



قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



وزارة التعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني



قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

يُوزع مجاناً للإتباع

طبعة ١٤٤٦ - ٢٠٢٤

ح) وزارة التعليم ، ١٤٤٣هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التعليم

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط - التعليم العام - الفصل الدراسي الثاني /

وزارة التعليم - الرياض ، ١٤٤٣هـ .

١٤٣ ص ؛ ٢١ × ٢٧,٥ سم

ردمك : ٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم - السعودية ٢ - التعليم المتوسط - السعودية

- كتب دراسية . أ.العنوان

١٤٤٣/١٣١٢٢

ديوي ٥١٠,٧

رقم الإيداع : ١٤٤٣/١٣١٢٢

ردمك : ٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين و المعلمات، والطلاب و الطالبات، وأولياء الأمور ، وكل مهتم بالتربية و التعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.



fb.ien.edu.sa



وزارة التعليم

Ministry of Education

2024 - 1446

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للطالب فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعياً بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءاً من المرحلة الابتدائية؛ سعياً للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
 - تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
 - إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
 - الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
 - الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
 - الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
 - الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.
- ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطورة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.
- ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق





الفهرس

الفصل ٥

أنظمة المعادلات الخطية

- التهيئة للفصل ٥ ١١
- ١-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً ١٢
- ١٨  معمل الحاسبة البيانية: حل نظام من معادلتين خطيتين ١٨
- ٢٠-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض ٢٠
- ٢٥-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح ٢٥
- ٣٢ **اختبار منتصف الفصل** ٣٢
- ٤-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب ٣٣
- ٥-٥ تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين ٣٩
- ٤٤ **اختبار الفصل** ٤٤
- ٤٥ **الاختبار التراكمي** ٤٥

الفصل ٦

كثيرات الحدود

- التهيئة للفصل ٦ ٤٩
- ١-٦ ضرب وحيدات الحد ٥٠
- ٢-٦ قسمة وحيدات الحد ٥٦
- ٣-٦ كثيرات الحدود ٦٢
- ٦٧  معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها ٦٧
- ٤-٦ جمع كثيرات الحدود وطرحها ٦٩
- ٧٤ **اختبار منتصف الفصل** ٧٤
- ٥-٦ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود ٧٥
- ٨١  معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود ٨١
- ٦-٦ ضرب كثيرات الحدود ٨٣
- ٧-٦ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٨٩
- ٩٥ **اختبار الفصل** ٩٥
- ٩٦ **الاختبار التراكمي** ٩٦



٩٩	التهيئة للفصل ٧
١٠٠	١-٧ تحليل وحيدات الحد
١٠٤	٢-٧ استعمال خاصية التوزيع
١١١	معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود
١١٣	٣-٧ المعادلات التربيعية: $س^٢ + ب س + ج = ٠$
١٢٠	اختبار منتصف الفصل
١٢١	٤-٧ المعادلات التربيعية: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$
١٢٧	٥-٧ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين
١٣٣	٦-٧ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة
١٤١	اختبار الفصل
١٤٢	الاختبار التراكمي

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- المعادلات الخطية والتربيعية.
- الدوال الخطية والتربيعية.
- كثيرات الحدود والعبارات الجذرية.
- الإحصاء والاحتمال.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الرياضية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- اقرأ فقرة (فيما سبق) لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة (والآن) .
- ابحث عن المفردات المظللة باللون الأصفر، وقرأ تعريف كل منها.
- راجع المسائل الواردة في مثال والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- ارجع إلى إرشادات للدراسة حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- ارجع إلى فقرة قراءة الرياضيات؛ لتتذكر نطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- تذكر بعض المفردات التي تعلمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة مراجعة المفردات .
- ارجع إلى فقرة تنبيه! دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجنبها.
- ارجع إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي تأكد و تدرب وحل المسائل ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- استعن بأسئلة تدريب على اختبار لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- ارجع إلى مراجعة تراكمية لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- استعمل أسئلة استعد للدروس اللاحق لمراجعة بعض المهارات والمفاهيم اللازمة للدرس التالي.
- نفذ اختبار الفصل في نهاية كل فصل، بعد أن تراجع أفكار الدرس مستفيداً مما دونته من أفكار في المسطويات .
- نفذ الاختبار التراكمي في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وما قبله من فصول.



أنظمة المعادلات الخطية



فيما سبق

درست حل المعادلات الخطية في متغير واحد.

والآن

- أحل نظام معادلتين خطيتين بيانياً.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالحذف.
- أحل مسائل لفظية من واقع الحياة تؤول إلى نظام من معادلتين خطيتين.

لماذا؟

حدايق: باعت حديقة الحيوانات بالرياض في أحد الأيام تذاكر دخول بقيمة ٣٥٠٠ ريال. فإذا كان سعر التذكرة ١٠ ريالاً للكبير، ٥ ريالاً للصغير، فيمكنك استعمال نظام من معادلتين خطيتين لمعرفة عدد الكبار وعدد الصغار الذين اشترروا التذاكر عند معرفة إجمالي عدد التذاكر المباعة.

المفردات

- النظام المتسق ص (١٢)
- النظام المستقل ص (١٢)
- النظام غير المستقل ص (١٢)
- النظام غير المتسق ص (١٢)

منظم أفكار

المطويات

أنظمة المعادلات الخطية اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك مبتدئاً بورقة A4 .

- ١ اطو الورقة طولياً من المنتصف.
- ٢ قص النصف العلوي خمسة أجزاء بالتساوي.
- ٣ سم الأجزاء الخمسة بأرقام الدروس وعناوينها.

١-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً
٢-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض
٣-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح
٤-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب
٥-٥ تطبيقات على النظام المتسق من معادلتين خطيتين





التهيئة للفصل ٥

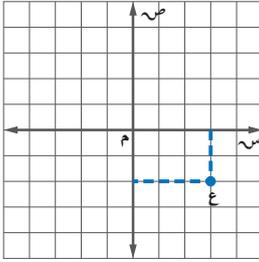
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

سم الزوج المرتب الذي يمثل النقطة ع في المستوى الإحداثي.



ارسم خطاً رأسياً من النقطة ع إلى محور السينات، لتحديد الإحداثي السيني للنقطة وهو (٣).
ارسم خطاً أفقياً من النقطة إلى محور الصادات، لتحديد الإحداثي الصادي للنقطة وهو (-٢).
إذن الزوج المرتب للنقطة ع هو (٣، -٢).

مثال ٢

حل المعادلة $٣٦ = ٣ + ١٢ - ص$.

المعادلة الأصلية

$$٣٦ = ٣ + ١٢ - ص$$

أضف ١٢ إلى كل من الطرفين

$$١٢ + ٣٦ = ١٢ + ٣ + ١٢ - ص$$

بسّط

$$٤٨ = ٣ - ص$$

اقسم كلا الطرفين على ٣

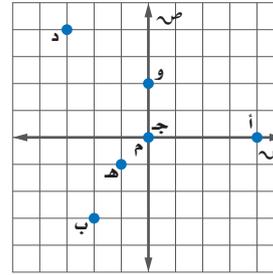
$$\frac{٤٨}{٣} = \frac{٣ - ص}{٣}$$

بسّط

$$١٦ = ١ - ص$$

اختبار سريع

سم الزوج المرتب الممثل لكل نقطة فيما يأتي: (مهارة سابقة)



- أ (١) د (٢)
ب (٣) ج (٤)
هـ (٥) و (٦)

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$١٢ = ٤ + س (٧)$$

$$٩ - = ٣س (٨)$$

$$٦ = ٢ + م (٩)$$

$$١٠ = ٢م + س + ب، م، ب ثابتان.$$

$$١١ = ب + ٢ل + (٤-)، ب ثابت.$$

$$١٢ = ٢٠ - ١٠ص (١٢)$$

(١٣) هندسة: إذا كانت $م = \frac{١}{٣} ق \times ع$ ، تمثل صيغة مساحة

المثلث، حيث م المساحة، ق قاعدة المثلث، ع ارتفاعه.

فأوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ١٠ سم،

وارتفاعه ٥ سم.



حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

رابط الدرس الرقمي

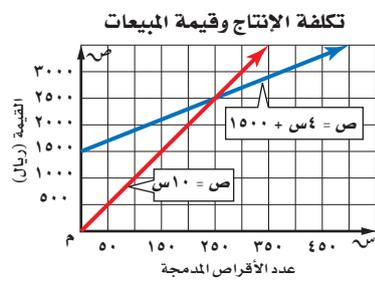


www.ien.edu.sa

لماذا؟

بلغت تكاليف إعداد مادة أقراص مدمجة علمية ١٥٠٠ ريال، وكان تسجيل القرص الواحد يكلف ٤ ريالات ويباع بـ ١٠ ريالات، ويرغب مدير الإنتاج في معرفة عدد الأقراص المدمجة التي عليه بيعها حتى يحقق ربحاً.

إن التمثيل البياني لنظام المعادلات يساعد على معرفة الوضع الذي يحقق ربحاً، ويمكن التعبير عن تكاليف الإنتاج الكلية بالمعادلة $ص = ٤س + ١٥٠٠$ ؛ حيث $ص$ تمثل تكلفة الإنتاج، $س$ عدد الأقراص المدمجة المنتجة.



يمكن تمثيل القيمة الكلية للمبيعات بالمعادلة $ص = ١٠س$ ، حيث تمثل $ص$ القيمة الكلية للمبيعات، $س$ عدد الأقراص المدمجة المباعة. يمكننا تمثيل هاتين المعادلتين بيانياً من معرفة متى يبدأ تحقيق الربح. وذلك بتحديد النقطة التي يتقاطع فيها المستقيمان، وهو ما يحدث عند بيع ٢٥٠ قرصاً مدمجاً؛ أي أن تحقيق الربح يبدأ عند بيع أكثر من ٢٥٠ قرصاً مدمجاً.

عدد الحلول الممكنة: تشكّل المعادلتان $ص = ٤س + ١٥٠٠$ ، $ص = ١٠س$ نظاماً من معادلتين، ويُسمى الزوج المرتب الذي يمثل حلّاً لكلتا المعادلتين حلّاً للنظام.

- إذا كان للنظام حل واحد على الأقل، يسمى **نظاماً متسقاً**، وتتقاطع تمثيلاته البيانية في نقطة واحدة، أو تشكّل مستقيماً واحداً.
- إذا كان للنظام حل واحد فقط، يسمى **نظاماً مستقلاً**، وإذا كان له عدد لا نهائي من الحلول يسمى **نظاماً غير مستقل**؛ وهذا يعني وجود عدد غير محدود من الحلول تحقق كلتا المعادلتين.
- إذا لم يكن للنظام أي حل، يسمى **نظاماً غير متسق**، وتشكل تمثيلاته البيانية مستقيماً متوازية.

فيما سبق

درست التمثيل البياني للمعادلات الخطية.

والآن

- أتعرف عدد حلول نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- أحلّ نظاماً مكوناً من معادلتين خطيتين بيانياً.

المضردات

نظام من معادلتين

النظام المتسق

النظام المستقل

النظام غير المستقل

النظام غير المتسق

اضف الى مطويتك		الحلول الممكنة		مفهوم أساسي
لا يوجد حل	عدد لا نهائي	واحد فقط	عدد الحلول	التمثيل البياني
غير متسق	متسق وغير مستقل	متسق ومستقل	المصطلح	

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان النظام الآتي متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل.

$$(أ) \quad 3 + 2س = ص$$

$$ص = 5 - س$$

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة، فهناك حل واحد للنظام، ويكون النظام متسقاً ومستقلاً.

$$(ب) \quad 5 - 2س = ص$$

$$ص = 3 + 2س$$

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين متوازيان فلا يوجد حل للنظام، ويكون النظام غير متسق.

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad 3 + 2س = ص$$

$$ص = 3 + 2س$$

$$(ب) \quad 5 - 2س = ص$$

$$ص = 5 - 2س$$

الحل بالتمثيل البياني: من الطرائق المستعملة في حل نظام من معادلتين تمثيلهما بيانياً في المستوى البياني نفسه، وإيجاد النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان التي تمثل حل النظام.

الحل بالتمثيل البياني

مثال ٢

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحداً فاكتبه:

$$(أ) \quad 10 + 3س = ص$$

$$ص = 2 - س$$

يظهر من التمثيل البياني أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (٣، ١)، ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض عن س بـ ٣، وعن ص بـ ١.

$$\text{تحقق} \quad 10 + 3س = ص \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$10 + (3) = 1 \quad \text{عوض}$$

$$10 + 9 = 1 \quad \text{اضرب}$$

$$19 = 1 \quad \checkmark$$

$$ص = 2 - س \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$2 - 3 = 1 \quad \text{عوض}$$

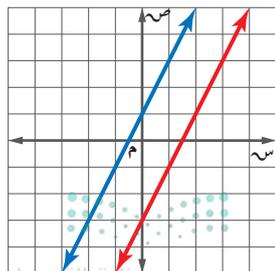
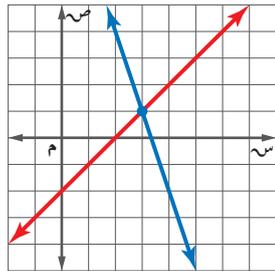
$$-1 = 1 \quad \checkmark \quad \text{اضرب}$$

إذن للنظام حل واحد، هو (٣، ١).

$$(ب) \quad 2س - 1 = ص$$

$$ص = 2س - 6$$

بما أن للمعادلتين الميل نفسه، ومقطعاهما الصاديان مختلفان، فالمستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان، وبما أنهما لا يتقاطعان في أي نقطة فلا يوجد حل لهذا النظام.



عدد الحلول

عندما تُكتب كل من المعادلتين على الصيغة $ص = م س + ب$ ، فإن قيم $م$ ، $ب$ تحدد عدد الحلول.

عدد الحلول	المقارنة بين قيم $م$ ، $ب$
١	قيمتا $م$ مختلفتان
لا يوجد	قيمتا $م$ متساويتان، وقيمتا $ب$ مختلفتان.
لانهايتي	قيمتا $م$ متساويتان، وقيمتا $ب$ متساويتان.

مراجعة المفردات

المستقيمتان المتوازيتان

لا تتقاطع أبداً، ولها الميل نفسه.

تحقق من فهمك

مثل كل نظام مما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحداً فاكتبه:

$$\begin{aligned} (أ) \quad ٢ = ص - ٣ & \quad ٣ - ٢ = ص \\ (ب) \quad ٣ - ٢ = ص & \quad ٣ + ٢ = ص \\ ٩ = ص + ٢ & \quad ٩ = ص + ٣ \end{aligned}$$

يمكننا استعمال أنظمة المعادلات لحل مسائل متنوعة من واقع الحياة تتضمن متغيرين أو أكثر.

مثال ٣ من واقع الحياة كتابة نظام من معادلتين وحله

تمر: يزداد إنتاج مزرعتي نخيل من التمور بانتظام تقريباً عبر عدد من السنين. استعمل المعلومات الواردة في الجدول أدناه للتنبؤ بالسنة التي يصبح فيها إنتاج المزرعتين متساوياً على اعتبار أن معدل الزيادة يبقى ثابتاً خلال السنوات القادمة في كلتا المزرعتين.

المزرعة	كمية الإنتاج عام ١٤٢٩ هـ (طن)	معدل الزيادة السنوية (طن)
الأولى	٣٠٩	٨
الثانية	٤١٨	٣

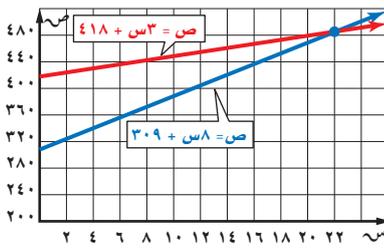


الربط مع الحياة

تعد التمور غذاءً صحياً مركزاً وطبيعياً، ومنجماً للفيتامينات؛ لكثرة ما بها من عناصر معدنية وفيتامينات.

التعبير اللفظي	كمية الإنتاج الكلية	تساوي	معدل الزيادة ضرب	عدد السنوات بعد ١٤٢٩ هـ	زائد	كمية الإنتاج عام ١٤٢٩ هـ
المتغيرات	لكن = ص		كمية الإنتاج الكلية	س	=	عدد السنوات بعد ١٤٢٩ هـ
المعادلات	المزرعة الأولى ص	=	٨	×	+	٣٠٩
	المزرعة الثانية ص	=	٣	×	+	٤١٨

بتمثيل الدالتين: $ص = ٨س + ٣٠٩$ ، $ص = ٣س + ٤١٨$ بيانياً نجد أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (٢٢، ٤٨٥).



تحقق استعمل التعويض للتحقق من صحة الإجابة.

$$\begin{aligned} ٣٠٩ + ٨س &= ص & ٤١٨ + ٣س &= ص \\ ٣٠٩ + (٢٢)٨ &\stackrel{?}{=} ٤٨٥ & ٤١٨ + (٢٢)٣ &\stackrel{?}{=} ٤٨٥ \\ ٤٨٥ &= ٤٨٥ & ٤٨٤ &\approx ٤٨٥ \end{aligned}$$

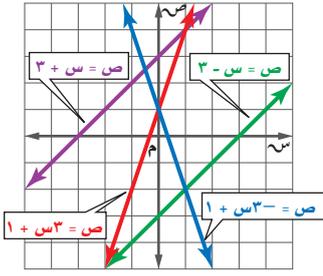
إذن سيكون إنتاج المزرعتين متساوياً بعد ٢٢ سنة من عام ١٤٢٩ هـ؛ أي في عام ١٤٥١ هـ، إذا بقي معدل الزيادة ثابتاً في كلتا المزرعتين.

تحقق من فهمك

(٣) **ساعات:** يرغب كل من محمود ورائد في شراء ساعة يدوية، فإذا كان مع محمود ١٤ ريالاً، ويوفر ١٠ ريالاً في الأسبوع، ومع رائد ٢٦ ريالاً ويوفر ٧ ريالاً في الأسبوع، فبعد كم أسبوعاً يصبح معهما المبلغ نفسه؟

مثال ١

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان كلٌّ من أنظمة المعادلات الآتية متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل:



$$\begin{array}{ll} (1) \text{ ص} - 3س = 1 & (2) \text{ ص} = 3س + 1 \\ (3) \text{ ص} = 3س + 1 & (4) \text{ ص} = 3س + 3 \\ (5) \text{ ص} = 3س + 3 & (6) \text{ ص} - س = 3 \end{array}$$

مثال ٢ مثل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحداً فاكتبه:

$$\begin{array}{ll} (5) \text{ ص} = 3س + 4 & (6) \text{ ص} = 3س + 3 \\ (7) \text{ ص} = 3س + 4 & (8) \text{ ص} = 2س + 4 \end{array}$$

مثال ٣

(٧) **قراءة:** يقرأ كلٌّ من صالح وعبدالله قصة طويلة كما في الشكل المقابل.

(أ) اكتب معادلة تعبر عن عدد الصفحات التي يقرأها كلٌّ منهما.

(ب) مثل كل معادلة بيانياً.

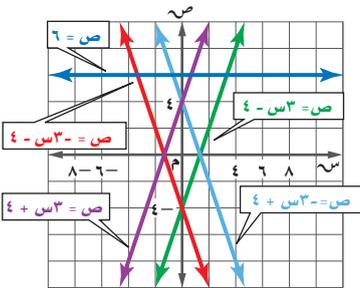
(ج) بعد كم يوم يصبح ما قرأه صالح أكثر مما قرأه عبدالله؟ تحقق من إجابتك وفسرها.



تدرب وحل المسائل

مثال ١

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحديد ما إذا كان كل نظام فيما يأتي متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل:



$$\begin{array}{ll} (8) \text{ ص} - 3س = 4 & (9) \text{ ص} - 3س = 4 \\ (10) \text{ ص} - 3س = 4 & (11) \text{ ص} = 3س + 4 \\ (12) \text{ ص} - 3س = 4 & (13) \text{ ص} = 3س + 4 \end{array}$$

مثال ٢ مثل كل نظام فيما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحداً فاكتبه:

$$\begin{array}{lll} (12) \text{ ص} = 4س + 2 & (13) \text{ ص} = 6س - 6 & (14) \text{ ص} = 3س + 4 \\ (15) \text{ ص} = 3س - 2 & (16) \text{ ص} = 2س + 3 & (17) \text{ ص} = 2س + 4 \\ (18) \text{ ص} = 3س - 2 & (19) \text{ ص} = 2س + 3 & (20) \text{ ص} = 2س + 3 \end{array}$$

١٨) **هوايات:** يتنافس خالد وسعود في جمع الطوابع التذكارية، فإذا كان لدى خالد ٣٠ طابعًا، ويضيف إليها أسبوعيًا ٤٠ طابعًا، ولدى سعود ٥٠ طابعًا، ويضيف إليها ٣٠ طابعًا كل أسبوع.

(أ) فاكتب معادلة تعبر عن عدد الطوابع التي جمعها كل منهما.

(ب) مثل كل معادلة بيانياً.

(ج) بعد كم أسبوع يصبح لدى كل منهما العدد نفسه من الطوابع؟

مثل كل نظام فيما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحداً فاكتبه:

$$(١٩) \text{ ص} = \frac{1}{3} \text{ س} \quad (٢٠) \text{ ص} = ٢ - \text{س} - ١٧$$

$$\text{ص} = \text{س} + ٢ \quad \text{ص} = \text{س} - ١٠$$

$$(٢١) -٣ \text{ س} + ٤ \text{ ص} = ٢٤ \quad (٢٢) ٢ \text{ س} - ٨ \text{ ص} = ٦$$

$$٧ = \text{ص} - \text{س} \quad \text{س} - ٤ \text{ ص} = ٣$$

$$(٢٣) ٤ \text{ س} - ٦ \text{ ص} = ١٢ \quad (٢٤) ٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = ١٠$$

$$-٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص} = -٦ \quad \text{ص} = ٦ + ٢ \text{ س} - ١٢$$

$$(٢٥) ٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ١٠ \quad (٢٦) \frac{1}{4} = \text{ص} + \frac{3}{4} \text{ س}$$

$$١٠ = \text{ص} + ٣ \text{ س} \quad \frac{1}{4} = \text{ص} + \frac{2}{3} \text{ س}$$

٢٧) **تصوير:** افترض أن ص تمثل عدد آلات التصوير التي باعها متجر (بالمئات)، س تمثل عدد السنوات منذ عام ١٤٢٠هـ. إذا كانت المعادلة $\text{ص} = ٥ + ١٢ \text{ س} + ٩$ ، ١٠ تعبر عن عدد آلات التصوير الرقمية المباعة في كل عام منذ عام ١٤٢٠هـ، والمعادلة $\text{ص} = -١ + ٩ \text{ س} + ٨$ ، ٧٨ تعبر عن عدد آلات التصوير العادية المباعة.

(أ) فمثل كل معادلة بيانياً.

(ب) ما العام الذي تتجاوز فيه مبيعات آلات التصوير الرقمية مبيعات آلات التصوير العادية؟

(ج) في أي عام ستتوقف مبيعات آلات التصوير العادية؟

مثل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحداً فاكتبه:

$$(٢٨) ٢ \text{ ص} = ٢, ١ - \text{س} - ١٠ \quad (٢٩) \text{ س} = \frac{3}{8} - ٦ - \text{ص}$$

$$\text{ص} = ٤, ٢ \text{ س} \quad ٤ = \text{ص} + \frac{2}{3} \text{ س} + \frac{1}{4}$$

٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة طرائق متنوعة لإيجاد نقطة تقاطع تمثيلي معادلتين خطيتين.

(أ) جبرياً: حُلّ المعادلة $\frac{1}{3} \text{ س} + ٣ = -\text{ص} + ١٢$ جبرياً.

(ب) تقنية: حل نظام المعادلتين: $\text{ص} = \frac{1}{3} \text{ س} + ٣$ ، $\text{ص} = -\text{س} + ١٢$ بيانياً، وتحقق من صحّة الحل باستخدام أحد البرامج الحاسوبية.

(ج) تحليلياً: ما علاقة المعادلة في الفرع (أ) والنظام في الفرع (ب)؟

(د) لفظياً: وضح كيف تستعمل التمثيل البياني في الفرع (ب) لحل المعادلة في الفرع (أ).



الربط مع الحياة

تتيح آلات التصوير الرقمية للمصورين فرصة مشاهدة الصورة وإمكانية معالجتها وتعديلها ونقلها إلى الحاسوب وطباعتها.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحُدُّ:** استعمل التمثيل البياني لحل النظام $٥ = ٣ص + ٢س$ ، $٥ = ٣ص + ٢س$ ، $٦ = ٤ص + ٣س$ ، $٤ = ٥ص + ٦س$.

(٣٢) **تبرير:** بيّن هل النظام الذي يتكون من معادلتين وتشكّل كل من النقطتين $(٠, ٠)$ ، $(٢, ٢)$ حلاً له، تكون له حلول أخرى أحياناً أم دائماً أم ليس له أي حلول أخرى.

(٣٣) أيّ من أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟ فسّر إجابتك:

$٥ = ٣ص - ٤س$ $١ = ٢ص + ٣س$	$٨ = ٤ص + ٣س$ $٦ = ٣ص - ٦س$	$١٤ = ٢ص + ٤س$ $١٨ = ٦ص + ١٢س$	$١ = ٢ص - ٣س$ $١٨ = ٣ص + ٢س$
--------------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث معادلات تشكّل مع المعادلة $٥ = ٣ص - ٤س$ أحد أنظمة المعادلات الآتية: غير متسق، متسق ومستقل، متسق وغير مستقل على الترتيب.

(٣٥) **اكتب:** صف مزايا ومساوئ استعمال التمثيل البياني لحل أنظمة المعادلات الخطية.

تدريب على اختبار

(٣٧) **هندسة:** قُصت قطعة من السلك طولها ٨٤ سنتيمتراً إلى قطع متساوية، ثم ألصقت من نهاياتها لتشكّل أحرف مكعب. فما حجم هذا المكعب؟

- (أ) ٢٩٤ سم^٣ (ب) ٣٤٣ سم^٣
(ج) ١١٥٨ سم^٣ (د) ٢٧٤٤ سم^٣

(٣٦) **إجابة قصيرة:** يمكن لأحد أنواع البكتيريا مضاعفة عدده كل ٢٠ دقيقة. فإذا كان عدد البكتيريا في الساعة ٠:٠٠ :٩ صباحاً ٤٥٠٠ ، فكم يصبح عند الساعة ١٢:٠٠ ظهراً؟

مراجعة تراكمية

الدرجة	الاختبار
٩١	١
٩٥	٢
٨٨	٣

(٣٨) **اختبار:** بيّن الجدول المجاور درجات هيثم في ٣ اختبارات للرياضيات، وبقي له اختبار رابع، وهو بحاجة إلى معدل لا يقل عن ٩٢ حتى يحصل على التقدير أ. (مهارة سابقة)

(أ) إذا كان م يمثل درجته في الاختبار الرابع، فاكتب المتباينة المثلثة لهذا الموقف.

(ب) إذا أراد هيثم الحصول على التقدير أ في الرياضيات، فكم يجب أن تكون درجته في الاختبار الرابع؟

(ج) هل إجابتك معقولة؟ فسّر ذلك.

(٣٩) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٣, -١)$ ، والمعامد للمستقيم $ص = \frac{١}{٣}س + ٢$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال مجموعة التعويض المعطاة:

$$(٤٠) ١٥(ن + ٦) = ١٦٥ ؛ \{٣, ٤, ٥, ٦, ٧\}$$

$$(٤١) \frac{٩-٢}{٣} = ٣٦ ؛ \{٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١\}$$

إذا كانت أ = ٢ ، ب = -٣ ، ج = ١١ ، فاحسب قيمة كل عبارة فيما يأتي:

$$(٤٤) (٢ج + أ٣) \div ٤$$

$$(٤٣) ٧ - أ$$

$$(٤٢) أ + ٦$$



حل نظام من معادلتين خطيتين

١-٥

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI - nspire لتمثيل نظام من معادلتين وحله.

نشاط ١ حل نظام من معادلتين خطيتين

حل النظام الآتي مقرباً إلى أقرب جزء من مئة:

$$٧,٤٨ = ص + ٥,٢٣$$

$$٢,١١ = ص - ٦,٤٢$$

الخطوة ١: حل كل معادلة بالنسبة للمتغير ص لإدخالها في الحاسبة.

$$٧,٤٨ = ص + ٥,٢٣$$

$$٧,٤٨ - ٥,٢٣ = ص + ٥,٢٣ - ٥,٢٣$$

$$٢,٢٥ = ص$$

$$٢,١١ = ص - ٦,٤٢$$

$$٢,١١ + ٦,٤٢ = ص - ٦,٤٢ + ٦,٤٢$$

$$٨,٥٣ = ص$$

$$(١-) = (ص-) (١-) = (١-) (٦,٤٢ - ٢,١١)$$

$$ص = ٦,٤٢ + ٢,١١ = ٨,٥٣$$

الخطوة ٢: مثل كلاً من المعادلتين بيانياً.

المعادلة الأولى

اطرح ٥,٢٣ من كلا الطرفين

بسّط

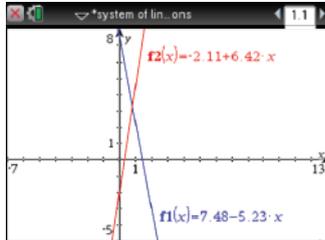
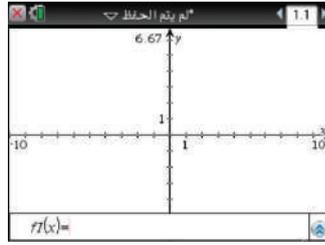
المعادلة الثانية

اطرح ٦,٤٢ من كلا الطرفين

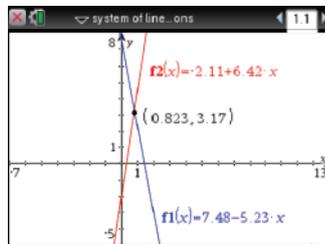
بسّط

اضرب كلا الطرفين في (-١)

بسّط



[−7, 13] scl: 1 by [−5, 8] scl: 1



[−7, 13] scl: 1 by [−5, 8] scl: 1

• افتح الآلة الحاسبة بالضغط على **on** ، ثم اختر من الشاشة **1** مستند جديد .

• اختر **2** إضافة تطبيق الرسوم البيانية فتظهر الشاشة المجاورة.

• اكتب المعادلة الأولى $f1(x) = 7.48 - 5.23x$

• ثم اضغط المفتاح **enter** فيظهر التمثيل البياني.

• اضغط المفتاح **tab** ثم اكتب المعادلة الثانية

• ليظهر التمثيل البياني المجاور. ثم اضغط **enter** ليظهر التمثيل البياني المجاور.

• أظهر الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة، بالضغط على مفتاح **menu** ومنها

اختر **4** تكبير/ تصغير النافذة **1** إعدادات النافذة ؛ لتحديد التدرج المناسب لكل من ص، ص.

الخطوة ٣: إيجاد نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

• استعمل ميزة نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

• اضغط **menu** واختر منها **6** تحليل الرسم البياني ثم **4** نقاط التقاطع ،

• وقم بالضغط على المستقيم الأول ثم المستقيم الثاني فتظهر لك نقطة التقاطع

(0.823, 3.17) التي هي حل النظام.

• وعليه يكون حل النظام إلى أقرب جزء من مئة هو (٣, ١٧, ٠, ٨٢) .

من الطرق التي يمكنك استعمالها لحل معادلة بمتغير واحد، تمثيل نظام المعادلتين الذي نكوّنه من تلك المعادلة، ثم حله. ولإجراء ذلك، اكتب نظاماً من المعادلات باستعمال طرفي المعادلة، ثم استعمال الحاسبة البيانية لحله.





حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

٢-٥



في إحدى السنوات أنتجت مزرعة ناصر ١٦ طنًا من التمور، بينما أنتجت مزرعة محمد ٢٠ طنًا. ثم بدأ إنتاج المزرعتين يتناقص سنويًا، فبلغ في السنة التالية ١٣ طنًا لمزرعة ناصر و ١٦ طنًا لمزرعة محمد.

فإذا استمر تناقص إنتاج كل من المزرعتين وفق المعدل نفسه، فمتى يتساوى الإنتاج السنوي للمزرعتين؟

الحل بالتعويض: يمكنك استعمال نظام مكون من معادلتين

لييجاد متى يتساوى إنتاج المزرعتين، وإحدى طرائق إيجاد الحل الدقيق لنظام المعادلات **التعويض**.

لماذا؟

فيما سبق

درست حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًا.

والآن

- أحل نظامًا مكونًا من معادلتين بالتعويض.
- أحل مسائل من واقع الحياة (تتضمن نظامًا من معادلتين) باستعمال التعويض.

المضردات

التعويض

مطويتك

الحل بالتعويض

مفهوم أساسي

- الخطوة ١:** حل إحدى المعادلتين على الأقل باستعمال أحد المتغيرين إذا كان ذلك ضروريًا.
- الخطوة ٢:** عوض المقدار الناتج من الخطوة (١) في المعادلة الثانية، ثم حلها.
- الخطوة ٣:** عوض القيمة الناتجة من الخطوة (٢) في أي من المعادلتين وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

حل نظام من معادلتين بالتعويض

مثال ١

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

$$\begin{aligned} \text{ص} = ٢س + ١ & \quad \text{الخطوة ١} \rightarrow \text{إحدى المعادلتين مكتوبة أساسًا بالنسبة إلى ص.} \\ \text{ص} + ٣س = ٩ & \end{aligned}$$

الخطوة ٢: عوض $٢س + ١$ بدلًا من $ص$ في المعادلة الثانية.

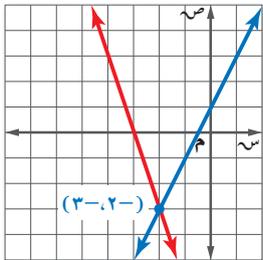
$$\begin{aligned} \text{المعادلة الثانية} & \quad ٩ = \text{ص} + ٣س \\ \text{عوض عن ص بـ } ٢س + ١ & \quad ٩ = ١ + ٣س \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & \quad ٩ = ١ + ٣س \\ \text{اطرح (١) من كلا الطرفين} & \quad ٨ = ٣س \\ \text{اقسم كلا الطرفين على ٣} & \quad ٢ = س \end{aligned}$$

الخطوة ٣: عوض ٢ بدلًا من $س$ في أي من المعادلتين لإيجاد قيمة $ص$.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} & \quad \text{ص} = ٢س + ١ \\ \text{عوض عن س بـ } (٢) & \quad \text{ص} = ٢(٢) + ١ \\ \text{بسط} & \quad \text{ص} = ٥ \end{aligned}$$

إذن الحل هو: $(٢, ٥)$.

تحقق من فهمك



$$\text{أ) ص} = ٤س - ٦$$

$$\text{ب) ص} = ٥س + ١$$

$$\text{أ) ص} = ٤س - ٦$$

$$\text{ب) ص} = ٥س + ١$$

إرشادات للدراسة

تحقق من صحة حلك

بعد إيجاد قيم المتغيرين، عوض بهما في كلتا المعادلتين للتحقق من صحة الحل.



وإذا لم يكن أحد المتغيرين مكتوباً وحده في طرف إحدى المعادلتين في النظام، فحل إحدى المعادلتين أولاً بالنسبة لهذا المتغير، ثم عوض لحل النظام.

مثال ٢ الحل ثم التعويض

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

$$س + ٢ص = ٦$$

$$٣س - ٤ص = ٢٨$$

الخطوة ١: حُلّ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير س لأن معامل س = ١.

$$س + ٢ص = ٦$$

المعادلة الأولى

$$س + ٢ص - ٢ص = ٦ - ٢ص$$

اطرح ٢ص من كلا الطرفين.

$$س = ٦ - ٢ص$$

بسّط

الخطوة ٢: عوض عن س بـ (٦-٢ص) في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة ص.

$$٣(٦ - ٢ص) - ٤ص = ٢٨$$

عوض عن س بـ (٦-٢ص)

خاصية التوزيع

$$١٨ - ٦ص - ٤ص = ٢٨$$

اجمع الحدود المشابهة

$$١٨ - ١٠ص = ٢٨$$

$$١٨ - ٢٨ = ١٠ص - ٢٨$$

اطرح ١٨ من كلا الطرفين

$$١٠ص = ١٠ - ١٨$$

بسّط

$$ص = ١ - ١٠$$

اقسم كلا الطرفين على ١٠-

الخطوة ٣: أوجد قيمة س بالتعويض في المعادلة الأولى.

$$س + ٢ص = ٦$$

المعادلة الأولى

$$س + ٢(-١) = ٦$$

عوض عن ص بـ (-١)

$$س = ٦ - ٢$$

بسّط

$$س = ٤$$

الحل هو (٤، ١)

تحقق من فهمك

$$٢(ب) س - ٣ص = ٩$$

$$١٢(أ) س + ٥ص = ١١$$

$$٧ = ٥ص - ٢$$

$$١٣ = ٣ص -$$

وبصورة عامة، إذا كانت نتيجة حل نظام من معادلتين جملة خطأ مثل $٣ = ٢$ ، فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، أما إذا كانت النتيجة متطابقة مثل $٣ = ٣$ فهناك عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٣ عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد للنظام حل

حل النظام الآتي مستعملاً التعويض:

$$ص = ٢س - ٤$$

$$٦س + ٣ص = ١٢$$

عوض عن ص بـ (٢س-٤) في المعادلة الثانية.

$$٦س + ٣(٢س - ٤) = ١٢$$

المعادلة الثانية

$$٦س + ٦س - ١٢ = ١٢$$

عوض عن ص بـ (٢س-٤)

خاصية التوزيع

$$١٢س - ١٢ = ١٢$$

اجمع الحدود المشابهة

$$١٢س = ٢٤$$

بما أن الجملة الناتجة تشكل متطابقة، لذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

إرشادات للدراسة

صيغة الميل والمقطع

إذا كُتبت كل من المعادلتين بصيغة الميل والمقطع (ص = م س + ب)، فيمكن مساواتهما معاً، ثم إيجاد قيمة س، وتعويضها لإيجاد قيمة ص.

إرشادات للدراسة

النظام غير المستقل

هناك عدد لا نهائي من الحلول للنظام في المثال ٣؛ لأنه عند كتابة المعادلتين بصيغة الميل والمقطع تكونان متكافئتين، ولهما التمثيل البياني نفسه.

تحقق من فهمك

حل كلاً من النظامين الآتيين مستعملًا التعويض.

$$\begin{aligned} \text{أ) } 2\text{س} - \text{ص} &= 8 & \text{ب) } 4\text{س} - 3\text{ص} &= 1 \\ \text{ص} &= 2 - 3 & \text{ص} &= 6 - 8 \end{aligned}$$

حل مسائل من واقع الحياة: يمكنك استعمال التعويض لحل مسألة من واقع الحياة تتضمن نظامًا من معادلتين.

