الملاذ في مهارات الرياضيات

وحدة التكامل

تدريبات مع الحل

الملاذ في مهارات الرياضيات
0772259503
الاستاذ حمزة عواد ابو الفول

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

توجيهي علمي

مثال: جد اقترانًا بدائيًّا للاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ٤س^{٣} + قا^{٢} س

الحل : م (س) = س^{٤} + ظا س + ٥

مثال: جد $\int$ (٦س −٣) دس

الحل : $\int$ (٦س −٣) دس = ٣س^{٢} − ٣س + جـ

مثال: جد $\int$ ظتا^{٢}س دس

الحل : $\int$ ظتا^{٢}س دس = $\int$ (قتا^{٢}س −١) دس

= − ظتا س − س + جـ

مثال: إذا كان $\int$ ق(س) دس = جا^{٢} ٢س + ظا س + جـ فجد قَ ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل : ق (س) = ٤ جا ٢س جتا ٢س + قا^{٢}س   باشتقاق الطرفين

= ٢ جا ٤س + قا^{٢} س

قَ (س) = ٨ جتا ٤س + ٢ قا س × قاس ظا س

= ٨ جتا ٤س + ٢ قا^{٢}س ظاس

قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = ٨ جتا π + ٢ قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$

= ٨ × $^{-}$١ + ٢ × ٢ × ١

= −٤

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

توجيهي علمي

مثال: إذا كان $\int \left(\text{قَ(س)} + ٢\text{س}\right)\,\text{دس} = \text{س}^{٣} + \text{أ س}^{٢} + ١$

وكان قَ(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، جد : قيمة أ ، ق(٠) ، قَ(٤)

الحل :

(١) $\text{قَ(س)} + ٢\text{س} = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{أ س}$ (باشتقاق الطرفين)

قَ(١) = ٥ ⟸ ٥ + ٢ = ٣ + ٢أ ⟸ أ = ٢

(٢) $\text{ق(س)} + \text{س}^{٢} + \text{جـ} = \text{س}^{٣} + \text{أ س}^{٢} + ١$

ق(٢) = ٧ ⟸ ٧ + ٤ + جـ = ٨ + ٤أ + ١ ⟸ ١١ + جـ = ٨ + ٤ × ٢ + ١

⟸ جـ = ٨

$\text{ق(س)} + \text{س}^{٢} + ٨ = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ١$ ⟸ $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٧$

⟸ ق(٠) = −٧

(٣) $\text{قَ(س)} = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$ ⟸ $\text{قَ(٤)} = ٣(٤)^{٢} + ٢(٤) = ٥٦$

الحلول

مثال: جـد $\int \text{دس}$ $= \text{س} + \text{جـ}$

مثال: جـد $\int \frac{\text{د س}}{٤}$ $= \frac{١}{٤}\text{س} + \text{جـ}$

مثال: جـد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{د س}$ $= \int \text{س}^{\frac{-١}{٣}}\,\text{دس} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$

مثال: جـد $\int \frac{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}\,\text{د س}$ $= \int \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{٥}{٢}}\,\text{دس} = \frac{٢}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{جـ}$

مثال: جـد $\int \left(٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٦\right)\text{دس}$ $= \text{س}^{٤} - \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$

مثال: اذا كانت $\int_{\text{١+أ}}^{\text{٢+٣أ}} \text{٥ دس} = \text{٤٠}$ ، فجد قيمة أ

الحل : $\int_{\text{١+أ}}^{\text{٢+٣أ}} \text{٥ دس} = \text{٤٠} \Leftarrow \text{٥}\,[(\text{٢}+\text{٣أ})-(\text{١}+\text{أ})] = \text{٤٠}$

$\Leftarrow \text{٥}\,(\text{٢أ}+\text{١}) = \text{٤٠} \Leftarrow \text{أ} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$

مثال: اذا كان $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{ق(س)} - \text{٢س})\,\text{دس} = \text{٢٠}$ ، فجد $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٢ق(س) دس}$

الحل : من المعطيات $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{ق(س)} - \text{٢س})\,\text{دس} = \text{٢٠} \Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} - \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٢س دس} = \text{٢٠}$

$\Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} - [\text{س}^{\text{٢}}]_{\text{٠}}^{\text{٢}} = \text{٢٠} \Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} - \text{٤} = \text{٢٠}$

