد حدود مفكوك  $(ب + ١)^٧ = \dots$

• مجموع أس  $١$  وأس  $ب$  في أي حد من حدود المفكوك = .....

أتعلم:

• في مفكوك  $(ب + ١)^٧ = \binom{٧}{٠} ١^٧ + \binom{٧}{١} ١^٦ ب + \dots + \binom{٧}{٧} ب^٧$

• في الحد الأول: قيمة  $١$  تساوي  $٠$  ، وفي الحد الثاني: قيمة  $١$  تساوي  $١$  ، وهكذا ..

أي: ح  $= \binom{٧}{٣} ١^٤ ب^٣$  ، وهذه صورة الحد العام.

في مفكوك  $(٢س + \frac{١}{٤})^٦$ ، أجد الحد الثالث .

في الحد الثالث تكون قيمة  $٣ = ٢$

ح  $= \binom{٦}{٢} (٢س)^٤ (\frac{١}{٤})^٢ = ١٥ \times ١٦ \times س^٤ \times \frac{١}{٤} = \dots$



أجد الحد الأوسط في مفكوك:  $(٣ص + \frac{٢}{٣})^٨$

بما أن  $٨ = ٨$  ، إذن: عدد الحدود يساوي .....

رتبة الحد الأوسط هي:  $٥ = ١ + \frac{٨}{٣}$

ح  $= \binom{٨}{٤} (\frac{٢}{٣})^٤ ص^٤ = \dots = ٧٠ \times ١٦ ص^٤ = \dots$



أجد قيمة المقدار:  $^{\circ}(1,2)$   
 $^{\circ}(1,2) = ^{\circ}(0,2 + 1)$   
 مفكوك  $(0,2 + 1) = \dots\dots\dots$



أستخدم الآلة الحاسبة، لإيجاد قيمة المقدار  $^{\circ}(1,2)$  ، وأقارن بين الإجابتين.

## تمارين ومسائل

(١) أجد مفكوك كلِّ ممَّا يأتي:

أ)  $(س + ٣)^٦$

ب)  $(\frac{٣}{س} + \frac{٢}{٣} س)^٤$  ج)  $(س - ٢)^٥$

(٢) أجد الحدَّ السابع في مفكوك:  $(س + \frac{١}{٢})^{١٠}$

(٣) أجد الحدَّين الأوسطين في مفكوك:  $(\frac{٣}{س} + \frac{٢}{٣} س)^٦$

(٤) أستخدم مفكوك ذات الحدَّين في إيجاد قيمةٍ تقريبيَّةٍ، لأقرب ٣ منازل عشريَّة للمقدار:  $^٢(٣,٩٨)$

(٥) أجد الحدَّ الذي يحوي  $س^٢$  في مفكوك:  $(س - \frac{١}{٢})^٥$

(٦) أيُّ حدٍّ في مفكوك  $(١ + ب)^{٢٥}$  ، له معاملُ الحدِّ ٢٣ نفسه؟

## ( ٣ - ٩ ) : تمارين عامة

### السؤال الأول:

أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(١) أيُّ القيم الآتية لا يمكنُ أن تمثِّلَ معاملَ ارتباطٍ بيرسون الخطيِّ بين متغيرين؟

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ١- (د) ١,١-

(٢) أيُّ من القيم الآتية تساوي ل(٧، ٢)؟

(أ) ٣٠ (ب) ٢٧ (ج) ٢٥ (د) ٢٤

(٣) إذا كان  $٧! = ٦$  فما قيمة ل(٣، ٧)؟

(أ) ١٨ (ب) ٢٧ (ج) ٥٤ (د) ٧٢

(٤) ما قيمة:  $\binom{٦}{٣} - \binom{٤}{٢}$  ؟

(أ) ٢٠ (ب) ١٤ (ج) ٥ (د) ٢

(٥) ما معاملُ الحدِّ الثامنِ في مفكوك (س + ص)<sup>٩</sup> ؟

(أ) ٧ (ب) ٩ (ج) ٣٦ (د) ٦٣

(٦) ما الحدُّ الأوسطُ في مفكوك:  $(٢ - \frac{١}{٢})^{١٠}$  ؟

(أ)  $٢^{١٨}$  (ب)  $-٢^{٥٢}$  (ج) ٨٨ (د)  $-٢٥٢$

السؤال الثاني: أرسمُ شكلَ الانتشار للبيانات الآتية، وأبيِّنُ نوعَ الارتباط بين س، ص :

١٠	٨	٦	٤	٢	س
١٠	١٢	١٥	١٨	٢٠	ص

السؤال الثالث أحسب معامل ارتباط بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

٢٠	٥	صفر	٥-	١٠-	س
٢٠	١٥	١٠	٨	٢	ص

السؤال الرابع أحسب معامل ارتباط سيرمان بين المتغيرين:  $\mu$  ، ب ، للبيانات في الجدول الآتي:

٦٠	٤٠	٧٠	٨٠	٩٠	٥٠	٦٠	٤٠	٥٠	٨٠	$\mu$
٥٠	٤٠	٤٠	٧٠	٩٠	٧٠	٨٠	٥٠	٦٠	٧٠	ب

السؤال الخامس اعتماداً على البيانات في الجدول الآتي، أجد معادلة خط انحدار ص على س :