مثال ٤ من واقع الحياة كتابة نظام من معادلتين وحله

أجهزة: باع متجر أجهزة تسجيل وسماعات عددها ١٢٥ جهازًا، بسعر ١٠٤,٩٥ ريالًا لجهاز التسجيل الواحد، و ١٨,٩٥ ريالًا للسماعة الواحدة، فإذا كان ثمن مبيعاته من هذه الأجهزة ٦٩٢٦,٧٥ ريالًا، فكم جهازًا باع من كل نوع؟

لتكن ج = عدد أجهزة التسجيل، ت = عدد السماعات.

عدد الوحدات المباعة	ج	ت
السعر	١٠٤,٩٥ ج	١٨,٩٥ ت
	١٢٥	٦٩٢٦,٧٥

فتكون المعادلتان هما: ج + ت = ١٢٥، ١٠٤,٩٥ ج + ١٨,٩٥ ت = ٦٩٢٦,٧٥.

الخطوة ١: حل المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير ج.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} & \quad \text{ج} + \text{ت} = 125 \\ \text{اطرح ت من كلا الطرفين} & \quad \text{ج} + \text{ت} - \text{ت} = 125 - \text{ت} \\ \text{بسط} & \quad \text{ج} = 125 - \text{ت} \end{aligned}$$

الخطوة ٢: عوض عن ج بـ (١٢٥ - ت) في المعادلة الثانية.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الثانية} & \quad 6926,75 = 104,95\text{ج} + 18,95\text{ت} \\ \text{عوض عن ج بـ (125 - ت)} & \quad 6926,75 = 104,95(125 - \text{ت}) + 18,95\text{ت} \\ \text{خاصية التوزيع} & \quad 6926,75 = 13118,75 - 104,95\text{ت} + 18,95\text{ت} \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & \quad 6926,75 = 13118,75 - 86\text{ت} \\ \text{اطرح 13118,75 من كلا الطرفين} & \quad 6192 = -86\text{ت} \\ \text{اقسم كلا الطرفين على -86} & \quad 72 = \text{ت} \end{aligned}$$

الخطوة ٣: عوض عن ت بـ (٧٢) في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ج.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأولى} & \quad \text{ج} + \text{ت} = 125 \\ \text{عوض عن ت بـ (72)} & \quad \text{ج} + 72 = 125 \\ \text{اطرح 72 من كلا الطرفين} & \quad \text{ج} = 53 \end{aligned}$$

إذن باع المتجر ٥٣ جهاز تسجيل، ٧٢ سماعة.

تحقق من فهمك

٤) رياضة: مجموع النقاط التي سجلها فريقان في إحدى مباريات كرة اليد ٣١ نقطة. فإذا كان عدد نقاط الفريق الأول يساوي ٥,٢ أمثال عدد نقاط الفريق الثاني، فما عدد نقاط كل فريق؟

الأمثلة ١ - ٣

حل كلاً من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

$$\begin{array}{l} (١) \text{ س} = \text{ص} - ٢ \\ (٢) \text{ س} + ٢ = ٣ + \text{ص} \\ (٣) \text{ س} - \text{ص} = ١ \\ (٤) \text{ س} + ٤ = ٦ + \text{ص} \\ (٥) \text{ س} + ٣ = ٩ + \text{ص} \\ (٦) \text{ س} - ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٧) \text{ س} - ٣ = ٢ - \text{ص} \\ (٨) \text{ س} + ٤ = ٨ + \text{ص} \\ (٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (١٠) \text{ س} - ٢ = ١ - \text{ص} \\ (١١) \text{ س} = \text{ص} - ١ \\ (١٢) \text{ س} - ٤ = ١١ + \text{ص} \\ (١٣) \text{ س} - ٣ = ١ + \text{ص} \\ (١٤) \text{ س} + ٣ = ٥ - \text{ص} \\ (١٥) \text{ س} - ٥ = ٥ + \text{ص} \\ (١٦) \text{ س} - ٥ = ٤ + \text{ص} \\ (١٧) \text{ س} + ٢ = ١٠ + \text{ص} \\ (١٨) \text{ س} + ٢ = ٣ + \text{ص} \\ (١٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٢٠) \text{ س} + ٤ = ٨ + \text{ص} \\ (٢١) \text{ س} + ٣ = ٩ + \text{ص} \\ (٢٢) \text{ س} - ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٢٣) \text{ س} - ٤ = ١١ + \text{ص} \\ (٢٤) \text{ س} - ٣ = ١ + \text{ص} \\ (٢٥) \text{ س} + ٣ = ٥ - \text{ص} \\ (٢٦) \text{ س} - ٥ = ٥ + \text{ص} \\ (٢٧) \text{ س} + ٢ = ١٠ + \text{ص} \\ (٢٨) \text{ س} + ٢ = ٣ + \text{ص} \\ (٢٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٣٠) \text{ س} + ٤ = ٨ + \text{ص} \end{array}$$

مثال ٤

(٤) **هندسة:** إذا كان مجموع قياسي الزاويتين س، ص يساوي ١٨٠°، وقياس الزاوية س يزيد بمقدار ٢٤° على قياس الزاوية ص، فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

(ب) أوجد قياس كل زاوية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حل كلاً من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

$$\begin{array}{l} (٥) \text{ ص} = ٤ + \text{س} \\ (٦) \text{ ص} = ٣ - ٣٤ \\ (٧) \text{ ص} = ٣ - ٢ \\ (٨) \text{ س} + ٢ = ٣ \\ (٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (١٠) \text{ س} - ٢ = ١ - \text{ص} \\ (١١) \text{ س} = \text{ص} - ١ \\ (١٢) \text{ ص} = ٤ - ١١ + \text{س} \\ (١٣) \text{ ص} = ٣ - ١ + \text{س} \\ (١٤) \text{ س} + ٣ = ٥ - \text{ص} \\ (١٥) \text{ س} - ٥ = ٥ + \text{ص} \\ (١٦) \text{ س} - ٥ = ٤ + \text{ص} \\ (١٧) \text{ س} + ٢ = ١٠ + \text{ص} \\ (١٨) \text{ س} + ٢ = ٣ + \text{ص} \\ (١٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٢٠) \text{ س} + ٤ = ٨ + \text{ص} \\ (٢١) \text{ س} + ٣ = ٩ + \text{ص} \\ (٢٢) \text{ س} - ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٢٣) \text{ س} - ٤ = ١١ + \text{ص} \\ (٢٤) \text{ س} - ٣ = ١ + \text{ص} \\ (٢٥) \text{ س} + ٣ = ٥ - \text{ص} \\ (٢٦) \text{ س} - ٥ = ٥ + \text{ص} \\ (٢٧) \text{ س} + ٢ = ١٠ + \text{ص} \\ (٢٨) \text{ س} + ٢ = ٣ + \text{ص} \\ (٢٩) \text{ س} + ٣ = ٤ + \text{ص} \\ (٣٠) \text{ س} + ٤ = ٨ + \text{ص} \end{array}$$



الربط مع الحياة

السياحة في بلادنا متنفس في الإجازات للأسر والوافدين والسياح؛ لما حبا الله به البلاد من مظاهر طبيعية وأثار تاريخية، تمنح زائريها الراحة والتوازن الذهني والجسماني.

مثال ٤

(١٧) **سياحة:** بيّن الجدول أدناه العدد التقريبي لزوار منطقتين سياحيتين في المملكة خلال عام ١٤٣٥ هـ، ومعدل التغير بالآلاف خلال السنة الواحدة:

المنطقة	عدد الزوّار	معدل التغير (بالآلاف في السنة الواحدة)
أ	٤٠,٣ ألفاً	زيادة ٠,٨
ب	١٧,٠ ألفاً	زيادة ١,٨

(أ) عرّف المتغيرات، وكتب معادلة تمثل عدد زوار كل منطقة.

(ب) إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه، فبعد كم سنة تتوقع أن يصبح عدد الزوّار متساويًا في المنطقتين؟

اللاعب ب	اللاعب أ	العام
١:٥٤:٤٣	١:٥١:٣٩	١٤٢٥هـ
١:٥٨:٠٣	١:٤٩:٣١	١٤٣٠هـ

١٨) **رياضة:** يبين الجدول المجاور الزمن المسجل للاعبين في سباقات الماراثون خلال عامي ١٤٢٥هـ، ١٤٣٠هـ.

أ) إذا سجل الزمن لكل منهما بالساعات والدقائق والثواني، فأعد كتابته إلى أقرب دقيقة.

ب) إذا اعتبرنا العام ١٤٢٥هـ صفرًا، وافترضنا ثبات معدل التغير بعد عام ١٤٢٥هـ، فاكتب معادلة تمثل الزمن المسجل (ص) لكلا اللاعبين في أي عام (س).

ج) إذا استمر التغير في الاتجاه نفسه، فهل يسجلان الزمن نفسه؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٩) **تحذّر:** كان عدد المتطوعين في العمل الخيري في إحدى القرى ٦٠ متطوعًا، فإذا كانت نسبة الرجال إلى النساء ٧:٥، فأوجد عدد كل من الرجال والنساء المتطوعين.

٢٠) **تبرير:** قارن بين حل نظام من معادلتين بكل من: طريقة التمثيل البياني، وطريقة التعويض.

٢١) **مسألة مفتوحة:** أنشئ نظامًا من معادلتين له حل واحد، ووضح كيف يمكن أن يعبر عن مسألة من واقع الحياة، وصف دلالاته.

٢٢) **اكتب:** وضح كيف تحدد الأفضل تعويضًا عند استعمال طريقة التعويض لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

٢٤) ما مجموعة حل المعادلة: $2|f| = 16$ ، إذا كان ف عددًا صحيحًا؟

أ) $\{8, 0\}$ ب) $\{0, 8\}$
ج) $\{8, 8\}$ د) $\{8, 0, 8\}$

٢٣) أي الأنظمة الآتية له حل واحد؟

أ) $\begin{cases} 3s - 4 = v \\ 6s - 2 = v \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2s - 8 = v \\ 8 = s + v \end{cases}$
ج) $\begin{cases} 5s + 1 = v \\ 4s + v = 10 \end{cases}$ د) $\begin{cases} 1 = s + v \\ v = 3 - s \end{cases}$

مراجعة تراكمية

مثّل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًا، ثم حدد ما إذا كان له حل واحد أم عدد لا نهائي من الحلول أم ليس له حل، وإن كان له حل واحد فاكتبه: (الدرس ٥-١)

٢٥) $s = 1$ ٢٦) $v = s + 5$ ٢٧) $s + v = 1$
٢٨) $v = 7 - s$ ٢٩) $v = s - 2$ ٣٠) $3v + 3s = 3$

حلّ كل متباينة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٢٨) $1 + f \leq 11$ ٢٩) $24 < 18 + 2n$ ٣٠) $11 - \frac{2}{5} \leq f + 5$

٣١) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ٦)، (١، ١). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلاً من العبارات التالية بعد استعمال خاصية التوزيع:

٣٢) $10b + (3 + 9b)$ ٣٣) $5(3 + 2) - 8n$ ٣٤) $2(-17 + 5b) + 5(2 - 7b)$

٢٤) الفصل ٥: أنظمة المعادلات الخطية



حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال

٣-٥

الجمع أو الطرح

لماذا؟

يزيد عدد الأشهر (أ) التي ترتفع فيها درجة الحرارة العظمى في مدينة الرياض على ٣٠ س بمقدار شهرين على عدد الأشهر (ب) التي تنخفض فيها عن ٣٠ س. ويمثل النظام الآتي هذا الموقف:

$$أ + ب = ١٢$$

$$أ - ب = ٢$$



الحذف باستعمال الجمع: إذا جمعت هاتين المعادلتين فسوف يتم حذف المتغير (ب)، وتُسمى طريقة الجمع أو الطرح في حل النظام **الحذف**.

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض.

والآن

■ أحل نظاماً من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالجمع.

■ أحل نظاماً من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالطرح.

المضردات

الحذف

أضف إلى

مطويتك

الحل بالحذف

مفهوم أساسي

- الخطوة ١:** اكتب النظام على أن يكون الحدان المتشابهان اللذان معامل أحدهما معكوس للآخر أو مساوٍ له بعضهما فوق بعض.
- الخطوة ٢:** اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.
- الخطوة ٣:** عوض القيمة الناتجة في الخطوة ٢ في إحدى المعادلتين وحلها لإيجاد المتغير الثاني، واكتب الحل كزوج مرتب.

الحذف باستعمال الجمع

مثال ١

استعمل الحذف لحل النظام:

$$٤س + ٦ص = ٣٢$$

$$٣س - ٦ص = ٣ \quad \leftarrow \text{الخطوة ١: كلا معاملي ٦ ص، -٦ ص معكوس للآخر}$$

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين.

$$٤س + ٦ص = ٣٢$$

$$٣س - ٦ص = ٣ \quad (+)$$

$$٣٥ = ٧س$$

$$\frac{٣٥}{٧} = \frac{٧س}{٧}$$

$$٥ = س$$

حذف المتغير ص.

اقسم كلا الطرفين على ٧.

بسّط.

الخطوة ٣: عوض عن س بـ ٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

$$٤س + ٦ص = ٣٢ \quad \text{المعادلة الأولى}$$

$$٤(٥) + ٦ص = ٣٢ \quad \text{عوض عن س بـ ٥}$$

$$٢٠ + ٦ص = ٣٢ \quad \text{اضرب}$$

$$٢٠ + ٦ص - ٢٠ = ٣٢ - ٢٠ \quad \text{اطرح ٢٠ من كلا الطرفين}$$

$$٦ص = ١٢ \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{٦ص}{٦} = \frac{١٢}{٦} \quad \text{اقسم كلا الطرفين على ٦}$$

$$ص = ٢$$

إذن الحل هو (٥، ٢).

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad ٣ - = ٣ + ص \quad ٣ - = ٣ + ص$$

$$(ب) \quad ٣ + ص = ٣ + ص \quad ٣ - = ٣ + ص$$

$$٣ - = ٣ + ص \quad ٣ - = ٣ + ص$$

$$٣ - = ٣ + ص \quad ٣ - = ٣ + ص$$

يمكنك استعمال طريقة الحذف لإيجاد عددين محددين يرتبطان معًا بعلاقة.

مثال ٢ كتابة نظام من معادلتين وحله

عدنان، سالب ثلاثة أمثال الأول مضافًا إليه خمسة أمثال الثاني يساوي -١١، وثلاثة أمثال الأول مضافًا إليه سبعة أمثال الثاني يساوي -١. فما العدنان؟

$$\begin{aligned} & \text{سالب ثلاثة أمثال العدد الأول} \quad \text{زائد} \quad \text{خمسة أمثال العدد الثاني} \quad \text{يساوي} \quad -١١ \\ & ٣- \text{ص} + ٥ \text{ص} = -١١ \\ & \text{ثلاثة أمثال العدد الأول} \quad \text{زائد} \quad \text{سبعة أمثال العدد الثاني} \quad \text{يساوي} \quad -١ \\ & ٣ \text{ص} + ٧ \text{ص} = -١ \end{aligned}$$

الخطوات ١، ٢: اكتب المعادلتين رأسياً، ثم اجمعهما.

$$\begin{aligned} & ٣- \text{ص} + ٥ \text{ص} = -١١ \\ & (+) \quad ٣ \text{ص} + ٧ \text{ص} = -١ \\ \hline & ١٢- \text{ص} = -١٢ \\ & \text{اقسم كلا الطرفين على ١٢} \quad \frac{١٢- \text{ص}}{١٢} = \frac{-١٢}{١٢} \\ & \text{بسط} \quad ١- = \text{ص} \end{aligned}$$

الخطوة ٣: عوض عن ص ب -١ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

$$\begin{aligned} & \text{المعادلة الثانية} \quad ١- = ٣ + ٧ \text{ص} \\ & \text{عوض عن ص ب -١} \quad ١- = ٣ + (٧-١) \\ & \text{بسط} \quad ١- = ٣ + (٧-) \\ & ٣ + ١- = ٧ + (٧-) + ١- \quad \text{أضف ٧ إلى كلا الطرفين.} \\ & \text{بسط} \quad ٦ = ٣ \text{ص} \\ & \text{اقسم كلا الطرفين على ٣} \quad \frac{٦}{٣} = \frac{٣ \text{ص}}{٣} \\ & \text{بسط} \quad ٢ = \text{ص} \end{aligned}$$

العدنان هما ٢، -١.

تحقق:

$$\begin{aligned} & \text{المعادلة الأولى} \quad ١١- = ٣- \text{ص} + ٥ \text{ص} \\ & \text{عوض عن ص ب ٢، وعن ص ب -١} \quad ١١- = ٣- (٢) + ٥ (٢) \\ & \text{بسط} \quad ١١- = ١١- \\ & \text{المعادلة الثانية} \quad ١- = ٣ + ٧ \text{ص} \\ & \text{عوض عن ص ب ٢، وعن ص ب -١} \quad ١- = ٣ + (٧)٢ \\ & \text{بسط} \quad ١- = ١- \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

(٢) أوجد العددين اللذين مجموعهما يساوي -١٠، وسالب ثلاثة أمثال العدد الأول ناقص العدد الثاني يساوي ٢.

قراءة الرياضيات

الحذف: إذا أدى جمع أو طرح معادلتين إلى أن يكون ناتج معاملي أحد المتغيرين صفراً، يقال عندئذٍ إنه تم حذف هذا المتغير.

إرشادات للدراسة

معاملات:

عندما يتساوى معاملتا متغير، يؤدي طرح المعادلتين إلى حذفه، وعندما يكون أحد المعاملين معكوساً للآخر، يؤدي جمع المعادلتين إلى حذفه أيضاً.

الحذف باستعمال الطرح: يمكنك أحياناً حذف متغير بطرح معادلة من أخرى.

الحذف باستعمال الطرح

مثال ٣ من اختبار

حل النظام:

$$\begin{aligned} 6 &= 2 + 5r \\ 22 &= 2 + 9r \end{aligned}$$

(أ) $(15, 7-)$ (ب) $(\frac{8}{9}, 7)$ (ج) $(7-, 4)$ (د) $(\frac{2}{5}, 4)$

اقرأ الفقرة:

بما أن كلتا المعادلتين تشتمل على ٢ ت، فيمكن حل النظام بالحذف باستعمال الطرح.

حل الفقرة:

الخطوة ١: اطرح المعادلتين.

اكتب نظام المعادلتين على أن تكون الحدود

$$6 = 2 + 5r$$

المتشابهة بعضها تحت بعض.

$$22 = 2 + 9r \quad (-)$$

حذف المتغيرات

$$16 = -4r$$

بسّط

$$4 = r$$

الخطوة ٢: عوض عن ر ب ٤ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ت.

المعادلة الأولى

$$6 = 2 + 5r$$

ر = ٤

$$6 = 2 + (4) 5$$

بسّط

$$6 = 2 + 20$$

اطرح ٢٠ من كلا الطرفين

$$20 - 6 = 20 - 2$$

بسّط

$$14 = 2$$

بسّط

$$7 = 1$$

فيكون الحل $(7-, 4)$ ، والإجابة الصحيحة هي ج.

تحقق من فهمك

حل النظام: (٣)

$$11 = 3 + 8b$$

$$7 = 7 + 8b$$

(أ) $(1-, 5)$ (ب) $(1-, 75)$ (ج) $(1, 1, 75)$ (د) $(1, 1, 5)$



الربط مع الحياة

اهتم الإسلام بالعمل اليدوي المهني والتقني، فمارسه الرسول ﷺ والصحابه والتابعون بوصفه وسيلة إنتاجية وقيمة مهمة تؤدي إلى تطور البلاد وبناء حياة الإنسان والمجتمع.

كتابة نظام من المعادلات وحله

مثال ٤ من واقع الحياة



وظائف: يعمل كل من عبدالعزيز وعبدالرحمن في متجر، فيحصل عبدالعزيز على ٥، ٨ ريالاً في الساعة، وعبدالرحمن على ٥، ٧ ريالاً في الساعة، وبلغ مجموع ما حصلوا عليه خلال يومين ٥، ٢٩٩ ريالاً، وفي اليومين التاليين ضاعف عبدالرحمن عدد ساعات عمله فحصل على ٤١٢ ريالاً، فما عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين؟

افهم: أنت تعلم مقدار ما يحصل عليه كل منهما في الساعة ومجموع ما حصلوا عليه معاً.

نريد معرفة عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين.

يمكنك ضرب إحدى المعادلتين في (-)، ثم جمع المعادلتين بدلاً من طرحهما.

خطط: افترض أن ج = عدد ساعات عمل عبدالعزيز، د = عدد ساعات عمل عبدالرحمن.

أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٢٩٩,٥ ريالاً
٨,٥ جـ	+	٧,٥ د	=	٢٩٩,٥
أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٤١٢ ريالاً
٨,٥ جـ	+	٧,٥ (٢) د	=	٤١٢

حل: اطرح المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة الناتجة في المتغير الآخر.

$$\begin{aligned} 299,5 &= 8,5ج + 7,5د \\ 412 &= 8,5ج + 14,0د \end{aligned}$$

$$299,5 = 8,5ج + 7,5د$$

بسط.

اطرح لحذف المتغير جـ.

اقسم كلا الطرفين على -٧,٥.

بسط.

$$15 = د$$

والآن عوض عن د بـ ١٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة جـ.

$$299,5 = 8,5ج + 7,5(15)$$

$$299,5 = 8,5ج + 112,5$$

بسط

$$187 = 8,5ج$$

اطرح ١١٢,٥ من كلا الطرفين

$$187 = 8,5ج$$

اقسم كلا الطرفين على ٨,٥

$$22 = ج$$

تحقق: عوض كلا المتغيرين في المعادلة الأخرى للتأكد من صحة الحل.

$$412 = 8,5(22) + 7,5(15)$$

وعليه ففي اليومين الأولين عمل عبدالعزيز ٢٢ ساعة، وعبدالرحمن ١٥ ساعة.

تحقق من فهمك

٤) **حفلات:** أقام مسفر ومحمود حفلاً بمناسبة نجاحهما، فإذا كان عدد الأصدقاء الذين دعاهم مسفر يقل بـ ٥ عن الذين دعاهم محمود، وكان مجموع الأصدقاء المدعوين ٤٧، فكم شخصاً دعا كل منهما؟

تأكد

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف:

المثالان ٣، ١

$$\begin{aligned} (1) \quad 5م - 7ب &= 38 \\ (2) \quad 8س + 5ص &= 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad 7ف + 3ج &= 6 \\ (4) \quad 8س - 2ص &= 4 \end{aligned}$$

٤) ما العددين اللذان مجموعهما ٢٤، وخمسة أمثال الأول ناقص الثاني يساوي ١٢؟

مثال ٢

٥) **طلاب:** يزيد عدد طلاب المرحلة الابتدائية في مدينة ما على عدد طلاب المرحلة المتوسطة بـ ١٨ ألف طالب. فإذا علمت أن عدد الطلاب في المرحلتين ٤٤ ألف طالب، فما عدد الطلاب في كل مرحلة؟

مثال ٤

المثالان ٣، ١

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$(٦) \quad \begin{cases} ٧ = ف + و \\ ٧ = ص + ز = \xi \end{cases} \quad (٨) \quad \begin{cases} ١٧ = ص + ٥ \\ -٤ = ص + ٤ \end{cases}$$

$$ف + و = ١ \quad ص - ز = ٨ \quad ٤ = ص + ٦ = -٦$$

$$(٩) \quad \begin{cases} ٤ = -أ + ب \\ ١٠ = ٩س + ٦ص = ٧٨ \end{cases} \quad (١١) \quad \begin{cases} ١ = ٢ص - ٦س \\ ١٠ = ٢ص - ١٠س \end{cases}$$

$$أ + ١٠ = ب = -١٦ \quad ٣س - ٦ص = -٣٠ \quad ١٠س - ٢ص = ٥$$

(١٢) مثال ٢ ما العددان اللذان مجموعهما ٢٢ والفرق بينهما ١٢؟

(١٣) ما العددان اللذان مجموعهما ١١، وثلاثة أمثال أحدهما ناقص الآخر يساوي -٣؟

(١٤) مثال ٤ شحن سيارات: يمثل الجدول أدناه تكاليف شحن عدد من السيارات الصغيرة والكبيرة من مدينة إلى مدينة أخرى. أوجد أجرة شحن كل من السيارة الصغيرة والكبيرة.

الأجرة الكلية (ريال)	عدد السيارات الكبيرة	عدد السيارات الصغيرة
٣٨٠٠	٥	٢
٢٦٠٠	٣	٢

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

$$(١٥) \quad \begin{cases} ٨ = (٢ص + س) \\ ٤ = ٣ص + ٤س = ٦ \end{cases} \quad (١٦) \quad \begin{cases} ١ = ٣ص + ٤س \\ ٢ = ٤ص + ٣س \end{cases}$$

$$٤س + ٤ص = ١٢ \quad ١س - ٢ص = ٦ \quad ٣س + ٣ص = ٧$$

(١٨) فن العمارة: يبلغ مجموع ارتفاعي برجي المملكة والفيصلية معاً ٥٦٧ مترًا، ويزيد ارتفاع برج المملكة على برج الفيصلية بـ ٣٣ مترًا.

(أ) ما ارتفاع برج المملكة؟

(ب) ما ارتفاع برج الفيصلية؟



الربط مع الحياة

افتُتح مهرجان جازان الشتوي الأول الذي تنظمه لجنة التنشيط السياحي بالمنطقة في عام ١٤٢٧ هـ، ويشتمل على ألعاب ترفيهية وعروض ومسابقات فنية ورياضية.

(١٩) سباق الدرجات: شارك ٨٠ متسابقًا في سباق الدراجات الهوائية ضمن ملتقى روائع جازان الرابع من فئتي الكبار والصغار. وكان عدد المشاركين من فئة الصغار أكثر من عدد المشاركين من فئة الكبار بـ ١٠.

(أ) افترض أن س يمثل عدد المشاركين في فئة الصغار، ص يمثل عدد المشاركين في فئة الكبار. ثم اكتب نظامًا من معادلتين يمثل هذا الموقف.

(ب) استعمل الحذف لحل هذا النظام.

(ج) فسّر الحل في سياق هذا الموقف.

(د) مثل هذا النظام بيانًا للتأكد من صحة الحل.



(٢٠) تمثيلات متعددة: لديك ٩ قطع نقد، ٩ مشابك ورق، استعمل ٩ منها على الأكثر لإنشاء عدد معين من النقاط، وافترض أن كل مشبك قيمته نقطة واحدة وكل قطعة نقد قيمتها ٣ نقاط، وأن ن تمثل قطعة نقد، م تمثل مشبك ورق. فمثلاً:

$$2ن + 3م = 2 \times 50 + 3 \times 9 = 9 \text{ نقاط}$$

(أ) حسيًا: كيف يمكنك أن تحصل على ١٥ نقطة مستعملًا كلا النوعين؟ قارن النمط الذي حصلت عليه بما حصل عليه زملاؤك.

(ب) تحليليًا: مستعملًا ٩ قطع، اكتب نظامًا من معادلتين وحله لإيجاد عدد مشابك الورق وقطع النقد اللازمة للحصول على ١٥ نقطة.

(ج) جدولياً: أنشئ جدولاً يبين عدد مشابك الورق المستعملة والعدد الكلي للنقاط إذا كان عدد قطع النقد ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥.

(د) لفظياً: هل تتطابق النتيجة في الجدول مع نتيجة (الإجابة عن الفرع ب)؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢١) مسألة مفتوحة: أنشئ نظامًا من معادلتين يمكن حله بحذف أحد متغيريه باستعمال الجمع، ثم اكتب قاعدة عامة لإنشاء مثل هذه الأنظمة.

(٢٢) تبرير: إذا كانت النقطة $(-3, 2)$ تمثل حل نظام معادلتين، وكانت إحدى معادلتيه هي $س + ٤ص = ٥$ ، فأوجد المعادلة الثانية لهذا النظام، وفسّر كيف توصلت إليها.

(٢٣) تحدّد: إذا كان ناتج ضرب عدد في ٧ يساوي ١٨٢، ومجموع رقميه يساوي ٨، فحدد المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين يمكنك استعماله لإيجاد هذا العدد، ثم حل النظام وأوجد العدد.

(٢٤) اكتب: بيّن متى يكون من المفيد استعمال الحذف لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

(٢٦) ما حل نظام المعادلتين الآتيتين؟

$$\begin{aligned} س + ٤ص &= ١ \\ ٢س - ٣ص &= -٩ \end{aligned}$$

(أ) $(١, ٠)$ (ج) ليس له حل

(ب) $(-٣, ١)$ (د) يوجد عدد لانتهائي من الحلول

(٢٥) إذا استمر النمط الآتي، فما العدد الثامن؟

$$٢, ٣, ٤, \frac{٩}{٢}, \frac{٢٧}{٤}, \frac{٨١}{٨}, \dots$$

(أ) $\frac{٢١٨٧}{٦٤}$ (ج) $\frac{٢٢٨١}{٦٤}$

(ب) $\frac{٢٢٤٥}{٦٤}$ (د) $\frac{٢٤٤٥}{٦٤}$



مراجعة تراكمية

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً التعويض، وبيّن ما إذا كان للنظام حل واحد، أم عدد لا نهائي من الحلول، أم ليس له حل: (الدرس ٥-٢)

$$٢٩) \text{ س } = ٥\text{ص} + ٦$$

$$٢٨) \text{ س } = ٣\text{ص}$$

$$٢٧) \text{ ص } = ٦\text{س}$$

$$\text{س} = ٥\text{ص} - ٢$$

$$٤٥ = ٣\text{ص} + ٢$$

$$٤٠ = ٣\text{ص} + ٢$$

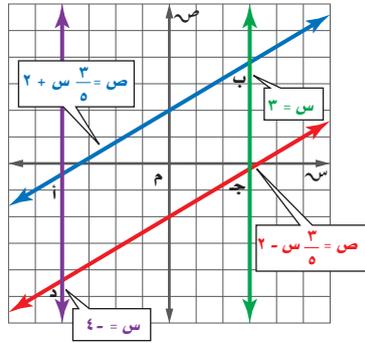
٣٠) **توفير:** يرغب كل من وائل ورياض في شراء دراجة، وقد وفرّ وائل حتى الآن ٣٥ ريالاً ويخطط لتوفير ١٠ ريالات كل أسبوع.

أما رياض فلديه الآن ٢٦ ريالاً ويخطط لتوفير ١٣ ريالاً في الأسبوع. (الدرس ٥-١)

أ) بعد كم أسبوع يصبح مجموع ما وفره كل منهما متساوياً؟

ب) ما مقدار ما يوفره كل منهما حتى ذلك الوقت؟

٣١) **هندسة:** بيّن ما إذا كان الشكل أ ب ج د متوازي أضلاع أم لا؟ وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)



حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

$$٣٣) ٨ = \frac{٢}{٣}أ$$

$$٣٢) ٤٨ - = ٦ج$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلاً من العبارات الآتية:

$$٣٥) ٧س - ٩س + ٤س$$

$$٣٤) ١ + ٧ب + ٣ - ٦ج$$

$$٣٧) ٥ص - ٧(ص + ٥)$$

$$٣٦) ١٠(ر + ٢) + ٣ر$$



١٣) **حديقة الحيوان:** الجدول الآتي يبيِّن، تكلفة دخول عائلتين لحديقة الحيوان في إحدى المدن. (الدرسان ٢-٥، ٣-٥)

العائلة	المجموعة	التكلفة الإجمالية
أ	٤ كبار وطفلان	١٨٤ ريالاً
ب	٤ كبار و٣ أطفال	٢٠٠ ريال

أ) عرّف المتغيرات التي تمثل ثمن التذكرة للكبار و ثمن التذكرة للأطفال.

ب) اكتب نظاماً من معادلتين لإيجاد ثمن كلٍّ من تذرتي الكبار والأطفال.

ج) حل النظام، ووضح ماذا يعني الحل.

د) ما تكلفة دخول مجموعة مكونة من ٣ كبار و ٥ أطفال لحديقة الحيوان؟

١٤) **اختيار من متعدد:** تريد أسماء شراء ١٢ قطعة من الشوكولاتة والمصاص؛ إذا كان مع أسماء ١٦ ريالاً، وكان ثمن قطعة الشوكولاتة ريالين، و ثمن قطعة المصاص ريالاً، فكم قطعة من كل نوع ستشتري؟ (الدرسان ٢-٥، ٣-٥)

أ) ٦ قطع شوكولاتة، ٦ قطع مصاص.

ب) ٤ قطع شوكولاتة، ٨ قطع مصاص.

ج) ٧ قطع شوكولاتة، ٥ قطع مصاص.

د) ٣ قطع شوكولاتة، ٩ قطع مصاص.

حلّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف: (الدرس ٣-٥)

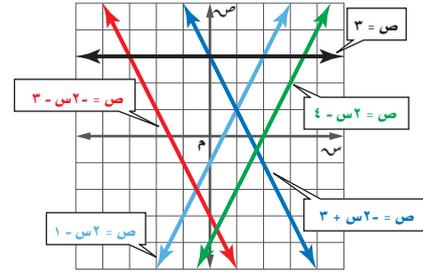
$$(١٥) \begin{cases} ٩ = س + ص \\ ٣ = س - ص \end{cases}$$

$$(١٦) \begin{cases} ١١ = س + ٣ص \\ ١٩ = س + ٧ص \end{cases}$$

$$(١٧) \begin{cases} ٦ = س - ٩ص \\ ١٠ = س + ٣ص \end{cases}$$

$$(١٨) \begin{cases} ١١ = س + ٥ص \\ ١ = س - ٧ص \end{cases}$$

مستعملاً التمثيل البياني أدناه، حدد خصائص كل نظام فيما يأتي من حيث كونه متسقاً أم غير متسق، ومستقلاً أم غير مستقل: (الدرس ١-٥)



$$(٢) \begin{cases} ٣ + س = ٢ص \\ ٣ - س = ٢ص \end{cases}$$

$$(٣) \begin{cases} ٣ + س = ٢ص \\ ٣ - س = ٢ص \end{cases}$$

$$(١) \begin{cases} ٣ + س = ٢ص \\ ١ - س = ٢ص \end{cases}$$

$$(٤) \begin{cases} ٣ + س = ٢ص \\ ٤ + س = ٢ص \end{cases}$$

مثّل كل نظام فيما يأتي بيانياً، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحداً

فاكتبه: (الدرس ١-٥)

$$(٤) \begin{cases} ٦ = س + ص \\ ٤ = س - ص \end{cases}$$

$$(٥) \begin{cases} ٨ = س + ص \\ ٢٤ = س + ٣ص \end{cases}$$

$$(٦) \begin{cases} ٦ = س - ٤ص \\ ١ = س - ص \end{cases}$$

$$(٧) \begin{cases} ١٢ = س + ٢ص \\ ٦ = س + ٢ص \end{cases}$$

$$(٨) \begin{cases} ٤ = س + ٢ص \\ ٦ = س + ٣ص \end{cases}$$

$$(٩) \begin{cases} ٤ + س = ٣ص \\ ١٦ = س + ٢ص \end{cases}$$

حلّ كلاً من الأنظمة الآتية مستعملاً التعويض: (الدرس ٢-٥)

$$(١٠) \begin{cases} ٣ - س = ٢ص \\ ٩ = س + ص \end{cases}$$

$$(١١) \begin{cases} ١٢ = س - ٤ص \\ ٦ = س + ٢ص \end{cases}$$

$$(١٢) \begin{cases} ٣٠ = س - ٦ص \\ ٨ = س - ٣ص \end{cases}$$

$$(١٣) \begin{cases} ٣٠ = س - ٦ص \\ ٨ = س - ٣ص \end{cases}$$





حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب



لماذا؟

باعت مكتبة ٧٠ قلمًا بمبلغ ٢٦٠ ريالاً. وبناءً على القائمة أدناه يمكن كتابة المعادلتين الآتيتين لإيجاد عدد الأقلام المباعة من كل نوع:

قلم حبر	٤ ريالات
قلم رصاص	ريالان

$$س + ص = ٧٠$$

$$٤س + ٢ص = ٢٦٠$$

الحذف باستعمال الضرب: لا يمكن حذف أي من المتغيرين بالجمع أو الطرح في النظام أعلاه، إلا أنه يمكن حذف أحد المتغيرين باستعمال الضرب في مثل هذه الحالة.

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح.

والآن

- أحل نظاماً من معادلتين بالحذف باستعمال الضرب.
- أحل مسائل من واقع الحياة تتضمن أنظمة من معادلتين.

أضف إلى

محتوياتك

الحل بالحذف

مفهوم أساسي

الخطوة ١: اضرب إحدى المعادلتين على الأقل في عددٍ ثابت للحصول على معادلتين فيهما حدان أحدهما معكوس للآخر.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوض عن قيمة المتغير الناتجة في الخطوة (٢) في إحدى المعادلتين، وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

ضرب معادلة لحذف أحد المتغيرين

مثال ١

استعمل الحذف لحل النظام:

$$٥س + ٦ص = ٨-$$

$$٢س + ٣ص = ٥-$$

الخطوتان ١ و ٢: $٥س + ٦ص = ٨-$

$$٥س + ٣ص = ٥-$$

الخطوة ٣: $٥س + ٣ص = ٥-$

$$٥س + ٣ص = ٥- + (٢)٢$$

$$٥س + ٣ص = ٩-$$

$$٩ص = ٣-$$

$$٣ص = ٣-$$

الحل هو (٢، ٣).

تحقق من فهمك

$$(ب) ٩ر + ك = ١٣$$

$$(أ) ٦س - ٢ص = ١٠$$

$$٤ر + ٢ك = ٤-$$

$$١٩س - ٧ص = ١٩-$$



أحياناً نحتاج إلى ضرب كل معادلة في عدد مختلف لحل نظام المعادلتين.

مثال ٢ ضرب كلتا المعادلتين لحذف أحد المتغيرين

إرشادات للدراسة

اختيار المتغير الذي يجب حذفه، يمكنك حذف أي متغير في النظام إذا لم يطلب إليك إيجاد قيمة متغير محدد.

حل النظام الآتي مستعملًا الحذف:

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

الطريقة ١: حذف المتغير س.