$\Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} = \text{١٦}$

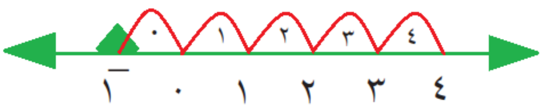
المطلوب $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٣ق(س)} = \text{٣} \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{ق(س) د س} = \text{٣} \times \text{١٦} = \text{٤٨}$

مثال: جد $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} [\text{س} + \text{١}]\,\text{دس}$

الحل : نعيد تعريف اقتران اكبر عدد صحيح

$\text{س} + \text{١} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{١-}$

$\text{ل} = \text{١}$



$\int_{\text{١}}^{\text{٤}} [\text{س} + \text{١}]\,\text{دس} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢ . دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{٣ . دس} + \int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \text{٤ . دس}$

$= \text{٢} + \text{٣} + \text{٤}$

$= \text{٩}$

مثال: اذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{٣ ق (س) دس} = \text{-٦}$ ، $\int_{\text{٧}}^{\text{١}} \text{ق (س) دس} = \text{١٢}$ ، جد $\int_{\text{٧}}^{\text{٤}} \text{ق (س) دس}$

الحل : من المعطيات $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{٣ ق (س) دس} = \text{-٦}$ ⟸ $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق (س) دس} = \frac{\text{-٦}}{\text{٣}} = \text{-٢}$

المطلوب $\int_{\text{٧}}^{\text{٤}} \text{ق (س) دس} = \int_{\text{٧}}^{\text{١}} \text{ق (س) دس} + \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق (س) دس}$

$= \text{١٢} + \text{-٢}$

$= \text{١٠}$

مثال: اذا كان $\int_{\text{-١}}^{\text{جـ}} \text{س دس} = \text{٠}$ ، فجد قيمة جـ .

الحل : $\int_{\text{-١}}^{\text{جـ}} \text{س دس} = \text{٠}$ ⟸ $\left[\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right]_{\text{-١}}^{\text{جـ}} = \text{٠}$ ⟸ $\text{جـ}^{\text{٢}} - \text{١} = \text{٠}$ ⟸ $\text{جـ} = \pm\text{١}$

مثال: اذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} = \text{٥}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = \text{٤}$ ، فجد $\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$

الحل : من المعطيات $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ق(س) دس} = \text{٥}$ ⟸ $\int_{\text{٢}}^{\text{١}} \text{ق(س) دس} = \text{-٥}$

المطلوب $\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{٢}}^{\text{١}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$

$= \text{-٥} + \text{٤}$

$= \text{-١}$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

مثال: جد $\int \text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\,\text{دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣ \leftarrow \text{دص} = ٢\,\text{س}\,\text{دس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}}$

إذن $\int \text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\,\text{دس} = \int \text{س}\,(\text{ص})^{٣}\,\frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}} = \int \frac{١}{٢}\,(\text{ص})^{٣}\,\text{دص}$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{١}{٨}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٤} + \text{جـ}$$

مثال: جد $\int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\,\text{دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٢ \leftarrow \text{س}^{٣} = \text{ص} - ٢ \leftarrow \text{دص} = ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$$\int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\,\text{دس} = \int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٣}\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}})\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\right] + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٥}(\text{س}^{٣} + ٢)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}(\text{س}^{٢} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}\right] + \text{جـ}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

توجيهي علمي

مثال: جد $\int \text{قا}^2(\text{أ}\,\text{س} + 1)\,\text{دس}$

الحل : (افرض ص = أ س + ١) ⬅ دص = أ دس ⬅ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$$\int \text{قا}^2(\text{أ}\,\text{س} + 1)\,\text{دس} = \int \text{قا}^2(\text{ص})\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}}\int \text{قا}^2(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أس} + 1) + \text{جـ}$$

مثال: جد $\int \text{جتا}(1 - 2\text{س})\,\text{دس}$

الحل : افرض ص = ١ − ٢س ⬅ دص = ⁻٢ دس ⬅ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-2}$

$$\int \text{جتا}(1 - 2\text{س})\,\text{دس} = \frac{-1}{2}\int \text{جتا ص دس}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{جا ص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{جا}(1 - 2\text{س}) + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(\text{س}^3 + 2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(\text{س}^2 + 2)^{\frac{3}{2}}\right] + \text{جـ}$$

