الوسَام
في الرياضيات

(الفرع العلمي)

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

إعداد الأستاذ

وسام القاضي

٠٧٩ / ٥٣٣٥١٣٦

alqadiw@hotmail.com

الوحدة

التكامل وتطبيقاته

الرابعة

التكامل غير المحدود (الاقتران البدائي)

قاعدة (١): $\int$ ل دس = ل س + جـ { حيث: (ل) عدد ثابت}

قاعدة (٢): $\int س^{و} \, دس = \frac{س^{و+١}}{و+١} + جـ$ { حيث: و ≠ −١}

نتيجة $\int$ ق(س) دس = م (س) ..... يسمى البدائي

الاقتران البدائي (ناتج التكامل) له خاصية واحدة هي: مشتقة البدائي = الاقتران الأصلي

مَ(س) = ق(س)

$\int$ قَ(س) دس = ق(س) + جـ ويكون $\frac{د}{دس}$ $\int$ ق(س) دس = ق(س)

أمثلة: جد قيمة كلاً مما يلي:

(١) $\int ٧ \, دس = ٧س + جـ$

(٢) $\int -٥ \, دس = -٥س + جـ$

(٣) $\int \frac{١}{٢} \, دس = \frac{١}{٢}س + جـ$

(٤) $\int \sqrt{٥٧} \, دس = \sqrt{٥٧}\, س + جـ$

(٥) $\int دس = س + جـ$

(٦) $\int دن = ن + جـ$

(٧) $\int ٥ \, دص = ٥ص + جـ$

(٨) $\int س \, دس = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

(٩) $\int س^{٣} \, دس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

(١٠) $\int س^{\frac{١}{٢}} \, دس = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

(١١) $\int س^{-٤} \, دس = \frac{س^{-٣}}{-٣} + جـ$

(١٢) $\int س^{-\frac{٢}{٧}} \, دس = \frac{س^{\frac{٥}{٧}}}{\frac{٥}{٧}} + جـ = \frac{٧}{٥}س^{\frac{٥}{٧}} + جـ$

(١٣) $\int \pi^{٣} \, دس = \pi^{٣} س + جـ$

سؤال ١: إذا كان: $\int$ ق(س) دس = $س^{٢} + \sqrt{٥س}$ + جا^{٢}س، جد ق(س)؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

سؤال ٢: **إذا كان:** $\int$ ق(س) دس = جا^{٣}س ، **جد** ق$'$ **(س)** ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

سؤال ٣: **إذا كان:** ص = $\int$ (س^{٣}+٢) دس ، **جد** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟

☑ **الجواب:** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^{٣} + ٢

سؤال ٤: **إذا كان:** ق(س) = $\int \frac{١}{\text{س}+٤}$ دس ، **جد** قً(٢) ؟

☑ **الجواب:** قَ(س) = $\frac{١}{\text{س}+٤}$ ⇐ قً(س) = $\frac{-١}{(\text{س}+٤)^{٢}}$ ⇐ قً(٢) = $\frac{-١}{(٢+٤)^{٢}} = \frac{-١}{٣٦}$

سؤال ٥: **إذا كان:** $\int$ قَ(س) دس = ٦س^{٢} + ٢س + ٣ ، **جد** قَ(١) ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

سؤال ٦: **إذا كان:** $\int$ ق(س) دس = جا^{٢}٢س + ظاس + جـــ ، **جد** قَ$(\frac{\pi}{٤})$ ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

سؤال ٧: **إذا كان:** $\int$ (قَ(س)+٢س) دس = س^{٣}+ أس^{٢}+١ ، وكان: قَ(١)=٥، ق(٢)=٧ ، **جد ما يلي:**

(١) **قيمة** (أ) ؟ (٢) ق(٠) ؟ (٣) قَ(٤) ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

سؤال ٨: **إذا كان:** $\int$ ق(س) دس = جاس − جتاس +٢، **أثبت أن:** ق$(\frac{\pi}{٢})$ − قَ$(\frac{\pi}{٢})$ = ٢ ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

سؤال ٩: **جد الاقتران البدائي (م) للاقتران (ل) بحيث أن:** ل(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ، م(٣) = ١ ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

سؤال ١٠ : **إذا كان ق(س) اقتران متصل على [١، ٣] ، (م) هو البدائي لـ ق(س) بحيث م(س) = ٤س^{٣} − ٢س^{٢} ، جد:**

$\int_{١}^{٣}$ (٢ − ق(س)) دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

❁ خصائص التكامل غير المحدود ❁

الخاصية الخطية:

(١) $\int$ ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int$ ق(س) دس ± $\int$ هـ(س)) دس

(٢) $\int$ أ ق(س) دس = أ $\int$ ق(س) دس

أمثلة:

١) $\int$ ٥ س^{٣} دس = ٥ $\int$ س^{٣} دس = ٥ × $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ

٢) $\int$ (٥س^{٧} + ٢س^{٣} + ١) دس { نوزع التكامل أولاً في حالة الجمع والطرح }

= $\int$ ٥س^{٧} دس + $\int$ ٢س^{٣} دس + $\int$ ١ دس

= ٥ × $\frac{س^{٨}}{٨}$ + ٢ × $\frac{س^{٤}}{٤}$ + س + جـ

مبادئ أساسية هامة:

(١) نحول جميع الجذور إلى أسس كسرية.

(٢) الكسور التي لمقامها قوة لا تساوي (١) ترفع إلى البسط، ولكن تغير إشارة القوة، أما إذا ظهرت (قوة=١) نُبقي المقام كما هو.