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

اضرب بـ ٣

اضرب بـ ٤

$$١٢س + ٦ص = ٢٤$$

$$(-) \quad ١٢س - ١٢ص = ٣٦$$

اجمع

تم حذف المتغير س

اقسم كلا الطرفين على ٦-

بسّط

$$١٢- = ٦ص-$$

$$\frac{١٢-}{٦-} = \frac{٦ص-}{٦-}$$

$$٢ = ص$$

الآن عوض عن ص بـ ٢ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

المعادلة الثانية

$$٣س + ٣ص = ٩$$

عوض عن ص بـ ٢

$$٣س + (٢)٣ = ٩$$

بسّط

$$٣س + ٦ = ٩$$

اطرح ٦ من كلا الطرفين

$$٣س = ٣$$

اقسم كل طرف على ٣

$$\frac{٣س}{٣} = \frac{٣}{٣}$$

الحل (٢، ١)

$$س = ١$$

الطريقة ٢: حذف المتغير ص.

$$٤س + ٢ص = ٨$$

$$٣س + ٣ص = ٩$$

اضرب بـ ٣

اضرب بـ ٢

$$١٢س + ٦ص = ٢٤$$

$$(-) \quad ٦س - ٦ص = ١٨$$

تم حذف المتغير ص

اقسم كلا الطرفين على ٦

بسّط

$$٦س = ٦$$

$$\frac{٦س}{٦} = \frac{٦}{٦}$$

$$س = ١$$

والآن عوض عن س = ١ بإحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

المعادلة الثانية

$$٣س + ٣ص = ٩$$

عوض عن س بـ ١

$$٣(١) + ٣ص = ٩$$

بسّط

$$٣ + ٣ص = ٩$$

اطرح ٣ من كلا الطرفين، ثم بسّط

$$٣ص = ٦$$

اقسم كلا الطرفين على ٣

$$\frac{٣ص}{٣} = \frac{٦}{٣}$$

بسّط

$$ص = ٢$$

الحل هو (٢، ١) ويتطابق مع الحل الذي حصلنا عليه بالطريقة الأولى.

تحقق: عوض عن س بـ (١)، وعن ص بـ ٢ في المعادلة الأولى

المعادلة الأصلية

$$٤س + ٢ص = ٨$$

عوض عن (س، ص) بـ (٢، ١).

$$٤(١) + (٢)٤ = ٨$$

اضرب

$$٤ + ٤ = ٨$$

اجمع

$$٨ = ٨$$



تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} \text{ب} \quad 2 &= 2 + 6 & \text{أ} \quad 6 &= 3 - 5 \\ \text{ب} \quad 8 &= 3 + 4 & \text{أ} \quad 10 &= 5 - 2 \end{aligned}$$

حل مسائل من واقع الحياة: قد يكون من الضروري استعمال الضرب قبل الحذف أحياناً عند حل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة

كتابة نظام من معادلتين وحله

طيران: تطير طائرة في اتجاه الرياح بمعدل ٥٢٠ ميلاً في ٤ ساعات، وفي رحلة العودة تستغرق ٥ ساعات لقطع المسافة نفسها، أوجد سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.
ليكن أ = معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.
و = معدل سرعة الرياح.

السرعة	الزمن	المسافة	السرعة × الزمن = ف
أ + و	٤	٥٢٠	$٥٢٠ = ٤ \times (أ + و)$
أ - و	٥	٥٢٠	$٥٢٠ = ٥ \times (أ - و)$

فتكون المعادلتان هما: $٤ + أ = ٥٢٠$ و $٥ - أ = ٥٢٠$.

$$\begin{aligned} ٤ + أ &= ٥٢٠ & \text{اضرب في ٥} \\ ٥ - أ &= ٥٢٠ & \text{اضرب في ٤} \\ \hline ٢٠ + ٥أ &= ٢٦٠٠ & \text{اجمع} \\ ٢٠ - ٥أ &= ٢٠٨٠ & \text{احذف المتغير و} \\ \hline ٤٠ &= ٤٦٨٠ & \\ \hline \frac{٤٠}{٤٠} &= \frac{٤٦٨٠}{٤٠} & \text{اقسم كلا الطرفين على ٤٠} \\ ١ &= ١١٧ & \text{بسّط} \end{aligned}$$

وبذلك يكون معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة ١١٧ ميلاً في الساعة.

تحقق من فهمك

٣) زورق: يقطع زورق ٤ أميال في الساعة في اتجاه التيار، ويستغرق في رحلة العودة ١,٥ ساعة، أوجد معدل سرعة القارب في المياه الساكنة.

تأكد

حلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا الحذف:

المثالان ١، ٢

$$\begin{aligned} (١) \quad 2س - ٤ص &= ٤ & (٢) \quad 2س + ٧ص &= ١ \\ (٣) \quad 4س + 2ص &= 14 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7س + 3ص &= 27 & 5س + 3ص &= 2 \\ 5س + 3ص &= 17 & \end{aligned}$$

٤) صيد: يقطع قارب صيد مسافة ١٠ أميال في ٣٠ دقيقة في اتجاه مجرى النهر، إلا أنه يقطع المسافة نفسها في رحلة العودة في ٤٠ دقيقة، أوجد معدل سرعته في المياه الساكنة بوحدة ميل/ساعة.

مثال ٣

المثالان ١، ٢

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف:

$$\begin{array}{ll} (٥) \text{ س} + \text{ص} = ٢ & (٦) \text{ س} - \text{ص} = ٨- \\ (٧) \text{ س} + \text{ص} = ٣٩- & (٨) \text{ س} + \text{ص} = ١١ \\ (٩) \text{ س} + \text{ص} = ٢٩ & (١٠) \text{ س} + \text{ص} = ٨٠- \\ (١١) \text{ س} - \text{ص} = ٣- & (١٢) \text{ س} + \text{ص} = ٠ \\ \text{س} + \text{ص} = ١ & \text{س} + \text{ص} = ٨ \end{array}$$

المثال ٣ (١٣) **نظرية الأعداد:** ما العددين اللذان سبعة أمثالهما زائد ثلاثة أمثالهما الآخر يساوي سالب واحد، ومجموعهما يساوي سالب ثلاثة؟

(١٤) **كرة قدم:** سجّل أحد لاعبي كرة القدم (١٢) هدفاً في الدوري الممتاز. فإذا علمت أن ضعف عدد الأهداف التي سجلها في مرحلة الذهاب تزيد على ثلاثة أمثاله أهدافه في مرحلة الإياب بـ ٤، فما عدد أهدافه في كل من مرحلتَي الذهاب والإياب؟

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف:

$$\begin{array}{ll} (١٥) \text{ س} + \text{ص} = ٢,٥ & (١٦) \text{ س} + \text{ص} = \frac{٣}{٤} \\ (١٧) \text{ س} + \text{ص} = ٧,٥ & (١٨) \text{ س} + \text{ص} = \frac{١}{٤} \end{array}$$

(١٧) **هندسة:** إذا علمت أن التمثيل البياني للمعادلتين $\text{س} + \text{ص} = ٦$ ، $\text{س} + \text{ص} = ٩$ يشتمل على ضلعين من أضلاع مثلث، وأن نقطة تقاطع المستقيمين هي رأس المثلث، فأجب عن الأسئلة الآتية:

- (أ) ما إحداثيات رأس المثلث؟
 (ب) ارسم هذين المستقيمين، وعين رأس المثلث.
 (ج) إذا كان التمثيل البياني للمعادلة $\text{س} - \text{ص} = ٣$ يشمل الضلع الثالث للمثلث، فارسم هذا المستقيم على الشكل نفسه.
 (د) أوجد إحداثيات الرأسين الآخرين للمثلث.

(١٨) **اختبارات:** اكتشف معلم أنه عكس درجة أحد طلابه في أثناء رصدها مما أحرّ ترتيبه بين الأوائل، فأخبر الطالب ويبيّن له أن مجموع رقمي درجته يساوي ١٤، والفارق بين درجته الحالية والصحيحة ٣٦ درجة. وطلب إليه أن يعرف درجته الصحيحة وسوف يكافئه. فما الدرجة الصحيحة؟



تاريخ الرياضيات

الخوارزمي (١٦٤هـ - ٢٣٢هـ):
 هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي، عالم مسلم، وقد أسهم كثيراً في تطور علوم الرياضيات، والجغرافيا، والفلك، ومن أشهر كتبه "الجبر والمقابلة".



مسائل مهارات التفكير العليا

- (١٩) **تبرير:** وضح كيف يمكنك تعريف نظام المعادلتين الخطيتين الذي له عدد لا نهائي من الحلول.
 (٢٠) **اكتشف الخطأ:** حل كل من سعيد وحسين نظامًا من معادلتين، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حللين	لسعيد
$11 = 7 + 2r$	$11 = 7 + 2r$
$7 - = 9 - r$ (-)	$7 - = 9 - r$
$18 = r$	$11 = 7 + 2r$
$11 = 7 + 2r$	$14 - = 18 - r$ (-)
$11 = 7 + (18)2$	$65 = 25$
$11 = 7 + 36$	$1 = r$
$65 - = 7$	$11 = 7 + 2r$
$\frac{65 -}{7} = \frac{7}{7}$	$11 = (1)7 + 2r$
$3,6 - = r$	$11 = 7 + 2r$
الحل (٣, ٦-، ١٨)	$4 = 2r$
	$\frac{4}{2} = \frac{2r}{2}$
	$2 = r$
	الحل (١, ٢)

- (٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظامًا من معادلتين يمكن حله بضرب إحدى معادليته في -٣، ثم جمع المعادلتين معًا.
 (٢٢) **تحّد:** إذا كان حل النظام: $4s + 5v = 2$ ، $2s - 6v = 2$ هو (٣، أ)، فأوجد قيمة كل من: أ، ب موضحة خطوات الحل التي استعملتها.
 (٢٣) **اكتب:** وضح كيف تحدد المتغير الذي ينبغي حذفه باستعمال الضرب.

تدريب على اختبار

(٢٥) **احتمال:** بيّن الجدول أدناه نتائج رمي مكعب أرقام. فما الاحتمال التجريبي لظهور العدد ٣؟

النتيجة	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	٤	٨	٢	٠	٥	١

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) ٠,٢ (د) ٠,١

(٢٤) ما الزوج المرتب الذي يمثل حل النظام الآتي؟

$$2s - 3v = 9$$

$$-s + 3v = 6$$

(أ) (٣، ٣) (ب) (٣، ٣-)

(ج) (٣-، ١) (د) (٣-، ١)

حلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً طريقة الحذف: (الدرس ٥-٣)

$$(٢٨) \quad ٦ = ز٤ - س٢$$

$$(٢٧) \quad ٩ = -ك٣ + س٥$$

$$(٢٦) \quad ٧ = -ه٥ + ق٦$$

$$س٣ - ز٤ = ٣-$$

$$س٣ + ك٣ = ٣-$$

$$٩ = -ه٣ + ق٦$$

حلّ كل متباينة فيما يأتي، ومثل مجموعة حلها بيانياً: (مهارة سابقة)

$$(٣٢) \quad ٩ \leq |١ + ر٢|$$

$$(٣١) \quad ١١ < |٩ + و٢|$$

$$(٣٠) \quad ٥ > |١١ + ك|$$

$$(٢٩) \quad ٨ \geq |٥ - م|$$

(٣٣) إذا علمت أن د(س) = ٣س - ١، فما قيمة د(-٤)؟ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

اكتب الصيغة التي تعبر عن الجملة في كلّ مما يأتي:

(٣٤) مساحة المثلث (م) تساوي نصف حاصل ضرب طول القاعدة (ل) في الارتفاع (ع).

(٣٥) محيط الدائرة (مح) يساوي حاصل ضرب ٢ في (ط) في نصف القطر (نق).

(٣٦) حجم المنشور القائم (ح) يساوي حاصل ضرب الطول (ل) في العرض (ع) في الارتفاع (أ).





تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين

لمأذاري

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض أو بالحذف.

والآن

- أحدد أفضل الطرق لحل نظام من معادلتين.
- أحل مسائل تطبيقية على أنظمة المعادلات الخطية.



قطع أحمد في طوافه حول الكعبة وسعيه بين الصفا والمروة أثناء أدائه العمرة مسافة ٣١٠٠ مترًا تقريبًا، وكانت مسافة طوافه كاملة مساوية لمسافة أحد أشواط السعي.

يعبر عن المسافة التي قطعها أحمد في طوافه وسعيه بالمعادلة: $s + v = 3100$ ، ويعبر عن العلاقة بين مسافة الطواف ومسافة السعي بالمعادلة $v = \frac{1}{7}s$ حيث s تمثل مسافة السعي، v مسافة الطواف.

يمكنك حل هذا النظام لإيجاد المسافة التي قطعها في كل من السعي، والطواف.

تحديد أفضل طريقة: تعلمت سابقًا خمس طرائق لحل أنظمة المعادلات الخطية، والجدول أدناه يبين أفضل حالة لاستعمال كل منها.

مطوياتك	حل نظام مكون من معادلتين خطيتين	مفهوم أساسي
	أفضل حالة لاستعمالها	الطريقة
	لتقدير الحلول؛ فالتمثيل البياني لا يعطي في الغالب حلًا دقيقًا.	التمثيل البياني
	إذا كان معامل أحد المتغيرين في إحدى المعادلتين ١ أو -١.	التعويض
	إذا كان كل من معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين معكوسًا جمعياً للآخر.	الحذف باستعمال الجمع
	إذا كان معامل أحد المتغيرين في المعادلتين متساويين.	الحذف باستعمال الطرح
	إذا لم يكن أي من المعاملات (١) أو (-١)، وليس من السهل التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين أو طرحهما.	الحذف باستعمال الضرب

تعد طريقتا التعويض والحذف من الطرائق الجبرية لحل أنظمة المعادلات، والطريقة الجبرية عادةً تعدُّ أفضل الطرق للحصول على إجابة دقيقة. أما التمثيل البياني باستعمال التقنيات أو بدونها فمناسب لتقدير الحل.



مثال ١

اختيار أفضل طريقة

حدّد أفضل طريقة لحل النظام الآتي، ثم حله:

$$٤س - ٤ص = ٨$$

$$٨س + ٤ص = ١٩$$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن حل النظام في المثال (١)؛ بالحذف باستعمال الضرب، وذلك بضرب المعادلة الأولى في (٢)، ثم جمع المعادلتين لحذف المتغير س.

افهم: لتحديد أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، انظر إلى معاملي كل حد.
خطط: بما أن معاملي كل من المتغيرين س، ص في المعادلتين ليسا متساويين أو متعاكسين، إذن لا يمكنك استعمال الجمع أو الطرح لحذف أحد المتغيرين، وبما أن معامل ص في المعادلة الثانية هو (١) إذن يمكنك استعمال التعويض.
حل: حل المعادلة الثانية بالنسبة إلى ص أولاً.

$$٨س + ٤ص = ١٩ \quad \text{المعادلة الثانية}$$

$$٨س + ٤ص = ١٩ + ٨س \quad \text{أضف ٨س إلى كلا الطرفين.}$$

$$٤ص = ١٩ - ٨س \quad \text{بسّط.}$$

والآن، عوض عن المتغير ص في المعادلة الأولى بـ $١٩ - ٨س$.

$$٤س - ٤ص = ٨ \quad \text{المعادلة الأولى}$$

$$٤س - ٤(١٩ - ٨س) = ٨ \quad \text{عوض}$$

$$٤س - ٧٦ + ٣٢س = ٨ \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$٢٨س - ٧٦ = ٨ \quad \text{بسّط.}$$

$$٢٨س - ٧٦ + ٧٦ = ٨ + ٧٦ \quad \text{أضف ٧٦ إلى كلا الطرفين}$$

$$٢٨س = ٨٤ \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{٢٨س}{٢٨} = \frac{٨٤}{٢٨} \quad \text{اقسم كلا الطرفين على ٢٨}$$

$$س = ٣ \quad \text{بسّط}$$

والآن عوض عن المتغير س في المعادلة الثانية بـ ٣.

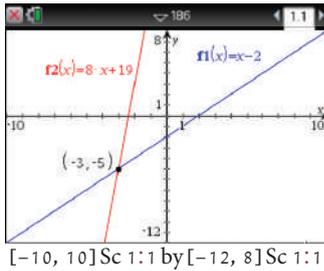
$$٨س + ٤ص = ١٩ \quad \text{المعادلة الثانية}$$

$$٨(٣) + ٤ص = ١٩ \quad \text{س = ٣}$$

$$٤ص = ٥ \quad \text{بسّط}$$

فيكون حل هذا النظام هو $(٣، -٥)$.

تحقق: استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire للتحقق من صحة الحل، وإن كانت طريقتك الجبرية في الحل صحيحة، فإن التمثيل البياني للمعادلتين سيتقاطع في النقطة $(٣، -٥)$.



[−10, 10]Sc 1:1 by [−12, 8]Sc 1:1

تحقق من فهمك

$$(ب) \quad ٣س - ٤ص = ١٠$$

$$٥س + ٨ص = ٢$$

$$(د) \quad ٥س - ٧ص = ١٧$$

$$٣س + ٢ص = ٥$$

$$(أ) \quad ٥س + ٧ص = ٢$$

$$٢س + ٧ص = ٩$$

$$(ج) \quad ٩س - ٧ص = ٩$$

$$٧س + ٧ص = ٧$$



تطبيق أنظمة المعادلات الخطية: من الضروري تفسير كل حل في سياق الموقف الذي تعرضه المسألة، عند تطبيق أنظمة المعادلات الخطية في المسائل.



الربط مع الحياة

هنالك أربعة أنواع من البطاريق ضمن القائمة المعرضة لخطر الانقراض، وهي التي تعيش بالقرب من المناطق المعمورة.

مثال ٢ من واقع الحياة تطبيق أنظمة المعادلات الخطية

بطاريق: هناك ١٧ نوعاً من البطاريق في العالم، أكبرها البطريق الإمبراطور، وأصغرها بطريق جالاباجوس، ويبلغ مجموع طولي هذين النوعين ١٦٩ سنتيمتراً، ويزيد طول بطريق الإمبراطور على مثلي طول بطريق جالاباجوس بمقدار ٢٢ سنتيمتراً. أوجد طول كل منهما.
يعبر عن الطول الكلي للنوعين بالمعادلة جـ + ق = ١٦٩؛ حيث جـ طول البطريق الإمبراطور، ق طول بطريق جالاباجوس، والآن اكتب معادلة تمثل طول البطريق الإمبراطور.

التعبير اللفظي	طول بطريق الإمبراطور	=	٢٢ سم	زيادة على	مثلي طول جالاباجوس
المتغيرات	جـ	=	ق	+	٢ ق
المعادلة	جـ	=	٢٢	+	٢ ق

أولاً: أعد كتابة المعادلة الثانية:

$$\text{المعادلة الثانية} \quad \text{جـ} = ٢٢ + ٢ ق$$

$$\text{اطرح ٢ ق من كلا الطرفين} \quad \text{جـ} - ٢ ق = ٢٢$$

والآن، يمكنك استعمال الحذف بالطرح لحل نظام المعادلتين.

$$\text{المعادلة الأولى} \quad \text{جـ} + ق = ١٦٩$$

$$\text{اطرح المعادلة الثانية} \quad \text{جـ} - ٢ ق = ٢٢$$

$$\text{احذف جـ.} \quad ١٤٧ = ٣ ق$$

$$\text{اقسم كلا الطرفين على ٣} \quad \frac{١٤٧}{٣} = \frac{٣ ق}{٣}$$

$$\text{بسّط} \quad ٤٩ = ق$$

والآن، عوض عن ق بـ ٤٩ في إحدى المعادلتين.

$$\text{المعادلة الثانية} \quad \text{جـ} = ٢٢ + ٢ ق$$

$$\text{جـ} = ٢٢ + ٢(٤٩)$$

$$\text{بسّط.} \quad ١٢٠ =$$

وبذلك يكون طول البطريق الإمبراطور ١٢٠ سم، وطول البطريق جالاباجوس ٤٩ سم.

هل هذا الحل منطقي في سياق المسألة؟

تحقق من ذلك وفق المعطيات، مجموع طولي النوعين = ١٦٩ = ٤٩ + ١٢٠ سم، ٢٢ + ٢(٤٩) = ١٢٠ سم.

تحقق من فهمك

(٢) **تطوع:** تطوع سعيد لعمل خيري مدة ٥٠ ساعة، ويخطط ليتطوع ٣ ساعات في كل أسبوع من الأسابيع القادمة، أما أسامة فهو متطوع جديد يخطط ليتطوع ٥ ساعات في كل أسبوع؛ اكتب نظاماً من المعادلات وحله لإيجاد بعد كم أسبوع يصبح عدد الساعات التي تطوع بها كل من سعيد وأسامة متساوياً.

مثال ١

حدّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثمّ حلّه:

$$(١) \begin{cases} ٢س + ٣ص = ١١ \\ ٣س + ٤ص = ١١ \end{cases} \quad (٢) \begin{cases} ٣س + ٤ص = ١١ \\ ٣س - ٤ص = ٥ \end{cases} \quad (٣) \begin{cases} ٣س - ٤ص = ٥ \\ ٤س + ٧ص = ٤ \end{cases}$$

$$-٨س - ٥ص = ٩ \quad ٢س + ١ص = -١ \quad -٣س + ٢ص = ٣ \quad ٥س - ٧ص = -١٢$$

(٥) **تسوق:** اشترى عبدالله ٤ كراسات و ٣ حقائب بمبلغ ١٨١ ريالاً، واشترى عبدالرحمن كراسة وحقبتين بمبلغ ٩٤ ريالاً.

مثال ٢

(أ) اكتب نظاماً من معادلتين يمكنك استعماله لتمثيل هذا الموقف.

(ب) حدّد أفضل طريقة لحل هذا النظام.

(ج) حل النظام.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

حدّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثمّ حلّه:

$$(٦) \begin{cases} ٣س - ٤ص = -٥ \\ ٥س + ٨ص = ١ \end{cases} \quad (٧) \begin{cases} ٥س + ٨ص = ١ \\ ٣س - ٤ص = -٥ \end{cases} \quad (٨) \begin{cases} ٣س + ٤ص = ٣ \\ ٤س - ٧ص = ١ \end{cases}$$

$$-٣س - ٦ص = -٥ \quad -٢س + ٨ص = -٦ \quad ١ص - ٤س = -١$$

(٩) **سكان:** بلغ مجموع عدد سكان محافظتي خميس مشيط وبيشة (في أحد الأعوام) نحو ٧٢٠ ألفاً، فإذا علمت أن عدد سكان خميس مشيط يقل بمقدار ٨٠ ألفاً عن ثلاثة أمثال عدد سكان بيشة، فاكتب نظاماً من معادلتين وحله لإيجاد عدد سكان كل محافظة منهما.

مثال ٢

(١٠) **آثار:** يبلغ مجموع مساحتي قصر ابن شعلان في القريات وقصر صاهود في الأحساء نحو ١٣٠٠٠ متر مربع، وتزيد مساحة قصر صاهود على مثلي مساحة قصر ابن شعلان بنحو ٤٠٠٠ متر مربع، أوجد مساحة كل قصر منهما.

(١١) تعرف نقطة التعادل بأنها النقطة التي يتساوى فيها الدخل مع المصاريف، فإذا دفعت دار النشر ١٣٢٠٠ ريال لإعداد كتاب و ٢٥ ريالاً تكاليف طباعة النسخة الواحدة، فما عدد النسخ التي يتعين بيعها لتخطي نقطة التعادل، علماً أنها تبيع النسخة الواحدة بمبلغ ٤٠ ريالاً؟ فسر إجابتك.

(١٢) **تدوير:** يقوم محمد وصالح بتجميع الورق والبلاستيك المستعمل وبيعه من أجل إعادة تدويره كما في الجدول المقابل، وحصل محمد على ٣٣ ريالاً، وصالح على ٥٠ ريالاً مقابل ذلك.

الكتلة المعاد تدويرها (كجم)		المادة
صالح	محمد	
٩	٩	البلاستيك
١١٥	٣٠	الورق

(أ) عين المتغيرات، واكتب نظاماً من معادلتين خطيتين لهذا الموقف.

(ب) ما سعر الكيلوجرام الواحد من البلاستيك؟

(١٣) **مكتبات:** تقدم إحدى المكتبات عرضاً؛ فتبيع الكتاب ذا الغلاف المقوى والمجلد بـ ٤٠ ريالاً والكتاب غير المجلد بـ ٣٠ ريالاً، فإذا دفع عبد الحكيم ٢٩٠ ريالاً ثمن ٨ كتب، فما عدد الكتب المجلدة التي اشتراها؟

(١٤) **قيادة سيارات:** قاد فارس سيارته مسافة ٩٠ كيلومتراً، وكان معدل سرعة السيارة (ر) كلم في الساعة، وفي رحلة العودة نقصت حركة السيارة، فأصبحت سرعة السيارة $(\frac{٣}{٤}ر)$ كلم في الساعة، فإذا استغرقت الرحلة كاملة ساعة و ٤٥ دقيقة، فأوجد معدل سرعة السيارة في كل من رحلتي الذهاب والإياب.



الربط مع الحياة

تعد المكتبات مراكز إشعاع معرفي، ومرافق مهمة للمعلومات تنتقي مصادرها وتنظمها وتتيحها لطلابها؛ سواء للدراسة، أو للبحث، أو للثقافة العامة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(١٥) **مسألة مفتوحة:** كوّن نظامًا من معادلتين يمثل موقفًا في الحياة، وصف الطريقة التي تستعملها لحل هذا النظام، ثم حله وفسّر معناه.

(١٦) **تبرير:** في نظام من معادلتين إذا كان س يمثل الزمن المستغرق في قيادة دراجة هوائية، ص تمثل المسافة المقطوعة، وحل النظام هو (٧، ١)، فاستعمل هذه المسألة لمناقشة أهمية تحليل الحل وتفسيره في سياق المسألة.

(١٧) **تحّد:** حل نظام المعادلتين الآتي باستعمال ثلاث طرائق مختلفة، ووضح خطوات الحل:

$$٤س + ص = ١٣$$

$$٦س - ص = ٧$$

(١٨) **اكتب سؤالاً:** يدّعي أحد الطلاب أن الحذف هو أفضل طريقة لحل أنظمة المعادلات، اكتب سؤالاً تبين فيه خطأ هذا الادّعاء.

(١٩) أي أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟

$$\begin{aligned} ٣س - ص &= ١ \\ ١س + ٣ص &= ١ \end{aligned}$$

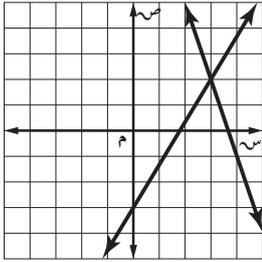
$$\begin{aligned} ٠س + ص &= ٠ \\ ٥س = ٢ص \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٤س - ص &= ٤ \\ ٢ص &= ٤س \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١س + ص &= ١ \\ ٣ص &= ٣س \end{aligned}$$

(٢٠) **اكتب:** وضح متى يكون التمثيل البياني أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، ومتى تكون الطريقة الجبرية أفضل؟

تدريب على اختبار



(٢١) إذا كان $١٢ = ٣ص + ٥س$ ، $٤س - ٥ص = ١٧$. فما قيمة ص؟

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ١ (د) ٣

(٢٢) أي أنظمة المعادلات الآتية يمثل الشكل المجاور حلًّا له؟

$$\begin{aligned} (د) \quad ١٥س - ٥ص &= ١٥ \\ ٣ص + ٢س &= ١٨ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ج) \quad ١٥س - ٥ص &= ١٥ \\ ٧ص + ٢س &= ٧ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ب) \quad ١١س - ٣ص &= ١١ \\ ٥ص - ٤س &= ٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (أ) \quad ١١س - ٣ص &= ١١ \\ ٩ص - ٥س &= ٩ \end{aligned}$$

مراجعة تراكمية

حلّ كل نظام فيما يأتي مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس ٥-٤)

$$(٢٥) \quad ١٠ = ٤س + ٢ص$$

$$(٢٤) \quad ٠ = ٤س + ٢ص$$

$$(٢٣) \quad ٣ = ٤س + ٢ص$$

$$٧ = ٥س - ٣ص$$

$$١٦ = ٣ص - ٢س$$

$$١٢ = ٤ص - ٣س$$

(٢٦) حل المتباينة: $٢ - |٣| \geq ٣$. (مهارة سابقة)

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٢٨) \quad ١٩ = ١٠ + ٣س$$

$$(٢٧) \quad ٧ - ٤ = ٥$$

(٢٩) حلّ المعادلة: $٦ = ٤ + ٢س$. (مهارة سابقة)



١٠) اختيار من متعدد: ما الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا للنظام الآتي؟

$$٦س - ٤ص = ٦$$

$$٦س + ٣ص = ٠$$

(أ) (٥، ٦) (ج) (١، ٠)

(ب) (-٣، -٦) (د) (٤، -٨)

١١) تسوق: اشترى فيصل ٨ كتب ومجلات لأبنائه بقيمة ١٧٥ ريالاً. فإذا كان ثمن الكتاب ٢٥ ريالاً، وثمان المجلة ٢٠ ريالاً، فما عدد كل من الكتب والمجلات التي اشتراها؟

١٢) حدائق: لدى عبد الكريم ٤٢ مترًا من السياج لإحاطة حديقة، فإذا كانت مزرعته مستطيلة الشكل وطولها يساوي مثلي عرضها ناقص ٣ أمتار، فعرف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد طول الحديقة وعرضها، ثم حل النظام باستعمال التعويض.

الطول (ل)



العرض (ع)

١٣) مجلات: اشترك أحمد في المجلتين الرياضية والعلمية، فإذا تلقى هذا العام ٢٤ نسخة من كلتا المجلتين، وكان عدد نسخ المجلة العلمية أقل من مثلي عدد نسخ المجلة الرياضية بمقدار ٦، فعرف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد عدد المجلات من كل نوع.

مثل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً، وحدد عدد حلوله، وإن كان له حل واحد فاكتبه:

(١) $٢ص = ٢س$

$٦س - ٦ = ٠$

(٢) $٣س = ٣ - ٢ص$

$٩ + ٢ص = ٢س$

(٣) $٤ = ٣س - ٤ص$

$١٠ = ١٠ + ٢ص$

(٤) $٤ = ٣س + ٢ص$

$١ - ٣ص = ٢س$

حلّ كلاً من النظامين الآتين بالتعويض:

(٥) $٨ + ٢ص = ١٠ + ٣س$

$١٠ - ٣ص = ١٠ + ٢س$

(٦) $٣س - ٤ص = ٣ - ٤ص$

$٥ = ٣س - ٢ص$

حلّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بالحذف:

(٧) $١٣ = ٣س + ٢ص$

$٥ = ٣س - ٢ص$

(٨) $٢ = ٣س + ٧ص$

$١٣ = ٤ص - ٣س$

(٩) $٨ = ٣س + ٢ص$

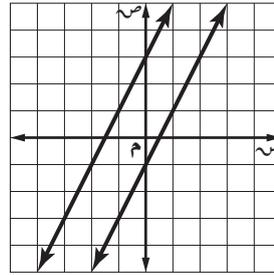
$٤ - ٣ص = ٣س$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

(١) أي المصطلحات الآتية يصف نظام المعادلتين الممثل بيانياً؟



(أ) متسق

(ب) متسق ومستقل

(ج) متسق وغير مستقل

(د) غير متسق

(٢) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$\text{ص} = 4\text{س} - 7$$

$$3\text{س} - 2\text{ص} = 1$$

(أ) (٣، ٥)

(ب) (٤، -١)

(ج) (٥، -٢)

(د) (-٢، ٢)

(٣) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$3\text{س} - 8\text{ص} = 50$$

$$3\text{س} - 5\text{ص} = 38$$

(أ) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$

(ب) (-٦، ٤)

(ج) $(-\frac{4}{9}, \frac{2}{7})$

(د) (-٩، ٤)

(٤) ما حل المتباينة: $2\text{س} \leq 6$ ؟

(أ) $3 \leq \text{س}$

(ب) $3 \leq \text{س}$

(ج) $3 \geq \text{س}$

(د) $3 \geq \text{س}$

(٥) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:

$$3\text{س} + 2\text{ص} = 2$$

$$2\text{س} - 2\text{ص} = 18$$

(أ) (١، ٣)

(ب) (-٧، ٤)

(ج) (-٤، ٥)

(د) (-٢، ٣)



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٩) خرج سعيد بسيارته في رحلة، وبعد أن توقف عند إحدى الإشارات وجد أن عليه أن يقطع ١٢ كيلومترًا ليصبح ما قطعه مساويًا على الأقل لنصف المسافة الكلية البالغة ١٠٨ كيلومترات. فكم كيلومترًا على الأقل يكون قد قطع عند توقفه عند الإشارة؟

١٠) يقدم متجرٌ خصمًا قيمته ١٥ ريالًا على جميع السلع، فإذا أراد سالم شراء سلعة يتراوح ثمنها ما بين ٤٥ ريالًا و٨٩ ريالًا، فكم يتوقع أن يدفع ثمنًا لها؟

١١) عدنان مجموعهما ٤١ والفرق بينهما ٩، فما العدنان؟

١٢) حلّ المتباينة $س \leq ١٠$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

١٣) حلّ المتباينة $|س - ٣| - ١ \geq ٨$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

١٤) حلّ المتباينة $١ > ٢ك - ٥ \geq ١٣$ ، ثم مثل الحل بيانيًا.

٦) ما حل المتباينة $س > ٥ + ٢س > ٧$ ؟

(أ) $٠ < س < ٢$

(ب) $٥ < س < ٦$

(ج) $٠ < س < ٤$

(د) $٠ < س < ١$

٧) ما متباينة القيمة المطلقة للتمثيل البياني الآتي؟



(أ) $|س + ١| < ٣$

(ب) $|س + ١| \geq ٣$

(ج) $|س + ١| \leq ٣$

(د) $|س + ١| < ٣$

٨) مع أحمد وشقيقه ١٥ ريالًا يريدان أن يشتريا بها دفترين وعددًا من أقلام الرصاص، فإذا كان ثمن الدفتر ٦ ريالات وثمان قلم الرصاص ٠,٧٥ ريال. فما أكبر عدد ممكن من أقلام الرصاص يمكنهما شراؤه؟

(أ) ٣

(ب) ٤

(ج) ٥

(د) ٦



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

(١٥) **وجبات:** بيِّن الجدول أدناه ثمن وجبتي إفطار في أحد المطاعم.

الوجبة	الثمن (ريال)
٣ شطائر ، علبتا عصير	١٣
٤ شطائر ، علبة عصير	١٤

(أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

(ب) حلِّ النظام الذي كتبته، وفسِّره في سياق المسألة.

(ج) ما المبلغ الذي يدفعه شخص اشترى شطيرتين وعلبة عصير؟

للمساعدة ..															
١٥	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
٥-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٥	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٣-٥	مهارة سابقة	٣-٥	٢-٥	١-٥	فراجع الدرس ..



الفصل ٦

كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

سباق الجري: يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

المفردات:

- وحيدة الحد ص (٥٠)
- رتبة المقدار ص (٥٩)
- كثيرة الحدود ص (٦٢)



المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئاً بثمانى أوراق A4.

- ١ رتب الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكون كتيباً.
- ٢ ثبّت الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطاً من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.
- ٣ سمّ غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضع أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.





التهيئة للفصل ٦

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل بدء الإجابة:

مراجعة سريعة

مثال ١

اكتب العبارة الآتية بالصيغة الأسية:

$$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$$

العدد ٥ أساس واستعمل كعامل ٤ مرات.

س أساس واستعمل كعامل ٣ مرات.

$$\text{إذن } ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ + ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^٤ + ٥^٤$$

اختبار سريع

اكتب كل عبارة فيما يأتي بالصيغة الأسية: (مهارة سابقة)

$$(١) ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤$$

$$(٢) ب \times ب \times ب \times ب \times ب \times ب$$

$$(٣) م \times م$$

$$(٤) \frac{1}{٣} \times \frac{1}{٣}$$

$$(٥) \frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤}$$

مثال ٢

أوجد قيمة $\left(\frac{٥}{٧}\right)^٢$.

اكتب القوى في صورة حاصل ضرب

اضرب

$$\left(\frac{٥}{٧}\right)^٢ = \frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧}$$

$$= \frac{٢٥}{٤٩}$$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٦) ٣^٢ \quad (٧) ٢(٥-) \quad (٨) ٣^٣$$

$$(٩) ٣(٤-) \quad (١٠) ٢\left(\frac{٢}{٣}\right) \quad (١١) ٤\left(\frac{1}{٣}\right)$$

(١٢) **مدرسة:** إذا كان احتمال تخمين الإجابة الصحيحة

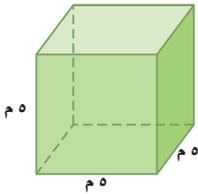
عن ٥ أسئلة من نوع الصواب والخطأ هو $\left(\frac{1}{٣}\right)$ ،

فعبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر اعتيادي دون

استعمال الأسس.

مثال ٣

أوجد حجم الشكل المجاور.



حجم متوازي المستطيلات

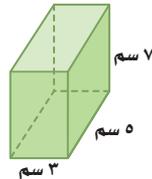
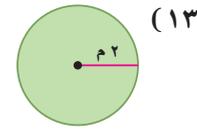
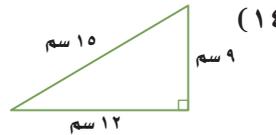
$$ل = ٥، ح = ٥، ع = ٥$$

$$ح = ل \times ح \times ع$$

$$= ٥ \times ٥ \times ٥ = ١٢٥$$

الحجم ١٢٥ م^٣.

أوجد مساحة كل من الشكلين الآتيين: (مهارة سابقة)



(١٥) أوجد حجم الشكل المجاور.





ضرب وحيدات الحد

لماذا؟

تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي $ق = ك \left(\frac{ع}{٣٣٤} \right)^٣$ ؛ حيث تمثل: $ق$ قوة المحرك بالحصان، $ك$ كتلة السيارة بركابها، $ع$ سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل. من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: $ك \left(\frac{ع}{٣٣٤} \right)^٣$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد. أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل: $\frac{أب}{جـ}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًا. ووحيدة الحد ٣ هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير $س$ فيها ١ ، أما وحيدة الحد $٢س^٢$ فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١ .

١-٦

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المفردات

وحيدة الحد

الثابت

تميز وحيدات الحد

مثال ١

حدّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

- (أ) ١٠ نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.
- (ب) $٢٤ + ف$ لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.
- (ج) $هـ^٢$ نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.
- (د) $ل$ نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك

- (أ) $٥ + س$
- (ب) $٢٣أب جـ د^٢$
- (ج) $\frac{س ص ع^٢}{٢}$
- (د) $\frac{م}{ن}$

تذكّر أن العبارة التي على الصورة $س^n$ التي تعبر عن نتيجة ضرب $س$ في نفسها n مرة تُسمى قوة. ويُطلق على $س$ الأساس، وعلى n الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.

$$٨١ = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^٤$$

أساس

أس

٤ عوامل



ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{l} \text{عوامل 3} \quad \text{عاملان} \\ \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{عوامل 3}} \times \underbrace{4 \times 4}_{\text{عاملان}} = 4^3 \times 4^2 \\ \text{عوامل 5} = 3 + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{عاملان} \quad \text{عوامل 4} \\ \underbrace{2 \times 2}_{\text{عاملان}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{عوامل 4}} = 2^2 \times 2^4 \\ \text{عوامل 6} = 2 + 4 \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

مفهوم أساسي **ضرب القوى**

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أسيهما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $A^m \times A^n = A^{m+n}$.