مثال: جد $\int \text{جا}\,6\text{س}\,\text{جا}\,4\text{س}\,\text{دس}$

تطبيق قانون

الحل : $\int \text{جا}\,6\text{س}\,\text{جا}\,4\text{س}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int(\text{جتا}\,2\text{س} - \text{جا}\,10\,\text{س})\,\text{دس}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س} + \frac{1}{10}\,\text{جتا}\,10\,\text{س}\right] + \text{جـ}$$

الأستاذ حمزة ابو الفول
0772259503

مثال: جد ∫ جتا ٢س جتا٧س دس

الحل : ∫ جتا ٢س جتا٧س دس = ١/٢ ∫ (جتا ١٠س + جتا ٤س) دس   تطبيق قانون

= ١/٢ [١/٢ جا ١٠س + ١/٤ جا٤س] + جـ

مثال: جد ∫ جتا⁴ س دس

الحل : ∫ جتا⁴ س دس = ∫ (جتا² س)² دس

= ∫ (١/٢ (١ + جتا٢س))² دس   متطابقة

= ١/٤ ∫ (جتا² ٢س + ٢ جتا ٢س + ١) دس   فك القوس

= ١/٤ ∫ جتا² ٢س دس + ١/٤ ∫ (٢ جتا ٢س + ١) دس   توزيع

متطابقة

= ١/٤ ∫ ١/٢ (١ + جتا٤س) دس + ١/٤ ∫ (٢ جتا ٢س + ١) دس

= ١/٨ [س + ١/٤ جا٤س] + ١/٤ [~~٢~~ جا٢س / ~~٢~~ + س] + جـ

= ١/٣٢ جا٤س + ٣/٨ س + ١/٤ جا٢س + جـ

مثال: جد ∫ ظا⁴س قا² دس

الحل : افرض ص = ظاس ⟸ د ص = قا²س دس

∫ ظا⁴س قا² س دس = ∫ ص⁴ دص

= ص⁵ / ٥ + جـ

= ظا⁵س / ٥ + جـ

مثال: جد $\int \text{س قا}(\text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}})\ \text{ظا}(\text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}})\ \text{دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{دص} = -\text{٤س دس} \Leftarrow \frac{-\text{١}}{\text{٤س}}\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\int \text{س قا}(\text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}})\ \text{ظا}(\text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}})\ \text{دس} = \int \cancel{\text{س}}\ \text{قا ص ظا ص} \times \frac{-\text{١}}{\text{٤}\cancel{\text{س}}}$$

$$= \int \frac{-\text{١}}{\text{٤}}\ \text{قاص ظاص دص}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٤}}\ \text{قاص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٤}}\ \text{قا}(\text{١} - \text{٢س}^{\text{٢}}) + \text{جـ}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول 0772259503

مثال: جد $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جا س جتا س}}{\sqrt{\text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}}\ \text{دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} \Leftarrow \text{دص} = \text{٢ جا س جتا س} \Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{دص} = \text{جاس جتاس دس}$

عندما $\text{س} = \text{٠} \Leftarrow \text{ص} = \text{١}$ وعندما $\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}} \Leftarrow \text{ص} = \text{٢}$

$$\text{إذن} \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جا س جتا س}}{\sqrt{\text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}}\ \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{ص}^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \Big]_{\text{١}}^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\sqrt{\text{٢}} - \text{١})$$

مثال: جد $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} - \text{٣}}\ \text{دس}$

الحل : $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} - \text{٣}}\ \text{دس} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٢س} - \text{٣})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٤}} (\text{٢س} - \text{٣})^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}} \Big]_{\text{١}}^{\text{٢}}$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \left[(\text{٤} - \text{٣})^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}} - (\text{٢} - \text{٣})^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}} \right]$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٨}} (\text{١} - \text{١}) = \text{صفر}$$

يمكن الحل بالتعويض
بفرض ص = ٢س - ٣ $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢}}$
عندما س ٢ $\leftarrow$ فإن ص ١
عندما س ١ $\leftarrow$ فإن ص ١-
أكمل الحل

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال: جد ∫ (٢س − ١) جتا ٢س دس

الحل :