توضيح:

١) $\sqrt[٥]{س^{٣}}$ = س$^{\frac{٣}{٥}}$ ٢) $\frac{١}{س^{٧}}$ = س$^{-٧}$ ٣) $\frac{٥}{س^{-٨}}$ = ٥س^{٨}

٤) $\frac{١}{(٥س^{٣}+١)^{٧}}$ = (٥س^{٣}+١)$^{-٧}$ ٥) $\frac{١}{٥س^{٣}+١}$ ⇚ يبقى كما هو

أمثلة: جد ناتج ما يلي:

١) $\int \sqrt[٥]{س^{٤}}$ دس ..... نرتبه

☑ **الجواب:** $\int$ س$^{\frac{٤}{٥}}$ دس = $\frac{س^{\frac{٩}{٥}}}{\frac{٩}{٥}}$ + جـ = $\frac{٥}{٩}\sqrt[٥]{س^{٩}}$ + جـ

٢) $\int (\sqrt[7]{س} + ١)$ دس ..... نرتبه

☑ **الجواب:** $\int \sqrt[7]{س}$ دس $+ \int ١$ دس $= \int س^{\frac{١}{٢}}$ دس $+ \int ١$ دس $= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + س + جـ = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + س + جـ$

---

٣) $\int \frac{١}{س^{-٩}}$ دس ..... نرتبه

☑ **الجواب:** $\int س^{٩}$ دس $= \frac{س^{١٠}}{١٠} + جـ$

---

٤) $\int (\sqrt[7]{س^{٣}} + \frac{٥}{س^{-٤}} + ٢)$ دس ..... نرتبه

☑ **الجواب:** $\int \sqrt[7]{س^{٣}}$ دس $+ \int \frac{٥}{س^{-٤}}$ دس $+ \int ٢$ دس

$\int س^{\frac{٣}{٧}}$ دس $+ \int ٥ س^{٤}$ دس $+ \int ٢$ دس $= \frac{س^{\frac{١٠}{٧}}}{\frac{١٠}{٧}} + \frac{٥ س^{٥}}{٥} + ٢س + جـ$

$= \frac{٧}{١٠}\sqrt[7]{س^{١٠}} + س^{٥} + ٢س + جـ$

تمارين

جد قيمة كل مما يلي:

١) $\int \frac{س^{٣}\sqrt{س}}{س}$ دس ؟ **٢)** $\int \frac{س - ١}{\sqrt[3]{س}}$ دس ؟ **٣)** $\int \frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{س}}$ دس ؟

التكامل المحدود وخصائصه

قاعدة (١): $\int_{أ}^{ب} ل$ دس $= ل (ب - أ)$ { حيث: (ل) عدد ثابت }

قاعدة (٢): $\int_{أ}^{ب} س^{و}$ دس $= \left(\frac{س^{و+١}}{و+١}\right)_{أ}^{ب} = \frac{ب^{و+١}}{و+١} - \frac{أ^{و+١}}{و+١}$ { حيث: $و \neq -١$ }

نتيجة $\int_{أ}^{ب} ق'(س)$ دس $= [ق(س)]_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$

أمثلة: **جد قيمة كلاً مما يلي:**

١) $\int_{١}^{٣} ٥$ دس $= ٥(٣-١) = ١٠$

٢) $\int_{٣}^{١} ٥$ دس $= ٥(١-٣) = -١٠$

٣) $\int_{٠}^{٤}$ دس $= ١(٤-٠) = ٤$

٤) $\int_{٠}^{٨} \frac{١}{٢}$ دس $= \frac{١}{٢}(٨-٠) = ٤$

٥) $\int_{٠}^{٣} \sqrt{٢س} \, دس = \sqrt{٢} \, (٣-٠) = ٣\sqrt{٢}$ ٦) $\int_{١}^{٢} س \, دس = \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{١}^{٢} = \frac{٤}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

٧) $\int_{٠}^{٢} \sqrt[٤]{س^{٣}} \, دس = \int_{٠}^{٢} س^{\frac{٣}{٤}} \, دس = \left| \frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} \right|_{٠}^{٢} = \frac{٤}{٧} \sqrt[٤]{س^{٧}} \Big|_{٠}^{٢} = \frac{٤}{٧} \sqrt[٤]{١٢٨}$

٨) $\int_{١}^{١} \frac{١}{س^{-٤}} \, دس = \int_{١}^{١} س^{٤} \, دس = \left| \frac{س^{٥}}{٥} \right|_{١}^{١} = \frac{١}{٥}$

❖ خصائص التكامل المحدود ❖

التكامل عند النقطة = صفر:

أمثلة: ١) $\int_{٥}^{٥} (س^{٣} + ٣س + ١) \, دس$ = صفر ٢) $\int_{٧}^{٧} \sqrt{س^{٣}+١} \, دس$ = صفر

قلب حدود التكامل:

مثال: إذا كان $\int_{١}^{٣} ٥ \, دس = ١٠$ فإن $\int_{٣}^{١} ٥ \, دس = -١٠$

الخاصية الخطية

(١) $\int_{أ}^{ب} ك \, ق(س) \, دس = ك \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس$ { بحيث (ك) عدد ثابت }

(٢) $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س)) \, دس = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$

خاصية الإضافة:

$\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س) \, دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س) \, دس$

مثال: إذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س) \, دس = ٥$ ، وكان $\int_{٤}^{٧} ق(س) \, دس = ٦$ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٧} ق(س) \, دس$ ؟

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{٧} ق(س) \, دس = \int_{١}^{٤} ق(س) \, دس + \int_{٤}^{٧} ق(س) \, دس = ٥ + ٦ = ١١$

خاصية المقارنة:

إذا كان: ق(س) > هـ(س) ∀س ∈ [أ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس > \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$

أيضاً: إذا كان: ق(س) > صفر ∀س ∈ [أ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس >$ صفر