أمثلة: $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ ، $3^5 \times 3^3 = 3^{5+3} = 3^8$ ، $2^2 \times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$

مثال ٢ ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(أ) $(3^6)(2^7)$ ، $(2^6)(3^7)$ ، $(2^6)(3^7) = (2^6 \times 3^7)$ ، $(2^6 \times 3^7) = (2^6 \times 3^7)$ ، $(2^6 \times 3^7) = 2^6 \times 3^7$

(ب) $(3^3)(3^4)$ ، $(3^3)(3^4) = (3^3 \times 3^4)$ ، $(3^3 \times 3^4) = (3^{3+4}) = 3^7$

تحقق من فهمك ✓

(١٢) $(3^3)(3^4)$ ، $(3^3)(3^4) = (3^3 \times 3^4) = 3^7$

(١٣) $(3^3)(3^4)$ ، $(3^3)(3^4) = (3^3 \times 3^4) = 3^7$

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملاً وقوة عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أي أن $s = 1$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{array}{l} \text{عوامل 3} \\ \underbrace{(4)(4)(4)}_{\text{عوامل 3}} = 4^3 \\ 12 = 4 + 4 + 4 = \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{عوامل 4} \\ \underbrace{(23)(23)(23)(23)}_{\text{عوامل 4}} = 2^4 \times 3^4 \\ 83 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = \end{array}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

مفهوم أساسي **قوة القوة**

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ؛ وأي عددين صحيحين م، ن فإن: $(A^m)^n = A^{m \times n}$.

أمثلة: $(3^2)^5 = 3^{2 \times 5} = 3^{10}$ ، $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة

إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس أو تجمعها، فاكتب العبارة كحاصل ضرب.

مثال ٣ قوة القوة

$$\begin{aligned} \text{بسط العبارة: } & [{}^2({}^3{}^2)]^4 \\ \text{قوة القوة} & {}^4({}^2 \times {}^3{}^2) = {}^4[{}^2({}^3{}^2)] \\ \text{بسط} & {}^4({}^6{}^2) = \\ \text{قوة القوة} & {}^4 \times {}^6{}^2 = \\ \text{بسط} & {}^{16}{}^{777}{}^2{}^{16} = {}^{24}{}^2 = \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$${}^2[{}^3({}^2{}^3)] \text{ (ب) } \quad {}^4[{}^2({}^2{}^2)] \text{ (أ)}$$

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\begin{aligned} \text{٣ عوامل} & \quad \text{٣ عوامل} \\ \underbrace{({}^2 \text{ص ع } 2)}_3 \underbrace{({}^2 \text{ص ع } 2)}_3 \underbrace{({}^2 \text{ص ع } 2)}_3 = {}^3({}^2 \text{ص ع } 2) & \quad \underbrace{({}^3 \text{ن و } 3)}_3 = {}^3({}^3 \text{ن و } 3) \\ \underbrace{({}^2 \text{ع } 2 \times {}^2 \text{ع } 2)}_3 \underbrace{({}^2 \text{ع } 2 \times {}^2 \text{ع } 2)}_3 \underbrace{({}^2 \text{ع } 2 \times {}^2 \text{ع } 2)}_3 = & \quad \underbrace{({}^3 \text{ن } 3 \times {}^3 \text{ن } 3)}_3 \underbrace{({}^3 \text{ن } 3 \times {}^3 \text{ن } 3)}_3 = \\ {}^6 \text{ص } 8 = {}^6 \text{ع } 3 & \quad {}^3 \text{ن } 3 = \end{aligned}$$

وبيّن المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

أضف إلى

مطوياتك

قوة حاصل الضرب

مفهوم أساسي

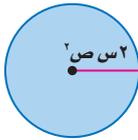
التعبير اللفظي: لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$.

مثال: $(-٢ \text{ ص } ٣)^٥ = (-٢)^٥ (٣)^٥ = -٣٢ \text{ ص } ٥$.

مثال ٤ قوة حاصل الضرب

هندسة: عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.



$$\begin{aligned} \text{المساحة} = \text{ط نق}^2 & \quad \text{مساحة الدائرة} \\ = \text{ط} (٢ \text{ ص } ٢)^2 & \quad \text{عوض عن نق بـ } ٢ \text{ ص } ٢ \\ = \text{ط} (٢^٢ \text{ ص } ٢^٢) & \quad \text{قوة حاصل الضرب} \\ = ٤ \text{ ص } ٢^٤ \text{ ط} & \quad \text{بسط} \end{aligned}$$

إذن، مساحة الدائرة تساوي $٤ \text{ ص } ٢^٤ \text{ ط}$ وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

(أ) عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه $٣ \text{ ص } ٢$ على صورة وحيدة حد.

(ب) عبّر عن مساحة المثلث الذي ارتفاعه ٤ وطول قاعدته $٥ \text{ ب } ٢$ على صورة وحيدة حد.

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحدات حد.

ارشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تتضمن أفاضاً متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي تبسيط العبارات

- لتبسيط عبارة تتضمن وحدات حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:
- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
 - لا تتضمن العبارة قوة قوة.
 - تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال ٥ تبسيط العبارات

بسط العبارة: $(3س ص ٤)^2 [٢(ص ٢-)]^3$.

قوة القوة $(3س ص ٤)^2 [٢(ص ٢-)]^3 = ٦(ص ٢-)^٢ (٤س ص ٣)^٢$

قوة حاصل الضرب $(٣)٢ س٢ (٤س ص ٣)^٢ (٢-)^٢ (ص)٦ =$

قوة القوة $٩س٢ ص٢ (٦٤)٨ ص٦ =$

خاصية الإبدال $٩(٦٤)٨ ص٢ ص٦ =$

ضرب القوى $٥٧٦س٢ ص١٤ =$

تحقق من فهمك ✓

(٥) بسط العبارة: $(\frac{1}{٢}أ ب٢)^٣ [٢(ب٤-)]^٢$.

تأكد ✓

حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

(١) ١٥ (٢) $٢ - ٣$ (٣) $\frac{٥}{د}$

(٤) $١٥ - ج٢$ (٥) $\frac{ج}{٢}$ (٦) $٩ + ب٧$

مثال ١

بسط كل عبارة مما يأتي:

المثالان ٢، ٣

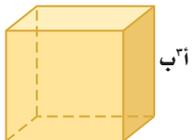
(٧) $ك(ك٣)$ (٨) $م(م٢)٤$ (٩) $٢ك٢(٩ك٤)$

(١٠) $(٥م٤)(٧م٤٣)$ (١١) $[٢(٢٣)]^٢$ (١٢) $(س ص ٤)٦$

(١٣) $(٢ف٢ج٣ه٢)٣$ (١٤) $(٦ن٥)٤$ (١٥) $(٤أ٤ب٩ج)٢$

مثال ٤

(١٦) هندسة: مساحة سطح المكعب هي ٦ م^٢، حيث م مساحة سطحه، ض طول حرفه.



(أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد.

(ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان $أ = ٣$ ، $ب = ٤$ ؟

مثال ٥

بسط كل عبارة مما يأتي:

(١٧) $(٥س٢ص)٢ (٢س ص ٣)٣ (٤س ص ٤)٣$ (١٨) $(٣د٢ن٣-)^٢ [٣(٣د٢ن٣-)]^٢$

(١٩) $(٢ج٣ه٢-)(٣ج٤-)(٤ج٣ه٢-)$ (٢٠) $(٧أ٤ب٩ج-)^٢ [٢(٢ج٣ه٢-)]^٢$

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

- (٢١) ١٢٢ (٢٢) ٤٣ (٢٣) $٢ + ج٢$
 (٢٤) $\frac{٢-ج}{٤هـ}$ (٢٥) $\frac{٥ك}{١٠}$ (٢٦) $٣ن + م٦$

المثالان ٢، ٣ بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (٢٧) $(٢ك)(٤ك٢)$ (٢٨) $(٢ص٤ع٤)(٩ص٦ع٦)$
 (٢٩) $(٢ان٤ج٢هـ)(٢ان٣ج٢هـ)$ (٣٠) $٢[٢(٢٢)]$
 (٣١) $٢[٣(٢ص٢س)]$ (٣٢) $٤(٧ك٥)$

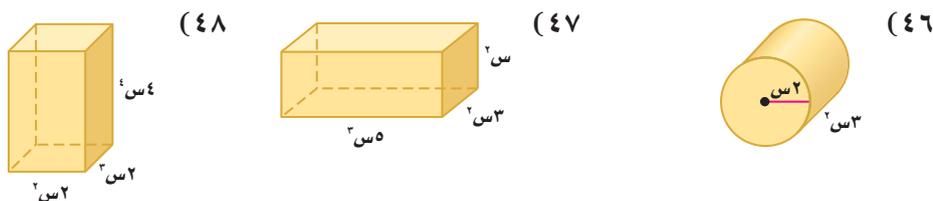
مثال ٤ هندسة: عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:

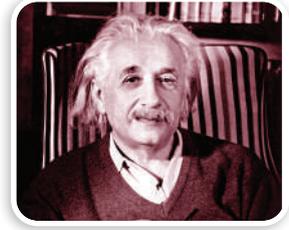


مثال ٥ بسّط كل عبارة مما يأتي:

- (٣٥) $٣(٣٤)٤(٣٤٢)$ (٣٦) $٢(ج٣-٥)٢(ج٣-٥)$
 (٣٧) $٢[٣(٢ج٢هـ-٣هـ)]٣$ (٣٨) $٢(٤ك٢م٤)٢[٢(٤ك٢م٤)]٣$
 (٣٩) $(ب٢ر٥)(٢ر٥-٧ب٣ر٤)٢(٦ب٣ر٤)$ (٤٠) $(٢أ٥ب٣ج٤)٢(٣أ٦ب٣ج٤)$
 (٤١) $٢(٣س٥,٥)$ (٤٢) $٣(ج٣-٤)$
 (٤٣) $٢(٢أ٤/٥)$ (٤٤) $(٤/٧م)٢(٤٩م)(١٧ب)(١/٣٤ب٥)$
 (٤٥) $(٢أ٣ب٢ج)٢(٢أ٢ب٤)٢(٤أ٤ج٢)٢(٢أ٤ب٤ج٥)٢(٢أ٢ب٣ج٤)٢$

هندسة: عبّر عن حجم كل مجسم مما يأتي على صورة وحيدة حد:





تاريخ الرياضيات

١٨٧٩م - ١٩٥٥م
يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه $E=mc^2$ ، المعروف باسمه، حيث تمثل E الطاقة، m كتلة المادة، c سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحو كافٍ.

- (٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة $E=mc^2$. حيث: E هي الطاقة بالجول و m الكتلة بالكيلوجرام و c سرعة الضوء تبلغ 3×10^8 مليون متر لكل ثانية تقريباً.
(أ) أكمل حسابات تحويل ٣ كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة.
(ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثلياً ما كانت عليه؟
(٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.
(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

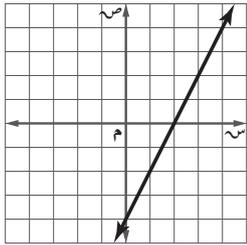
القوة	٤ ^٣	٣ ^٣	٢ ^٣	١ ^٣	٠ ^٣	١ ^{-٣}	٢ ^{-٣}	٣ ^{-٣}	٤ ^{-٣}
القيمة						$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

- (ب) **تحليلياً:** ما قيمتا 5^0 ، 5^{-1} ؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.
(ج) **تحليلياً:** أكمل: لأي عدد غير صفري a ، وأي عدد صحيح n ، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
(د) **لفظياً:** ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٥١) **تحذّر:** بسّط العبارة $\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}\right)^2$ موضعاً كل خطوة، علماً بأن: a ، b عدداً حقيقيين غير صفريين، m ، n عدداً صحيحان.
(٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى 6 .
(٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفسّر كيف تستعمل كلاً منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار



- (٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجباً، ومقطعه الصادي سالباً، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟

(٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟

- (أ) $6 - 3x$ ص
(ب) $\frac{1}{x^2}$
(ج) $\frac{1}{3x^2}$ ج
(د) $5x - 4$ د

مراجعة تراكمية

- اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازٍ للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (مهارة سابقة)
(٥٦) $(2, 3)$ ، $ص = 6 - ٦$
(٥٧) $(1, 2)$ ، $ص + ٢ = ٢$
(٥٨) $(-٥, -٤)$ ، $ص = \frac{1}{٤} + ١$
حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)
(٥٩) $٧س - ٢٨ =$
(٦٠) $\frac{٢}{٥}ص = ١٠$
(٦١) $\frac{٢}{٣}ص = ٧$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:

- (٦٢) $(٨-) \div ٦٤-$
(٦٣) $١, ٣ \div ٧٨-$
(٦٤) $(٦-) \div ٤٢, ٣$
(٦٥) $١٠, ٥ \div ٢٣, ٩٤-$
(٦٦) $(٢, ٥-) \div ٣٢, ٥-$
(٦٧) $٤, ٦ \div ٩٨, ٤٤-$

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{3^3}{3^4} = \frac{\overbrace{3 \times 3 \times 3}^{3 \text{ عوامل}}}{\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ عوامل}}} = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)$$

$$\frac{2^2}{2^3} = \frac{\overbrace{2 \times 2}^{2 \text{ عاملان}}}{\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ عاملان}}} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً

$$\frac{3^4 2^7}{3^2 2^4} = \frac{3^2 (3^2)}{3^2 (2^4)} = \frac{3^2}{2^4}$$

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

قوى القسمة

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أو جد كلاً من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

أمثلة: $\frac{4^3}{4^5} = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{4^2}{4^5}$ $\frac{2^0}{3^0} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2^0}{3^0}$

مثال ٢

قوى القسمة

بسط العبارة: $\left(\frac{3^4}{7^2}\right)^2$

قوى القسمة: $\frac{2(3^4)}{2(7^2)} = \left(\frac{3^4}{7^2}\right)^2$

قوة حاصل الضرب: $\frac{2(3^4)^2}{2(7^2)^2} =$

قوة القوة: $\frac{6(3^8)}{4(7^4)} =$

تحقق من فهمك ✓

(أ) $\left(\frac{4^3}{3^2}\right)^3$ (ب) $\left(\frac{2^3}{3^4}\right)^2$ (ج) $\left(\frac{3^4}{4^5}\right)^3$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة للأس الصفرى مثل: 3^0 ، 5^0 ، 10^0 ، ... ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة $3^0 = 1$

الطريقة ١

ناتج قسمة القوى: $5^0 - 5^3 = \frac{5^0}{5^3}$

بسط: $5^3 =$

وبما أن للعبارة $\frac{5^0}{5^3}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $5^0 = 1$

أي أن الأس الصفرى لأي عدد لا يساوي الصفر هو الواحد.

الطريقة ٢

تعريف القوى: $\frac{3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3}{3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3 \times 3^3} = \frac{5^3}{5^3}$

بسط: $1 =$



نسبة طول الرجل إلى طول النملة يساوي تقريباً $\frac{10}{3-10}$.

اقسم القوى

$$(3-)-010 = \frac{10}{3-10}$$

$$3 = 3 + 0 = (3-)-0$$

$$310 =$$

بسّط

$$1000 =$$

لذا فطول الرجل يساوي ١٠٠٠ مرة من طول النملة تقريباً. أو نسبة طول الرجل إلى طول النملة تساوي تقريباً القوة الثالثة للعشرة.

تحقق: نسبة طول الرجل إلى طول النملة هي $\frac{10}{3-10} = \frac{10}{3-10}$ وأقرب قوى العشرة للعدد

$$2125 \text{ هي } 310 \checkmark$$

تحقق من فهمك

(٥) **علم الفلك:** رتبة مقدار كل من كتلة الأرض ودرج التبانة لأقرب قوى العشرة هي: 10^{27} ، 10^{44} على الترتيب. فكم مرة تساوي رتبة مقدار كتلة درج التبانة رتبة مقدار كتلة الأرض؟

تأكد

الأمثلة ٤-١ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً.

$$\begin{array}{llll} (1) \frac{ه^٥ل}{ه^٢ل} & (2) \frac{م^٦ر^٥ب^٣}{م^٣ر^٢ب^٥} & (3) \frac{ب^٤ج^٦ن^٨}{ب^٤ج^٣ن^٥} & (4) \frac{ج^٨ه^٢م}{ه^٧ج^٢} \\ (5) \frac{ر^٤ن^٧ف^٢}{ن^٧ف^٢} & (6) \frac{س^٣ص^٢ع^٦}{ع^٥س^٢ص} & (7) \frac{ن^٤ك^٤و^٦}{ك^٢ن^٣و} & (8) \frac{ر^٣ف^٢}{ن^٧} \\ (9) \left(\frac{٢ج^٣د^٥}{٢ه^٥} \right) & (10) \left(\frac{٣س^٣ص^٤ع^٢}{٤س^٣ص^٤ع} \right) & (11) \frac{٤ر^٢ف^٥}{٣ره^٢} & (12) \frac{ف^٣ج^٢}{ه^٤} \end{array}$$

مثال ٥ (١٣) إنترنت: ارتفع عدد مستخدمي الإنترنت في المملكة من ١١٠٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣١ هـ إلى ٢٤٠٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣٨ هـ. حدّد نسبة عدد مستخدمي الإنترنت عام ١٤٣٨ هـ إلى مستعمليه عام ١٤٣١ هـ باستعمال رتبة المقدار للعامين.

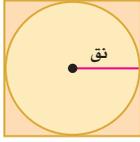
تدرب وحل المسائل

الأمثلة ٤-١ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً.

$$\begin{array}{llll} (14) \frac{م^٢ن^٤}{م^٢ن} & (15) \frac{ج^٤د^٤ه^٣}{ج^٣د^٤ه^٢} & (16) \left(\frac{٣س^٣ص^٤ع^٢}{٢ع^٥} \right) & (17) \frac{س^٤ص^٩}{٢ع} \\ (18) \frac{أ^٧ب^٨ج^٨}{أ^٥ب^٧ج^٧} & (19) \left(\frac{٥ن^٩ج^٤ه^٢}{٣ن^٢ج^٢ه^٢} \right) & (20) \frac{ل^١٢ن^٧ر}{ل^٢ن^٧ر} & (21) \frac{٥ج^٢د^٥}{٨ج^٢د^٥} \\ (22) \frac{٢٢-٣ج^٢ه^٢}{٨ج^٢} & (23) \frac{١٢م^٢ل^٤}{١٥م^٣ل^٩} & (24) \left(\frac{٢-أ^٢ب^٤ج^٤ه^٢}{٣-أ^٢ب^٤ج^٤ه^٢} \right) & (25) \frac{٣ن^١-١س^٥}{ن^٥} \end{array}$$

مثال ٥

(٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى 10^8 عملية في الثانية تقريبًا. وازدادت هذه السرعة إلى أكثر من 10^{10} عملية في الثانية عام ١٤٣٨ هـ. فبكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟



(٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة $م = ط \text{ نق}^2$ لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة $م = ل^2$ لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه ل. استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:



الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقتها من بطارية الساعة.

النسبة	مساحة المربع	مساحة الدائرة	نصف القطر
نق			
٢نق			
٣نق			
٤نق			
٥نق			

- (أ) جبرياً: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.
 (ب) جبرياً: إذا ضرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟
 (ج) جدولياً: أكمل الجدول المقابل.
 (د) تحليلياً: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٢٨) **تبرير:** هل المعادلة " $س \times ص = ع \times س$ " صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك.
 (٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما ٢٤ أو ٣
 (٣٠) **تحذ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة $س^{-٥} = \frac{١}{س^٥}$
 (٣١) **اكتب:** وضح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

- (٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟
 (أ) ٤٠ س
 (ب) ٨٠ س
 (ج) ١٦٠ س
 (د) ٤٠٠ س
- (٣٣) **بسّط العبارة:** $(٤ - ٥ \times ٦٤ \times ٣)$
 (أ) $\frac{١}{٦٤}$
 (ب) ٦٤
 (ج) ٣٢٠
 (د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

- (٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بـ ١٠ مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ (الدرس ٦-٢)
 حلّ كلّاً من المتباينات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)
 (٣٥) $٥(٦ - ٤) < ٤$
 (٣٦) $٢٢ \leq ٤(٨ - ب) + ١٠$
 (٣٧) $٥(ب - ٨) \geq ٣(ب + ١٠)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: بسّط كلّ عبارة فيما يأتي:

$$(٤١) (١٣ + ٥) (٤٤ + ٥)$$

$$(٤٠) ٤ ص + ٢ ص + ١٥ ص$$

$$(٣٩) ١٦ + ٢ - ١٥$$

$$(٣٨) ٣ س + ١٠ س$$



كثيرات الحدود

٣-٦

لماذا؟

سجّلت مبيعات الأجهزة الذكية عالمياً أرقاماً قياسية في المبيعات عام ٢٠١٧ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

$$ع = ١٢٨,٧ + ٢٠٢٩,٤ + ٢٠٢٧,٧$$



علماً بأن ع تمثل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثل العبارة $ع = ١٢٨,٧ + ٢٠٢٩,٤ + ٢٠٢٧,٧$ مثلاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحديات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حدّاً في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماءً خاصة. **ثنائية الحد** هي مجموع وحدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحديات حد في أبسط شكل.

فيما سبق

درست تمييز وحديات الحد وخصائصها.

والآن

أجد درجة كثيرة الحدود.

أكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية.

المفردات

كثيرة حدود

ثنائية الحد

ثلاثية الحدود

درجة وحيدة الحد

درجة كثيرة الحدود

الصورة القياسية لكثيرة

الحدود

المعامل الرئيس

مثال ١ تمييز كثيرات الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود	هل هي كثيرة حدود؟	العبارة
ثنائية حد	نعم؛ $٤ص - ٥س$ هي مجموع وحدتي حد هما: $٤ص$ ، $-٥س$.	(أ) $٤ص - ٥س$
وحيدة حد	نعم؛ $٦,٥ -$ عدد حقيقي.	(ب) $٦,٥ -$
—	لا؛ $٧ - ٣ = \frac{٧}{٣}$ ، وهي ليست وحيدة حد.	(ج) $٧ - ٣ + ٩ب$
ثلاثية حدود	نعم؛ $٦س + ٣ + ٤س + ٣ + ٥س + ٣ = ٦س + ٣ + ٥س + ٣$ مجموع ثلاثة حدود.	(د) $٦س + ٣ + ٤س + ٣ + ٥س + ٣$

تحقق من فهمك

(أ) $١س - ٣ص + ٢ص - ٤ص$

(أ) س

(ب) $١٠س - ٤س + ٨س$

(ب) $٧ف + ٥س$

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفر تساوي صفراً. وليس للصفر درجة. أما **درجة كثيرة الحدود** فهي أكبر درجة لأي حد من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتماداً على درجتها، فتسمى ذات الدرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

مثال ٢ درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود $٧ - د^٥ - ٣د^٢ - ٩ج - د$

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد $٣د^٢ = ٣$ ، درجة الحد $٩ج - د = ٥ = ١ + ٥ = ٦$ ،

درجة الحد ٧ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تحقق من فهمك ✓

(١٢) ٧ ص ٥ ع (ب) ٢ م ٣ - ٢ ن ٣ م ٧ - ٢ ن ٣ م ١٣

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام الصورة القياسية لكثيرة الحدود بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس**.

الصورة القياسية: $٧ + ٢س + ٥س^٢ - ٣س^٣$

المعامل الرئيس أكبر درجة

مثال ٣ الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود $٥ص - ٩ - ٢ص - ٤ص - ٦ص$ بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

الدرجة:

كثيرة الحدود: $٥ص - ٩ - ٢ص - ٤ص - ٦ص$

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: $٥ص - ٢ص - ٤ص - ٦ص + ٩$ فيكون المعامل

الرئيس هو $٥ص$

تحقق من فهمك ✓

(١٣) $٨ - ٢ص + ٤س - ٣ص$ (ب) $١٠ + ٦ص - ٢ص + ٣ص - ٤ص + ٥ص$

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين سنتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال كثيرات الحدود

مصانع: تمثل المعادلة $٣ن^٢ - ٢ن + ١٠$ عدد أطنان الأسمت بمئات الألوفا التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٣٣ هـ إلى ١٤٣٨ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فما عدد أطنان الأسمت المنتجة حتى بداية عام ١٤٣٥ هـ؟

أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمت.

بما أن ن تمثل عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فإن: $٢ = ١٤٣٣ - ١٤٣٥ = ٢$



الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتعد صناعة الأسمت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.

$$ع = 3n^2 - 2n + 10 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 3(2)^2 - 2(2) + 10 \quad n = 2$$

$$= 3(-4) - 4 + 10 \quad \text{بسط}$$

$$= 18 = 10 + 4 - 12 \quad \text{اضرب وبسط}$$

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألف، أو ١٨٠٠٠٠٠٠.

تحقق من فهمك

(أ) كم طنًا أنتج عام ١٤٣٨ هـ؟

(ب) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًا سيتم إنتاجه عام ١٤٤٨ هـ؟

تأكد

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

$$(١) 2ص - 5 + 3ص^2 \quad (٢) 3س^2 \quad (٣) ٥م^2ن^3 + ٦ \quad (٤) ٥ك - ٤ + ٦ك$$

مثال ٢ أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٥) 3 - (٦) ٦ن^3 - ٤ \quad (٧) ٧ - ٤ع \quad (٨) \frac{3}{4} \quad (٩) ١٢ - ٧ك^2ن + ٨ن \quad (١٠) ٢أ^2ب^٥ + ٥ - أب \quad (١١) ٦د^٣ + ٣د^٣ن^٢ + ٢د + ١$$

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدّد المعامل الرئيس فيها:

$$(١٢) -ص^٣ + ٣ص - ٢ + ٢ص^٢ \quad (١٣) ٤ع - ٢ع٢ - ٤ع٥ \quad (١٤) ١٢ + ٣أ٤ - ٢أ٥ - ١$$

مثال ٤ (١٥) **جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجّلين في جامعة من عام ١٤٣٠ هـ إلى ١٤٣٩ هـ بالمئات بالمعادلة $n = ١٠س + ٥٠$ ، حيث n عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

(أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٥ هـ؟

(ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٧ هـ؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:

$$(١٦) \frac{٥ص^٣}{٢س} + ٤س \quad (١٧) ٢١ \quad (١٨) ٤ج - ٢ج^٢ + ١ \quad (١٩) ١٩د + ٣د - ج \quad (٢٠) ٢٤ - أ \quad (٢١) ٣ن + ٣نك$$

مثال ٢

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(٢٢) \quad ١٣ - أ ب + ٣ أ٥ ب \quad (٢٣) \quad ٨ - س٣ \quad (٢٤) \quad ٤ -$$

$$(٢٥) \quad ١٧ ج٢ هـ \quad (٢٦) \quad ١٠ + ٢ ج د٤ - ٦ د٢ ج \quad (٢٧) \quad ٢ ع٢ ص٢ - ٧ + ٥ ص٣ ن٤$$

مثال ٣

اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدد المعامل الرئيس فيها:

$$(٢٨) \quad ٥ س٢ - ٢ + ٣ س \quad (٢٩) \quad ٨ ص + ٧ ص٣ \quad (٣٠) \quad ٤ - ٣ ج - ٥ ج٢$$

$$(٣١) \quad ٤ د٤ - ١ + د٢ \quad (٣٢) \quad \frac{١}{٣} س - ٣ س٤ + ٧ \quad (٣٣) \quad ١٠ ب - ١٠ ب٢ - ٦ ب٣$$

مثال ٤

(٣٤) **ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١ م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة $ع = ١٥٠ ن٢ + ١٥٠ ن + ١$

(أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

(ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟



(٣٥) **مشروع:** يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{١}{٣} ط \times$ مربع نصف القطر (نق) \times الارتفاع (ع)، وحجم الأسطوانة يساوي $ط \times$ مربع نصف القطر (نق) \times الارتفاع (ع).

(أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ.

(ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨ سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦ سم، ونصف قطر القاعدة ٣ سم، فما حجم الصاروخ؟



الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخيين يعملان بالوقود الصلب. وتبلغ كتلة المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٦) **تحديد:** إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثل العدد الصحيح الفردي، وفسر ذلك.

(٣٧) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسر إجابتك.

(٣٨) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية.

(٣٩) **اكتب:** فسر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟



تدريب على اختبار

(٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟
 $٢س + ص = ١٩$ ، $٤س - ٦ص = ٢$
 (أ) ٥ (ب) ٨ (ج) ٧ (د) ١٠

(٤٠) إجابة قصيرة: إذا كان لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالاً من أحد المتاجر، واشترت أرزاً بـ ٥٩,٩٥ ريالاً، وعلبة جبن بـ ١٥,٩٥ ريالاً. فكم تدفع مقابل ذلك؟

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (الدرس ٦-٢)

$$(٤٢) \quad \frac{١٠(أ٤)(أ٨)}{١٠(أ٤)(أ٨)} \quad (٤٣) \quad \frac{١٠(أ٤)(أ٨)}{١٠(أ٤)(أ٨)} \quad (٤٤) \quad \frac{١٠(أ٤)(أ٨)}{١٠(أ٤)(أ٨)} \quad (٤٥) \quad \frac{١٠(أ٤)(أ٨)}{١٠(أ٤)(أ٨)}$$

(٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١, ٣) والمعامد للمستقيم $ص = ٣س + ١$ بصيغة الميل والمقطع. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كل عبارة فيما يأتي إن أمكن، وإلا فاكتب "في أبسط شكل":

$$(٤٧) \quad ١٠ب + ٢٧ب + ١٤ب - ١٠ب \quad (٤٨) \quad ٥ت + ١٢ت - ٢ت - ٨ت \quad (٤٩) \quad ٣ص + ٤ص + ٢ص + ٢ص \quad (٥٠) \quad ٧ه - ٧س + ٨ك \quad (٥١) \quad ٢ن + \frac{٢}{٣}ن + \frac{٢}{٣}ن \quad (٥٢) \quad ٢ل + \frac{٢}{٣}ل + ٢ل$$



جمع كثيرات الحدود وطرحها



تمثيل كثيرات الحدود	
<p>حدود متشابهة</p>	<p>تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.</p>
	<p>يمكن تكوين الزوج الصفري بتجميع قطعة واحدة ومعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفر أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.</p>

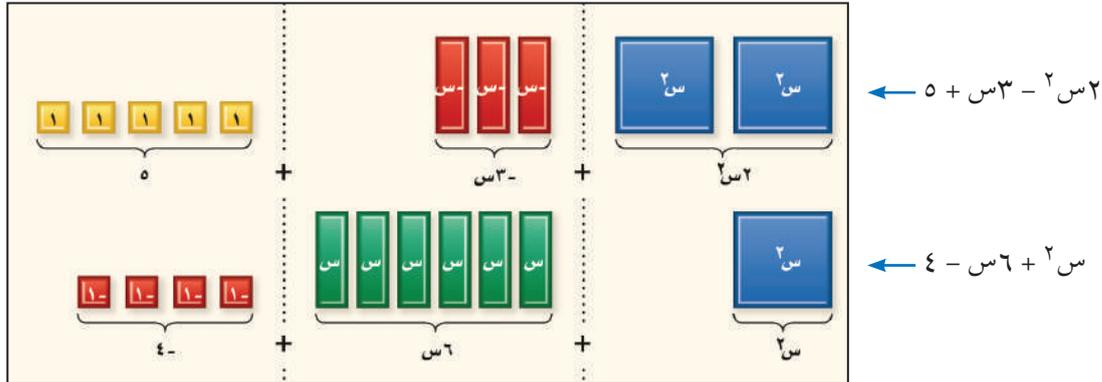
تُسمى وحيدات الحد مثل $٣س$ ، $٢س$ حدودًا متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر - انظر الجدول المجاور.

نشاط ١ جمع كثيرات الحدود

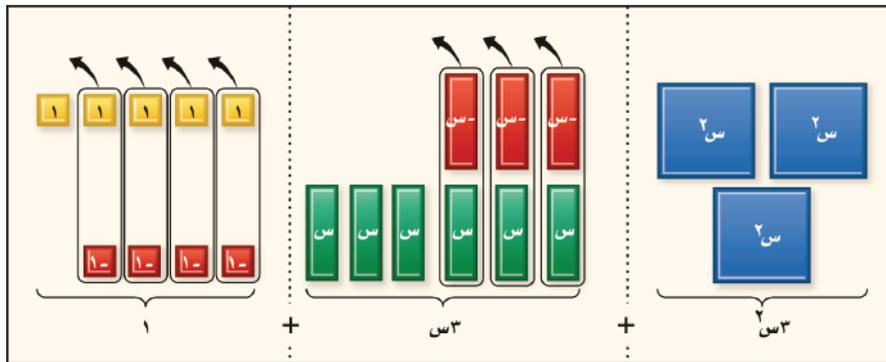
نشاط ١

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٢س٢ - ٣س + ٥) + (٢س٢ + ٦س - ٤)$.

الخطوة ١: مثل كلاً من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جمّع الحدود المتشابهة، واحذف الأزواج الصفرية.



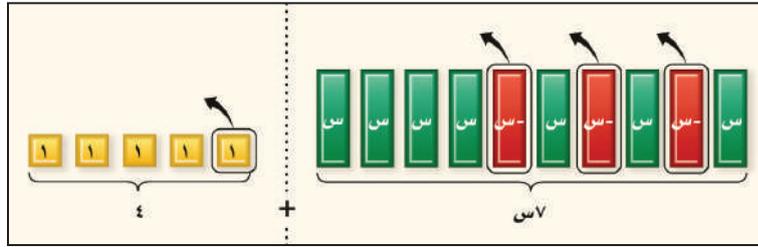
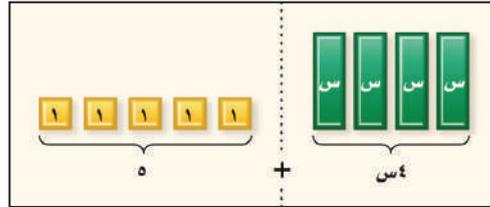
الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$١ + ٣س + ٢س٢ = (٢س٢ + ٦س - ٤) + (٢س٢ - ٣س + ٥)$$

نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(-3س + 1) - (4س + 5)$.

الخطوة ١: مثل كثيرة الحدود: $4س + 5$



الخطوة ٢: لطرح $-3س + 1$ عليك حذف ٣ بطاقات $(-س)$ الحمراء، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وبما أنه لا توجد بطاقات $(-س)$. أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات $(-س)$ و $(-س)$ ، ثم احذف ٣ بطاقات $(-س)$.

الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

$$4س + 7س = (-3س + 1) - (4س + 5)$$

تذكر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

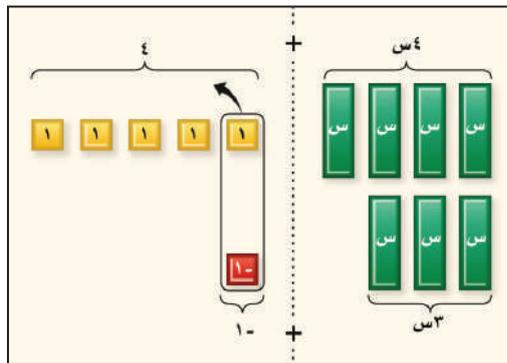
نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: $(-3س + 1) - (4س + 5)$.

الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين $4س + 5$ و $-3س + 1$ ، أضف $4س + 5$ إلى معكوس $-3س + 1$

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية. إذن $(-3س + 1) - (4س + 5) = 7س + 4$.

لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.



التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكل مما يأتي:

$$(١س + ٢س - ٥س) + (٣س - ٢س + ٦س)$$

$$(٢س + ٨س + ١س) - (٤س - ٢س + ٢س)$$

$$(٤س - ٢س + ١س) - (٥س + ٢س)$$

٤) اكتب: أوجد ناتج $(٤س - ٢س + ٣س) - (٢س + ١س)$ باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و ٣. ومثل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفرية في كل حالة.





جمع كثيرات الحدود وطرحها

لماذا؟



يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل (١ع) وحجاج الخارج (٢ع) بمئات الألوف من عام ١٤٣٥هـ إلى ١٤٣٨هـ بالمعادلتين:
 $١٩٣١ = ١٠س٠ - ٣س٠ + ٢٨٤١$, $١٠س٠ + ٢س٠ + ١٨٠٨$, $٦س٠ + ٧$
 $٢٦٧٥ = ١٠س٠ - ٣س٠ + ١$, $١٠س٠ + ٢س٠ + ٩٧$, $١٧س٠ + ٠٨$
 حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٥هـ.

إن إجمالي عدد الحجاج تقريباً يمثل بـ $١ع + ٢ع$

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن جمع كثيرتي حدود باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

جمع كثيرات الحدود

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(أ) (٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س٤ + ٦س٦)$$

الطريقة الأفقية

$$(٢س٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س٤ + ٦س٦)$$

$$= [٢س٢ + ٥س - ٧] + [٣ - ٤س٤ + ٦س٦]$$

$$= ٢س٢ + ٥س - ٧ + ٣ - ٤س٤ + ٦س٦$$

الطريقة الرأسية

$$٢س٢ + ٥س - ٧$$

$$+ (٣ - ٤س٤ + ٦س٦)$$

$$= ٢س٢ + ٥س - ٧ + ٣ - ٤س٤ + ٦س٦$$

$$(ب) (٣ص٣ + ٥ - ٣ص) + (٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨)$$

الطريقة الأفقية

$$(٣ص٣ + ٥ - ٣ص) + (٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨)$$

$$= [٣ص٣ + ٥ - ٣ص] + [٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨]$$

$$= ٣ص٣ + ٥ - ٣ص + ٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨$$

الطريقة الرأسية

$$٣ص٣ + ٥ - ٣ص$$

$$+ (٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨)$$

$$= ٣ص٣ + ٥ - ٣ص + ٤ص٤ - ٢ص٤ + ٣ص٢ + ٨$$

جمع الحدود المتشابهة

اجمع الحدود المتشابهة

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمع

جمع الحدود المتشابهة

اجمع الحدود المتشابهة

أضف الحد ٥ للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واجمعها



تحقق من فهمك

$$(أ) (٥س٢ - ٣س٣ + ٤) + (٦س - ٣س٢ - ٣)$$

$$(ب) (ص٤ - ٣ص + ٧) + (٢ص٣ + ٢ص - ٤ص١١)$$

طرح كثيرات الحدود: تذكر أنه يمكنك طرح عدد صحيح بإضافة معكوسه أو نظيره الجمعي. وبالمثل، يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي. لإيجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

$$-(٣س٣ + ٢س - ٦) = ٦س - ٢س٣ - ٦$$

نظير جمعي

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

عند إيجاد النظير الجمعي أو المعكوس لكثيرة حدود، اضرب كل حد فيها في العدد -١.