بالاجزاء

افرض ق = ٢س − ١ ، د هـ = جتا ٣س دس

د ق = ٢ دس ، هـ = ١/٣ جا ٣س

∫ (٢س − ١) جتا ٢س دس = (٢س − ١) × جا ٣س/٣ − ١/٣ ∫ جا ٣س × ٢دس

= ١/٣ (٢س − ١) جا ٣س + ٢/٣ × جتا ٣س/٣ + جـ

= ١/٣ (٢س − ١) جا ٣س + ٢/٩ جتا ٣س + جـ

مثال: جد ∫ (س − ٢)^٢ جتا (س + ١) دس

الحل :

بالاجزاء

افرض ق = (س − ٢)^٢ ، د هـ = جتا (س + ١) دس

د ق = ٢(س − ٢) دس ، هـ = جا (س + ١)

ثم

∫ (س − ٢)^٢ جتا (س + ١) دس = (س − ٢)^٢ جا (س + ١) − ٢ ∫ (س − ٢) × جا (س + ١) دس

بالاجزاء مرة ثانية

افرض ق = (س − ٢) ، د هـ = جا (س + ١) دس

د ق = دس ، هـ = −جتا (س + ١)

= (س − ٢)^٢ جا (س + ١) − ٢ [(س − ٢) × −جتا (س + ١) + ∫ جتا (س + ١) دس]

= (س − ٢)^٢ جا (س + ١) + (٢س − ٤) جتا (س + ١) − ٢ جا (س + ١) + جـ

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

توجيهي علمي

مثال: جد $\int \text{جتا}\sqrt{\text{٢س}+١}\ \text{دس}$

الحل :

نفرض الزاوية — بالتعويض — ثم

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{٢س}+١}$ ⟸ $\text{ص}^٢ = \text{٢س} + ١$

$\text{٢ص دص} = \text{٢دس}$ ⟸ $\text{دس} = \text{ص دص}$

إذن $\int \text{جتا}\sqrt{\text{٢س}+١}\ \text{دس} = \int \text{جتا ص} \times \text{ص دص}$

$= \frac{١}{٣}(\text{٢س} - ١)\ \text{جا ٣س} + \frac{٢}{٣} \times \frac{\text{جتا ٣س}}{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}(\text{٢س} - ١)\ \text{جا ٣س} + \frac{٢}{٩}\ \text{جتا ٣س} + \text{جـ}$

$= \int \text{ص} \times \text{جتا ص دص}$

بالاجزاء

افرض $\text{ق} = \text{ص}$ ، $\text{د هـ} = \text{جتا ص دص}$

$\text{د ق} = \text{دص}$ ، $\text{هـ} = \text{جا ص}$

$= \text{ص جا ص} - \int \text{جا ص دص}$

$= \text{ص جا ص} + \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= \sqrt{\text{٢س}+١} \times \text{جا}\sqrt{\text{٢س}+١} + \text{جتا}\sqrt{\text{٢س}+١} + \text{جـ}$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$ ، س > ٠ ، ص > ٠ .

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \sqrt{\text{س}}\ \text{دص} = \sqrt{\text{ص}}\ \text{دس}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \int \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دص} = \int \text{س}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow ٢\text{ص}^{\frac{1}{2}} = ٢\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}_1 \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س}} + \text{جـ} ،\ \text{جـ} = \frac{\text{جـ}_1}{٢}$

$\Leftarrow \text{ص} = (\sqrt{\text{س}} + \text{جـ})^{٢}$

مثال : قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ٤٠م/ث وبتسارع مقداره -١٠م/ث^٢، اذا كان ارتفاعة عن سطح الارض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠م ، فجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم .

الحل : ع(٠) = ٤٠م/ث ، ف(١) = ٨٠م

$\text{ت} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = -١٠ \Leftarrow \text{د ع} = -١٠\text{د ن}$

$\Leftarrow \int \text{د ع} = \int -١٠\text{د ن} \Leftarrow \text{ع} = -١٠\text{ن} + \text{جـ}_1$

$\Leftarrow \text{ع}(٠) = ٤ \Leftarrow \text{جـ}_1 = ٤٠ \Leftarrow \boxed{\text{ع} = -١٠\text{ن} + ٤٠}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = -١٠\text{ن} + ٤٠ \Leftarrow \int \text{د ف} = \int (-١٠\text{ن} + ٤٠)\ \text{دن}$

$\text{ف} = -٥\text{ن}^٢ + ٤\text{ن} + \text{جـ}_2 \Leftarrow \text{ف}(١) = ٨٠ \Leftarrow \text{جـ}_2 = ٤٥$

$\boxed{\text{إذن ف} = -٥\text{ن}^٢ + ٤٠\text{ن} + ٤٥}$

لكن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما ع = ٠ ⟸ -١٠ن + ٤٠ = ٠ ⟸ ن = ٤ثانية

وعليه فإن أقصى ارتفاع هو ف (٤) = -٥(٤)^٢ + ٤٠ × ٤ + ٤٥

= -٨٠ + ١٦٠ + ٤٥ = ١٢٥م

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ - ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ٢ .