سؤال ١: **إذا علمت أن:** $\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = ٧$ ، **جد** $\int_{٢}^{٥} ٢(ق(س)+٣)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:** $\int_{٢}^{٥} ٢(ق(س)+٣)\,دس = ٢(\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٥} ٣\,دس) = ٢(٧+٩) = ٣٢$

سؤال ٢: **جد ناتج:** $\int_{٢}^{٥} (٢س+٣)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:** $\int_{٢}^{٥} (٢س+٣)\,دس = \int_{٢}^{٥} ٢س\,دس + \int_{٢}^{٥} ٣\,دس = (\not{٢} \times \frac{س^{٢}}{\not{٢}}|_{٢}^{٥}) + (٣\times٣) = ٢٥-٤+٩ = ٣٠$

سؤال ٣: **إذا كان:** $\int_{٢}^{٧} ق(س)\,دس = ٧$ ، **وكان:** $\int_{٢}^{٧} ق(س)\,دس = ١٢$ ، **أجب عما يلي:**

١) $\int_{٢}^{٧} (\frac{ق(س)}{٢} - ٢س+٣)\,دس$ ؟ ٢) $\int_{٧}^{٢} ٣\,ق(س)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:** ١) $\int_{٢}^{٧} (\frac{ق(س)}{٢} - ٢س+٣)\,دس = \frac{١}{٢}\int_{٢}^{٧} ق(س)\,دس - \int_{٢}^{٧} ٢س\,دس + \int_{٢}^{٧} ٣\,دس$

$= \frac{١}{٢}\times١٢ - \not{٢}\times\frac{س^{٢}}{\not{٢}}|_{٢}^{٧} + ٣\times٥ = ٦-٤٥+١٥ = -٢٤$

٢) $\int_{٧}^{٢} ٣\,ق(س)\,دس = \int_{٧}^{٢} ٣\,ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٢} ٣\,ق(س)\,دس$

$= (٣\times-١٢) + (٣\times٧) = -٣٦+٢١ = -١٥$

سؤال ٤: **جد ناتج:** $\int_{١}^{٢} (س^{٣}+٢\int_{٠}^{٢} ص\,دص)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{٢} (س^{٣}+٢\times\int_{٠}^{٢} ص\,دص)\,دس = \int_{١}^{٢} (س^{٣}+٤)\,دس$

$= \frac{س^{٤}}{٤}|_{١}^{٢} + ١\times٤ = \frac{١٥}{٤} + \frac{١٦}{٤} = \frac{٣١}{٤}$

$\int_{٠}^{٢} ص\,دص = \frac{ص^{٢}}{٢}|_{٠}^{٢} = \frac{٤}{٢} - ٠ = ٢$

سؤال ٥: **إذا كان:** $\int_{٠}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = ٣$ ، **وكان:** $\int_{٠}^{٢} ٢هـ(س)\,دس = ٨$ ، **جد ما يلي:**

١) $\int_{٠}^{٢} (ق(س) - ٢هـ(س))\,دس$ ؟ ٢) $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س)+٢س+٣)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:** $\int_{٠}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = ٣ \Leftarrow \frac{١}{٣}\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = ٣\times٣ \Leftarrow \int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = ٩$

نرتب المعطيات

$\int_{٠}^{٢} ٢هـ(س)\,دس = ٨ \Leftarrow \int_{٠}^{٢} هـ(س)\,دس = ٤$

١) $\int_{٠}^{٢}$ (ق(س)−٢هـــ(س)) دس = $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس −٢ $\int_{٠}^{٢}$ هـــ(س)) دس = ٩− ٢×٤ = ١

٢) $\int_{٠}^{٢}$ (٣ق(س)+٢س +٣) دس = ٣ $\int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٢}$ ٢س دس + $\int_{٠}^{٢}$ ٣ دس

$= ٣\times٩ + \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢} = ٢\times٣ + ٢٧+٤+٦ = ٣٧$

سؤال٦: **إذا كان:** $\int_{١}^{٦}$ ق(س) دس = ٣ ، **وكان:** $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) دس = −٤ ، **فجد** $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس ؟

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{٦}$ ق(س) دس + $\int_{٦}^{٢}$ ق(س) دس = ٣ + ٤ = ٧

سؤال٧: **احسب قيمة:** $\int_{١}^{٤}$ (٥س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) دس ؟

☑ **الجواب:** صفـــر (تكامل عند نقطة)

سؤال٨: **إذا كان:** $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، **وكان:** $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) دس = −٤ ، **فما قيمة** $\int_{١}^{٥}$ ٢ق(س) دس ؟

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{٥}$ ٢ق(س) دس = $\int_{١}^{٣}$ ٢ق(س) دس + $\int_{٣}^{٥}$ ٢ق(س) دس = ٢×٦ + ٢×٤ = ٢٠

سؤال٩: **إذا كان:** $\int_{-١}^{٢}$ (٣ق(س)−٤) دس = ٤ ، **وكان:** $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) دس = ٦ ، **فجد** $\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس ؟

☑ **الجواب:** **نرتب المعطيات:** $\int_{-١}^{٢}$ ٣ق(س) دس − $\int_{-١}^{٢}$ ٤ دس = ٤

٣ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس −٤×٣ = ٤ ⇐ ٣ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس = ١٦ ⇐ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس = $\frac{١٦}{٣}$

$\int_{-١}^{٤}$ ق(س) دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس + $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس = $\frac{١٦}{٣}$ + (−٦) = $\frac{١٦}{٣}$ − $\frac{١٨}{٣}$ = $\frac{-٢}{٣}$

تمرين: **إذا كان:** $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)+ $\frac{١}{س^{٢}}$ −٦) دس = ١٢ ، **جد** $\int_{١}^{٣}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ − ٣س^{٢}) دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