مثال ٢ طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٣ك٣ + ٢ - ٩ك)$

الطريقة الأفقية

اطرح $٣ك٣ + ٢ - ٩ك$ بإضافة نظيرها الجمعي

$$(٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٣ك٣ + ٢ - ٩ك)$$

$$= (٧ك + ٤ك٣ - ٨) + (-٣ك٣ - ٢ + ٩ك)$$

$$= [٧ك + ٤ك٣] + [-٣ك٣ - ٢ + ٩ك] + [-٨]$$

$$= ١٠ - ٣ك٣ - ٢ + ٩ك + ٧ك - ٨$$

اجمع الحدود المتشابهة ورتب.

الطريقة الرأسية

رتب الحدود المتشابهة عمودياً واطرح بإضافة النظير الجمعي.

$$٨ - ٧ك + ٢ك٣ - ٣ك٣$$

$$٨ - ٧ك + ٢ك٣ + ٣ك٣$$

$$٢ - ٩ك + ٢ك٣ + (-)$$

$$٢ + ٩ك - ٢ك٣ (-)$$

$$١٠ - ٣ك٣ - ٢ + ٩ك + ٧ك - ٨$$

$$إذن: (٧ك + ٤ك٣ - ٨) - (٣ك٣ + ٢ - ٩ك) = ١٠ - ٣ك٣ - ٢ + ٩ك + ٧ك - ٨$$

تحقق من فهمك

$$(أ) (٤س٣ - ٣س٣ + ٦س - ٤) - (٢س٣ + ٣س - ٢)$$

$$(ب) (٨ص - ١٠ + ٥ص٢) - (٧ص - ٣ص٣ + ١٢ص)$$

إرشادات للدراسة

الطريقة الرأسية

لاحظ أن كثيرتي الحدود قد كتبنا بالصورة القياسية، وأن الحدود المتشابهة تُرتب عمودياً بعضها فوق بعض.



جمع كثيرات الحدود وطرحها

مثال ٣ من واقع الحياة

متجر إلكترونيات: تمثّل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

(أ) اكتب معادلة تمثّل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهرياً.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

$$ن = ٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨$$

عوض

$$= ١١ش + ٢١٥$$

اجمع الحدود المتشابهة.

$$\text{المعادلة هي: } ن = ١١ش + ٢١٥$$

(ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستُباع في ١٠ أشهر.

$$ن = ١١(١٠) + ٢١٥$$

عوض عن ش ب ١٠

بسط

$$= ٣٢٥ = ٢١٥ + ١١٠$$

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلة تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك

(٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهرياً ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهراً.

تأكد

المثالان ١، ٢

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(١) (٦س٣ - ٤) + (٢س٣ + ٩)$$

$$(٢) (ج٣ - ٢ج٢ + ٥ج - ٦) - (ج٢ + ٢ج)$$

$$(٣) (٨ص - ٤ص٢) + (٣ص - ٩ص٢)$$

$$(٤) (-٤ع٣ - ٢ع٢ + ٨) - (٤ع٣ + ٣ع٢ - ٥)$$

$$(٥) (-٢د٣ - ٨ + ٥د) + (٥د + ١٢ - ٤د)$$

$$(٦) (٣ن٣ - ٥ن + ٢) - (٢ن٣ + ٨ن - ٣)$$

مثال ٣

(٧) **إجازة:** يتوزّع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال الإجازة إلى مجموعتين: مجموعة تسافر إلى المنطقة (ف) بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة (د) بالسيارة، ويمكن تمثيل العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال الإجازة، وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا للمنطقة (ف) بالمعادلتين: ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٨ن + ٧، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٢٥ هـ.

(أ) اكتب المعادلة التي تمثّل عدد الطلاب (ل) الذين توجّهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة.

(ب) كم طالباً يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٤٢ هـ؟

(ج) كم طالباً يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٤٥ هـ؟

المثالان ٢، ١

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(٨) (ص + ٥) + (ص٢ + ٤ص - ٢) \quad (٩) (٣ج - ٣ج + ١١) - (ج٢ + ٢ج + ٨)$$

$$(١٠) (ع + ٢ع) + (١١ - ٢ع) \quad (١١) (٢س - ٢ص + ١) - (٣ص + ٤س)$$

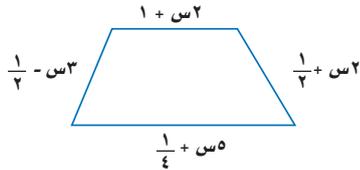
$$(١٢) (٤ - أ٤ - ٥ب + ٣) + (٦ - أ٢ - ٣ب) \quad (١٣) (س٢ص - ٣ص + ٢ص) + (٢ص - ٣ص + ٢ص)$$

$$(١٤) (٦أب + ٢أب) + (٣أب - ٦) + (٢أب - ٣أب) \quad (١٥) (ج٢د + ٢ج - ٤ج - ٢ج) + (٤ - ٤ج - ٤ج)$$

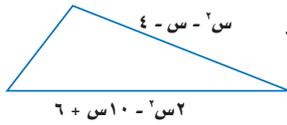
$$(١٦) (٣ن٣ + ٣ن - ١٠) - (٤ن - ٢ن) + (٤ن - ٣ن - ٢ن + ٩ + ٤)$$

(١٧) **مبيعات:** يُقدّر متجر بيع إلكترونيات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعلاقة $٤٢ - ١س + ٢١٢٨س + ١٥٠٠$ ، وأن الربح من بيع س تلفازاً هو ٧٥س، حيث س بين صفر و ٨٠٠. (أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة.

(ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازاً؟



(١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثل محيط الشكل المجاور.



(١٩) **هندسة:** تمثل العبارة $٣س٢ - ٧س + ٢$ محيط الشكل المقابل. اكتب كثيرة حدود تمثل قياس الضلع الثالث.

مثال ٣



الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي لجهاز التلفاز LCD هو ٦٠٠٠ ساعة. مما يعني استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا عمل أقل من ٨ ساعات يومياً.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: $(٢س - ٢س) - (٣س + ٣س - ٢)$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

سلطان

$$(٢س٢ - ٢س) - (٣س + ٣س - ٢) = (٢س٢ - ٢س + ٣س - ٣س + ٢) = ٢س٢ - ٢س + ٢$$

ثامر

$$(٢س٢ - ٢س) - (٣س + ٣س - ٢) = (٢س٢ - ٢س - ٣س - ٣س + ٢) = ٢س٢ - ٨س + ٢$$

(٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما $٢س - ٧س + ٨$.

(٢٢) **تبرير:** أوجد مثلاً مضاداً للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

(٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية. وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟



تدريب على اختبار

(٢٥) إجابة قصيرة: ما محيط مربع طول ضلعه $(٣ + ٢)$ وحدة؟

(٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: $س، س + ١، س + ٢$. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟

- (أ) $س(س+١)(س+٢)$ (ب) $س + ٣$
(ج) $س٣ + ٣$ (د) $س + ٣$

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

(٢٦) ٢٥ (٢٧) $٣ + ٦$ و (٢٨) $٢ + ٣أب - ٣أ٤ + ٦$ (٢٩) $٦ - ك + ك٤ + ك٢ع + ٦ك٣$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

(٣٠) $٣(٢ - ن)$ (٣١) $(٨ - و٤)(٥ و٤)$ (٣٢) $(٦ ص ص٢)٢(٢ ص ص٢ع٢)٣$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلّ ممّا يأتي:

(٣٣) $ل(ل٥)(ل٧)$ (٣٤) $٣(٢ - ن)٣(٢ - ن)$
(٣٥) $(٥ت٥ف٢)(١٠ت٣ف٤)$ (٣٦) $(٨ - و٤ه٥)(٥ وه٤)$
(٣٧) $٣(٢٣)٣$ (٣٨) $٢(٣٢)٢$
(٣٩) $٣(٢م٤ك٣)٢(٣م٣ك٢)٣$ (٤٠) $(٦صع)٢(٢ص٢ع٢ز٢)٣$



حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنّفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حدّ، أو ثلاثية حدود:

(الدرس ٦-٣)

(١١) $3x^2 - 2$

(١٢) $4x^0 + 3x^2 + 2$

(١٣) $\frac{x^3}{x^5}$

(١٤) $x^3 - 3$

(١٥) $3x^2$

(١٦) $2x^3 - 4x + 1$

(١٧) **كثافة سكانية:** الجدول أدناه يبيّن كثافة عدد السكان في

إحدى المدن. (الدرس ٦-٣)

الكثافة شخص / ميل مربع	عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠ م	العام
١	٠	١٩٤٠
١,٧	٣٠	١٩٧٠
٧,٢	٥٠	١٩٩٠
١١,٤	٦٠	٢٠٠٠

(أ) إذا كانت الدالة: $D(x) = 0,005x^2 - 127x + 1$ تمثل الكثافة السكانية، حيث x عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠ م، فحدّد نوع كثيرة الحدود.

(ب) حدّد درجة كثيرة الحدود.

(ج) استعمل الدالة لتوقع الكثافة السكانية لعام ٢٠٣٠ م مبيناً خطوات الحل.

أوجد ناتج كل ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

(١٨) $(8x^2 - 9x + 5) + (2x^2 - 2x + 3)$

(١٩) $(5x^3 - 3x^2 + 7x - 3) - (2x^3 + 2x - 3)$

(٢٠) $(7x^4 - 2x^2 - 4) - (2x^3 + 2x - 4)$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس ٦-١)

(١) $(x^3)(x^4)$

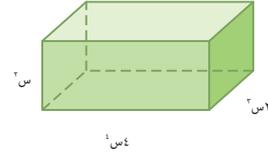
(٢) $(x^2)^3$

(٣) $[(x^2)(x^3)]^2$

(٤) $(6x^3 - 3x^2)(x^3)$

(٥) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسم أدناه في صورة

وحيدة حدّ: (الدرس ٦-١)



(ج) $8x^2$

(د) $7x^2$

(أ) $6x^9$

(ب) $8x^9$

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً:

(الدرس ٦-٢)

(٦) $\left(\frac{2x^3}{x^6}\right)^3$

(٧) $\frac{2x^3}{x^6}$

(٨) $\frac{7x^4}{x^3}$

(٩) $\frac{4x^2 - 2}{x^0}$

(١٠) **علم الفلك:** يُقدّر علماء الفلك رتبة عدد النجوم في الكون

بـ 10^{21} ، ورتبة عدد النجوم في درب التبانة بحوالي 100

مليار، فكم مرة تساوي رتبة عدد النجوم في الكون من رتبة

عدد نجوم درب التبانة؟ (الدرس ٦-٢)





ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

لماذا؟

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.



يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها؛ أي أن مساحة أرض القاعة تعطى بالعلاقة ض (٣ + ٣).

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال ١

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3s^2 - (7s - 2s + 4)$.

الطريقة الأفقية:

العلاقة الأصلية	$3s^2 - (7s - 2s + 4)$
خاصية التوزيع	$= 3s^2 - (7s - 2s) - 4$
اضرب	$= 3s^2 - 7s + 2s - 4$
بسّط	$= 3s^2 - 5s - 4$

الطريقة الرأسية:

	$3s^2 - (7s - 2s + 4)$
خاصية التوزيع	$(x) \cdot 3s^2 - 7s + 2s - 4$
اضرب	$3s^2 - 5s - 4$

تحقق من فهمك

(أ) $15(4 - 2 + 7) - 6(3 - 2 + 9)$ (ب) $6(3 - 2 + 9) - 5(4 - 2 + 7)$

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود.

مثال ٢

تبسيط العبارات

بسّط $2l(-4l + 5) - 5(2l + 20)$.

العلاقة الأصلية	$2l(-4l + 5) - 5(2l + 20)$
خاصية التوزيع	$= 2l(-4l) + 2l(5) - 5(2l) - 5(20)$
اضرب	$= -8l^2 + 10l - 10l - 100$
خاصية التجميع	$= -8l^2 - 100$

اجمع الحدود المتشابهة

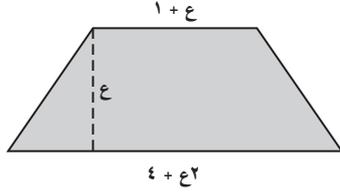
تحقق من فهمك

$$(أ) 3(5س^2 + 2س - 4) - س(7س^2 + 2س - 3)$$

$$(ب) 15ن(10ص^3 + 5ص^2) - 2ص(4ص^2 + 2ص)$$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة .

مثال ٣ من اختبار



لوحة جدارية: غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤٤ سم. فكم ستمتراً مربعاً من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.

اقرأ الفقرة:

يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولاً قاعدتيه $1 + ع$ ، $4 + ع$ وارتفاعه $ع$.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثل مساحة شبه المنحرف.

لتكن $ق = 1 + ع$ ، $ق = 4 + ع$ ، ارتفاع شبه المنحرف.

$$م = \frac{1}{2}ع(ق + 4)$$

$$\frac{1}{2}ع[(4 + ع) + (1 + ع)] = م$$

$$\frac{1}{2}ع(5 + ع) = م$$

$$\frac{5}{2}ع + \frac{3}{2}ع^2 = م$$

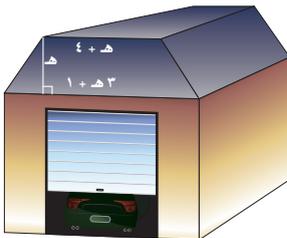
$$\frac{3}{2}(44) + \frac{5}{2}(44) = م$$

$$3014 = م$$

إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^٢ من الورق الذهبي.

تحقق من فهمك

٣) مرآب: يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف. إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب.



إرشادات للاختبار

الصيغ والقوانين

تزود بعض الاختبارات الوطنية والعالمية الطلاب بورقة تحتوي الصيغ والقوانين الأكثر استعمالاً. ويمكن الرجوع إليها قبل بدء حل المسألة عند عدم التأكد من الصيغة أو القانون المطلوب.

٣	٠	١	٤
٠	٠	٠	٠
١	١	١	١
٢	٢	٢	٢
٣	٣	٣	٣
٤	٤	٤	٤
٥	٥	٥	٥
٦	٦	٦	٦
٧	٧	٧	٧
٨	٨	٨	٨
٩	٩	٩	٩

مساحة شبه المنحرف

$$ق = 1 + ع، ق = 4 + ع$$

اجمع ثم بسّط

خاصية التوزيع

$$ع = 44$$

بسّط

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود : تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

مثال ٤ معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

حل المعادلة: $٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$

المعادلة الأصلية	$٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$
خاصية التوزيع	$٥٠ + أ٨ - ٢أ١٢ + أ + ٢أ٤ = ٨ + أ١٨ + ٢أ٦ + أ٤ - ٢أ١٠$
اجمع الحدود المتشابهة	$٥٠ + أ٧ - ٢أ١٦ = ٨ + أ١٤ + ٢أ١٦$
اطرح ١٦ من كلا الطرفين	$٥٠ + أ٧ - = ٨ + أ١٤$
أضف ١٧ إلى كلا الطرفين	$٥٠ = ٨ + أ٢١$
اطرح ٨ من كلا الطرفين	$٤٢ = أ٢١$
اقسم كلا الطرفين على ٢١	$٢ = أ$

تحقق :

	$٥٠ + (٤ - أ٦)أ٢ + (١ + أ٤)أ = ٨ + (٦ + أ٢)أ٣ + (٢ - أ٥)أ٢$
	$٥٠ + [٤ - (٢)٦](٢)٢ + [١ + (٢)٤]٢ \stackrel{؟}{=} ٨ + [٦ + (٢)٢](٢)٣ + [٢ - (٢)٥](٢)٢$
بسّط	$٥٠ + (٨)٤ + (٩)٢ \stackrel{؟}{=} ٨ + (١٠)٦ + (٨)٤$
اضرب	$٥٠ + ٣٢ + ١٨ \stackrel{؟}{=} ٨ + ٦٠ + ٣٢$
اجمع	$\checkmark ١٠٠ = ١٠٠$

تحقق من فهمك ✓

(أ٤) $٢س(٤ + س) = ٧ + (٨ + س) = ٧ + (٤ + س)س + (١ + س)س$
 (ب٤) $١٦ - د٩ = (٤ - د)د - (٣ + د)د$

تأكد ✓

مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١) $٥٠(-٣٣٣ + ٢٣٣ - ٤ - ٤)$ (٢) $٦ج٢(٣ج٣ + ٤ج٤ + ١٠ج١ - ١)$

(٣) $٣-٤ل٣ر٤(٢ل٢ر٤ - ٤ل٢ر٦ - ٣ر٦ - ٥)$ (٤) $٢أب(١٧أ٤ب٢ + ٢أ٥ب - ١٢)$

مثال ٢

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(٥) $٥(٤٢ + ١٥ + ٢) - (٤ + ١٥ + ٢)$ (٦) $٦س(٣س٢ + ٤) + (٣س٢ - ٧)$

(٧) $٧د٢(د٣ج٢ - ٢ج٢ - ٤د٤ + ٢ج٢ + ٢د٢ج٢) + (دج٢ - ٢د٣)$

مثال ٣

(٨) **تلفاز:** اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات.

مثال ٤

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

(٩) $٦(١١ - ٢ج) = ٧(٢ - ٢ج)$ (١٠) $١٠(٣ + ن) + ٢٠ = ٢(٣ - ن)$

(١١) $٦(٣ + أ) + (٦ - أ) = ٣٥ + (٥ - أ) + (٧ + أ)$

مثال ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٢) ب (ب^٢ - ١٢ب + ١) (١٣) ٢ج^٢ (٥ج^٣ - ١٥ج^٢ + ٢ج + ٢)

(١٤) ٢ر^٢ (٢ر^٢ + ٥ر + ١٥ب) (١٥) ٤ن^٣ل (٢ن^٢ل - ١٠نل + ٤)

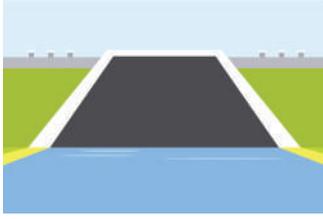
مثال ٢

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(١٦) ٣(٥س^٢ + ٢س + ٩) + س(٢س - ٣) أ (١٧) ٤(٨أ^٢ + ٢أ + ٤) + ٣(٦أ - ٤)

(١٨) ٤د(٥د^٢ - ١٢) + ٧(د + ٥) (١٩) ٩ج(٢ج - ٢ج + ٢ج) + ٣(ج^٢ + ٤)

(٢٠) ٤ن(٢ن^٣ب^٢ - ٣ن^٢ب + ٥ن) + ٤ب(٦ن^٢ب - ٢ن^٢ب + ٣ب)



مثال ٣

(٢١) سدود: واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية مثلاً ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{1}{5}$ ارتفاعها بـ ١٠ أمتار. أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة.

ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ متراً، فأوجد هذه المساحة.

مثال ٤

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية:

(٢٢) ٧(٢ن^٢ + ٥ن - ٩) + ن = ن(٧ - ٢) + ١٣

(٢٣) ٥(٤ع + ٦) - ٢(ع - ٤) = ٧ع(٤ + ع) - ع(٧ - ٢) - ٤٨

(٢٤) ٩ج(ج - ١١) + ١٠(ج - ٥) = ٣ج(ج + ٥) + ج(٦ - ٣) - ٣٠

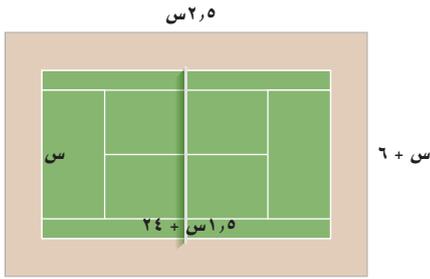
(٢٥) ٢ن(٥ن - ٢) - ١٠(٢ن^٢ - ٣ن + ٦) = ٨ن(٤ + ن) + ٤(٢ن^٢ - ٧ن)

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(٢٦) $\frac{٢}{٣}ن$ ب (٣٠ب^٢ + ٩ب - ١٢) (٢٧) $\frac{٣}{٥}ر$ ل (١٠ر^٣ + ٥ر^٢ + ١٥ر)

(٢٨) - س^٢ع (٤س^٢ + ٢س^٢ + ٤س^٣) + س^٢ع (٥س^٣ + ٤س^٢) + س^٢ع (٣س^٣ + ٤س^٢)





(٢٩) **تنس أرضي:** يبني نادي التنس ملعبًا جديدًا يحيط به ممر منتظم، كما في الشكل المجاور.
 (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة ملعب التنس.
 (ب) اكتب عبارة تمثل مساحة الممر.



الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصّف ملعبًا مستطيلًا. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقُّع اتجاه الكرة.

(٣٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

(أ) **جدوليًّا:** اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدد درجة ناتج الضرب. وأخيرًا سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

الدرجة	وحيدة الحد	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

(ب) **لفظيًّا:** خمن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٣١) **تحديد:** أوجد قيمة ب التي تجعل $3س^3 ب(4س^2 ب + 3س^3 + 2س^2 ب - 3س^3) = 12س^12 + 6س^10$
- (٣٢) **تبرير:** هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: $(س + 2)^2 = 2س^2 + 2$ صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفسّر إجابتك.
- (٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما.
- (٣٤) **اكتب:** صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

(٣٦) إذا كانت $5س + 7ص = أ + ب$ ، $2ص - 3س = ب$ ، فأوجد

- (أ) $2س - 9ص$ (ج) $2س + 9ص$
 (ب) $3ص + 4س$ (د) $2س - 5ص$

(٣٥) يبيع محل ملابس م بنظالاً، قميصاً أسبوعياً، فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالاً، والبنظال ١٢٠ ريالاً. فأي العبارات الآتية تمثل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمنًا لذلك؟

- (أ) $80م + 120ن$ (ج) $200(م + ن)$
 (ب) $120م + 80ن$ (د) $9600م$



مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

$$(٣٩) \quad (٨ج٣ - ٣ج٢ + ٢ج - ٢) - (٣ج٣ + ٩)$$

$$(٣٨) \quad (٧ + ٢أ٤) - (٤ + ٢أ٣ - ٣أ)$$

$$(٣٧) \quad (٦ - ٢ع) + (١ - ٢ع + ٢ع٣)$$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦-٣)

$$(٤٢) \quad ٣ب٤ر٥ن٢$$

$$(٤١) \quad ١٠ -$$

$$(٤٠) \quad ١٢ص$$

بسِّط كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-١)

$$(٤٥) \quad ٤ب٢ + (٣ب٢ - ٢ب)٢ + (٥ب٦)$$

$$(٤٤) \quad ٢م٢ - (٤م٤ - ٣) - (٣م٥)$$

$$(٤٣) \quad ٤ص - (٢ص٣)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلاً مما يأتي:

$$(٤٨) \quad ٤ص - (٢ص٣)$$

$$(٤٧) \quad ٢ص٣ - (٣ص٢)$$

$$(٤٦) \quad ب٢(ب٢) - (ب٣)$$

$$(٥١) \quad ٤ب٢ + (٣ب٢ - ٢ب)٢ + (٥ب٦)$$

$$(٥٠) \quad ٢م٢ - (٤م٤ - ٣) - (٣م٥)$$

$$(٤٩) \quad ٣ع٣ - (٤ع٥ + ٢ع)$$





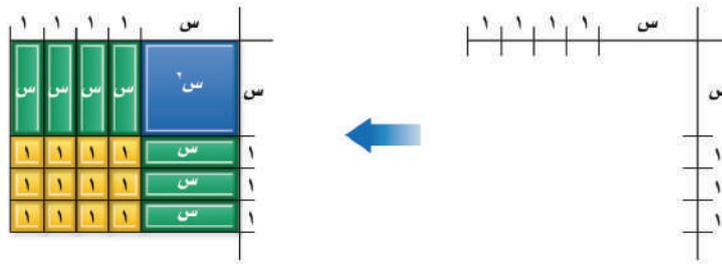
٦-٦ ضرب كثيرات الحدود

يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س + ٣)(س + ٤)$.

حدّد بعدي المستطيل: $س + ٣$ ، $س + ٤$ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات $س$ ، ١٢ بطاقة ١

وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي $س^٢ + ٧س + ١٢$

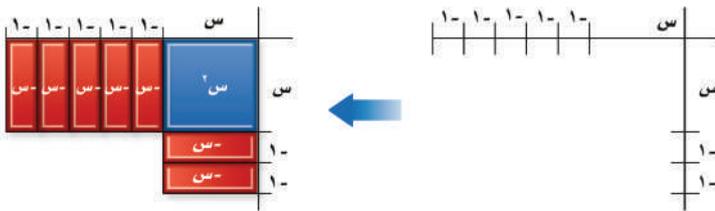
إذن $(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢$

نشاط ٢ ضرب ثنائي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س - ٢)(س - ٥)$.

الخطوة ١: حدّد بعدي المستطيل $س - ٢$ ، $س - ٥$

ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضح في الشكل المقابل.



الخطوة ٢: حدّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات -١ لتكملة المستطيل.

بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب -١ في -١، لذا املأ الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.

يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^٢$ ، ٧ بطاقات - $س$ ، ١٠ بطاقات ١

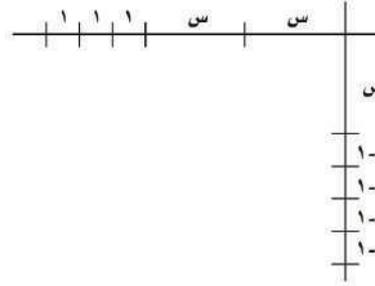
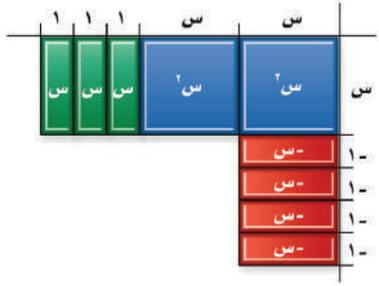
فتكون مساحة المستطيل $س^٢ - ٧س + ١٠$.

لذا فإن $(س - ٢)(س - ٥) = س^٢ - ٧س + ١٠$

نشاط ٣

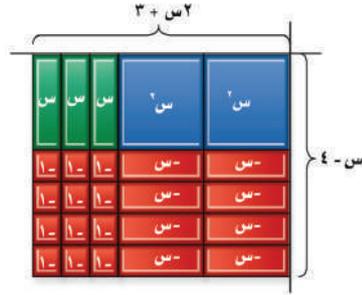
ضرب ثنائي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(س - ٤)(س + ٣)$.



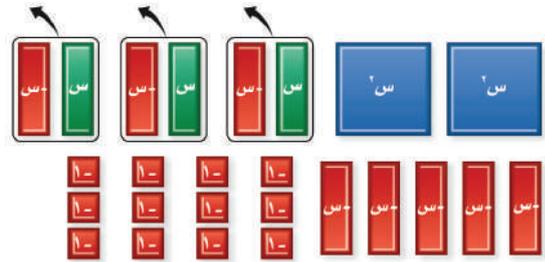
الخطوة ١: حدّد بُعدي المستطيل

س - ٤، ٣ + س. ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضح في الشكل المجاور.



الخطوة ٢: حدّد أي بطاقات الجبر س - أم س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم ١-

ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة - س هي حاصل ضرب س في ١- و البطاقة ١- هي حاصل ضرب ١ في ١-. استعمل للمستطيل ثماني بطاقات - س، وثلاث بطاقات س و ١٢ بطاقة ١-.



الخطوة ٣: أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها،

ولاحظ أن ٣ أزواج صفوية تشكّلت من ٣ بطاقات س، و ٣ بطاقات - س. و يوجد بطاقتان س، و ٥ بطاقات - س، و ١٢ بطاقة ١-، إذن $(س - ٤)(س + ٣) = ٣س + ٢س - ٥س - ١٢$.

التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كل مما يأتي:

(١) $(س + ١)(س + ٤)$ (٢) $(س - ٣)(س - ٢)$ (٣) $(س + ٥)(س - ١)$

(٤) $(س + ٢)(س + ٣)$ (٥) $(س - ١)(س - ٢)$ (٦) $(س + ٤)(س - ٥)$

(٧) هل العبارة $(س + ٣)(س + ٥) = ١٥ + ٢س + ٥س$ صواب أم خطأ؟ تحقّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.

(٨) **اكتب:** بيّن الشكل المجاور تمثيلاً لـ $(س + ٤)(س + ٥)$ مقسماً إلى ٤ أجزاء. فسّر كيف يظهر هذا التمثيل

استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.





ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟



لخياطة ثوب نستخدم قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بعدها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه. فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو $ع + ١٨٠$ وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافاً إليه ٢٧ سم، أو $ع + \frac{١}{٢} + ٢٧$. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج $(ع + ١٨٠)(ع + \frac{١}{٢} + ٢٧)$.

فيما سبق

درست ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المضردات

طريقة التوزيع بالترتيب
العبارة التربيعية

ضرب ثنائيتي حد: تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد مثل $ع + ١٨٠$ ، $ع + \frac{١}{٢} + ٢٧$. ويمكن ضرب ثنائيتي الحد أفقيّاً أو رأسيّاً.

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلّ مما يأتي:

$$(أ) (٣ + س)(٥ + س)$$

الطريقة الرأسية

اضرب في س

$$٣ + س٢$$

$$٥ + س(س)$$

$$٢س٢ + ٣س$$

$$١٥ + س١٠$$

اضرب في ٥

$$٣ + س٢$$

$$٥ + س(س)$$

$$٢س٢ + ٣س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٣ + س٢$$

$$٥ + س(س)$$

$$٢س٢ + ٣س$$

$$١٥ + س١٠$$

$$١٥ + س١٣ + ٢س٢$$

$$١٥ + س١٠ = (٣ + س)٥ \quad س(٣ + س) = ٣س + ٢س٢$$

الطريقة الأفقية:

$$(٣ + س)(٥ + س) = (٥ + س)٣ + (٥ + س)س٢ =$$

$$١٥ + س١٣ + ٢س٢ =$$

$$١٥ + س١٣ + ٢س٢ =$$

اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

خاصية التوزيع

اجمع الحدود المتشابهة

$$(ب) (س - ٢)(٤ + س٣)$$

الطريقة الرأسية:

اضرب في س٣

$$٢ - س$$

$$٤ + س٣(س)$$

$$٢س٣ - ٦س$$

$$٨ - س٤$$

اضرب في ٤

$$٢ - س$$

$$٤ + س٣(س)$$

$$٢س٣ - ٦س$$

اجمع الحدود المتشابهة

$$٢ - س$$

$$٤ + س٣(س)$$

$$٢س٣ - ٦س$$

$$٨ - س٤$$

$$٨ - س٤ = (س - ٢)٤$$

$$٨ - س٤ = (س - ٢)٤ \quad ٢س٣ - ٦س = (س - ٢)س٣$$

الطريقة الأفقية :

$$\begin{aligned} \text{اكتبها كفرق بين حاصل ضرب} & (س - ٢)(٤ + س٣) = س(٤ + س٣) - ٢(٤ + س٣) \\ \text{خاصية التوزيع} & ٤س + ٣س٢ - ٨ - ٢س - ٦س = ٨ - س٦ - ٤س + ٣س٢ \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & ٨ - ٢س - ٢س٢ = ٣س٢ - ٢س - ٨ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(أ) (٤ + م)(٤ + م) \quad (ب) (٥ - ص)(٢ + ص)$$

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائي حد بطريقة التوزيع بالترتيب.

اضف الى مطويتك

مفهوم أساسي

طريقة التوزيع بالترتيب

التعبير اللفظي لضرب ثنائي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثال

ناتج ضرب الحددين الأخيرين	ناتج ضرب الحددين الأوسطين	ناتج ضرب الحدين في الطرفين	ناتج ضرب الحددين الأولين	=	(س - ٢)(٤ + س)
↓	↓	↓	↓		(س - ٢)(٤ + س)
(٢-)(٤)	+ (س)(٤)	+ (٢-)(س)	+ (س)(س)	=	(س - ٢)(٤ + س)
					٨ - س٤ + س٢ - ٢س =
					٨ - ٢س + ٢س =

قراءة الرياضيات

كثيرات الحدود كعوامل:

تقرأ العبارة (س + ٤)(س - ٢) على الصورة س زائد ٤ مضروباً في س ناقص ٢

مثال ٢ طريقة التوزيع بالترتيب

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(أ) (٥ + ص٣)(٧ - ص٢)$$

$$\begin{aligned} \text{طريقة التوزيع بالترتيب} & (٥ + ص٣)(٧ - ص٢) = (٥)(٧) + (ص٣)(٧) + (٥)(ص٢) + (ص٣)(ص٢) \\ \text{اضرب} & ٣٥ + ٢١ص + ١٠ + ٢ص٦ = ٣٥ + ٢١ص - ١٠ + ٢ص٦ \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & ٣٥ - ١٠ + ٢١ص + ٢ص٦ = ٢٥ + ٢٣ص \end{aligned}$$

$$(ب) (٩ - أ٢)(٥ - أ٤)$$

$$(٩ - أ٢)(٥ - أ٤)$$

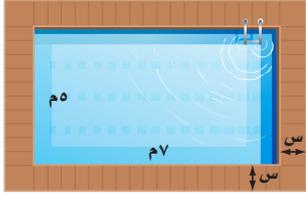
$$\begin{aligned} \text{طريقة التوزيع بالترتيب} & (٩ - أ٢)(٥ - أ٤) = (٩)(٥) + (أ٢)(٥) + (٩)(-أ٤) + (-أ٢)(-أ٤) \\ \text{اضرب} & ٤٥ + ٥أ٢ - ٣٦ - ٢أ٨ = ٤٥ + ٥أ٢ - ٣٦ - ٢أ٨ \\ \text{اجمع الحدود المتشابهة} & ٤٥ - ٣٦ + ٥أ٢ - ٢أ٨ = ٩ + ٥أ٢ - ٢أ٨ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(أ) (٥ - ب٣)(٢ + ب٣) \quad (ب) (٥ - ص٢)(٥ - ص)$$

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أعطي بعدهاء على صورة ثنائي حد.

مثال ٣ من واقع الحياة التوزيع بالترتيب



بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو s متر. فاكتب عبارة تمثل مساحة سطح البركة والممر معاً.

افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة سطح البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار $2s$ ، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـ $7 + 2s$ والعرض بـ $5 + 2s$

مساحة المستطيل

بالتعويض

طريقة التوزيع بالترتيب

اضرب

اجمع الحدود المتشابهة

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض}$$

$$= (7 + 2s)(5 + 2s)$$

$$= 2s(5 + 2s) + (7)(5 + 2s)$$

$$= 10s + 4s^2 + 35 + 14s$$

$$= 4s^2 + 24s + 35$$

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معاً هي $4s^2 + 24s + 35$

تحقق: اختر قيمة لـ s وعوّضها في العبارتين $(7 + 2s)(5 + 2s)$ ، $4s^2 + 24s + 35$ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكلتا العبارتين.

تحقق من فهمك

(٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة سطح البركة والممر معاً.

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضاً لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

مثال ٤ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

$$(أ) (5 + 6s)(5 - 3s - 2s^2)$$

$$(5 + 6s)(5 - 3s - 2s^2)$$

$$= 6s(5 - 3s - 2s^2) + 5(5 - 3s - 2s^2)$$

$$= 30s - 18s^2 - 12s^3 + 25 - 15s - 10s^2 - 2s^3$$

$$= 15s - 28s^2 - 14s^3 + 25$$

$$(ب) (2ص٢ + ٣ص - ١)(١ - ٣ص + ٥ص٢)$$

$$(2ص٢ + ٣ص - ١)(١ - ٣ص + ٥ص٢)$$

$$= 2ص٢(١ - ٣ص + ٥ص٢) + ٣ص(١ - ٣ص + ٥ص٢) - ١(١ - ٣ص + ٥ص٢)$$

$$= 2ص٢ - ٦ص٣ + ١٠ص٤ - ٣ص + ٩ص٢ - ١٥ص٣ + ٥ص٤ - ١ + ٣ص - ٥ص٢$$

$$= 2ص٢ - ٤ص٣ - ١١ص + ١٤ص٢ - ١$$

تحقق من فهمك

$$(ب٤) (٣ - ٢م + ٢م٢)(٥ + ٧م - ٢م٢)$$

$$(أ٤) (٥ - ٣س)(٨ - ٧س + ٢س٢)$$



الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

إرشادات للدراسة

ضرب كثيرات الحدود

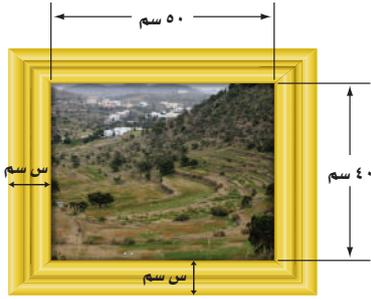
عند ضرب كثيرة حدود تحوي m حداً في أخرى تحوي n حداً، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي $m \times n$ حداً، وفي المثال (أ٤) ناتج الضرب يحوي $3 \times 2 = 6$ حدود قبل التبسيط.

المثالان ٢، ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١) (٥ + س)(٢ + س) \quad (٢) (٢ - ص)(٤ + ص) \quad (٣) (٧ - ب)(٣ + ب)$$

$$(٤) (٣ + ن)(٩ + ن) \quad (٥) (١ - هـ٨)(٣ - هـ٢) \quad (٦) (٩ + أ٢)(٦ - أ٥)$$



(٧) **إطار صورة:** صمّم خالد إطارًا للصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.

مثال ٣

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(٨) (٣ - ٢ ص٤)(٢ ص٧ + ٢ + ص٢)$$

$$(٩) (٥ + س٤ - ٢ س٣)(٤ - س٣)$$

مثال ٤

تدرب وحل المسائل

المثالان ٢، ١

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١٠) (٤ - ص٣)(٥ - ص٤) \quad (١١) (٥ - د٤)(٧ - د٦) \quad (١٢) (٥ + م٢)(٣ + م٢)$$

$$(١٣) (٥ - ن١٢)(٥ + ن١٢) \quad (١٤) (٧ + ر٥)(٧ - ر٥) \quad (١٥) (٥ + ل٨)(٥ - ل٦)$$

(١٦) **حديقة:** يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

مثال ٣

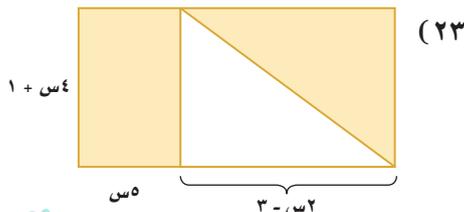
أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

$$(١٧) (١١ - ص٢)(٢ ص٣ - ٢ + ص٢) \quad (١٨) (٧ + أ٤)(٧ - أ٢ + ٢ أ٩)$$

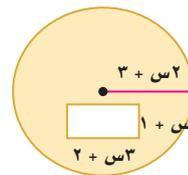
$$(١٩) (١ - س٥ + ٢ س٦)(١ + س٦ - ٢ س٥) \quad (٢٠) (٢ - ع٥ - ٢ ع٦)(٢ - ع٣ - ٣ ع٤)$$

$$(٢١) بسّط العبارة: (٢ + م) [(٢ م + ٦) + (٢ م - ٢ م + ٤)]$$

هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



(٢٣)



(٢٢)

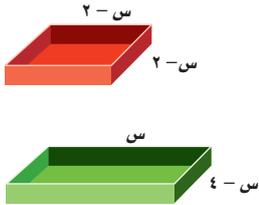
(٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص - ٥) متر، (٨ص + ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

(ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

(٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س + ٣، وارتفاعه ٣س - ١

(٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانباً.