الحل : $م = \int_{-2}^{1} (2 - 2س)\, دس + \int_{1}^{2} (2س - 2)\, دس$

$= 2(1+2) - [س^2]_{-2}^{1} + [س^2]_{1}^{2} - 2(2-1)$

$= 6 - (1 - 4) + (4 - 1) - 2 = 10$ وحدات مساحة

$2 - 2س = \text{صفر} \Leftarrow س = 1$

$2 - 2س$: + + + ، $2س - 2$: − − −

$-2 \quad 1 \quad 2$

نجزئ التكامل لأن صفر الاقتران ضمن الفترة

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١٦ - س² ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ .

لا نجزئ التكامل لأن أصفار الاقتران ليست ضمن الفترة

الحل : $م = \int_{1}^{3} (16 - س^2)\, دس = 16(3 - 1) - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{1}^{3}$

$= 16(2) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)$

$= 32 - \left(9 - \frac{1}{3}\right)$

$= 23\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

$(16 - س^2) = \text{صفر} \Leftarrow س = 4 ، س = -4$

$(16 - س^2)$: − − − + + + − − −

$-4 \quad 1 \quad 3 \quad 4$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = |س³ - ١| ومحور السينات في الفترة [-٢ ، ٢]

نعيد تعريف المطلق

الحل : $م = \int_{-2}^{2} |س^3 - 1|\, دس$

$= \int_{-2}^{1} (1 - س^3)\, دس + \int_{1}^{2} (س^3 - 1)\, دس$

$= \left[\left(س - \frac{س^4}{4}\right)\right]_{-2}^{1} + \left[\left(\frac{س^4}{4} - س\right)\right]_{1}^{2}$

$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-2 - \frac{16}{4}\right) + \left(\frac{16}{4} - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-2 - 4\right) + \left(4 - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$

$= 9\frac{1}{2}$ وحدة مساحة

$س^3 - 1 = \text{صفر} \Leftarrow س = 1$

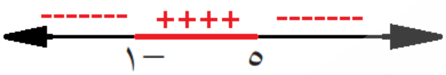
$1 - س^3$: − − − ، $س^3 - 1$: + + +

$-2 \quad 1 \quad 2$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^{٢} ، ومنحنى ل(س) = ٤س + ٥ .

الحل : نجد نقط تقاطع المنحنيين

س^{٢} = ٤س + ٥ ⇐ س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠ ⇐ س = −١ ، ٥



م = $\int_{-١}^{٥}$ [ل(س) − ق(س)] دس ، لأن ل(س) ≥ ق(س) لكل س ∈ [−١ ، ٥]

= $\int_{-١}^{٥}$ [٤س + ٥ − س^{٢}] دس = $\left[٢س^{٢} + ٥س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{٥}$

= $\left[٢(٥)^{٢} + ٥(٥) - \frac{(٥)^{٣}}{٣} \right] - \left[٢(-١)^{٢} + ٥(-١) - \frac{(-١)^{٣}}{٣} \right]$

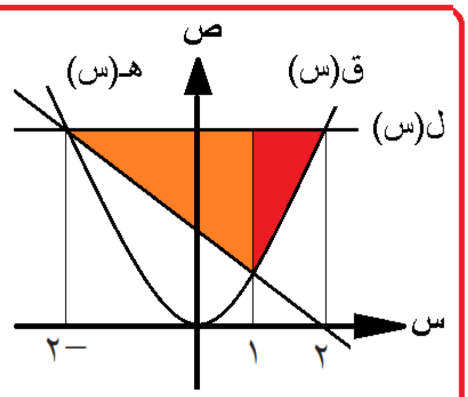
= ٣٦ وحدة مساحة.

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٢ - س ، ل(س) = ٤ .