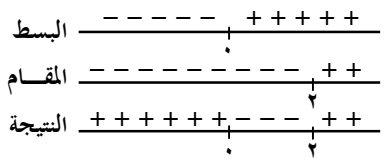
سؤال ١٠: **أيهما أكبر:** $\int_{0}^{1} س^{2}$ دس ، **أم** $\int_{0}^{1} س^{3}$ دس **دون حساب التكامل ؟**

☑ **الجواب:** نفرض: ق(س)= $س^{2}$ ، هـ(س)= $س^{3}$ ، س= $\frac{1}{2}$ ∈ [٠، ١]

ق($\frac{1}{2}$)= $(\frac{1}{2})^{2}$= $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{8}$ ، هـ($\frac{1}{2}$)= $(\frac{1}{2})^{3}$= $\frac{1}{8}$

وبما أن : ق(س) > هـ(س) في الفترة [٠، ١] ⇐ ∴ $\int_{0}^{1}$ ق(س) دس > $\int_{0}^{1}$ هـ(س) دس

سؤال ١١: **ما إشارة :** $\int_{3}^{4} \frac{س^{2}}{س-2}$ دس ، **دون حساب التكامل ؟**



☑ **الجواب:** $\frac{س^{2}}{س-2}$ = صفر ← البسط ($س^{2}$=٠ ⇐ س=٠) ، المقام (س−٢=٠ ⇐ س=٢)

∴ ق(س) > صفر في الفترة [٣، ٤] ⇐ ∴ $\int_{3}^{4}$ ق(س) دس > صفر (إشارة موجبة)

تمرين: **دون حساب التكامل بين أن:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتا$\sqrt{س}$ دس ≤ **صفر ؟**

☑ **الجواب:** ق(س)= جتا$\sqrt{س}$ دس ≤ صفر [٠، $\frac{\pi}{4}$] (ربع أول)

∴ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتا$\sqrt{س}$ دس ≤ صفر

سؤال ١٢: **دون إجراء التكامل جد أصغر وأكبر قيمة للتكامل :** $\int_{0}^{\pi}$ جا٢س دس ؟

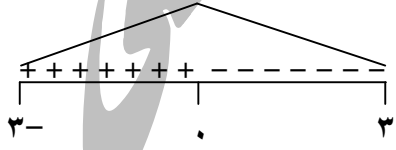
☑ **الجواب:** بما أن أصغر قيمة لـ جا٢س=١ ، وأكبر قيمة لـ جا٢س=−١

∴ −١ ≤ جا٢س ≤ ١

$\int_{0}^{\pi}$ −١ دس ≤ $\int_{0}^{\pi}$ جا٢س دس ≤ $\int_{0}^{\pi}$ ١ دس ⇐ ∴ $\underset{\text{أصغر قيمة}}{-\pi}$ ≤ $\int_{0}^{\pi}$ جا٢س دس ≤ $\underset{\text{أكبر قيمة}}{\pi}$

سؤال ١٣: **أثبت أن :** ٠ ≤ $\int_{-3}^{3} \sqrt{٩-س^{2}}$ دس ≤ ١٨ ؟

☑ **الجواب:** ق(س)= $\sqrt{٩-س^{2}}$ ، [−٣،٣] ⇐ قَ(س)= $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٩-س^{2}}}$



الحرجة ← الجذور ← البسط ← س=٠ ، المقام ← س=±٣ ؛ الأطراف ← س=±٣

عندما س= ٠ ، قيمة عظمى هي ق(٠)= ٣ محلية ومطلقة

عندما س= ٣ ، قيمة صغرى هي ق(٣)= صفر ومطلقة

عندما س=−٣ ، قيمة صغرى هي ق(−٣)= صفر ومطلقة

أي أنه: ٠ ≤ ق(س) ≤ ٣

$\int_{-٣}^{٣}$ ٠ دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ٣ دس ⇐ ∴ صفر ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ ١٨

سؤال ١٤: **إذا كان ق(س) متصل على [١، ٣]، بحيث:** ١ ≤ ق(س) ≤ ٤، **فما أكبر قيمة لـ** $\int_{١}^{٣}$ (٣ق(س)+١) دس؟

☑ **الجواب:** أكبر قيمة لـ ق(س) هي (٤)، ويصبح: $\int_{١}^{٣}$ (٣×٤+١) دس = ١٣(٣−١) = ٢٦

حل آخر: .....

.....

.....

.....

.....

فكر هناك حل آخر

❁ تكامل الاقترانات المتشعبة ❁

ملاحظة نذكر بوجوب إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة، وكذلك اقتران أكبر عدد صحيح في جميع المسائل.

مثال ١: **إذا كان:** ق(س) = { ٥س^{٣} + ٣س ، ٠ ≤ س < ١ ; ٢س + ٦ ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

جد: ١) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس ؟ ب) $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس ؟

☑ **الجواب:** ١) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس = $\left[\frac{٥س^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{١}$ + $\left[\frac{٣س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١}$ = $\frac{٥}{٤}$ + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$ + $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{١١}{٤}$

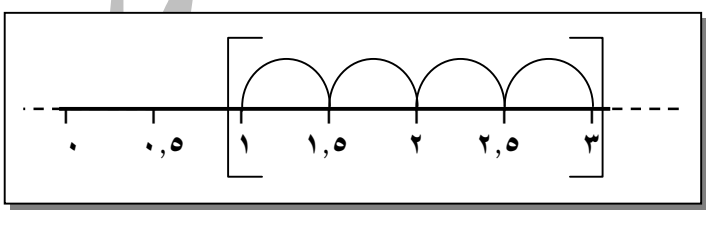
٢) $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{١}$ (٥س^{٣}+٣س) دس + $\int_{١}^{٢}$ (٢س+٦) دس

= $\frac{١١}{٤}$ + $\left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢}$ +(٦×١) = $\frac{١١}{٤}$ +٣+٦ = $\frac{١١}{٤}$ + $\frac{٣٦}{٤}$ = $\frac{٤٧}{٤}$