(أ) ما قيم س الممكنة؟ فسّر إجابتك.

(ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟

(ج) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟

(٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

العبارة	العبارة ^٢
	س + ٥
	٣ص + ١
	ع + ك

(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي وأكمله.

(ب) لفظياً: اكتب جملة توضح كيفية الحصول على مربع مجموع حدين.

(ج) رمزياً: اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٨) **تبرير:** وضح إذا كانت العبارة "يمكن استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود" صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً، وفسّر إجابتك.

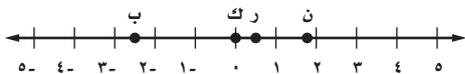
(٢٩) **تحّد:** أوجد ناتج: (س + ٢س)(س - ١ - ٢س - ١س + ٢س + ٣س).

(٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيراً واحداً، ثم أوجد ناتج ضربهما.

(٣١) **اكتب:** لخص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

(٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً مكعبه أكبر منه؟



(٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٢س - ٥، ٣س + ٤؟

(أ) ١ - ٥ (ج) ٢س - ٢٠

(ب) ٢س - ٧ - ٢س - ٢٠ (د) ٢س + ٧ - ٢س - ٢٠

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

$$(34) \quad (10 + 2^3) + (5 - 2^7) \quad (35) \quad (8 - 2^2 - 2^2) + (4 - 2^6) \quad (36) \quad (3 + 4 + 8 + 2) - (2 + 5 + 8 + 2)$$

بسِّط كلاً من العبارات الآتية: (الدرس ٦-١)

$$(37) \quad (2 - 2^4)^3 - 3(2 - 2^3)^4 \quad (38) \quad (2 - 2^3)^2 - 3(2 - 2^3)^2 \quad (39) \quad 2(5 - 2^3)^2 + 3(3 - 2^3)^2$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلاً مما يأتي:

$$(40) \quad (2 - 2^4)^3 - 3(2 - 2^3)^4 \quad (41) \quad 3(2 - 2^6)^2 + 2(2 - 2^2)^2$$





حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟



يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهم إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهم هو $(نق + ١٢)$ ، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟
يعرف محمد أن قطر لوحة السهم هو $٢(نق + ١٢)$ ، فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي $٢(نق + ١٢)$. ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. $م = ٢(نق + ١٢)^٢$

فيما سبق

درست ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل $٢(نق + ١٢)$ لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع $(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب)$ هو أحد نواتج الضرب تلك.

$$\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{أ} \end{array} + \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{أ} \end{array} \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{أ} \end{array} \begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{أ} \end{array} = \begin{array}{c} \text{ب} + \text{أ} \\ \text{ب} + \text{أ} \end{array} \begin{array}{c} \text{ب} + \text{أ} \\ \text{ب} + \text{أ} \end{array} \\ \text{ب}^٢ + \text{أب} + \text{أب} + \text{أ}^٢ = (\text{ب} + \text{أ})^٢$$

أضف إلى

مطويتك

مربع مجموع حدين

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مربع $(أ + ب)$ هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافاً إليه مربع ب.

$$\text{الرموز: } (\text{أ} + \text{ب})^٢ = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) = \text{أ}^٢ + ٢\text{أب} + \text{ب}^٢$$

$$\text{مثال: } (\text{ع} + \text{س})^٢ = (\text{ع} + \text{س})(\text{ع} + \text{س}) = \text{ع}^٢ + ٢\text{عس} + \text{س}^٢$$

مربع مجموع حدين

مثال ١

أوجد ناتج: $٢(٥ + ٣س)$.

مربع المجموع

$$٢(أ + ب) = ٢أ + ٢ب$$

أ = ٣س، ب = ٥

$$٢(٥ + ٣س) = ٢(٣س) + ٢(٥) = ٦س + ١٠$$

بسط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

$$٩س + ٣٠ + ٢٥ =$$

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$١(ب) (٣س + ٤ص)^٢$$

$$١(أ) (٨ج + ٣د)^٢$$



ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب $-أ$ ب على صورة $أ + (-ب)$ ، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

$$\begin{aligned} \text{مربع مجموع حدين} \quad & (أ - ب)^2 = [أ + (-ب)]^2 = أ^2 + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^2 \\ & = أ^2 - ٢أب + ب^2 \end{aligned}$$

بسط

مفهوم أساسي مربع الفرق بين حدين

التعبير اللفظي: مربع $(أ - ب)$ هو مربع ناقص مثلي حاصل ضرب $أ$ في $ب$ مضافاً إليه مربع $ب$.

الرموز: $(أ - ب)^2 = (أ - ب)(أ - ب) = أ^2 - ٢أب + ب^2$

مثال: $(٣ - س)^2 = (٣ - س)(٣ - س) = ٩ - ٦س + س^2$

أضف إلى مطويتك

تنبيه

مربع الفرق بين حدين

تذكر أن ناتج $(س - ٧)^2$ لا يساوي $س^2 - ٧^2$ أو $س^2 - ٤٩$ ، وأن $(س - ٧)^2 = (٧ - س)^2 = س^2 - ١٤س + ٤٩$

مثال ٢ مربع الفرق بين حدين

أوجد ناتج: $(٢س - ٥ص)^2$.

مربع الفرق $(أ - ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$

$٢س = أ$ ، $٥ص = ب$

بسط $(٢س - ٥ص)^2 = (٢س)^2 - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^2 = ٤س^2 - ٢٠سص + ٢٥ص^2$

تحقق من فهمك

$(١٢ - ٦ب - ١)^2$ $(٢ب - ١ - ٢ب)^2$

يسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعاً كاملاً. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة مربع الفرق بين حدين

فيزياء: طول ضلع مكعب الألمنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـ ٤ سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألمنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.

ليكن $ج$ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألمنيوم $ج - ٤$

مساحة السطح $٦ل٦ =$ مساحة سطح المكعب

مساحة السطح $٦(ج - ٤) =$ عوّض عن $ل$ بـ $(ج - ٤)$

مساحة السطح $٦ = [ج - ٤]٢ - ٢(٤)(ج) + ٢٤$ مربع الفرق

مساحة السطح $٦ = (ج - ٤)٢ - ٨ج + ١٦$ بسط

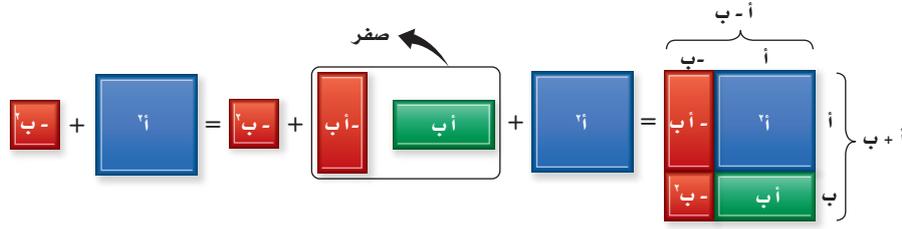
تحقق من فهمك

٣ حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ٣ مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

(أ) بيّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

(ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، $(أ + ب)(أ - ب)$. تذكر أنه يمكن كتابة $أ - ب$ على الصورة $أ + (-ب)$.



لاحظ أن كلاً من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر. لذا فإن $(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - أب + أب - ب^2 = أ^2 - ب^2$.

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن $أ$ ، $ب$ قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد و متغيرات.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

التعبير اللفظي: ناتج ضرب $(أ + ب)$ ، $(أ - ب)$ هو مربع ناقص مربع $ب$.

الرموز: $(أ + ب)(أ - ب) = (أ - ب)(أ + ب) = أ^2 - ب^2$

مثال ٤ ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

مثال ٤

أوجد ناتج: $(٣ + ٢س٢)(٣ - ٢س٢)$.

حاصل ضرب المجموع في الفرق

$$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$$

$$أ = ٢س٢، ب = ٣$$

$$(٣ + ٢س٢)(٣ - ٢س٢) = (٣ - ٢س٢)(٣ + ٢س٢) = ٣^2 - (٢س٢)^2$$

بسط

$$= ٩ - ٤س٤$$

تحقق من فهمك

$$(٤ب - ٤ج)(٤ب + ٤ج)$$

$$(٤أ - ٣ب)(٤أ + ٣ب)$$

تأكد

المثالان ١، ٢

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(٣ + ٢س٢)(٣ - ٢س٢)$$

$$(٢ - ١١أ)$$

$$(١ + ٥س)$$

$$(٦ + ٣ج)(٦ - ٣ج)$$

$$(٥ - ٤هـ)(٥ - ٤هـ)$$

$$(٤ - ٣م)(٤ - ٣م)$$

مثال ٣ (٧ ألعاب: تحوي لعبة القرص الطائر قرصاً على شكل دائرة نصف قطرها $(٤ + س)$ سم.

(أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

(ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ١٤ , ٣).

مثال ٤

أوجد ناتج كل مما يأتي:

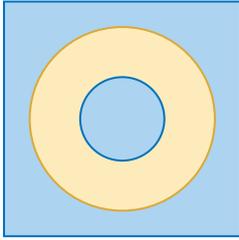
$$(١٠ + ٦ص)(١٠ - ٦ص)$$

$$(٩ + ٥س)(٩ - ٥س)$$

$$(٨ - ٣أ)(٨ + ٣أ)$$

المثالان ٢، ١ أوجد ناتج كلِّ مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (11) (أ+١٠)(أ+١٠) & (12) (ب-٦)(ب-٦) & (13) (هـ+٧)^2 \\ (14) (س+٦)^2 & (15) (م-٨)^2 & (16) (٩-٢ص)^2 \\ (17) (٣+ب)^2 & (18) (٢-٥ن)^2 & (19) (٨-٤ن)^2 \end{array}$$



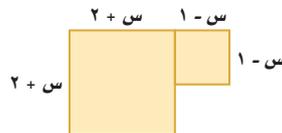
١٢ م

٢٠ مثال ٣ مصارعة: تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بـ ٣ أمتار. (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الدائرة الكبرى. (ب) اكتب عبارة تمثل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

٤ مثال ٤ أوجد ناتج كلِّ مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} (21) (ل+٣)(ل-٣) & (22) (س-٤)(س+٤) \\ (23) (ك+٢)(ك-٢) & (24) (٣+٢أ)(٣-٢أ) \\ (25) (٧+٥ص)^2 & (26) (٨-١٠أ)^2 \\ (27) (٣+٥ن)(٣-٥ن) & (28) (أ+٤ب)^2 \\ (29) (٣-ك)(٣+ك) & (30) (٢-ج)(٢+ج) \\ (31) (ب-٤أ)(ب+٤أ) & (32) (٥ص-٢ص)^2 \\ (33) (٢أ-٣ب)(٢أ+٣ب) & (34) (٨+٣ك)^2 \\ (35) (٤-ص)^2 & (36) (٥ص+٢ع)(٥ص-٢ع) \\ (37) (٣+م)(٣-م) & (38) (٢+ر)(٢-ر)(٥+ر) \end{array}$$

٣٩ هندسة: اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة الشكل أدناه.

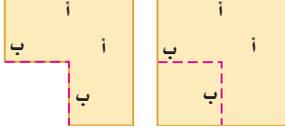


أوجد ناتج كل مما يأتي:

(٤٠) $(ج+د)(د+ج)(د+ج)$ (٤١) $(ب-أ)^3$ (٤٢) $(ج+ج)(ج-ج)(ج+ج)$

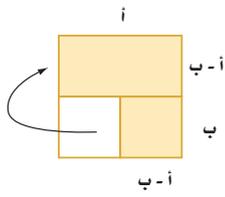
(٤٣) $(ك-م)(ك+م)(ك-م)$ (٤٤) $(ن-ب)^2(ن+ب)$ (٤٥) $(ك+ر)^2(ك-ر)$

(٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعاً صغيراً في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

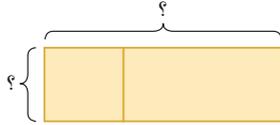


(أ) عددياً: أوجد مساحة كل مربع.

(ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟



(ج) تحليلياً: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟



(د) تحليلياً: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، ج؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

$(ج+د)(د+ج)$

$(د+ج+٢)(د+ج+٢)$

$(د+ج+٢)(د-ج-٢)$

$(د-ج-٢)(د-ج-٢)$

(٤٨) **تحّد:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع $(أ+ب)^3$ ؟

(أ) استقص إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: $(أ+ب)(أ+ب)(أ+ب)$.

(ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: $(س+٢)^3$.

(٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة ج التي تجعل من العبارة $٢٥س^٢ - ٩٠س + ج$ مربعاً كاملاً.

(٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما.



تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب $(3-2)$ $(3-2)$ ؟

أ) $9+112+24$ ج) $9-112-24$

ب) $9+24$ د) $9+112-24$

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦ كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟

أ) $\frac{3}{15}$ م ج) ٥ م

ب) ١٨٠ م د) $\frac{1}{5}$

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج $(4-3)(2-7)$: (الدرس ٦-٦)

٥٤) بسّط العبارة $3(6-4) + 2(\frac{1}{4}b - 3)$: (الدرس ٦-٥)

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(4, 7)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلاً من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

٥٩ (١٦٥)

٥٨ (٩٠٠)

٥٧ (١٢٠)

٥٦ (٤٠)

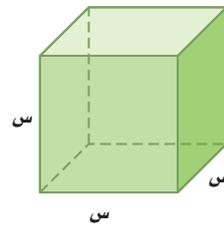


بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(١) $(٢س٧)(٨س٧)$

(٢) $(٥أ٧ب٦ج٢)(٦أ٦ب٢ج٥)$

(٣) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسم أدناه كوحيدة حد:



(أ) $٣س٣$

(ب) $٦س٦$

(ج) $٦س٦$

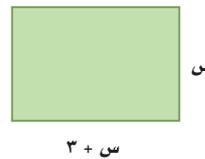
(د) $٦س٦$

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

(٤) $(٧ + س) + (٥س - ٢س٣)$

(٥) $(٧ - ٨ن٢ + ٣ن) - (٤م٢ + ٣ن - ٣م)$

(٦) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبيّنة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟



(أ) $٣س٢ + ٢س٣$

(ب) $٥س٢ + ٣س - ٥$

(ج) $١٠س٢ + ٦س - ١٠$

(د) $١٢س + ٨$

بسّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضًا أن أي مقام لا يساوي صفرًا:

(٧) $\frac{٨س٦ص٦}{٢س٢}$

(٨) $\left(\frac{٢٤ب٣}{٦ج٦}\right)$

(٩) $\frac{٢س٧ص٧}{٨س٨}$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(١٠) $(١٠ - ٢ + ٢أ)$

(١١) $(٥ + ٣أ)(٥ - ٢أ)$

(١٢) $(٣ - س)(٣ + ٢س - ٥س)$

(١٣) $٢(٣ + س)$

(١٤) $(٥ + ٢ب)(٥ - ٢ب)$

(١٥) **هندسة:** منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي:

س، س + ٣، ٢ + س، ٥

(أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س.

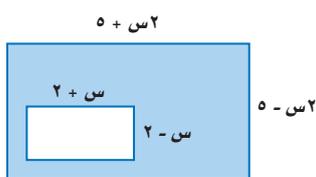
(ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟

حل كل معادلة فيما يأتي:

(١٦) $٥(٢ن - ٣) = (٢ + ٣ن - ٢)$

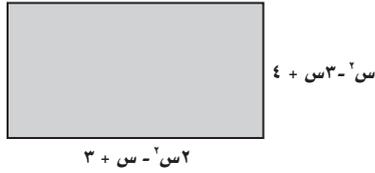
(١٧) $٣س(٣ - ٢س) = (٢ + س)٣$

(١٨) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



اختيار من متعدد

٤) عبّر عن محيط المستطيل أدناه بصورة كثيرة حدود.



(أ) $٧ + س٣ - ٢س٤$

(ب) $٧ + س٣ + ٢س٤$

(ج) $١٤ + س٦ - ٢س٨$

(د) $٧ + س٦ - ٢س٤$

٥) أوجد ناتج طرح: $(٥ + ٢أ٣ + ٣أ٤) - (٢ - أ٦ + ٢أ٧)$

(أ) $٧ - أ٦ + ٢أ٤ + ٣أ٤$

(ب) $٧ - أ٣ + ٢أ١١$

(ج) $٣ + أ٦ + ٢أ١٠ + ٣أ٤$

(د) $أ٣ - ٣أ٧ + ٣أ٤$

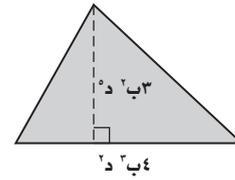
٦) بسّط العبارة: $\frac{٢ل٣ - ٤ل٣}{٤ل٣ - ٤ل٣}$

(أ) $\frac{٦ل٣}{٦ل٣}$ (ج) ل٢

(ب) $\frac{٦ل٣}{٦ل٣}$ (د) ه٦ل٢

اقرأ كل سؤالٍ ممّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١) عبّر عن مساحة المثلث أدناه في صورة وحيدة حد؟



(ج) $٦ب٢د١٠$

(د) $٦ب٢د٧$

(أ) $١٢ب٢د٧$

(ب) $١٢ب٢د١٠$

٢) بسّط العبارة $\left(\frac{٢ع٢ل٥}{٤س٣}\right)^٣$

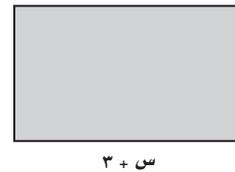
(ج) $\frac{٨ل٥٤٨}{٧س٢٧}$

(د) $\frac{١٥ل٦٤٢}{١٢س٣}$

(أ) $\frac{٨ل٥٤٢}{٧س٣}$

(ب) $\frac{١٥ل٦٤٨}{١٢س٢٧}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $٩ - ٢س$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟



(ج) $٩ - س$

(د) $٣ - س$

(أ) $٣ + س$

(ب) $٩ + س$

إرشادات للاختبارات

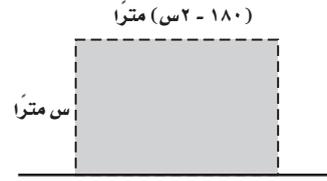
سؤال ٢: استعمل قوانين الأسس لتبسيط العبارة، وتذكر أنه لإيجاد أس الأس، نضرب الأسس.



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) يريد مزارع زراعة قطعة الأرض المستطيلة المبيّنة في الشكل:



(أ) اكتب كثيرة حدود تعبر عن مساحة الأرض.

(ب) أوجد مساحة قطعة الأرض، إذا كان عرضها ٤٠ متراً.

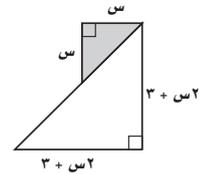
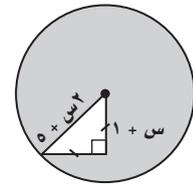
(٨) اكتشف المختلف: أي العبارات التالية مختلفة؟ فسّر إجابتك.

$$(٣ - م) (٢ - ن)$$

$$(٣ + م) (٢ + ن)$$

$$(٣ - م) (٢ + ن)$$

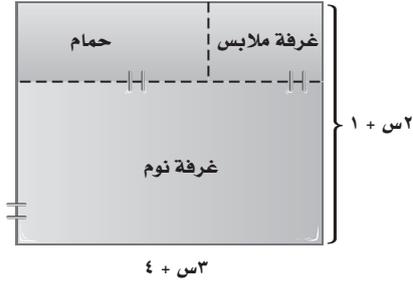
اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(١١) المخطط التالي يبيّن تفاصيل جناح نوم:



(أ) أوجد مساحة الجناح كاملاً.

(ب) إذا كان عرض غرفة الملابس س، وطولها س + ١، فأوجد مساحة غرفة الملابس.

(ج) أوجد مساحة الحمام.

(د) أوجد مساحة غرفة النوم.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..

التحليل والمعادلات التربيعية



فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّ وحيدات الحد.
- أحلّ ثلاثيات الحدود.
- أحلّ الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

لماذا؟

هندسة عمارة: يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

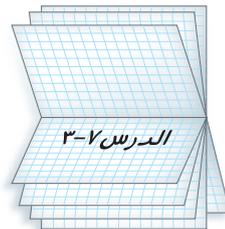
المفردات:

- الصيغة التحليلية ص (١٠٠)
- تحليل كثيرة الحدود ص (١٠٤)
- المعادلة التربيعية ص (١١٥)
- كثيرة الحدود الأولية ص (١٢٣)

المطويات منظم أفكار

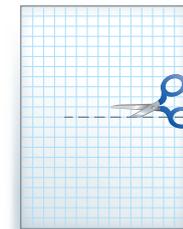
التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئاً بأربع أوراق مربعات.

٢ **أدخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمّ الورقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

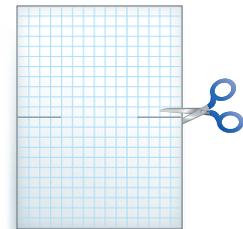


١ **اطو** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضياً، وقصّ ٥ سم بدءاً من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقّف على بعد ٥ سم من طرفيها.

الورقتان الأخريتان



الورقتان الأوليتان





التهيئة للفصل ٧

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:

$$٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س), \text{ ثم بسّطها.}$$

$$٦س(-٣س - ٥س - ٥س + ٢س + ٣س)$$

$$= ٦س(-٣س) + ٦س(-٥س) + ٦س(-٥س) + ٦س(٢س) + ٦س(٣س)$$

$$= -١٨س - ٣٠س - ٣٠س + ١٢س + ١٨س$$

$$= -٤٨س + ٣٠س + ١٢س$$

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-٥)

$$(١) أ(٥ + أ) + ٢(٣ + س)$$

$$(٣) ن(٣ + ٢) - ٤(٦ - ٥س + ٦)$$

(٥) **مال:** ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي، فاشترى كل منهم بطاقة دخول بـ ٩ ريال، وعلبة عصير بـ ٣ ريال، وشطيرة بـ ٦ ريال. فاكتب عبارة تمثل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعاً.

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: $(٣ + س)(٢ - س)$.

$$(٣ + س)(٢ - س) \quad \text{العبارة الأصلية}$$

$$= ٣(٢) + س(٢) + س(٢) + (٢) = \text{طريقة التوزيع بالترتيب}$$

$$٦ + ٢س + ٢س + ٢$$

$$= ٢س + ٢س + ٦ + ٢ = \text{اضرب}$$

$$= ٢س + ٤س + ٨ = \text{اجمع الحدود المتشابهة}$$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٦)

$$(٦) (٢ + س)(٥ - س)$$

$$(٧) (٤ + س)(١ - س)$$

$$(٨) (٣ - أ)(٤ + أ)$$

$$(٩) (٤ - س)(٥ + س)$$

$$(١٠) (٤ + س)(٧ + س)$$

$$(١١) (٢ - ب)(٩ + ب)$$

(١٢) **مفْرش مائدة:** مفْرش مائدة مستطيل الشكل إذا كان طوله $(٢س + ٣)$ ، وعرضه $(س + ١)$ ، فاكتب عبارة تُمثل مساحته.

مثال ٣

أوجد ناتج: $(٨ + ص)٢$.

$$(٨ + ص)٢ = ٨٢ + ٢(٨)(ص) + ص٢ = \text{مربع مجموع حدّين}$$

$$= ٦٤ + ١٦ص + ص٢ = \text{بسّط}$$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

$$(١٣) (٣ - أ)٢$$

$$(١٤) (٥ + س)٢$$

$$(١٥) (٣ - ٢ص)٢$$

$$(١٦) (٥ + س)(٥ - س)$$

(١٧) **تصوير:** صورة بُعداها: $(٦ + س)$ سم،

$(٦ - س)$ سم. فما مساحتها؟



تحليل وحيدات الحد

لماذا؟

تعمل هند قلائد خرز، فإذا كان لديها ٦٠ خرزة فضية اللون، و ١٥ خرزة ذهبية اللون، وترغب في أن تحتوي القلادة الواحدة على نوع واحد من الخرز، وفي كل منها العدد نفسه، وتحوي كل منها أكبر عدد من الخرز، فستحتاج هند إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٦٠ و ١٥



تحليل وحيدات الحد: تحليل وحيدات الحد يشبه تحليل الأعداد الكلية. وتكون وحيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأس ١

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول: إننا حللنا وحيدة الحد تحليلًا تامًا.

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد.

والآن

- أحلل وحيدة الحد إلى عواملها.
- أجد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحد.

المفردات

الصيغة التحليلية

القاسم المشترك الأكبر

(ق.م.أ)

مثال ١

تحليل وحيدة الحد

حلل: $20s^3 - 2s^2$ تحليلًا تامًا.

$$20s^3 - 2s^2 = 2s^2 \times 10s \times 1 - 2s^2$$

$$= 2s^2 \times 10 \times 2 \times 1 - 2s^2$$

$$= 2s^2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 1 - 2s^2$$

$$20 \times 1 = 20 -$$

$$20 = 2 \times 10, 3s = 3s \times s \times s,$$

$$2s^2 = 2 \times s \times s$$

$$10 \times 2 = 20$$

لذا، فإن التحليل للعوامل لوحيدة الحد $20s^3 - 2s^2$ هو: $2s^2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 1 - 2s^2$.

تحقق من فهمك

حلل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

$$(أ) 52s^2 - (ب)$$

$$34s^3 - (ب)$$

القاسم المشترك الأكبر: قد يكون لعددين كليين أو أكثر بعض العوامل الأولية المشتركة. ويُسمى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة القاسم (العامل) المشترك الأكبر لها.

القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملاً لكل من هذه الأعداد، ويمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدتي حد أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال ٢

القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحيدات الحد

أوجد (ق.م.أ) لوحيدتي الحد $112s^2$ ج، $118s^3$.

حلل كل وحيدة حد تحليلًا تامًا

$$112s^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 2 \times 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 1 \times 7$$

ضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

$$118s^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 \times 7 \times 1 \times 7$$

إذن، (ق.م.أ) لوحيدتي الحد $112s^2$ ج، $118s^3$ هو $2 \times 2 \times 2 \times 7 = 28s^2$.



تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحدات الحد الآتية:

(أ) ٦ ص ٣، ١٨ ص ع (ب) ١١١ أ، ٢١ أ (ج) ٣٠ ك ٣ ر، ٥٠ ك أ ر ن

مثال ٣ من واقع الحياة إيجاد (ق.م.أ)

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و ٣٠ زنبقة لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠

$20 = 2 \times 10$ اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

$30 = 2 \times 3 \times 5$ العاملان الأوليان المشتركان هما: ٢، ٥

(ق. م. أ) للعددين ٢٠ و ٣٠ هو $10 = 2 \times 5$ ؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن $20 = 10 \times 2$ ، $30 = 10 \times 3$ ؛ لذا فستحتوي كل باقة على ٣ وردتين و ٢ زنابق.

تحقق من فهمك

(٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ٨٤ سم^٢، ٧٠ سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان؟

تأكد

مثال ١

حلل كل وحدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١) ١٢ ج هـ^٤ (٢) ٣٨ ر ب^٢ ن^٢

(٣) ١٧ ص^٣ ع^٢ (٤) ٢٣ أ ب^٣

المثالان ٢، ٣

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحدات الحد الآتية:

(٥) ٢٤ ج د^٣، ٤٨ ج د^٢ (٦) ٧ ج هـ، ١١ م ب

(٧) ٨ ص^٢، ٣١ ص^٣ (٨) ١٠ أ ب، ٢٥ أ

(٩) **هندسة:** ما أكبر قيمة يمكن أن تمثل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتهما ١٥ سم^٢، ١٦ سم^٢، علمًا بأن بُعدي كل منهما عدنان كليان.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

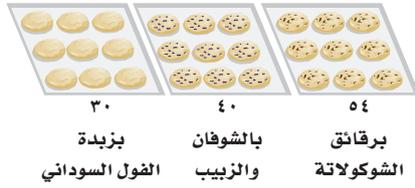
حلل كل وحدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١٠) ٩٥ ص^٢ (١١) ٣٥ أ ج^٣ (١٢) ٤٢ ج هـ^٣

(١٣) ٨١ ن^٥ ب (١٤) ١٠٠ ك^٤ ر (١٥) ١٢١ أ ب ج^٣

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

- (١٦) ٢٥س٣، ٤٥س٤، ٦٥س٢ (١٧) ٢٦ع٢، ٣٢ع٤، ٤٤ع٤
 (١٩) ١٢ك٢، ٨ر٢، ١٦ر٢ (٢٠) ٤٢أ٢، ٦أ٢، ١٨أ٢
 (١٨) ٣٠ج٣ه٢، ٤٢ج٢ه٢، ٦٦ج٢ه٢
 (٢١) ١٥ر٢ن، ٣٥ن٢، ٧٠رن



(٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كل كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟

(٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨ سم^٢، كم يمكن أن يكون طول كل من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟

(٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتاباً على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كل رف العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟

(٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساوياً على كل رف ولا يقل عن ٥؟

(٢٦) **تبرع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكثر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكون في كل حزمة؟

(٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمين هما عددان أوليان فرديان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ و ٥، ٥ و ٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.

(٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 12} \\ \underline{4} \\ 2 \\ \underline{2} \\ 1 \end{array}$$

العدد ١٢ يكتب على الشكل 3×2 عند تحليله لعوامله الأولية

(أ) **تحليلياً:** انسخ مخطط السلم المبين جانباً ٦ مرات، وسجّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عدداً كلياً، بحيث يكون اثنان منها أوليين.

(ب) **تحليلياً:** اختر عاملاً أولياً لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١. وأضف أو احذف أجزاءً من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرر هذه العملية مع جميع الأعداد.

(ج) **لفظياً:** ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٩) **تحذ:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقق الشروط الآتية: (ق. م. أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر.

(٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفاً لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين (ق. م. أ) و (م. م. أ) لعددين أو أكثر.



(٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحدتي حد لا يساوي ١ أبداً" صحيحة أم خاطئة؟
ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١٥ ^٢ ب ج ^٣	
٦ ^٣ ج د ^٣	
١٢ ج د ^٢ ف	
٢٢ د ^٢ ف ل ^٢	
٣٠ ف ل ^٢ هـ	

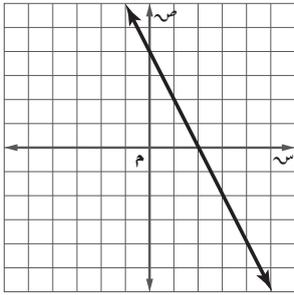
(٣٢) **تحّد:** يُسمّى العدداً الصحيحان أو وحدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م. أ.) لهما هو العدد ١. انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحّد أزواج وحديات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها.

(٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحديات حد على أن يكون (ق. م. أ.) لها ٦ ص^٣. فسّر إجابتك.

(٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأولية، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م. أ.) لوحيدتي حدّ أو أكثر.

تدريب على اختبار

(٣٧) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم المبيّن في الشكل؟



- (أ) ص $٤ + ٢س =$
(ب) ص $٥ - ٢س =$
(ج) ص $٦ - \frac{١}{٢}س =$
(د) ص $٣ + \frac{١}{٢}س =$

(٣٥) ما قيمة هـ في المعادلة $٤هـ - ٢٧ = ١٩ + ٢هـ$ ؟

- (أ) ٤ -
(ب) ٤
(ج) ٢٣
(د) ٤٦

(٣٦) إجابة قصيرة: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(١، ٢)$ ، $(١، ٥)$.

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

- (٣٨) $٢(٤ - أ)$
(٣٩) $٢(٦ + ج)$
(٤٠) $٢(٥ - ع)$
(٤١) $(٣ - ن)(٣ + ن)$
(٤٢) $٢(٢ + ص)$
(٤٣) $(٧ + د)(٧ - د)$

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

- (٤٤) $(٤ + م)(٣ - م)$
(٤٥) $(٥ - هـ)(٢ - هـ)$
(٤٦) $(٩ + ن)(٢ + ن)$
(٤٧) $(٦ - ر)(١ - ر)$
(٤٨) $(٤٣ + ف)(٣ + ف)$
(٤٩) $(١ + ن)(٢ + ن)(٤ - ن)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة ممّا يأتي:

- (٥٠) $٢(٤س - ٧)$
(٥١) $\frac{١}{٢}د(٦ + د٢)$
(٥٢) $٥٢هـ - ٦هـ(١ - هـ)$
(٥٣) $٩م - ٩ب$
(٥٤) $١٠ص - ٥$
(٥٥) $٦س - ٣ع$



استعمال خاصية التوزيع

لماذا؟



تُحدّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة $م = ٦ + ١ ض + ٢ ض$ ، حيث تمثل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصية التوزيع في التحليل: استعملت خاصية

التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

$$\begin{aligned} ٥ع + (٤ع + ٧) &= ٥ع + ٤ع + ٧ \\ ٥ع + ٤ع + ٧ &= ٩ع + ٧ \end{aligned}$$

ويمكنك الاستفادة من ذلك في العمل عكسيًا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

$$٦ + ١ ض + ٢ ض = (٦ + ض) (١ + ٢ ض)$$

كذلك $٥ع + (٤ع + ٧)$ يمثل تحليل ثنائية الحدّ $٥ع + ٢ع + ٣٥$. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأولية.

٧-٢

فيما سبق

درست إيجاد (ق.م.أ) لمجموعة من وحيدات الحد.

والآن

- استعمل خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعية على الصورة: $أس^٢ + بس + ج = ٠$

المضردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

مثال ١ استعمال خاصية التوزيع في التحليل

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(أ) $٢٧ص + ١٨ص$

أوجد (ق.م.أ) لجميع الحدود.

حلّل كل حد.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٢٧ص = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣$$

$$١٨ص = ٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣$$

$$(ق.م.أ) = ٩ص = ٣ \times ٣$$

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق.م.أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصية التوزيع لإخراج (ق.م.أ).

أعد كتابة كل حدّ باستعمال (ق.م.أ).

خاصية التوزيع.

$$٢٧ص + ١٨ص = ٩ص(٣ + ٢)$$

$$= ٩ص(٣ + ٢)$$

(ب) $٤أ - ٨أ + ٢أ$

حلّل كل حدّ.

ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

$$٤أ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

$$٨أ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

$$٢أ = ٢ \times ١ \times ١$$

$$(ق.م.أ) = ٢أ = ٢ \times ١ \times ١$$

$$٤أ - ٨أ + ٢أ = ٢أ(٢ - ٤ + ١) = ٢أ(-٢) = -٤أ$$

$$= ٢أ(-٢ - ٤ + ١)$$



أعد كتابة كل حدّ باستعمال (ق.م.أ).

خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

(أ) $١٥ - ٣$ ف (ب) $٧٢ ن^٢ + ٢١ ن - ٢$ ل ن

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

أضف إلى

مطويتك

التحليل بتجميع الحدود

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معاً عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: $أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)$

$$= س(أ + ب) + ص(أ + ب)$$

$$= (س + ص)(أ + ب)$$

التحليل بتجميع الحدود

مثال ٢

حلّ: $٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦$

$$٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦$$

العبارة الأصلية

جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.)

خاصية التوزيع

$$= (٤ ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)$$

$$= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)$$

$$= (٤ ر + ٣)(ك + ٢)$$

لاحظ أنّ $(ك + ٢)$ عامل مشترك لـ $٤ ر(ك + ٢)$ و $٣(ك + ٢)$.

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

(أ) $٥ ن - ٥ ر - ٥$ (ب) $٣ ن ك + ١٥ ك - ٤ ن - ٢٠$

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيراً جمعيّاً للآخرى. فمثلاً $٦ - أ = ١ - (أ - ٦)$

التحليل بتجميع الحدود (العوامل نضائر جمعية)

مثال ٣

حلّ: $٢ م ك - ١٢ م + ٧ ك - ٤٢$

$$٢ م ك - ١٢ م + ٧ ك - ٤٢$$

العبارة الأصلية

جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.

حلّ كل تجميع بإخراج (ق.م.أ.).

$$٦ - ك = ١ - (ك - ٦)$$

خاصية التجميع

خاصية التوزيع

$$= (٢ م ك - ١٢ م) + (٧ ك - ٤٢)$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(ك - ٦)$$

$$= ٢ م(ك - ٦) + ٧(١ - (ك - ٦))$$

$$= ٢ م(ك - ٦) - ٧(ك - ٦)$$

$$= (٢ م - ٧)(ك - ٦)$$

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

تحقق من فهمك

(أ) $3n = (n + 2) \cdot 0$ (ب) $8b^2 - 40 = 0$ (ج) $10 = 2s$

مثال ٥ من واقع الحياة استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة $h = -5n^2 + 20n$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض $h = 0$

المعادلة الأصلية $0 = -5n^2 + 20n$

عوض عن ع ب $0 = -5n^2 + 20n$

حلل بإخراج (ق.م.أ) $0 = 5n(-n + 4)$

خاصية الضرب الصفري $0 = 5n$ أو $0 = -n + 4$

حل كل معادلة $n = 0$ أو $n = 4$

اقسم كل حد على -١ $n = 4$

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بـ ٤ ثوانٍ.

تحقق من فهمك

(٥) **قفز الأرنب:** يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة $h = 5n - 2n^2$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما $h = 0$ صفراً.



الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزاً عالياً ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تأكد

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

(١) $21b - 15a$ (٢) $14j + 2g$ (٣) $12k^2 + 6l^2 + 2k^2$

حلل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

(٤) $n^2 + 2n + 8 + m$ (٥) $5s^2 - 7s + 7 + 9 - 4e$ (٦) $3j - 2b - 10 + 15 - 10$

حلل كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٧) $3k + 10 = 0$ (٨) $(4m + 2)(3m - 9) = 0$ (٩) $14 = 2r$

(١٠) **مثال ٥ صواريخ:** أطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ثانية. وتمثل المعادلة $h = 42n - 5n^2$ ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

(أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

(ب) حل المعادلة $42 - 5n = 0$

(ج) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟



مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

$$(١١) \quad ٤٠ - ١٦ن - ص$$

$$(١٢) \quad ٣٠ف + ٥٠س$$

$$(١٣) \quad ٢ك٢ + ٤ك$$

$$(١٤) \quad ٥ع٢ + ١٠ع$$

$$(١٥) \quad ٤أ٢ + ٢أ٢ب - ١٠أب٢$$

$$(١٦) \quad ٥ج٢ف - ١٥ج٢ف٢ + ٥ج٢ف٣$$

المثالان ٢، ٣ حلل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

$$(١٧) \quad ١٦ + ٢٤ - ٤أ - ٢أ$$

$$(١٨) \quad ١٠ - ٥ل - ٢هـ + ٥ل - ١٠$$

$$(١٩) \quad ٢س - ٢س - ٢ + ص$$

$$(٢٠) \quad ٢٤ن - ٤ص - ١٨ن + ٤ص - ٣$$

$$(٢١) \quad ٣د - ٣٥ + ٢١د - ٥ن$$

$$(٢٢) \quad ١٢ + ٢ر٨$$

$$(٢٣) \quad ٥ + ٣٥ - ٣ن - ٥هـ$$

$$(٢٤) \quad ٩٦ + ٨ف + ١٢ل + ٨ف$$

$$(٢٥) \quad ١٠ - ٢ر + ٢٥ب$$

$$(٢٦) \quad ١٢ - ٣ن + ٨و - ٢ن$$

$$(٢٧) \quad ٥جف٢ + ج٢ف + ١٥جف$$

$$(٢٨) \quad ٨١ - ٩ف + ٩ر$$

$$(٢٩) \quad ١٨ر٣ن + ١٢ر٢ن - ٢ر٦ن$$

$$(٣٠) \quad ٣ - ٥هـ + ٢٤ج - ٢هـ - ٣$$

مثال ٤

حلّ كلاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٣١) \quad ٣ب(٩ - ٢٧) = ٠$$

$$(٣٢) \quad ٢ن(٣ + ٣ن) = ٠$$

$$(٣٣) \quad ٠ = (١٠ + ٤ع)(٤ + ٤ع)$$

$$(٣٤) \quad ٠ = (٣ + ٧س)(٣ - ٦س)$$

$$(٣٥) \quad ٠ = ٣ - ٢ب$$

$$(٣٦) \quad ٤أ = ٢أ$$

مثال ٥

(٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة $٥ن + ٢ = ٥$ ؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

(أ) اكتب عبارة تمثّل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.

(ب) أوجد قيم ن عندما $٠ = ٥$ ؟

(ج) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسّر إجابتك.

(٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة $١ - ٠س + ١٢س + ٢ = ٠$ ؛ حيث س، ص بالستمتري. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

(أ) كوّن جدولاً لارتفاع القوس إذا كان $٠ = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠$ سم.

(ب) مثل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثل القوس.

(ج) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟



الرياضة مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردى قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.



؟	؟
؟	س ^٢
؟	٦-

- (٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل س^٢ + س - ٦، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.
- (أ) **تحليلياً:** حدّد عددين ناتج ضربهما -٦، وناتج جمعهما ١.
- (ب) **رمزياً:** اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمناً المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.
- (ج) **تحليلياً:** أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل س^٢ + س - ٦.
- (د) **لفظياً:** صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل س^٢ - ٣س - ٤٠.

مسائل مهارات التفكير العليا

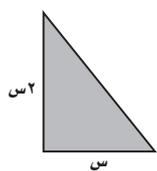
- (٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة $٢م = ٤م$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

حمد	راشد
$٢م = ٤م$	$٢م = ٤م$
$\frac{٢م}{٢} = \frac{٤م}{٢}$	$٠ = ٤م - ٢م$
$٢ = م$	$٠ = (٢ - م)م$
	$٠ = م - ٢$ أو $٠ = م + ٢$
	$٢ = م$ أو $٠ = م$

- (٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّها.
- (٤٢) **تبرير:** في المعادلة $٢أ - أ = ب$ ، ما قيم أ، ب التي تجعل $٠ = ب$ ؟
- (٤٣) **اكتب:** وضح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصية الضرب الصفري.

تدريب على اختبار

(٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أذناه ٥ سم^٢، فما ارتفاعه؟



- (أ) ٢ سم
- (ب) ٥ سم
- (ج) ٨ سم
- (د) ١٠ سم

(٤٤) أي مما يأتي يمثل عاملاً لكثيرة الحدود:
 $٢ع٦ - ٣ع٣ - ٢ع٤ + ٤ع٤$ ؟

- (أ) $١ + ٢ع$
- (ب) $٢ - ٣ع$
- (ج) $٢ + ٤ع$
- (د) $١ - ٢ع$



مراجعة تراكمية

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧-١)

(٤٨) $٤ص، ١٨ص٢، ٦ص٣$

(٤٧) $٨ج٢د٣، ١٦ج٣د$

(٤٦) $٢٣٠أ، ٥٠أب٢$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

(٥٢) $[٣(٢٤)]٢$

(٥٠) $(٧-ج٣د٤)(٤ج٣د٣)$ (٥١) $(٩ص٧)٢$

(٤٩) $(أب٤)(أب٢)$

(٥٣) حلّ المتباينة $٣ص - ٤ < ٣٧$ ، وتحقق من صحة الحل. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(٥٦) $(١-ع)(٨-ع)$

(٥٥) $(٤+د)(١٠+د)$

(٥٤) $(٢+ب)(٥+ب)$

(٥٩) $(٢-هـ)(١١+هـ)$

(٥٨) $(٧-س)(٦-س)$

(٥٧) $(٩+ج)(٣-ج)$





تحليل ثلاثية الحدود

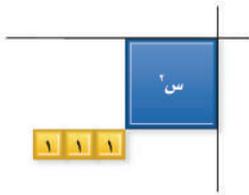
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

نشاط ١

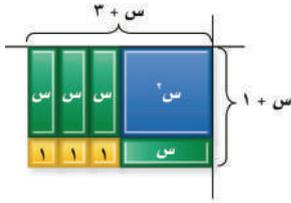
تحليل العبارة: $س^٢ + ٤س + ٣$ 

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٤س + ٣$

الخطوة ١: مثل $س^٢ + ٤س + ٣$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع البطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلًا. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $س$ ، فيكون بذلك

عرض المستطيل $س + ١$ ، وطوله $س + ٣$

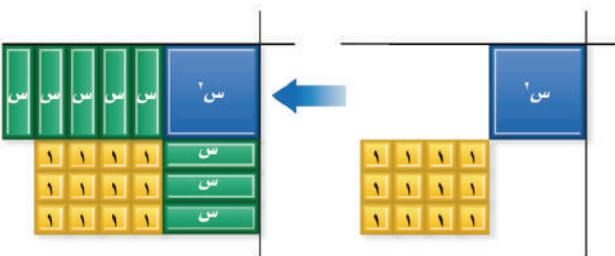
إذن: $س^٢ + ٤س + ٣ = (س + ١)(س + ٣)$.

نشاط ٢

تحليل العبارة: $س^٢ + ٨س + ١٢$ 

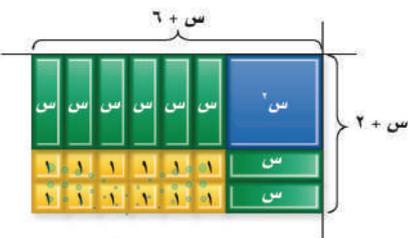
استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٨س + ١٢$

الخطوة ١: مثل $س^٢ + ٨س + ١٢$ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب

بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلًا. وبما أن $١٢ = ٣ \times ٤$ ، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ و ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات $س$ ، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.



الخطوة ٣: رتبّ بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ و ٦ ثم أكمل المستطيل،

وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات $س$ لتكوين المستطيل. ويكون عرض المستطيل $س + ٢$ ، وطوله $س + ٦$

إذن $س^٢ + ٨س + ١٢ = (س + ٢)(س + ٦)$.

نشاط ٣

تحليل العبارة: $س^٢ - ب س + ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ - ٥س + ٦$

الخطوة ١: مثل $س^٢ - ٥س + ٦$

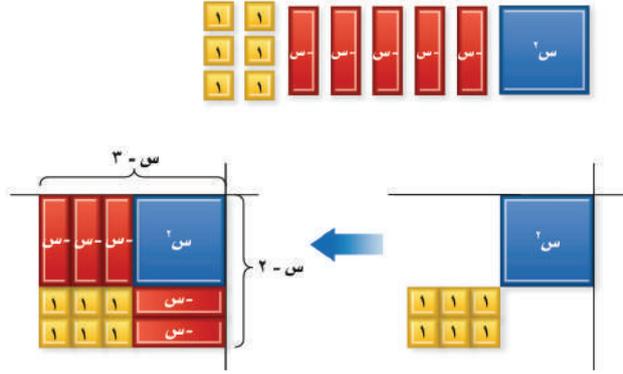
الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب.

ورتب البطاقات ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ٢ و ٣

الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات $س$. فيكون

بذلك عرضه $س - ٢$ ، وطوله $س - ٣$

إذن $س^٢ - ٥س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$



نشاط ٤

تحليل العبارة: $س^٢ - ب س - ج$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ - ٤س - ٥$

الخطوة ١: مثل $س^٢ - ٤س - ٥$

الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب،

ورتب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ١ و ٥

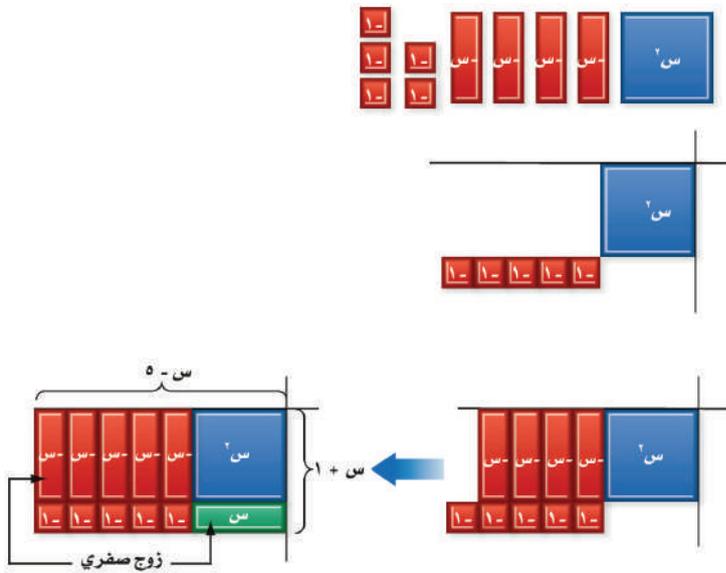
الخطوة ٣: ضع البطاقات $س$ كما في الشكل. وتذكر أنه

يمكنك إضافة أزواج صفيرية دون تغيير قيمة

كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجاً

صفرياً من البطاقات $س$.

لذا فإن $س^٢ - ٤س - ٥ = (س + ١)(س - ٥)$



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

(٤) $س^٢ - ٧س + ١٢$

(٣) $س^٢ + ٣س - ٤$

(٢) $س^٢ + ٦س + ٨$

(١) $س^٢ + ٣س + ٢$

استعمل الرسم بمخطط لتبين إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا:

(٨) $س^٢ - ٤س - ٤$

(٧) $س^٢ - ٤$

(٦) $س^٢ - ٥س - ٦$

(٥) $س^٢ + ٣س + ٦$

(٩) **اكتب** كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحديد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟





المعادلات التربيعية: $س^٢ + ب س + ج = ٠$

لماذا؟



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^٢، فما بعدها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ ومجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل $س^٢ + ب س + ج$: تعلمت كيف تضرب ثنائيي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لنتائج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

$$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢ \quad \text{طريقة التوزيع بالترتيب}$$

$$= س^٢ + ٧س + ١٢ \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= س^٢ + ٧س + ١٢ \quad \text{بسط}$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و ٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٧س + ١٢$$

$$(س + م)(س + ن) = س^٢ + (م + ن)س + م ن \quad \text{لتكن } م = ٣, ن = ٤$$

$$= س^٢ + (م + ن)س + م ن \quad \text{الإبدال (+)}$$

$$س^٢ + ب س + ج = (س + م)(س + ن) \quad \text{ب = م + ن, ج = م ن}$$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م و ن، والحد الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^٢ + ب س + ج$.

فيما سبق

درست ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

■ أحل ثلاثية حدود على الصورة:

$$س^٢ + ب س + ج = ٠$$

■ أحل المعادلات على الصورة:

$$س^٢ + ب س + ج = ٠$$

المضردات

المعادلة التربيعية

أضف إلى

مطويتك

تحليل $س^٢ + ب س + ج$

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^٢ + ب س + ج$ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما ج، ثم اكتب $س^٢ + ب س + ج$ على الصورة $(س + م)(س + ن)$.

الرموز: $س^٢ + ب س + ج = (س + م)(س + ن)$ ، حيث $م + ن = ب$ ، $م ن = ج$

مثال: $س^٢ + ٦س + ٨ = (س + ٢)(س + ٤)$. لأن $٦ = ٢ + ٤$ ، $٨ = ٢ \times ٤$

يكون لعاملي ج الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.



خمن وتحقق

عند تحليل ثلاثية حدود،
اعمل تخميناً مدروساً،
وتحقق من المعقولية، ثم
عدّل التخمين حتى تصل
إلى الإجابة الصحيحة.

مثال ١

تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما يكون $ب$ ، $ج$ موجبين

حلل: $س^٢ + ٩س + ٢٠$.

بما أن $ج$ ، $ب$ موجبان في ثلاثية الحدود، $ب = ٩$ ، $ج = ٢٠$. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩ ، وناتج ضربهما ٢٠ . كَوْن قائمة عوامل العدد ٢٠ ، وأوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩ .

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
٢٠، ١	٢١
١٠، ٢	١٢
٥، ٤	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

اكتب القاعدة

$$٥ = ن، ٤ = م$$

$$س^٢ + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س + ٤)(س + ٥)$$

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

طريقة التوزيع بالترتيب

$$(س + ٥)(س + ٤) = س^٢ + ٤س + ٥س + ٢٠$$

بسط.

$$= س^٢ + ٩س + ٢٠ ✓$$

تحقق من فهمك

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

$$(أ) ٩ + ١٠ن + ن^٢$$

$$(ب) ٢٤ + ١١د + د^٢$$

إذا كانت $ب$ سالبة، و $ج$ موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيتي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل
الصحيحة فليس هناك
ضرورة لاختبار العوامل
الأخرى. فمثلاً، العاملان
الصحيحان في المثال ٢ هما:
٢- و ٦-، لذا فلا داعي
لاختبار العاملين:
٣- و ٤-

مثال ٢

تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما تكون $ب$ سالبة، $ج$ موجبة

حلل: $س^٢ - ٨س + ١٢$

بما أن $ج$ موجبة، و $ب$ سالبة في ثلاثية الحدود، $ب = -٨$ ، $ج = ١٢$ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعهما -٨ وحاصل ضربهما ١٢

عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
١٢-، ١-	١٣-
٦-، ٢-	٨-
٤-، ٣-	٧-

العاملان الصحيحان هما ٢-، ٦-

اكتب القاعدة

$$٦- = ن، ٢- = م$$

$$س^٢ - ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن)$$

$$= (س - ٢)(س - ٦)$$

تحقق: مثل المعادلتين: $ص = س^٢ - ٨س + ١٢$ ، $ص = (س - ٢)(س - ٦)$

بياناً على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية

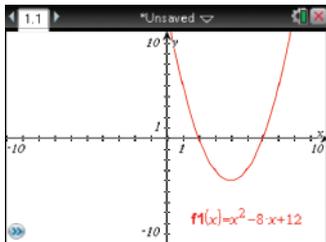
الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓

تحقق من فهمك

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

$$(أ) ٢١ - ٢٢م + م^٢$$

$$(ب) ٢٨ + ١١و + و^٢$$



تمثل القيمة المطلقة للعدد
ن المسافة بين العدد
والصفر على خط الأعداد.
وتُكتب على الصورة |ن|.

عندما تكون ج سالبة، يكون لعاملها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيها سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مثال ٣ تحليل $س^٢ + ب س + ج$ عندما تكون ج سالبة

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$(أ) س^٢ + ٢س - ١٥$$

في ثلاثية الحدود هذه $ب = ٢$ ، $ج = -١٥$ وبما أن ج سالبة. فإن م و ن عدداً مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجباً.

اكتب أزواجاً من عوامل العدد -١٥ ، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد -١٥	مجموع العاملين
١٥، ١-	١٤
٥، ٣-	٢

العاملان الصحيحان هما ٥، ٣-

اكتب القاعدة

$$م = ٣-، ن = ٥$$

طريقة التوزيع بالترتيب

بسّط

$$س^٢ + ٢س - ١٥ = (س + م)(س + ن)$$

$$س^٢ + ٢س - ١٥ = (س + ٣-)(س + ٥)$$

تحقق: $(س - ٣)(س + ٥) = س^٢ + ٢س - ١٥$

$$= س^٢ + ٢س - ١٥ ✓$$

$$(ب) س^٢ - ٧س - ١٨$$

في ثلاثية الحدود هذه $ب = -٧$ ، $ج = -١٨$ ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالباً.

اكتب أزواجاً من عوامل -١٨ ، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالباً والآخر موجباً، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما -٧ .

عوامل العدد -١٨	مجموع العاملين
١٨، ١-	١٧-
٩، ٢-	٧-
٣، ٦-	٣-

العاملان الصحيحان هما ٩، ٢-

اكتب القاعدة

$$م = ٢-، ن = ٩-$$

$$س^٢ - ٧س - ١٨ = (س + م)(س + ن)$$

$$س^٢ - ٧س - ١٨ = (س + ٢-)(س + ٩-)$$

تحقق: مثل المعادلتين $ص = س^٢ - ٧س - ١٨$ ،

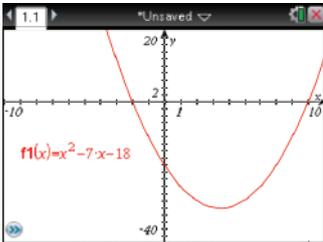
$$ص = (س + ٢-)(س + ٩-)$$

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّت بصورة صحيحة. ✓

تحقق من فهمك ✓

$$(٣ب) ر^٢ - ٢ر - ٢٤$$

$$(٣أ) ص^٢ + ١٣ص - ٤٨$$



حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية:

$أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

مثال ٤

حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^2 + ٦س = ٢٧$ ، وتحقق من صحة الحل.

المعادلة الأصلية

اطرح ٢٧ من كلا الطرفين

حلل إلى العوامل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$س^2 + ٦س - ٢٧ = ٠$$

$$٠ = (س + ٩)(س - ٣)$$

$$س - ٣ = ٠ \text{ أو } س + ٩ = ٠$$

$$س = ٣ \quad س = -٩$$

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (-٩)^2 + ٦(-٩)$$

$$✓ ٢٧ = ٨١ - ٥٤$$

$$س^2 + ٦س = ٢٧$$

$$٢٧ \stackrel{?}{=} (٣)^2 + ٦(٣)$$

$$✓ ٢٧ = ١٨ + ٩$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$٤ب) س^2 + ٣س - ١٨ = ٠$$

$$١٤أ) ع^2 - ٣ع - ٧٠ = ٠$$

مثال ٥ من واقع الحياة

حل المسألة بالتحليل



تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بـ ٢ بوصة. ومساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض × الطول

حل: بما أن عرض اللوحة = عرض اللوحة = $س + ٢ + ٤ = ٦ + س$

اكتب المعادلة

اضرب

اطرح ٦١٦ من كل طرف

حلل

خاصية الضرب الصفري

حل كل معادلة

$$٦١٦ = (س + ٦)س$$

$$٦١٦ = س^2 + ٦س$$

$$٠ = ٦١٦ - س^2 - ٦س$$

$$٠ = (س - ٢٢)(س + ٢٨)$$

$$س + ٢٨ = ٠ \text{ أو } س - ٢٢ = ٠$$

$$س = -٢٨ \quad س = ٢٢$$

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = $٢٢(٦ + ٢٢) = ٦١٦$ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

تحقق من فهمك

٥) هندسة: متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^٢. فما ارتفاعه؟



الربط مع الحياة

تصمّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

الأمثلة ١ - ٣

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(1) \text{ س}^2 + 14\text{س} + 24$$

$$(2) \text{ ص}^2 - 7\text{ص} - 30$$

$$(3) \text{ ن}^2 + 2\text{ن} - 21$$

$$(4) \text{ م}^2 - 15\text{م} + 50$$

مثال ٤

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(5) \text{ س}^2 - 4\text{س} - 21 = 0$$

$$(6) \text{ ن}^2 - 3\text{ن} + 2 = 0$$

$$(7) \text{ س}^2 - 15\text{س} + 54 = 0$$

$$(8) \text{ س}^2 + 12\text{س} - 32 = 0$$

$$(9) \text{ س}^2 - 72 = 0$$

$$(10) \text{ س}^2 - 10\text{س} - 24 = 0$$

مثال ٥

(١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا للصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعد الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعد الصورة المصغرة؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(12) \text{ س}^2 + 17\text{س} + 42$$

$$(13) \text{ ص}^2 - 17\text{ص} + 72$$

$$(14) \text{ أ}^2 + 8\text{أ} - 48$$

$$(15) \text{ ن}^2 - 2\text{ن} - 35$$

$$(16) 44\text{ه} + 15\text{ه} - 2\text{ه}^2$$

$$(17) 40\text{س} + 22\text{س} + \text{س}^2$$

مثال ٤

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(18) \text{ س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0$$

$$(19) \text{ ص}^2 + 2\text{ص} = 20$$

$$(20) \text{ س}^2 - 6\text{س} = 27$$

$$(21) \text{ ج}^2 + 10\text{ج} + 9 = 0$$

$$(22) \text{ ن}^2 - 120 = 7\text{ن}$$

$$(23) \text{ ه}^2 + 48 = 16\text{ه}$$

مثال ٥

(٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦ سم^٢، ويزيد ارتفاعه ٦ سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

(٢٥) **هندسة:** تمثل العبارة (س^٢ - ٤س - ١٢) سم^٢ مساحة مستطيل طوله (س + ٢) سم. فما عرضه؟

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$(26) \text{ ك}^2 + 11\text{ك} + 18$$

$$(27) \text{ س}^2 - 6\text{س} + 5\text{ص}$$

$$(28) \text{ أ}^2 + 10\text{أ} - 39$$

(٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^٢.

(أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه.

(ب) حل المعادلة.

(ج) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكل منهما؟



٣٠) هندسة: اكتب عبارة تمثل محيط المستطيل الذي مساحته $m = s^2 + 13s - 90$.

٣١) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما يكون المعامل الرئيس للعبارة التربيعية لا يساوي ١.

أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي، ثم أكمله:

ضرب ثنائي الحد	ناتج ضرب ثنائي الحد باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب	أ $s^2 + b s + c$	م X ن	أ X ج
$(s+3)(s+4)$	$s^2 + 7s + 12$	$s^2 + 11s + 12$	٢٤	٢٤
$(s+3)(s+5)$				
$(s+4)(s+1)$				
$(s+3)(s-4)$				

ب) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ن أ، ج؟

ج) تحليلياً: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟

د) لفظياً: صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة $s^2 + b s + c$.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) اكتشاف الخطأ: حلل كل من خليل وماجد العبارة: $s^2 + 6s - 16$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

خليل
 $s^2 + 6s - 16 = (s-2)(s+8)$

ماجد
 $s^2 + 6s - 16 = (s+2)(s-8)$

تحذّر: أوجد جميع قيم ه التي تجعل كل كثيرة حدود في كل مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

٣٣) $s^2 + ه s - 19$ ٣٤) $s^2 + ه s + 14$ ٣٥) $s^2 - 8s + ه$ ، $ه < 0$

٣٦) تحذّر: حلل العبارة: $(s-4)(s+2) + 3(s-5) - 70$.

تدريب على اختبار

٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟

أ) $21 - n = 6$ ب) $21 = n + 6$
 ج) $21 = n + 6$ د) $21 - n = 6$

٣٧) هندسة: ما العبارة التي تمثل طول المستطيل في الشكل المجاور؟

أ) $s + 5$ ج) $s - 6$
 ب) $s + 6$ د) $s - 5$

$m = s^2 - 3s - 18$

مراجعة تراكمية

حلّ كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

$$(٣٩) \text{ م } ٢ \text{ ل } ٣ - ١٦ \text{ م } ٢ + ٨ \text{ م } ١ \quad (٤٠) \text{ أ } ٢ \text{ س } + ٦ \text{ س } + ٦ \text{ ج } + ٣ \text{ ب } + ٣ \text{ ج } \quad (٤١) \text{ س } - ٢ \text{ س } - \text{ ص } - \text{ ص } + \text{ ص } + ٢ \text{ ص}$$

(٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعدها ٤٢٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم × ٢٠ سم، ٣٠ سم × ٣٠ سم، ٢٠ سم × ١٥ سم، ٢٢ سم × ٣٠ سم. فأَيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧-١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي:

$$(٤٣) \text{ م } ٦ \text{ س} - ٤ \text{ م} + ٣ \text{ ر} \text{ س} - ٢ \text{ ر} \quad (٤٤) \text{ أ } ٣ \text{ أس} - ٦ \text{ ب} \text{ س} + ٨ \text{ ب} - ٤ \text{ أ} \quad (٤٥) \text{ د } ٢ \text{ د} + ٢ \text{ ج} + ٢ \text{ ف} + ٢ \text{ ج} + ٤ \text{ د} + ٤ \text{ ه} + ٤ \text{ ف} + ٤ \text{ ه}$$





حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا: (الدرس ٧-١)

(١) $١٦س٣ص٣$

(٢) $٣٥ب٤ج٤$

(٣) $٢٠م٢٠ن٢$

(٤) $١٣س٣ص٣$

(٥) **مساحة ممرّ:** تبلغ مساحة ممرّ $١٢م٢$ ، أوجد جميع أزواج الأعداد الكلية التي يمكن أن تمثل طولًا وعرضًا للممرّ.

(الدرس ٧-١)

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدّ فيما يأتي:

(٦) $١٠ب١٠، ٢٠ب٢٠، ٢٥ب٢٥$

(٧) $١٣ج١٣، ٢٥ج٢٥$

(٨) $٢١ب٢١ج٢١، ٣٥ب٣٥ج٣٥، ٥٦ب٥٦ج٥٦$

(٩) **ترتيب:** يريد عامل ترتيب ٢٤ زوجًا من الأحذية على أرفف محلّ، بحيث يضع نفس عدد الأزواج على كل رفّ، ويضع على الأقلّ ٤ أزواج على كل رفّ، ويستخدم رفين على الأقلّ، اذكر عدد الأزواج الممكنة على كل رفّ، وعدد الأرفف.

(الدرس ٧-١)

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود التالية:

(الدرس ٧-٢)

(١٠) $٣س٣ص٣ - ٩س٣$

(١١) $٦ب٦ج٦ + ١٢ب١٢ج١٢ + ١٨ب١٨ج١٨$

(١٢) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه تساوي

$٣س٣ + ٦س٢ - ١٢$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

(الدرس ٧-٢)



$س٢ + ٤ - س٤$

(أ) وحدتان (ج) ٤ وحدات

(ب) ٣ وحدات (د) ٦ وحدات

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

(١٣) $٤٠ + -٥٥ج$

(١٤) $٢س٣ + ٦س٢ + س + ٢$

(١٥) $٥ب٥ - ٢ب٢٥ - ب + ٥$

حلّل كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

(١٦) $٢س(س - ٥) = ٠$

(١٧) $٦ب٦ - ٣ب٣ = ٠$

(١٨) $١٥ = ٢ج$

حلّل كلّ كثيرة حدودٍ ممّا يأتي: (الدرس ٧-٣)

(١٩) $٢س٢ - ٤س - ٢١$

(٢٠) $٢س٢ - ١٠س + ٢٤$

(٢١) $٢س٢ + ٤س - ٢١$

حلّل كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

(٢٢) $١٤ = ٢س - ٥س$

(٢٣) $١٨ = ٣س - ٢س$

(٢٤) $١٠س = ٢س + ٢٤$

(٢٥) **اختيار من متعدد:** يزيد طول مستطيل على عرضه بمقدار

$٢سم$ ، فما طول المستطيل، إذا كانت مساحته $٤٨سم٢$ ؟

(أ) $٤٨سم$ (ج) $٦سم$

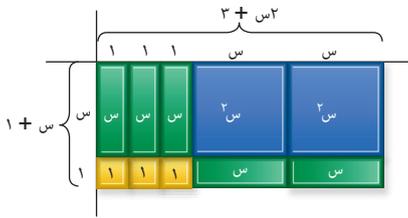
(ب) $٨سم$ (د) $٢سم$





المعادلات التربيعية: أس^٢ + ب س + ج =

لماذا؟



يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعبارة $٢ن^٢ - ٣٠ن + ٣٠ = ٠$ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة إلى عواملها يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل أس^٢ + ب س + ج : حللت في الدرس السابق

عبارات تربيعية على الصورة: أس^٢ + ب س + ج = أ، أ = ١.

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها $أ \neq ١$.

في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما (س + ١)، (٣ + ٢س)، وهما عاملا $٢س^٢ + ٥س + ٣$.

يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه العبارة.

فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود على الصورة أس^٢ + ب س + ج = ٠.

والآن

■ أحلّ ثلاثية حدود على

الصورة:

أس^٢ + ب س + ج = ٠

■ أحلّ معادلات على

الصورة:

أس^٢ + ب س + ج = ٠

المضردات

كثيرة الحدود الأولية

الخطوة ١ : طَبِّق القاعدة:

$$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + ٣س + ٢س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$$

الخطوة ٢ : أوجد عددين ناتج ضربهما $٢ \times ٣ = ٦$ ومجموعهما ٥.

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
٦، ١	٧
٣، ٢	٥

الخطوة ٣ : استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

$$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + ٣س + ٢س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$$

$$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + ٣س + ٢س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$$

$$= (٢س + ٣)(س + ١) + (٢س + ٣)(س + ١) =$$

$$= (٢س + ٣)(س + ١) + (٢س + ٣)(س + ١) =$$

$$= (٢س + ٣)(س + ١) + (٢س + ٣)(س + ١) =$$

$$إذن: ٢س^٢ + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$$

اكتب القاعدة

$$٣ = ٢، ٣ = ٣$$

جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

(س+١) عامل مشترك

أضف إلى

مطويتك

تحليل أس^٢ + ب س + ج

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي:

لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أس^٢ + ب س + ج = ٠، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ ج، ثم اكتب أس^٢ + ب س + ج على الصورة أس^٢ + م س + ن س + ج = ٠، ثم حلّل بتجميع الحدود.

$$\text{مثال: } ٥س^٢ - ١٣س + ٦ = ٥س^٢ - ١٠س - ٣س + ٦ = (٥س - ٣)(س - ٢)$$

$$= (٥س - ٣)(س - ٢) + (٥س - ٣)(س - ٢) =$$

$$= (٥س - ٣)(س - ٢) + (٥س - ٣)(س - ٢) =$$

مثال ١

تحليل أس^٢ + ب س + ج

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

$$(أ) ٧س^٢ + ٢٩س + ٤$$

في ثلاثية الحدود أعلاه، $٧ = أ$ ، $٢٩ = ب$ ، $٤ = ج$. أوجد عددين ناتج ضربيهما $٤ \times ٧ = ٢٨$ ، ومجموعهما ٢٩ . كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨ ، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩ .

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل
٢٨، ١	٢٩

العوامل الصحيحة ١، ٢٨

استخدم القاعدة.

$$١ = ن، ٢٨ = م$$

جَمِّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلّل بإخراج (ق. م. أ.)

(٧س+١) عامل مشترك

$$٧س^٢ + ٢٩س + ٤ = ٧س^٢ + م س + ن س + ٤$$

$$٧س^٢ + ١س + ٢٨س + ٤ =$$

$$= (٧س^٢ + ١س) + (٢٨س + ٤)$$

$$= س(٧س + ١) + (٢٨س + ٤)$$

$$= (٧س + ١)(٤ + س)$$

$$(ب) ٣س^٢ + ١٥س + ١٨$$

(ق. م. أ.) للحدود $٣س^٢$ ، $١٥س$ ، ١٨ ، هو ٣ . حلّل بإخراج العامل ٣ .

خاصية التوزيع

أوجد عاملين للعدد ٦ مجموعهما ٥

$$٣س^٢ + ١٥س + ١٨ = ٣(س^٢ + ٥س + ٦)$$

$$= ٣(س + ٣)(س + ٢)$$

تحقق من فهمك

$$(ب) ٦س^٢ + ٢٢س - ٨$$

$$(أ) ٦س^٢ + ١٣س + ٦$$

مثال ٢

تحليل أس^٢ - ب س + ج

حلل كثيرة الحدود $٣س^٢ - ١٧س + ٢٠$.

في ثلاثية الحدود أعلاه $٣ = أ$ ، $١٧ = ب$ ، $٢٠ = ج$. وبما أن $ب$ سالبة، فإن $م + ن$ ستكون سالبة أيضًا، وبما أن $ج$ موجبة، فإن $م ن$ ستكون موجبة.

لتحديد $م$ ، $ن$ كوّن قائمة بالعوامل السالبة لـ $٢٠ = ج$ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ١٧ .

عوامل العدد ٦٠	مجموع العاملين
٣٠-، ٢-	٣٢-
٢٠-، ٣-	٢٣-
١٥-، ٤-	١٩-
١٢-، ٥-	١٧-

العاملان الصحيحان هما $٥-$ ، $١٢-$

$$١٢ = -ن، ٥ = -م$$

جَمِّع الحدود ذات العوامل المشتركة

حلل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ.)

خاصية التوزيع

$$٣س^٢ - ١٧س + ٢٠ = ٣س^٢ - ١٢س - ٥س + ٢٠$$

$$= (٣س^٢ - ١٢س) + (-٥س + ٢٠)$$

$$= ٣س(س - ٤) + (٥-)(س - ٤)$$

$$= (٣س - ٥)(س - ٤)$$

تحقق من فهمك

$$(ب) ١٠ص - ٣٥ + ٣٠$$

$$(أ) ٢٢ن - ١$$

إرشادات للدراسة

القاسم المشترك الأكبر

ابحث عن القاسم

المشترك الأكبر لحدود

كثيرة الحدود قبل

تحليلها.



تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية**.

مثال ٣ تحديد كثيرة الحدود الأولية

حلّ العبارة: $٤س^٢ - ٣س + ٥$ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية".

في ثلاثية الحدود السابقة $٤ = أ$ ، $٣ = ب$ ، $٥ = ج$

مجموع العاملين	عوامل العدد ٢٠
٢١-	١-، ٢٠-
٩-	٥-، ٤-
١٢-	١٠-، ٢-

وبما أن ب سالبة، فإن م + ن سالبة. وبما أن ج موجبة فإن م ن موجبة، لذا يكون كل م و ن سالبًا. كَوّن قائمة بأزواج عوامل العدد ٢٠. وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما -٣.

لا يوجد عاملان مجموعهما -٣. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية $٤س^٢ - ٣س + ٥$ أولية.

تحقق من فهمك

$$(١٣) ٧ + ر - ٢ر٤ \quad (ب) ٢س^٢ + ٣س - ٥$$



الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثواني فقط.

حل معادلات بالتحليل: تمثّل المعادلة $٥ن^٢ + ع + ن + ل$. ارتفاع جسم مقذوف لأعلى، حيث تمثّل (ل) الارتفاع بالمتر، و (ن) الزمن بالثواني، و (ع) السرعة الابتدائية م / ثانية، و (ل) الارتفاع الابتدائي بالمتر. ويمكن حل هذه المعادلة بعد كتابتها على الصورة $٥س^٢ + ب س + ج = ٠$ بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال ٤ من واقع الحياة حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

حياة برية: افترض أن فهداً يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ مترًا؟

$$\begin{aligned} \text{معادلة الارتفاع} \quad & ل = ٥ن^٢ + ع + ن + ل \\ \text{عوض ل = ع، ١١ = ل، ٠ =} \quad & ٥ن^٢ + ١١ن + ٠ = ٢ \\ \text{اطرح ٢ من كلا الطرفين} \quad & ٥ن^٢ + ١١ن - ٢ = ٠ \\ \text{اضرب كلا الطرفين في -١} \quad & ٥ن^٢ - ١١ن + ٢ = ٠ \\ \text{حلّل} \quad & (٥ن - ١)(ن - ٢) = ٠ \\ \text{خاصية الضرب الصفري} \quad & ٥ن - ١ = ٠ \quad \text{أو} \quad ٥ن = ٢ \\ \text{حل كل معادلة} \quad & ١ = ٥ن \\ & \frac{١}{٥} = ن \end{aligned}$$

الإجابتان $\frac{١}{٥}$ و ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢ م في أثناء صعوده، وإلى ثانيتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تحقق من فهمك

تنبيه

إشارة السالب
حافظ على (العدد -١) معامل ن^٢، الذي تم إخراجها خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في -١ بدلًا من ذلك.

(٤) فيزياء: قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠ م. والمعادلة

$$ع = ٥ن^٢ + ١٦ن + ٢٠$$

تمثّل ارتفاع الكرة (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟

الأمثلة ١ - ٣

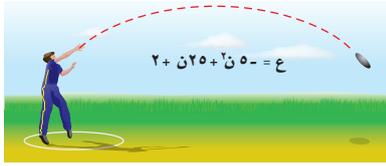
حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(١) \quad ٥٦ + ٢س٢ + ٢س٢٢ + ٢س٣٠ \quad (٢) \quad ٥س٥ - ٢س٣ + ٤ \quad (٣) \quad ٢٠ - ٢س١١ - ٢س٣$$

مثال ٤

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(٤) \quad ٥س٢ + ٢س٩ + ٩ = ٠ \quad (٥) \quad ١٠س٣ - ٢س١٠ + ٨ = ٠ \quad (٦) \quad ١٧س٢ - ٢س٣٠ + ٣٠ = ٠$$



(٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.

الشكل المجاور.

(أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

(ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٨) \quad ٢٤ + ٢س٣٤ + ٢س٤٠ \quad (٩) \quad ٧٠ + ٢س٣٨ + ٢س٤٠ \quad (١٠) \quad ٩ - ٢س٣ - ٢س٣٠$$

$$(١١) \quad ١٠ + ٢س١٣ - ٢س٤٠ \quad (١٢) \quad ٦ + ٢س٣ + ٢س٢٠ \quad (١٣) \quad ٤٥ + ٢س٦٩ + ٢س١٢$$

$$(١٤) \quad ٧ + ٢س٥ - ٢س٤٠ \quad (١٥) \quad ٢٤ + ٢س٢٣ + ٢س٥٠ \quad (١٦) \quad ١٥ + ٢س٨ - ٢س٣٠$$

مثال ٤

(١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثله المعادلة $٤ - ٥س٢ + ٩س٢ + ٢ = ٠$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(١٨) \quad ١٨س٢ + ٩س١٨ - ١٨ = ٠ \quad (١٩) \quad ١٧س٢ + ١٧س١٥ + ١٥ = ٠ \quad (٢٠) \quad ٢٦س٢ + ٢س٣٠ - ١٦ = ٠$$

$$(٢١) \quad ١٣س٢ + ١٣س١٥ = ١٥ \quad (٢٢) \quad ٣س٢ + ٥س٢ = ٢ \quad (٢٣) \quad ١٩س٢ + ٤س٣٠ - ٣٠ = ٠$$

(٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربع العدد س مضافاً إليها ١١ مثلاً للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

$$(٢٥) \quad ٢٠س٦ - ٢س٢٣ - ٢س٢٠ \quad (٢٦) \quad ١٤س٤ - ٢س١٥ - ١٤ \quad (٢٧) \quad ١٨س٥ + ١٨س١٨ + ٨$$

$$(٢٨) \quad ٣٥س٦ - ٢س٣١ + ٣٥ \quad (٢٩) \quad ١٢س٤ - ٢س٥ + ١٢ \quad (٣٠) \quad ١٢س٢ + ٢س٢٠ + ٢٠$$



(٣١) **تخطيط:** خطت بلدية إحدى المدن لبناء متنزه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعلاقة: $٦٦٠س + ٥٢٤س + ٨٥$. حلل هذه العبارة لإيجاد ثنائيي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثّل البعدين الممكنين للمتنزه. وإذا كانت $س = ٨$ ، فما محيط المتنزه؟



الربط مع الحياة

هيأت أمانة منطقة الرياض ٣٦٢ مشروعاً بيئياً وترفيهياً موزعة على مختلف أحياء مدينة الرياض على مساحة تتجاوز نصف مليار متر مربع.

(٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواع خاصة من كثيرات الحدود.

(أ) هندسياً: ارسم مربعاً طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعاً أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟

(ب) هندسياً: قصّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟

(ج) تحليلياً: ارسم خطاً قطرياً بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكلاً مستطيلاً. ما بُعدا المستطيل الناتج؟

(د) تحليلياً: اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيي حد.

(هـ) لفظياً: أكمل العبارة $٢ - ب = ٢ = \dots$ لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٣) **اكتشف الخطأ:** حل كل من زكريا وسامي المعادلة $٦س - ٢س = ١٢$. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك.

سامي

$$١٢ = ٦س - ٢س$$

$$١٢ = ٤س$$

$$١٢ = ١ - ٦س$$

$$١٣ = ٦س \text{ أو } ١٣ = ٦س$$

زكريا

$$١٢ = ٦س - ٢س$$

$$١٠ = ٦س - ٢س$$

$$١٠ = (٣س + ٤)$$

$$١٠ = ٣س - ٤ \text{ أو } ١٠ = ٣س + ٤$$

$$١٣ = ٦س \text{ أو } ١٣ = ٦س$$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية بمعاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ حلين لها. فسّر ذلك.

(٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لـ م و ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة $أس + ٢ب + س + ج$



تدريب على اختبار

٣٧) ما مجموعة حل المعادلة $س^٢ + ٢س - ٢٤ = ٠$ ؟

{٨، ٣-} (ج)

{٦، ٤-} (د)

{٦، ٤-} (أ)

{٨، ٣-} (ب)

٣٦) إجابة قصيرة: لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ ٨ سنوات، والأخرى أصغر منها بستين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٧-٣)

$$٤٠) ع٢ + ١٥ع + ٣٦$$

$$٣٩) س٢ - ٥س - ٢٤$$

$$٣٨) س٢ - ٩س + ١٤$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٢)

$$٤٣) ١٠س٢ - ٢٠س = ٠$$

$$٤٢) ٠ = (١ - ص)(٦ + ٢ص)$$

$$٤١) ٠ = (٩ - أ)$$

٤٤) حلّ المتباينة المركبة $٢ < ١٢ + و$ و $١٨ \geq ٢ + و$ ، ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

$$٤٨) \sqrt{١٠٠٠}$$

$$٤٧) \sqrt{١٢١٠}$$

$$٤٦) \sqrt{٦٤٠}$$

$$٤٥) \sqrt{١٦٠}$$





المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

لماذا؟

يستعمل مصممو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.



فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحل ثنائية حد على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المضردات

الفرق بين مربعين

تحليل الفرق بين مربعين: تذكر أنك تعلمت ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما، ويشير ناتج الضرب هذا إلى **الفرق بين المربعين**. لذا فالصورة المحللة للفرق بين مربعين تسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

أضف إلى

مطويتك

الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي

$$\text{الرموز: } \quad \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب}) \quad \text{أو} \quad (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$$

$$\text{أمثلة: } \quad \text{س}^2 - ٢٥ = (\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥) \quad \text{أو} \quad (\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)$$

$$\text{ن}^2 - ٦٤ = (\text{ن} + ٨)(\text{ن} - ٨) \quad \text{أو} \quad (\text{ن} - ٨)(\text{ن} + ٨)$$

تحليل الفرق بين مربعين

مثال ١

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

$$\text{أ) } ١٦\text{ه} - ٩\text{أ}^٢$$

اكتب العبارة على صورة $\text{أ}^2 - \text{ب}^2$

تحليل الفرق بين مربعين

$$١٦\text{ه} - ٩\text{أ}^٢ = ٤(٤\text{ه}) - ٣(٣\text{أ})^٢$$

$$= (٤\text{ه} + ٣\text{أ})(٤\text{ه} - ٣\text{أ})$$

$$\text{ب) } ١٢١ - ٤\text{ب}^٢$$

اكتب العبارة على صورة $\text{أ}^2 - \text{ب}^2$

تحليل الفرق بين مربعين

$$١٢١ - ٤\text{ب}^٢ = ١١(١١) - ٢(٢\text{ب})^٢$$

$$= (١١ + ٢\text{ب})(١١ - ٢\text{ب})$$

$$\text{ج) } ٢٧\text{ج} - ٣\text{ج}^٣$$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلل بإخراج (ق. م. أ.) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

حلل بإخراج (ق. م. أ.)

اكتب على الصورة $\text{أ}^2 - \text{ب}^2$

تحليل الفرق بين مربعين.

$$٢٧\text{ج} - ٣\text{ج}^٣ = ٣\text{ج}(٩ - \text{ج}^٢)$$

$$= ٣\text{ج} - ٣(٣\text{ج})^٢ = ٣\text{ج} - ٣(٩\text{ج}^٢)$$

$$= ٣\text{ج} - ٢٧\text{ج}^٢ = ٣(١ - ٩\text{ج})$$

تحقق من فهمك

$$\text{أ) } ٦٤\text{ه} - ٩\text{أ}^٢$$

$$\text{ب) } ٩\text{ص} + ٣\text{ص}^٣$$

$$\text{أ) } ٨١ - ٤\text{ب}^٢$$

$$\text{ب) } ٩\text{س} - ٣\text{س}^٣$$



تنبيه

مجموع مربعين:

لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^2 + ب^2$ إلى $(أ+ب)(أ+ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $ب^٤ - ١٦$

اكتب $ب^٤ - ١٦$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$ب^٤ - ١٦ = (ب^٢)^٢ - (٤)^٢$$

$$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$$

لاحظ أن العامل $ب^٢ - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.

$$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٢^٢)$$

اكتب $ب^٢ - ٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= (ب^٢ + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$$

(ب) $٦٢٥ - س^٤$

اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^٢ - (س^٢)^٢$$

$$= (س^٢ + ٢٥)(س^٢ - ٢٥)$$

اكتب $س^٢ - ٢٥$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= (س^٢ + ٢٥)(س + ٥)(س - ٥)$$

$$= (س^٢ + ٢٥)(س - ٥)(س + ٥)$$

تحقق من فهمك

٢ (ج) $٨١ - س^٤$

٢ (ب) $٤٤ - ب^٤$

١ (أ) $ص - ٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلًا تامًا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

(أ) $س^٥ - ٤٥س$

حلل بإخراج (ق. م. أ.)

$$س^٥ - ٤٥س = س(س^٤ - ٤٥)$$

اكتب $س^٤ - ٤٥$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.
تحليل الفرق بين مربعين

$$= س[س^٢(٣) - ٢(٣)]$$

$$= س(س^٢ - ٣)(س + ٣)$$

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملًا.

(ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

العبارة الأصلية

$$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$$

التحليل بإخراج (ق. م. أ.)

$$= ٧(س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣)$$

جمع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$$

حلل كل تجميع

$$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$$

$٣ + س$ عامل مشترك

$$= ٧(س + ٣)(س^٢ - ١)$$

تحليل الفرق بين مربعين

$$= ٧(س + ٣)(س + ١)(س - ١)$$



تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

$$\begin{array}{ll} \text{(أ)} ٢ص - ٥٠ & \text{(ب)} ٦س - ٩٦ \\ \text{(ج)} ٢م^٣ + ٣م - ٢م - ٥٠ - ٢٥ & \text{(د)} ٣ر + ٣ر + ٢ر + ١١ + ٦٦ \end{array}$$

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ s التي تحقق المعادلة $s = ٢ - \frac{٩}{١٦}$ ، إذا كانت $s = ٠$ ؟

(أ) $\frac{٩-}{٤}$ (ب) صفر (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن s بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

المعادلة الأصلية

عوّض عن s بـ صفر

اكتب على صورة $أ - ب$

تحليل الفرق بين مربعين

خاصية الضرب الصفري

الإجابة الصحيحة جـ

$$\begin{array}{l} s = ٢ - \frac{٩}{١٦} \\ s = ٢ - \frac{٩}{١٦} \\ s = ٢ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^2 \\ (s + \frac{٣}{٤})(s - \frac{٣}{٤}) = ٠ \\ s + \frac{٣}{٤} = ٠ \quad \text{أو} \quad s - \frac{٣}{٤} = ٠ \\ s = -\frac{٣}{٤} \quad \text{أو} \quad s = \frac{٣}{٤} \end{array}$$

تحقق من فهمك

٤) حلّ المعادلة: $١٨س = ٣ = ٥٠س$ ؟

(أ) $٠، \frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥-}{٣}$ (ج) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥-}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٣}، \frac{٥-}{٣}$

تأكد

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

الأمثلة ٣-١

$$\begin{array}{lll} \text{(١)} ٩ - ٢ & \text{(٢)} ٢٥ - ٢٤ & \text{(٣)} ٢ل - ٣ل - ١٦٢ \\ \text{(٤)} ٨١ - ٤ & \text{(٥)} ٢د - ٤د - ٣٢ف & \text{(٦)} ٢٠ر - ٤٤٥٤ \\ \text{(٧)} ٢٥٦د - ٤ج & \text{(٨)} ٢ج - ٣ج + ٣ج - ٢ج - ٣ & \text{(٩)} ٣ن + ٣ن - ٢ن - ٤٨ - ٣٢ \end{array}$$

مثال ٤

١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة $\frac{١}{٤}ع = ٢ف$ تعبّر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه العجلات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر العجلات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة؟

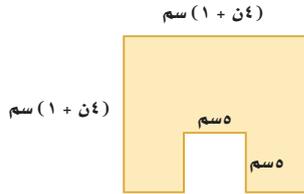
الأمثلة ٣-١

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

- (١١) ل^٢ - ١٢١
(١٢) ر^٤ - ٤ك^٤
(١٣) ٦ ن^٤ - ٦
(١٤) ر^٢ - ٩ ن^٢
(١٥) ٢ ج^٢ - ٣٢ د^٢
(١٦) هـ^٣ - ١٠٠ هـ
(١٧) هـ^٤ - ٢٥٦
(١٨) ٨١ + ن^٢ - ٢ ن^٣ - ١٦٢ ن^٢ + ٨١
(١٩) ٢ ص^٤ - ٢
(٢٠) ٤ ل^٧ - ٤ هـ^٧
(٢١) ٦ ك^٢ هـ^٤ - ٥٤ ك^٤
(٢٢) ٥ هـ^٣ - ٢٠ هـ
(٢٣) ٢ + ٣ ف^٢ - ٦٤ ف^٢ - ١٢٨
(٢٤) ٣ ر^٣ - ١٩٢ ر
(٢٥) ١٠ ك^٣ - ١٢١٠ ك
(٢٦) ٣ س^٣ ن^٤ - ٢٧ س^٣
(٢٧) ل^٣ ر^٥ - ل^٣
(٢٨) ٨ ج^٣ - ٨ ج
(٢٩) ر^٣ - ٥ ر^٢ - ١٠٠ ر + ٥٠٠
(٣٠) ٣ ن^٣ - ٧ ن^٢ - ٣ ن + ٧
(٣١) ٤ م^٣ + ٩ م^٢ - ٣٦ م - ٨١
(٣٢) ٣ م^٣ + ٤٣ م
(٣٣) ٤ س^٤ + ٦ س^٣ - ٣٦ س^٢ - ٢١٦ س
(٣٤) ١٥ م^٣ + ١٢ م^٢ - ٣٧٥ م - ٣٠٠

مثال ٤

(٣٥) هندسة: يمثل الشكل المجاور مربعاً قُطِعَ منه مربع آخر.



- (أ) اكتب عبارة تمثل مساحة المنطقة المظللة.
(ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضاً أنهما يُمثَلان بثنائيّتي حد.

(٣٦) مبانٍ: أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعده ٨ م، ٨ م. ثم قرّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠ م^٢، فما بُعدها؟

(٣٧) كتب: نشرت إحدى دور النشر كتاباً جديداً، وتمثل المعادلة $-٢٥م + ١٢٥م$ مبيعات الكتاب، حيث (ع) تمثل عدد النسخ المباعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

- (أ) في أي شهر يُتَوَقَّع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟
(ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟
(ج) ما عدد النسخ المباعة في الذروة؟



الرابط مع الحياة

على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل، ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لا يزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتداد المكتبات.



حل المعادلات بالتحليل
تذكر أن تجعل أحد طرفي
المعادلة صفراً قبل حل
المعادلة بالتحليل .

حل كل معادلة مما يأتي بالتحليل، ثم تحقق من صحة الحل:

$$٣٩ \text{ (٣٩)} \quad ١٠٠ = ٢س٢٥$$

$$١٢١ = ٢س٣٦ \text{ (٣٨)}$$

$$١٦ = ٢س٤ \text{ (٤١)}$$

$$٠ = \frac{٩}{١٦} - ٢س٤ \text{ (٤٠)}$$

$$٠ = ٨١ - ٢س٩ \text{ (٤٣)}$$

$$٠ = \frac{١}{٣٥} - ٢س٨١ \text{ (٤٢)}$$

(٤٤) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(أ) **جدولياً:** انسخ الجدول أدناه وأكمه بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$٩س٢ + ١٢س + ٩$	$(٣س+٢)(٣س+٢)$	$٤س(٢س) = ٨س٢$	$٩ = ٣٣$	
$١٦س٢ - ٢٤س + ١٦$				
$٢٥س٢ - ٢٠س + ٤$				
$٩س١٦ + ٢س٢٤ + ٩$				

(ب) **تحليلياً:** اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحددين الأول والأخير.

(ج) **جبرياً:** اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثل مربعاً كاملاً.

(د) **لفظياً:** ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٥) **اكتشف الخطأ:** حللت كل من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسّر ذلك.

منى
 $١٦س٤ - ٢٥س٢ = (٤س٤ + ٥س٥)$

هلا
 $١٦س٤ - ٢٥س٢ = (٥س٥ + ٤س٤)(٥س٥ - ٤س٤)$

(٤٦) **تحّد:** بسّط العبارة: $٩ - (٣+ك)٢$ بتحليلها بالفرق بين مربعين.

(٤٧) **تحّد:** حلّل: $٨١ - ١٦س$

(٤٨) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعطِ مثلاً مضاداً للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل".

(٤٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثلاً لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تاماً إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّها.

(٥٠) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حداً متغيراً في الوسط؟



تدريب على اختبار

(٥٢) أي مما يأتي يمثل مجموع حلّي المعادلة $س^٢ + ٣س = ٥٤$ ؟

- (أ) ٣ (ب) ٢١
(ج) ٣ (د) ٢١

(٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة $س^٢ + ١٣س = ٢٤$ هو ٨- فما الجذر الآخر؟

- (أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$
(ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

(٥٥) $س^٢ + ١٠س + ١٠$

(٥٤) $١٥ + ٣س - ٢س^٢$

(٥٣) $١٤س + ١٧س^٢$

حلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلّك: (الدرس ٧-٣)

(٥٨) $س^٢ - ٢٢س - ٩٦ = ٠$

(٥٧) $١٠س + ١ - ٢س^٢ = ٠$

(٥٦) $١٨س - ٩س^٢ = ٠$

أوجد ناتج كلاً مما يأتي: (الدرس ٦-٧)

(٦٢) $(٥س + ٤)(٥س + ٤)$

(٦١) $(١س - ٦)^٢$

(٦٠) $(٥س - ٢)^٢$

(٥٩) $(٣س + ٣)(٣س + ٣)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

(٦٥) $(٣س + ٣)(٣س + ٣)$

(٦٤) $(٢س - ٢)(٢س - ٢)$

(٦٣) $(٦س - ٢)^٢$

(٦٨) $(٥س + ٤)(٥س + ٤)$

(٦٧) $(١س - ٦)^٢$

(٦٦) $(٥س - ٢)^٢$





المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

لماذا؟

٦-٧

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المضردات

المربع الكامل لثلاثية حدود



يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $0 = 5t^2 + 0.1t$ ، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي (0) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

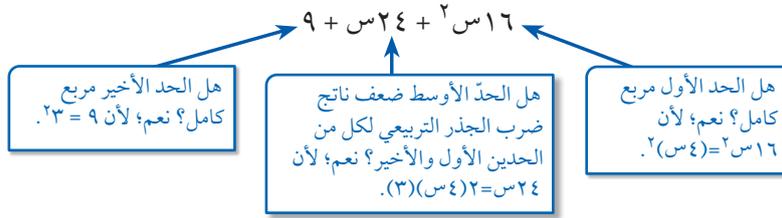
تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائي الحد $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، تذكر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 & a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned}$$

تكون نواتج الضرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $16s^2 + 24s + 9$ تشكل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.



أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b) \quad \text{الرموز:}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$s^2 + 8s + 16 = (s + 4)(s + 4) = 16 + 8s + s^2 \quad \text{أمثلة:}$$

$$s^2 - 6s + 9 = (s - 3)(s - 3) = 9 - 6s + s^2$$



مثال ١

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها.

$$(أ) \quad ٤ص + ١٢ص + ٩$$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص = (٢ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٢ص)(٣)$ ؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٤ص + ١٢ص + ٩$ ثلاثية حدود تشكل مربعاً كاملاً.

$$٤ص + ١٢ص + ٩ = (٢ص + ٣)^٢ \quad \text{اكتب العبارة على صورة } أ٢ + ب٢ + ج٢$$

$$\text{حلّل باستخدام القاعدة} \quad ٢(٣ + ٢ص) =$$

$$(ب) \quad ٩ص - ٦ص + ٤$$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩ص = (٣ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٣ص)(٢)$ ؟ لا، $٦ص \neq ٢(٣ص)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩ص - ٦ص + ٤$ لا تشكل مربعاً كاملاً.

تحقق من فهمك

$$(أ) \quad ٩ص + ٢٤ص + ١٦ \quad (ب) \quad ٢٥ + ١٠ + ٢٢$$

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تاماً إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لا يمكن تحليلها فإنها تكون أولية.

أمثلة	عدد الحدود	الخطوات
$٤ص + ١٢ص + ٩ = (٢ص + ٣)^٢$	أي عدد	الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق. م. أ.)
$٩ص - ٦ص + ٤ = (٣ص - ٢)^٢$ $١٦ص + ٢٤ص + ٩ = (٤ص + ٣)^٢$	٢ أو ٣	الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقاً بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.
$٩ص - ٦ص + ٤ = (٣ص - ٢)^٢$ $١٢ص + ٨ص + ٦ = (٣ص + ٢)(٤ص + ٣)$ $١٢ص + ٨ص + ٦ = (٣ص + ٢)(٤ص + ٣)$ $٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٣ص + ٢) =$ $(٤ص + ٣)(٣ص + ٢) =$	٣ أو ٤	الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـ $٢ص + ب + ج$ أو $٢ص + ب + ج$ أو حلّل بتجميع الحدود.

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب "أولية":
(أ) $٥س^٢ - ٨٠$

الخطوة ١: (ق. م. أ.) للحددين $٥س^٢ - ٨٠$ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ.).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقاً بين مربعين.

$$\begin{aligned} ٥س^٢ - ٨٠ &= ٥(س^٢ - ١٦) \\ ٥س^٢ - ٨٠ &= ٥(س - ٤)(س + ٤) \end{aligned}$$

تحليل الفرق بين مربعين

(ب) $٩س^٢ - ٣٥$

الخطوة ١: (ق. م. أ.) للحدود: $٩س^٢ - ٣٥$ ، هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعاً كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعاً كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستخدام النمط $أس^٢ + ب + ج$. هل يوجد عدنان ناتج ضربهما $٩(-٣٥)$ ، أو ٣١٥ ومجموعهما -٦ ؟ نعم، ٢١ و ١٥ ناتج ضربهما -٣١٥ ومجموعهما -٦ .

$$\begin{aligned} ٩س^٢ - ٣٥ &= ٩س^٢ + م + ن - ٣٥ \\ ٩س^٢ + م + ن - ٣٥ &= ٩س^٢ + ١٥س - ٢١س - ٣٥ \\ &= (٩س^٢ + ١٥س) + (-٢١س - ٣٥) \\ &= ٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥) \\ &= (٣س + ٥)(٣س - ٧) \end{aligned}$$

استخدم القاعدة
جَمَعَ الحدود ذات
العوامل المشتركة
حلّل كل تجمّع بإخراج
(ق. م. أ.)
عامل مشترك

تحقق من فهمك

(ب) $١٢س + ٥س - ٢٥$

(أ) $٢س^٢ - ٣٢$

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: $٩س^٢ - ٤٨س = -٦٤$

المعادلة الأصلية

أضف ٦٤ إلى الطرفين

تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤$ تمثل مربعاً كاملاً

حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل

اكتب $(٨-٣س)^٢$ كحاصل ضرب عاملين

$$\begin{aligned} ٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ &= ٠ \\ ٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ &= ٠ \\ ٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ &= ٠ \\ ٣(٣س^٢ - ١٦س + ٢٨) &= ٠ \\ ٣(٣س - ٨)(س - ٤) &= ٠ \\ (٣س - ٨)(س - ٤) &= ٠ \end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك،

يمكنك التحقق من

إجابتك من خلال:

- استعمال طريقة التوزيع

بالترتيب.

- استعمال خاصية التوزيع

- تمثيل كل من العبارة

الأصلية وتحليلها بالرسم

والمقارنة بينهما.

$$\begin{aligned} 0 &= 3s - 8 \\ 0 &= 8 - 3s \\ 8 &= 3s \\ \frac{8}{3} &= s \end{aligned}$$

ضع أحد العوامل المتكررة = 0
أضف 8 إلى كلا الطرفين
اقسم كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

$$0 = 36 + 12 + 2 \quad (أ) \quad 0 = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 2 \quad (ب)$$

سبق أن حللت معادلات مثل $s^2 - 16 = 0$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضاً استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 - 16 \\ 16 &= s^2 \\ \pm \sqrt{16} &= s \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
أضف 16 إلى كلا الطرفين
خاصية الجذر التربيعي

تذكر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ 16، هما 4 و -4. لذا فإن مجموعة الحل هي $\{-4, 4\}$. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ $\{\pm 4\}$.

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ $\pm \sqrt{16}$ موجب أو
سالب الجذر التربيعي لـ 16

أضف إلى

مطويتك

خاصية الجذر التربيعي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $s^2 = n$ ، نأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي $n \geq 0$ ، إذا كان $s^2 = n$ فإن $s = \pm \sqrt{n}$.

مثال: $s^2 = 25$

$$s = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

إذا كانت n في المعادلة $s^2 = n$ ، ليست مربعاً كاملاً، فنتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمال الآلة الحاسبة. أما إذا كانت n مربعاً كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

استعمال خاصية الجذر التربيعي

مثال 4

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$(أ) \quad 81 = (s - 6)^2$$

$$81 = (s - 6)^2$$

$$\pm \sqrt{81} = s - 6$$

$$s - 6 = \pm 9$$

$$s = 6 \pm 9$$

$$s = 9 + 6 \quad \text{أو} \quad s = 9 - 6$$

$$s = 15 \quad \text{أو} \quad s = 3$$

الجذران هما 15 و -3

المعادلة الأصلية

خاصية الجذر التربيعي

$$9 \times 9 = 81$$

أضف 6 إلى كلا الطرفين

افصل المعادلة إلى معادلتين

بسط

تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية



$$(ب) (س + ٦) = ١٢$$

المعادلة الأصلية

$$١٢ = ٢(٦ + س)$$

خاصية الجذر التربيعي

$$س + ٦ = \pm \sqrt{١٢}$$

اطرح ٦ من كلا الطرفين

$$س = \pm \sqrt{١٢} - ٦$$

الجذران هما $٦ - \sqrt{١٢}$ ، $٦ + \sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $٦ + \sqrt{١٢} \approx ٥,٥٤$ ، $٦ - \sqrt{١٢} \approx ٤,٤٦$ ،

تحقق من فهمك

$$(ب٤) (٣ + ع) = ٢٦$$

$$(أ٤) (١٠ - أ) = ١٢١$$

٥ مثال من واقع الحياة حل المعادلة

فيزياء: أسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $٥ - ن^٢ = ع$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي (ع) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، $٥ = ع$ والارتفاع الابتدائي ٦٨، إذن $٦٨ = ع$.

المعادلة الأصلية

$$ع = ٥ - ن^٢$$

عوض عن ع بصفر، وعن ع بـ ٦٨

$$٥ = ٥ - ن^٢ + ٦٨$$

اطرح ٦٨ من كلا الطرفين

$$-٦٣ = -ن^٢$$

اقسم على -٥

$$١٣,٦ = ن^٢$$

خاصية الجذر التربيعي

$$\pm ٣,٧ \approx ن$$

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تحقق من فهمك

(٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.



تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي

(١٥٦٤م - ١٦٤٢م)

كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتلة تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.



وزارة التعليم

الدرس ٦-٧: المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة: ١٣٧ من م.١

2024 - 1446

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّها:

$$(١) \quad ٢٥س + ٢س٦٠ + ٣٦ \quad (٢) \quad ٣٦س + ٢س٣٠ + ٣٦$$

مثال ٢ حلّ كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(٣) \quad ٢س٢ - س - ٢٨ \quad (٤) \quad ٦٤س + ٢س٤ \quad (٥) \quad ١٦س - ٩س + ٢س٤$$

المثالان ٣، ٤ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٦) \quad ٣٦س = ٢س٤ \quad (٧) \quad ٦٤س - ٢س٤٨ + ص٤٨ = ١٨ + ٩ \quad (٨) \quad ٤٧ = ٢(٥ + ع)$$

مثال ٥ (٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢ م. استعمل المعادلة $٥ - ن + ٢ع$ لإيجاد العدد التقريبي للشواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّها:

$$(١٠) \quad ٤س٤ - ٢س٤٢ + س١١٠ \quad (١١) \quad ١٦س - ٢س٥٦ + س٤٩ \quad (١٢) \quad ٨١س - ٢س٩٠ + س٢٥$$

مثال ٢ حلّ كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب "أولية":

$$(١٣) \quad ١٨د - ٣٩د + ٢د٢٤ \quad (١٤) \quad ٢١س - ١٠س + ٢س٨$$

$$(١٥) \quad ٢٤ب + ١٢ب - ٢ب٢ \quad (١٦) \quad ٢١٦أ - ٢١٢ب$$

$$(١٧) \quad ١٢م - ٣م٢ - ٢م٧٠ \quad (١٨) \quad ٨٨ج - ٢ج٨ + ٢٤٢$$

$$(١٩) \quad ٤و - ٢و \quad (٢٠) \quad ١٢ل - ٣ل٣$$

$$(٢١) \quad ١٦ك - ٣ك٤٨ + ٢ك٣٦ \quad (٢٢) \quad ٤ن + ٣ن١٠ - ٢ن٨٤$$

$$(٢٣) \quad ٢٢أ - ٢أ٢ - ٢أ٣ + ٢ب \quad (٢٤) \quad ٢٢ر - ٣ر٢ - ٢ر٧٢ + ٣٦$$

$$(٢٥) \quad ٣ك٣ - ٢ك٢٤ + ٢ك٤٨ \quad (٢٦) \quad ٢ج٢ + ٢ج - ٢ه٣ + ٤ه٤$$

$$(٢٧) \quad ٨ص - ٢ص٢٠٠$$

المثالان ٣، ٤ حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

$$(٢٨) \quad ٠ = ٣٦ + م٢٤ - ٢م٤ \quad (٢٩) \quad ٧ = ٢(٤ - ص)$$

$$(٣٠) \quad ٠ = \frac{٢٥}{٤٩} + \frac{١٠}{٧} + ٢أ \quad (٣١) \quad ٠ = \frac{٩}{١٦} + س٣ - ٢س٢$$

$$(٣٢) \quad ٢٥ = ١٦ + س٨ + ٢س٢ \quad (٣٣) \quad ١٨٠ = ٦٠ - ٢س٥ + ٢س١٠$$

$$(٣٤) \quad ٤٠٠ = ٨٠ - ٢س٤ \quad (٣٥) \quad ٩ - ٥٤س = ٨١س٢$$

$$(٣٦) \quad ١٥ = ١ + ج٤ + ٢ج٤$$



مثال ٥ (٣٧) فيزياء: أسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩ م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قَرِّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

(٣٨) هندسة: مُثِّلَت مساحة مربع بالعبارَة $٩س^٢ - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.

(٣٩) هندسة: إذا كانت العبارَة $٨ص^٣ + ٤٠ص^٢ + ٥٠ص$ تمثِّل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤٠) اكتشف الخطأ: حلَّ منشور وفيصل العبارَة $س^٨ - س^٤$ تحليلًا تامًّا، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

فيصل

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٢ + ١)(س - ١)(س + ١)$$

منصور

$$س^٨ - س^٤ = س^٤(س^٢ + ١)(س - ١)$$

(٤١) تحدِّ: حلَّ $س^٦ + ٦س^٣ + ٢س^٠ + ٢س^٠$ تحليلًا تامًّا.

(٤٢) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملًا يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًّا، ثم حلَّ المعادلة.

(٤٣) تبرير: اكتب مثالًا مضادًّا للعبارَة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

(٤٤) اكتب: فسِّر كيف تحلَّل كثيرة حدود تحليلًا تامًّا.

(٤٥) حدِّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسِّر إجابتك:

$$٤س^٢ - ٣٦س + ٨١$$

$$٢٥س^٢ + ١٠س + ١$$

$$٤س^٢ + ١٠س + ٤$$

$$٩س^٢ - ٢٤س + ١٦$$

(٤٦) اكتب: فسِّر كيف تحدِّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملًا.

تدريب على اختبار

(٤٨) هندسة: إذا كان محيط دائرة $\frac{٦٠}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟

(أ) $\frac{٣٠}{٥}$ وحدة مربعة

(ب) $\frac{١٢}{٥}$ وحدة مربعة

(ج) $\frac{٩}{٢٥}$ وحدة مربعة

(د) $\frac{٣٠}{٢٥}$ وحدة مربعة

(٤٧) حلَّ المعادلة $(س - ٣)^٢ = ٢٥$.

(ج) ١٤، ٤

(أ) ٢، ٨-

(د) ١٤، ٤-

(ب) ٨، ٢-

حلّل كلّاً من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكناً باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٥)

(٤٩) $٤س٢ - ٨١ص٢$ (٥٠) $١ - ١٠٠ل٢$ (٥١) $٢٠ - ٢٣٣$ (٥٢) $١ - ٢٢٥$

حلّ كلّاً من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٤)

(٥٣) $٠ = ٩٠ + ٤٨س٢$ (٥٤) $٢٨ = ١٤س٢ + ١٤س١$ (٥٥) $٤٨ = ١٠س٢ - ٢س١$

(٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٧) (-٢، -٣). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ميل المستقيم المارّ بكلّ زوج من النقاط في كلّ ممّا يأتي:

(٥٧) (٢، -١) (٥، -٣)

(٥٨) (-٥، ١) (-٤، ٥)

(٥٩) (-٢، ٣) (٨، ٣)



حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلًا تامًا:

(١) $٢٥س٢ص٤$ (٢) $١٧أ٢$

(٣) $١٨ج٣د٣$

(٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النباتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نباتات.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

(٥) $٢٤، ٧ج، ٢٤$ (٦) $١١٦أ، ٢٨أ، ٢٤$

(٧) $٥٠ج٢هـ، ١٢٠ج٢هـ$ (٨) $٨ك٢ر، ٣٦ك$

(٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه $٢س٢ - ١٥$ وحدة مربعة، فما عرضه؟



$٥ + س٢$

(أ) $٥ - س$ (ج) $٣ - س$

(ب) $٣ + س$ (د) $٣ - س٢$

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٠) $٥س٥ص - ١٠س$

(١١) $٧أ٢ب + ١٤أ٢ب + ٢١أ٢ب$

حلّل كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين:

(١٢) $٤س٤ + ٨س + ٢س + ٢$

(١٣) $١١٠ - ١٥٠ - ١٠ + ٥$

حل كلّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

(١٤) $ص(ص - ١٤) = ٠$

(١٥) $٣س(س + ٦) = ٠$

(١٦) $١١٢ = ٢أ$

(١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفة مساحتها

(س - ٩) متر مربع بالسجاد، إذا كان عرض الغرفة

(س - ٣) مترًا، فما طولها بالأمتار؟

(أ) $٣ - س$ (ج) $٣ + س$

(ب) $٩ - س$ (د) ٣

حلّل كلّاً من ثلاثيات الحدود الآتية:

(١٨) $٦ + س٧ + ٢س$ (١٩) $٢٨ - س٣ - ٢س$

(٢٠) $١٠س١ - ٢س - ٣$ (٢١) $١٥س١٥ + ٧س - ٢$

(٢٢) $٢٥ - ٢س$ (٢٣) $٨١ - ٢س٤$

(٢٤) $٩س٩ - ٢س١٢ + ٤$ (٢٥) $٢٥ + س٤٠ + ٢س١٦$

حلّل كلّاً من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

(٢٦) $٢١ = س٤ - ٢س$ (٢٧) $٢٤ - س٢ = ٢٤ - ٢س$

(٢٨) $٦س٦ - ٥س - ٦ = ٠$ (٢٩) $٢س٢ - ١٣س + ٢٠ = ٠$

(٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدّ عاملاً من عوامل

$١ - ٤$ عند تحليلها تحليلًا تامًا؟

(أ) $١ - ٢س$ (ج) $س$

(ب) $١ - س$ (د) ١



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) جهِّز زياد الأعداد المدوَّنة في الجدول لكل نوعٍ من أنواع الكعك، إذا أراد وضع العدد نفسه من كل نوعٍ من الكعك في كل سلةٍ، بحيث تحوي السلة أكبر عددٍ ممكن من كل نوعٍ من أنواع الكعك جميعها، فما عدد السلال اللّازمة؟
"تلميح: لا يشترط استخدام جميع قطع الكعك".

نوع الكعك	العدد
بالشوكولاتة	٥٤
بالفراولة	٤٥
بالفواكة	٣٦
بالكراميل	٦٠

- (أ) ١٨
(ب) ١٦
(ج) ١٢
(د) ١٠

(٢) باستعمال المعلومات في السؤال ١، كم قطعة كعكٍ من كل نوعٍ ستحوي كل سلةٍ؟

- (أ) ٢
(ب) ٣
(ج) ٤
(د) ٦

(٣) حلّ: م + ن + ٥ - م - ن - ١٥

- (أ) (م - ن) (٣ - ٥)
(ب) (ن - ٣) (٣ + م)
(ج) (٥ - م) (٥ + ن)
(د) (٣ - م) (٣ + ن)

(٤) أيٌّ ممَّا يأتي يمثل حلًّا للمعادلة: $٦ + ٢س - ١١٢ = ٠$ ؟

- (أ) ١٤-
(ب) ٨-
(ج) ٦
(د) ١٢

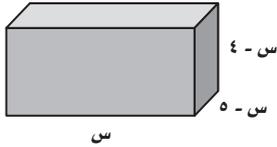
(٥) أيٌّ من كثيرات الحدود الآتية، كثيرة حدود أولية؟

- (أ) $٢٤ + ٢س + ٣٤س$
(ب) $١٠ + ٢س + ٢٢س$
(ج) $٧٠ + ٢س + ٣٨س$
(د) $٤ + ٢س + ٣س$

(٦) أيٌّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $٤٥٢ - ٨٠٢ج$ ؟

- (أ) ٥
(ب) $٣ب - ٤ج$
(ج) $٢ب - ٥ج$
(د) $٣ب + ٤ج$

(٧) إذا كان حجم متوازي المستطيلات أدناه يساوي ٥٦ س ستمتراً مكعباً،



فأيٌّ من الأعداد التالية، لا يمثل بُعداً لمتوازي المستطيلات؟

- (أ) ٦ سم
(ب) ٧ سم
(ج) ٨ سم
(د) ١٢ سم

(٨) عند تحليل كثيرة الحدود: $٩ - ٢ص + ٢٠$ ، نحصل على:

- (أ) $(٢ - ص)(١٠ - ص)$
(ب) $(٤ - ص)(٥ - ص)$
(ج) $(٢ - ص)(٧ - ص)$
(د) $(٥ - ص)(٢ + ص)$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٤: يمكن التحقق من الحل بتعويض العدد في المعادلة؛ للحصول على جملة رياضية صحيحة.



إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

(١٥) المعادلة: $ع = -١٦ن + ٢٠٠$ تمثل ارتفاع كرة تمَّ ركلها من الأرض لأعلى.

(أ) عبّر عن الارتفاع بصورة كثيرة حدودٍ بعد تحليلها تحليلًا تامًّا.

(ب) في أي وقت يكون ارتفاع الكرة عن الأرض مساويًا للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى يكون ذلك؟



أدرب

من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

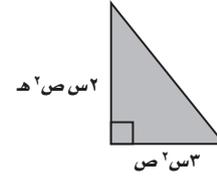
أنا طالبٌ مُعدٌّ للحياة، ومناقسٌ عالميًّا.

إجابات قصيرة

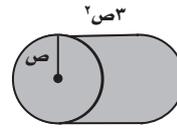
أجب عن الأسئلة الآتية:

عبّر عن كلِّ ممَّا يأتي في صورةٍ وحيدة حدِّ.

(٩) مساحة المثلث:



(١٠) حجم الأسطوانة:



بسِّط كلِّ عبارةٍ ممَّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

$$(١١) \frac{٣م^٢ن}{٣م}$$

$$(١٢) \left(\frac{٣ج-٣هـ-٣}{٣س} \right)$$

$$(١٣) \left(\frac{٩س^٢ص^٣-٥هـ^٣س^٢ص}{٢ص^٢ص^٣} \right)$$

(١٤) المعادلة: $ع = -١٦ن + ٤٠ + ٣$ تمثل ارتفاع بالون فوق سطح الأرض بالقدم بعد ن ثانيةً من إطلاقه، أوجد ارتفاعه بعد ثانيتين من إطلاقه.

للمساعدة ..

إذا لم تجب عن السؤال

فراجع الدرس ..