الحل : نجد نقط التقاطع بين المنحنيات

ق(س) = هـ(س)	ق(س) = ل(س)	هـ(س) = ل(س)
س^{٢} = ٢ − س	س^{٢} = ٤	٢ − س = ٤
س^{٢} + س − ٢ = ٠	س = −٢ ، ٢	س = −٢
س = −٢ ، ١		

وعند تمثيل المنحنيات الثلاث نجد أن المساحة المطلوبة (م) تساوي



م = $\int_{-٢}^{١}$ [ل(س) − هـ(س)] دس + $\int_{١}^{٢}$ [ل(س) − ق(س)] دس

= $\int_{-٢}^{١}$ (٤ − ٢ + س) دس + $\int_{١}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) دس

تابع الحل لتصل الى

م = ٤ $\frac{١}{٢}$ + ١ $\frac{٢}{٣}$ = ٦ $\frac{١}{٦}$ وحدة مساحة

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{\text{س}}{٢}$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}\text{س}} = \dfrac{١}{\text{س}}$

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^٣ + ١)$ ، $\text{س} > -١$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ + ١}$

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا}^٢\text{س}$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{٢\,\text{جتاس}}{\text{جا س}} = ٢\,\text{ظتا س}$

مثال : جد $\displaystyle\int_{١}^{٣} \dfrac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢ - ٥}\,\text{دس}$.

الحل : $\displaystyle\int_{١}^{٣} \dfrac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢ - ٥}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \Big[\,|٣\text{س}^٢ - ٥|\,\Big]_{١}^{٣} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٢٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{٢٢}{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}} ١١$

مثال : جد $\displaystyle\int \dfrac{٣\text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١}\,\text{دس}$.

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١$ ← $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{(٣\text{س}^٢ - ٢)}$

إذن $\displaystyle\int \dfrac{٣\text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٣ - ٢ + ١}\,\text{دس} = \int \dfrac{\text{دص}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١| + \text{جـ}$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : جد $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩-٢\text{س}}\,\text{دس}$

الحل : $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩-٢\text{س}}\,\text{دس} = \frac{-١}{٢}\int_{٢}^{٤} \frac{-٢\,\text{دس}}{٩-٢\text{س}}$

$= \frac{-١}{٢}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\,|٩-٢\text{س}|\,\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{-١}{٢}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٥\right) = \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥$

مثال : جد $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس}$

الحل :

تعويض

$\boxed{\text{افرض ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

ثم

إذن $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس} = \int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\boxed{\text{لكن } \text{قا}^{٢}\text{س} = \text{ظا}^{٢}\text{س} + ١ \Leftarrow \text{قا}^{٢}\text{س} = \text{ص}^{٢} + ١}$

اجزاء

$\boxed{\begin{array}{ll} \text{افرض ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} & \text{دم} = (\text{ص}^{٢}+١)\,\text{دص} \\ \text{دق} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص} & \text{م} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص} \end{array}}$

إذن $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس} = \int (\text{ص}^{٢}+١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٣} + ١\right)\text{دص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٩} + \text{ص}\right) + \text{جـ}$

$= \left(\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ظاس}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \left(\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٩} + \text{ظاس}\right) + \text{جـ}$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : جد $\int \text{س}^{٥} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} \text{ دس}$

الحل :

افرض $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣}$ $\text{دم} = \text{س}^{٥} \text{ دس}$

$\text{دق} = \frac{٣}{\text{س}} \text{ دس}$ $\text{م} = \frac{\text{س}^{٦}}{٦}$

$$\int \text{س}^{٥} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} \text{ دس} = \frac{١}{٦} \text{س}^{٦} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} - \int \frac{١}{٦} \text{س}^{٦} \times \frac{٣}{\text{س}} \text{ دس}$$

$$= \frac{١}{٦} \text{س}^{٦} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} - \int \frac{١}{٢} \text{س}^{٥} \text{ دس}$$

$$= \frac{١}{٦} \text{س}^{٦} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} - \frac{١}{١٢} \text{س}^{٦} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}} \text{ دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ ⇐ $\text{ص}^{٣} = \text{س}$ ⇐ $٣\text{ص}^{٢} \text{ دص} = \text{دس}$

$$\text{إذن} \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}} \text{ دس} = \int \frac{\text{ص}}{٥ - \text{ص}^{٤}} \, ٣\text{ص}^{٢} \text{ دص}$$

$$= \int \frac{٣\text{ص}^{٣}}{٥ - \text{ص}^{٤}} \text{ دص}$$

$$= \frac{٣}{-٤} \int \frac{-٤\text{ص}^{٣}}{٥ - \text{ص}^{٤}} \text{ دص}$$

$$= \frac{-٣}{٤} \text{ لو}_{\text{هـ}} |٥ - \text{ص}^{٤}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٣}{٤} \text{ لو}_{\text{هـ}} |٥ - \sqrt[٣]{\text{س}}^{\,٤}| + \text{جـ}$$