مثال ٢: **جد:** $\int_{١}^{٣}$ [٢س+٣] دس ؟

☑ **الجواب:** ل = $\frac{١}{|٢|}$ = ٠,٥

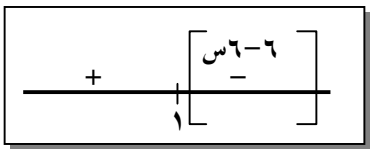
ق(س) = { ٥ ، ١ ≤ س < ١,٥ ; ٦ ، ١,٥ ≤ س < ٢ ; ٧ ، ٢ ≤ س < ٢,٥ ; ٨ ، ٢,٥ ≤ س < ٣ }



$$\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = \int_{1}^{1,5} ٥\,دس + \int_{1,5}^{2} ٦\,دس + \int_{2}^{2,5} ٧\,دس + \int_{2,5}^{3} ٨\,دس$$

$$= ٥ \times \frac{١}{٢} + ٦ \times \frac{١}{٢} + ٧ \times \frac{١}{٢} + ٨ \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢} + \frac{٦}{٢} + \frac{٧}{٢} + \frac{٨}{٢} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$$

مثال ٣: **جد:** $\int_{٢}^{٥} |٦ - ٦س|\,دس$ ؟



☑ **الجواب:** $٦ - ٦س = ٠ \Leftarrow ٦ = ٦س \Leftarrow س = ١$

$$\int_{٢}^{٥} (٦س - ٦)\,دس = \left[\frac{٦س^{٢}}{٢} - (٦ \times ٣)\right]_{٢}^{٥} = ٧٥ - ١٢ - ١٨ = ٤٥$$

مثال ٤: **إذا كان:** $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & ، س \leq ٢ \\ ٣أ & ، س > ٢ \end{cases}$ ،

وكان $\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس = ١٢$ ، **جد قيمة الثابت** (أ) ؟

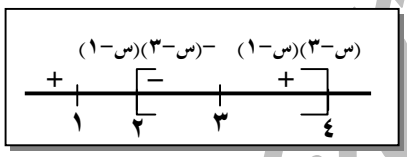
☑ **الجواب:** $\int_{ب}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{ب}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٣} ق(س)\,دس$

$$١٢ = \int_{ب}^{٢} ٣أ\,دس + \int_{٢}^{٣} (٢س+٢)\,دس$$

$$١٢ = ٣أ \times ٢ + \left[\frac{٢س^{٢}}{٢} + ٢\right]_{٢}^{٣}$$

$$١٢ = ٦أ + (٩ - ٤) + ٢ \Leftarrow ١٢ - ٧ = ٦أ \Leftarrow أ = \frac{٥}{٦}$$

مثال ٥: **جد:** $\int_{٢}^{٤} \frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س - ١}\,دس$ ؟



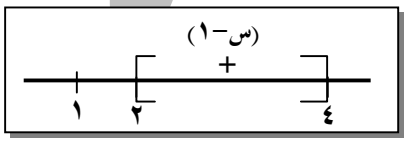
☑ **الجواب:** $س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \Leftarrow (س-٣)(س-١) = ٠ \Leftarrow س = ١ ، ٣$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{-(س-٣)(س-١)}{س-١} & ، ٢ \leq س \leq ٣ \\ \frac{(س-١)(س-٣)}{س-١} & ، ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases} \Leftarrow ق(س) = \begin{cases} -س + ٣ & ، ٢ \leq س \leq ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$$

$$\int_{٢}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{٢}^{٣} (-س + ٣)\,دس + \int_{٣}^{٤} (س - ٣)\,دس$$

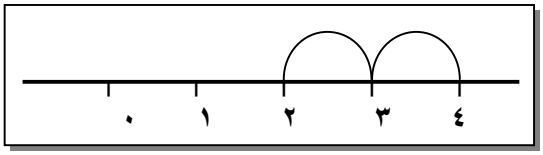
$$= \left[\frac{-س^{٢}}{٢} + ٣ \times ١\right]_{٢}^{٣} + \left[\frac{س^{٢}}{٢} - ٣ \times ١\right]_{٣}^{٤} = (\frac{-٩}{٢} - \frac{-٤}{٢}) + ٣ + (\frac{١٦}{٢} - \frac{٩}{٢}) - ٣ = ١$$

مثال ٦: **جد:** $\int_{٢}^{٤} \frac{|س - ١|}{[س]}\,دس$ ؟



☑ **الجواب:** ❁ نبدأ بالمطلق: $س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

يصبح السؤال: $\int_{٢}^{٤} \frac{س-١}{[س]}$ دس



❁ نعرف أكبر عدد صحيح: ل = $\frac{١}{|١|}$ = ١

ق(س) = $\begin{cases} \frac{س-١}{٢} & ، ٢ \leq س < ٣ \\ \frac{س-١}{٣} & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس = $\frac{١}{٢}\int_{٢}^{٣}$ (س−١) دس + $\frac{١}{٣}\int_{٣}^{٤}$ (س−١) دس

= $\frac{١}{٢}\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right|_{٢}^{٣} - ١\times١) + \frac{١}{٣}\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right|_{٣}^{٤} - ١\times١)$

= $\frac{١}{٢}(\frac{٩}{٢}-\frac{٤}{٢}-٢)+\frac{١}{٣}(\frac{١٦}{٢}-\frac{٩}{٢}-٢)=\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٢}+\frac{١}{٣}\times\frac{٥}{٢}=\frac{٣}{٤}+\frac{٥}{٦}=\frac{٣٨}{٢٤}$

مثال٦: **جد قيمة (جـ) للتكامل التالي:** $\int_{١}^{جـ}[\frac{س}{٢}+٢]$ دس = ٩ ، **حيث** (**جـ** > ١) ؟