٧	١١	٩	٧	٥	٣	س
٦	١٢	١١	٧	١٠	٨	ص

السؤال السادس

كم عدداً مكوناً من ٣ منازل، وأصغر من ٣٠٠، يمكن تكوينه من الأرقام: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، إذا سُمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة؟

السؤال السابع

ما عدد النواتج الممكنة لتجربة رمي حجر الترد ٣ مرات؟

## السؤال الثامن

أحلّ المعادلات الآتية :

$$أ) \quad ٣٦٠٠ = !٧٥$$

$$ب) \quad !٧٣٠ = !(٧ + ٢)$$

## السؤال التاسع

إذا كان  $\frac{٢٠٨}{!٧} = \frac{٣}{!(٧ - ٢)} + \frac{٥}{!(٧ - ١)}$  ، أجد قيمة  $٧$ .

## السؤال العاشر

أعبر عن كلِّ ممّا يأتي بالصورة ل(٧، ٧) :

$$أ) \quad ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٨ \times ٩ \quad ب) \quad ٢٥٢٠ \quad ج) \quad ٧(٧ - ٢ - ٧٣ + ٢)$$

## السؤال الحادي عشر

١ ، ب ، ج ، د أربع نقاط في المستوى، لا تقع أيُّه ثلاثٍ منها على استقامة واحدة. كم قطعةً مستقيمةً يمكن رسمها بين أي نقطتين من هذه النقاط ؟

## السؤال الثاني عشر

يريدُ طلبة الصفِّ العاشر البالغ عددهم ١٥ طالباً في إحدى المدارس الفلسطينية اختيار لجنةٍ مكوّنة من ٣ أشخاص لتمثيلهم أمام إدارة المدرسة:  
أ) بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة.  
ب) بكم طريقة يمكن اختيارها إذا تكوّنت من: رئيسٍ، وأمينٍ سرٍّ، وعضوٍ؟

## السؤال الثالث عشر

$$أجدُ مفكوكاً: \left( \frac{١}{٣} - س \right) \frac{١}{٢}$$

## السؤال الرابع عشر

كم قطراً للشكل الخماسيِّ ؟

أقيم ذاتي:



متدني	متوسط	ممتاز	المهارة
			اجد معامل الارتباط
			استخدم مبدا العد والتباديل والتوافق في حل مشكلات حياتية
			اجد مفكوك مقدار جبري مكون من حدين

فكرة رياضية:



فكر مجموعة من طلبة الصف العاشر تقديم المساعدة لأسرة فقيرة في القرية، عن طريق تصميم وتنفيذ مشروع صغير يعود بمردود مادي، وهو إنشاء مزرعة دجاج بياض بعدد (١٠٠٠) دجاجة.

بالرجوع الى وزارة الزراعة أو أحد الخبراء في تربية الدواجن، احصل على معلومات حول عمر الدجاجة وعدد البيض المنتج.

أكتب المعادلات اللازمة لوصف العلاقة بين عمر الدجاجة وعدد إنتاجها من البيض. ادرس هذه الفكرة من حيث النجاحات والمخاطر، ثم قدر الأرباح المتوقعة بعد عام من تنفيذ المشروع.

## المشروع

**المشروع:** شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

### مميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيتهم ورغبتهم بالعمل.

### خطوات المشروع:

**أولاً: اختيار المشروع:** يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.

٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومتراصة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطَّط له مسبقاً.

### ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

### يقضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

### ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

## دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

## دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

## رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

## المراجع

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع .  
فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان).  
قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي  
اللحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق  
ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية -القاهرة- مصر  
نورة،دهبي (2008): الرياضيات ، دار الصفاء للنشر و التوزيع- عمان-الأردن  
رمضان صبرا، أحمد عثمان، غريب موسى، روز زريقات (1997): الرياضيات العامة، دار المناهج للنشر  
و التوزيع - عمان - الأردن

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N. Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N. Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N. Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

## لجنة المناهج الوزارية

د. بصري صيدم	د. بصري صالح	م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد	أ. عزام ابو بكر	أ. علي مناصرة
د. شهناز الفار	د. سمية النخالة	م. جهاد دريدي

## اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. أحمد سياعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نسرين دويكات	أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم			

## المشاركون في ورشات عمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف العاشر

أ. إياد دويكات	أ. آنية رضوان	أ. دعاء شتية	أ. مها غانم	أ. هيا رواشدة
أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. مؤيد الحنجوري	أ. سهيل شبير	أ. باسم المدهون
أ. منال الصباغ	أ. معزوز ضبابات	أ. محمد غانم	أ. هاشم أبو بكر	أ. أماني شاور
أ. أشجان جبر	أ. راتب نصار	أ. ارواح كرم	أ. محمد الفرا	أ. عبدالله مهنا
أ. وفاء موسى	أ. ابتسام اسليم	أ. عارف السعافين	أ. رانية شريم	أ. ريم العويصات
أ. عهد طه	أ. ميسون جمل	أ. رأفت عامر		