مثال : اذا كان ص = $هـ^{جتاس}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = -جاس \times هـ^{جتاس}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}} = -جا\frac{\pi}{٢}\ هـ^{جتا\frac{\pi}{٢}}$

$= -١ \times هـ^{٠}$

$= -١ \times ١$

$= -١$

مثال : اذا كان ص = س $لو_{هـ} هـ^{س^٢}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $ص = س \times س^٢ = س^٣$ ⟸ $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢$

مثال : جد $\int_{٠}^{١} س^٢ هـ^{س^٣+١} دس$

الحل : تكامل بالتعويض

افرض $ص = س^٣ + ١$ ⟸ $\frac{١}{٣} دص = س^٢ دس$ ⟸ $دس = \frac{دص}{٣س^٢}$

عندما س = ٠ ⟸ ص = ١ ، وعندما س = ١ ⟸ ص = ٢

$\int_{٠}^{١} س^٢ هـ^{س^٣+١} دس = \int_{١}^{٢} س^٢ هـ^{ص} \frac{دص}{٣س^٢}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣} هـ^{ص} دص$

$= \frac{١}{٣} [هـ^{ص}]_{١}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} [هـ^{٢} - هـ^{١}]$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

مثال : جد $\int$ قا^{2}س هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ دس

الحل :

افرض ص = $\sqrt{\text{ظا س}}$ ⟵ ص^2 = ظا س

⟵ ٢ ص د ص = قا^{2}س د س ⟵ د س = $\frac{\text{٢ ص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ د ص

تعويض

ثم

إذن $\int$ قا^{2}س هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ دس = $\int$ قا^{2}س هـ$^{\text{ص}}$ $\frac{\text{٢ ص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ د ص

= $\int$ ٢ ص هـ$^{\text{ص}}$ د ص

اجزاء

ق = ٢ ص ، د هـ = هـ$^{\text{ص}}$ د ص

د ق = ٢ د س ، هـ = هـ$^{\text{ص}}$

$\int$ ٢ ص هـ$^{\text{ص}}$ د ص = ٢ ص هـ$^{\text{ص}}$ − $\int$ ٢ هـ$^{\text{ص}}$ د ص

= ٢ ص هـ$^{\text{ص}}$ − ٢ هـ$^{\text{ص}}$ + جـ

= ٢ $\sqrt{\text{ظا س}}$ هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ − ٢ هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ + جـ

مثال : جد $\int$ هـ$^{\text{أس + ب}}$ دس

الحل : نفرض ص = أ س + ب

د ص = أ د س

د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

$\int$ هـ$^{\text{أس + ب}}$ دس = $\int$ هـ$^{\text{ص}}$ × $\frac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

= $\int$ هـ$^{\text{ص}}$ × $\frac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

= $\frac{١}{\text{أ}}$ هـ$^{\text{ص}}$ + جـ

= هـ$^{\text{أس + ب}}$ + جـ

وحدة التكامـل

تدريبات مع الحـل

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : جد $\int_{٤}^{٥} \frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس}$

الحل :

$$\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{أ}(\text{س} - ١) + \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}$$

$$\text{أ}(\text{س} - ١) + \text{ب}(\text{س} - ٣) = ١$$

عندما $\text{س} = ١ \Leftarrow -٢\text{ب} = ١ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$

وعندما $\text{س} = ٣ \Leftarrow -٢\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$

إذن

$$\int_{٤}^{٥} \frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس} = \int_{٤}^{٥} \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س} - ٣}\, \text{دس} + \int_{٤}^{٥} \frac{\frac{-١}{٢}}{(\text{س} - ٣)}\, \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٢} \Big[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢|\Big]_{٤}^{٥} - \frac{١}{٢} \Big[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١|\Big]_{٤}^{٥}$$

$$= \frac{١}{٤}\left[\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١\right] - \frac{١}{٢}\left[\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣\right]$$

$$= \frac{١}{٤}\, \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \frac{١}{٢}\, \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٤}{٣}$$