☑ **الجواب:** ل = $\frac{١}{|\frac{١}{٢}|}$ = ٢ ، ونحدد قيمة (جـ) بالتجربة:

ق(س) = $\begin{cases} ٢ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ ٤ & ، ٤ \leq س < ٦ \end{cases}$

$\int_{١}^{جـ}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{٢}$ ٢ دس + $\int_{٢}^{٤}$ ٣ دس + $\int_{٤}^{جـ}$ ٤ دس = ٩

٩ = ٢ + ٦ + ٤(جـ − ٤)

٩ = ٤جـ − ٨ ⇐ ٤جـ = ٩+٨ ⇐ جـ = $\frac{١٧}{٤}$

تمرين: **إذا كان:** $\int_{١}^{جـ}[\frac{١}{٣}س+١]$ دس = ١٢ ، **جد قيمة** (جـ) ، **حيث** (**جـ** ∋ ح) ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

سؤال: **إذا كان :** $\int_{1}^{3} هـ(س)\,دس = \frac{1}{س^{2}} + جـ$ ، **فاحسب قيمة** $\int_{1}^{3} هـ(س)\,دس$ ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

تمارين متنوعة على التوابث

١ **إذا كان:** $\int_{1}^{جـ} (٢س - ٤)\,دس$ = صفر ، **فما قيمة الثابت (جـ) ؟**

☑ **الجواب:** $\left[\frac{٢س^{2}}{٢} - ٤س\right]_{1}^{جـ}$ = صفـــر

جـ^{٢} − ٤جـ + ٣ = ٠ ⇐ (جـ−٣)(جـ−١) = ٠ ⇐ **جـ = ٣** ، **جـ = ١**

---

٢ **إذا كان:** $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس - \int_{أ}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس$ ، **جد قيمة الثوابت (أ ، ب) ؟**

☑ **الجواب:** $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{ب} ق(س)\,دس$

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{١}^{ب} ق(س)\,دس$ ⇐ **أ = ٥** ، **ب = ١**

---

٣ **إذا كان:** $\int_{1}^{جـ} (٢س^{2} + ٦س)\,دس$ = صفـــر ، **فما قيمة الثابت (جـ)، بحيث (جـ ∋ ح) ؟؟**

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الأسس واللوغاريتمات

ملاحظة إنّ الأساس المعتمد لاقترانات الأسس واللوغاريتمات هو العدد النيبيري (هـ ≅ ٢,٧).

تمهيد:

١) لوهـ ١ = صفر

٢) لوهـ هـ = ١

٣) لوهـ س^{ن} = ن لوهـ س

٤) لوهـ هـ^{ن} = ن لوهـ هـ = ن

٥) لوهـ س ص = لوهـ س+ لوهـ ص

٦) لوهـ $\frac{س}{ص}$ = لوهـ س− لوهـ ص

نظرية إذا كان: ص= لوهـ (ق(س)) فإن: $\frac{دص}{دس} = \frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

أمثلة: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي:

(١) ص= لوهـ س ؟

☑ **الجواب:** صَ = $\frac{١}{س}$

---

(٢) ص= لوهـ (س^{٣}+٢س) ؟

☑ **الجواب:** صَ = $\frac{٣س^{٢}+٢}{س^{٣}+٢س}$

---

(٣) ص= لوهـ (جا٧س) ؟

☑ **الجواب:** صَ = $\frac{٧ \text{ جتا}٧س}{\text{جا}٧س}$ = ٧ ظتا٧س

---

(٤) ص= س لوهـ (٧س) ؟

☑ **الجواب:** صَ = س × $\frac{٧}{٧س}$ + لوهـ (٧س)×١ = ١ + لوهـ (٧س)

---

(٥) س^{٣}= لوهـ ٢ص ؟

☑ **الجواب:** ٣س^{٢} = $\frac{٢ \cdot \frac{دص}{دس}}{٢ص}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢}ص

---

(٦) ص= (لوهـ (س^{٣}+٢))^{٣} ؟

☑ **الجواب:** ص= (لوهـ (س^{٣}+٢))^{٣} ..... مركب

صَ = ٣(لوهـ (س^{٣}+٢))^{٢} × $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٢}$ = $\frac{٩س^{٢}}{س^{٣}+٢}$ (لوهـ (س^{٣}+٢))^{٢}

(٧) ص = لوهـ(س^{٣}+٢)^{٣} ؟

☑ **الجواب:** ص= ٣ لوهـ(س^{٣}+٢)

$$\frac{دص}{دس} = ٣ \times \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}+٢} = \frac{٩س^{٢}}{س^{٣}+٢}$$

---

(٨) ص = لوهـ $\sqrt{\frac{ظا٥س}{س - س^{٢}}}$ ؟

☑ **الجواب:** ص= $\frac{١}{٢}$ (لوهـ ظا٥س − لوهـ(س− س^{٢}))

$$صَ = \frac{١}{٢}\left(\frac{٥ قا^{٢}٥س}{ظا٥س} - \frac{١ - ٢س}{س - س^{٢}}\right)$$

سؤال: **إذا كان** : ص = لوهـ$_{(٥-٢س)}$ ، **جد** $\frac{دص}{دس}$ ؟

☑ **الجواب:** ص = (٥−٢س) لوهـ ⇐ ص= ٥−٢س ⇐ صَ = −٢

☑ **حل آخر:** صَ = $\frac{هـ^{٥-٢س} \times -٢}{هـ^{٥-٢س}} = -٢$

نظرية

إذا كان: ص= هـ$^{ق(س)}$ فـإن: $\frac{دص}{دس}$ = هـ$^{ق(س)}$ × قَ(س) مشتقة القوة

أمثلة: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي:

(١) ص= هـ^{س} ؟ ⇐ صَ = هـ^{س} × ١ = هـ^{س}

(٢) ص= هـ^{٥س} ؟ ⇐ صَ = هـ^{٥س} × ٥ = ٥ هـ^{٥س}

(٣) ص= هـ$^{٥س^{٢}}$ ؟ ⇐ صَ = هـ$^{٥س^{٢}}$ × ١٠س = ١٠س هـ$^{٥س^{٢}}$

(٤) ص= هـ^{جا٥س} ؟ ⇐ صَ = هـ^{جا٥س} × جتا٥س × ٥ = ٥ هـ^{جا٥س} جتا٥س

(٥) ص= هـ^{٥} ؟ ⇐ صَ = هـ^{٥} × صفر = صفر

(٦) ص= هـ$^{\sqrt{٧س}}$ ؟ ⇐ صَ = هـ$^{\sqrt{٧س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{٧س}} = \frac{هـ^{\sqrt{٧س}}}{٢\sqrt{٧س}}$

(٧) ص= س هـ^{ظاس} ؟ ⇐ صَ = س×هـ^{ظاس}× قا^{٢}س + هـ^{ظاس} ×١

(٨) ص= هـ^{لوهـجتاس} ؟ ⇐ ص = جتاس ⇐ صَ = − جاس

سؤال ١: **إذا كان** : ص = ٥ ^{٤س} ، **جد** $\frac{دص}{دس}$ ؟

☑ **الجواب:** لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ ٥ ^{٤س}

لو$_{هـ}$ ص = ٤س لو$_{هـ}$ ٥ (نشتق ضمنياً)

$\frac{دص}{دس}$ / ص = ٤ لو$_{هـ}$ ٥ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ لو$_{هـ}$ ٥ × ص ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ × ٥ ^{٤س} × لو$_{هـ}$ ٥

سؤال ٢: **إذا كان** : ص = (هـ ^{٥س})^{٣} لو$_{هـ}$ جا^{٢}٣س ، **جد** $\frac{دص}{دس}$ ؟

☑ **الجواب:** نرتبه ⇐ ص = هـ ^{١٥س} × ٢ لو$_{هـ}$ جا٣س

= ٢هـ ^{١٥س} × لو$_{هـ}$ جا٣س

$\frac{دص}{دس}$ = ٢هـ ^{١٥س} × $\frac{٣ جتا٣س}{جا٣س}$ + لو$_{هـ}$ جا٣س × ٣٠هـ ^{١٥س}

= ٦هـ ^{١٥س} ظتا٣س + ٣٠هـ ^{١٥س} لو$_{هـ}$ جا٣س

سؤال ٣: **إذا كان** : هـ $^{س ص}$ = س + ص ، **أثبت أن:** $\frac{دص}{دس}$ = − $\left(\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص-١}\right)$ ؟

☑ **الجواب:** هـ $^{س ص}$ × (س $\frac{دص}{دس}$ + ص) = ١ + $\frac{دص}{دس}$

س هـ $^{س ص}$ $\frac{دص}{دس}$ + ص هـ $^{س ص}$ = ١ + $\frac{دص}{دس}$

س هـ $^{س ص}$ $\frac{دص}{دس}$ − $\frac{دص}{دس}$ = ١ − ص هـ $^{س ص}$

$\frac{دص}{دس}$ (س هـ $^{س ص}$ − ١) = ١ − ص هـ $^{س ص}$

$\frac{دص}{دس}$ ($\frac{س هـ^{س ص}-١}{س هـ^{س ص}-١}$) = $\frac{١-ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص}-١}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١-ص(س+ص)}{س(س+ص)-١}$

= $\frac{١-س ص-ص^{٢}}{س^{٢}+س ص-١}$

= − $\left(\frac{ص^{٢}+س ص-١}{س^{٢}+س ص-١}\right)$

الأستاذ وسام القاضي

سؤال٣: **إذا كان** : ص= هـ$^{أ س}$ = س + ص ، **جد** (أ) **التي تحقق المعادلة**:

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} - \frac{دص}{دس} - ٦ص = صفر ؟$$

☑ **الجواب:** $\frac{دص}{دس}$ = أ هـ$^{أ س}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = أ^{٢} هـ$^{أ س}$

نعوض ⇐ أ^{٢} هـ$^{أ س}$ – أ هـ$^{أ س}$ – ٦ هـ$^{أ س}$ = صفـر

هـ$^{أ س}$ (أ^{٢} – أ – ٦) = صفر

هـ$^{أ س}$ (أ– ٣) (أ + ٢) = صفر ⇐ [أ = ٣] ، [أ = –٢] ، [هـ$^{أ س}$ ≠ ٠]

تـــمـــاريـــن

١ **إذا كان**: ق(س) = لو$_{هـ}$ جا^{٢}س ، **جد** قَ(س) ؟

☑ **الجواب:** ق(س)= ٢لو$_{هـ}$ جاس

قَ(س)= ٢ × $\frac{جتاس}{جاس}$ = ٢ظتاس

---

٢ **إذا كان**: ق(س) = لو$_{هـ}$ جا^{٣}٢س ، **جد** قَ(س) ؟

☑ **الجواب:** ق(س)= ٣لو$_{هـ}$ جا٢س

قَ(س)= ٣ × $\frac{٢جتا٢س}{جا٢س}$ = ٦ظتا٢س

---

٣ **إذا كان**: ق(س) = لو$_{هـ}$ |جاس| ، **جد** قَ(س) ؟

☑ **الجواب:** قَ(س)= $\frac{جتاس}{جاس}$ = ظتاس

---

٤ **إذا كان**: ق(س) = لو$_{هـ}$ ($\frac{س}{١ + س^{٢}}$) ، **جد** قَ(س) ؟

☑ **الجواب:** ق(س)= لو$_{هـ}$ س – لو$_{هـ}$ (١+ س^{٢})