مثال : جد $\int \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\, \text{دس}$

الحل :

$$\frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

$$٤\text{س} + ١ = \text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ٢)$$

عندما $\text{س} = -١ \Leftarrow -٣ = -٣\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ١$

وعندما $\text{س} = ٢ \Leftarrow ٩ = ٣\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ٣$

إذن

$$\int \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\, \text{دس} = \int \frac{٣}{\text{س} - ٢}\, \text{دس} + \int \frac{١}{\text{س} + ١}\, \text{دس}$$

$$= ٣\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

توجيهي علمي

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} + ١} \, \text{دس}$

الحل : $\int \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} + ١} \, \text{دس} = \int (\text{س} - ٢) \, \text{دس} + \int \frac{٢}{\text{س} + ١} \, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^2}{٢} - ٢\text{س} + ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{س} + ١ \right| + \text{جـ}$

$$\begin{array}{r|l} \text{س} - ٢ & \\ \hline \text{س}^2 - \text{س} & \text{س} + ١ \\ \text{س}^2 + \text{س} & \\ \hline -٢\text{س} & \\ -٢\text{س} - ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

مثال : جد $\int \frac{٢\text{س}^3 - \text{س}^2 + ٣\text{س}}{\text{س}^2 - ٣\text{س} - ٤} \, \text{دس}$

الحل : درجة البسط اكبر من درجة المقام نجري القسمة الطويلة

التكامل المطلوب $= \int (٢\text{س} + ٥) \, \text{دس} + \int \frac{٢٦\text{س} + ٢٠}{\text{س}^2 - ٣\text{س} - ٤} \, \text{دس}$

تكامل عادي — تكامل بالكسور الجزئية

$$\begin{array}{r|l} ٢\text{س} + ٥ & \\ \hline ٢\text{س}^3 - \text{س}^2 + ٣\text{س} & \text{س}^2 - ٣\text{س} - ٤ \\ ٢\text{س}^3 - ٦\text{س}^2 - ٨\text{س} & \\ \hline ٥\text{س}^2 + ١١\text{س} & \\ ٥\text{س}^2 - ١٥\text{س} - ٢٠ & \\ \hline ٢٦\text{س} + ٢٠ & \end{array}$$

$$\frac{٢٦\text{س} + ٢٠}{\text{س}^2 - ٣\text{س} - ٤} = \frac{٢٦\text{س} + ٢٠}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س} - ٤)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)}$$

$٢٦\text{س} + ٢٠ = \text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ٤)$

عندما س = ٤ ⇐ $\text{ب} = \frac{١٢٤}{٥}$

وعندما س = ٢ ⇐ $\text{أ} = \frac{٦}{٥}$

التكامل المطلوب $= \text{س}^2 + ٥\text{س} + \frac{١٢٤}{٥} \int \frac{١}{\text{س} - ٤} \, \text{دس} + \frac{٦}{٥} \int \frac{١}{\text{س} + ١} \, \text{دس}$

$= \text{س}^2 + ٥\text{س} + \frac{١٢٤}{٥} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{س} - ٤ \right| + \frac{٦}{٥} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{س} - ١ \right| + \text{جـ}$

الأستاذ: حمزة أبو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات
الصف الثاني الثانوي
التوجيهي
كورسات الملاذ في مهارات الرياضيات

جميع الفروع

كورسات الملاذ في الرياضيات للتوجيهي

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع العلمي

١)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة النهايات والاتصال
٢)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التفاضل
٣)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة تطبيقات التفاضل
٤)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التكامل
٥)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة القطوع المخروطية
٦)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الثالث
٧)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الرابع
٨)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الثالث
٩)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الرابع

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع المشتركة

(الأدبي ، الشرعي ، الإدارة المعلوماتية ، الصحي ، الصناعي ، الفندقي)

١)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الثالث
٢) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الرابع
٣)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الثالث
٤)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الرابع
٥)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الثالث
٦)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الرابع

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع الصناعي

١)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي
٢)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول
٣)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة

الملاذ في الرياضيات / ملخصات واسئلة متوقعة