قَ(س)= $\frac{١}{س} - \frac{٢س}{١ + س^{٢}}$

---

٥ **إذا كان**: ق(س) = لو$_{هـ}$ (س+ $\sqrt{س^{٢}-١}$)، **جد** قَ(س) ؟

☑ **الجواب:** قَ(س)= $\frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}}$ = $\frac{١ + \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-١}}}{س + \sqrt{س^{٢}-١}}$

الأستاذ وسام القاضي

٦ **إذا كان:** ص = $\sqrt{هـ^{2س}+2س}$ ، **جد** صَ ؟

☑ **الجواب:** صَ = $\frac{2هـ^{2س}+2}{2\sqrt{هـ^{2س}+2س}}$

---

٧ **إذا كان:** ص = $\sqrt{هـ^{2س^3}}$ ، **جد** صَ ؟

☑ **الجواب:** ص = $(هـ^{2س^3})^{\frac{1}{2}} = هـ^{س^3}$

صَ = $هـ^{س^3} \times 3س^2$

---

٨ **إذا كان:** ص = $(هـ^{س})^3$ ، **جد** صَ ؟

☑ **الجواب:** ص = $هـ^{3س}$

صَ = $3هـ^{3س}$

---

٩ **إذا كان:** ص = $هـ^{أ س}$ ، **فجد قيمة** (أ) **التي تحقق المعادلة:** (صً − ٥صَ + ٦ص = صفر) ؟

☑ **الجواب:** صَ = $أ هـ^{أ س}$

صً = $أ^2 هـ^{أ س}$

صً − ٥صَ + ٦ص = صفر

$(أ^2 هـ^{أ س}) - 5(أ هـ^{أ س}) + 6(هـ^{أ س}) = صفر$

$هـ^{أ س}(أ^2 - 5أ + 6) = صفر$

$هـ^{أ س}(أ-3)(أ-2) = صفر$ ⇐ أ = ٣ ، أ = ٢ ، $هـ^{أ س} \neq 0$

القوانين العامة للتكامل

١ ∫ ل دس = ل س + جـ	٢ ∫ $س^{و} دس = \frac{س^{و+1}}{و+1} + جـ$ ، $و \neq -1$
٣ ∫ $س^{-1} دس = \int \frac{1}{س} دس = لو_{هـ}|س| + جـ$	٤ ∫ $هـ^{أ س} دس = \frac{هـ^{أ س}}{أ} + جـ$
٥ ∫ جاأس دس = $\frac{-جتا أس}{أ} + جـ$	٦ ∫ جتاأس دس = $\frac{جا أس}{أ} + جـ$
٧ ∫ $قا^2$ أس دس = $\frac{ظا أس}{أ} + جـ$	٨ ∫ $قتا^2$ أس دس = $\frac{-ظتا أس}{أ} + جـ$
٩ ∫ قاأس ظاأس دس = $\frac{قا أس}{أ} + جـ$	١٠ ∫ قتاأس ظتاأس دس = $\frac{-قتا أس}{أ} + جـ$

ملاحظة ١ الكسور التي مقامها مثلثي يرفع، وذلك كما يلي:

❁ $\frac{١}{\text{جاس}}$ = قتاس ❁ $\frac{١}{\text{ظاس}}$ = ظتاس ❁ $\frac{١}{\text{جتاس}}$ = قاس

ملاحظة ٢ عند ظهور أي من المتطابقات التالية وحدها، تبدل كما يلي:

❁ ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ❁ ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

❁ ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١ ❁ ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

❁ جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س) ❁ جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

تدريب: جا^{٢}٥س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا١٠س)

التكامل في حالات الجمع والطرح والمركب

في هذه الحالات **نكامل مباشرة**، على أن تكون زاوية الاقتران المثلثي **خطية**، وما داخل أقواس المركب **خطي**، وقوة الاقتران الأسي **خطي** من **الدرجة الأولى**.

ملاحظة لا تنسى في هذه الحالات القسمة على معامل (س).

تمارين متنوعة

جد قيمة كلاً مما يلي:

١ $\int$ (س^{٤} + س$^{-٤}$ + ١ + هـ$^{-٥س}$ − جا٣س) دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int$ (س^{٤} + س$^{-٤}$ + ١ + هـ$^{-٥س}$ − جا٣س) دس = $\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{س} + \frac{\text{هـ}^{-٥س}}{-٥} + \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

٢ $\int$ (س^{٤} + $\sqrt[٤]{\text{س}}$ + $\frac{١}{\text{س}^{٤}}$ + $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}٤\text{س}}$) دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int$ (س^{٤} + س$^{\frac{١}{٤}}$ + س$^{-٤}$ + قتا^{٢}٤س) دس = $\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{\text{س}^{\frac{٥}{٤}}}{\frac{٥}{٤}} + \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} - \frac{\text{ظتا}٤\text{س}}{٤} + \text{جـ}$

٣ $\int$ (٥س + ٣)^{٥} دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int$ (٥س + ٣)^{٥} دس = $\frac{(٥\text{س} + ٣)^{٦}}{٦ \times ٥} + \text{جـ}$

٤ $\int \frac{1}{(٢س-١)^{٤}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int (٢س-١)^{-٤}$ دس $= \frac{(٢س-١)^{-٣}}{-٣ \times ٢} +$ جـ

---

٥ $\int \sqrt[٨]{(١-٢س)^{٥}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int (١-٢س)^{\frac{٥}{٨}}$ دس $= \frac{(١-٢س)^{\frac{١٣}{٨}}}{\frac{١٣}{٨} \times -٢} +$ جـ $= \frac{-٨}{٢٦} \sqrt[٨]{(١-٢س)^{١٣}} +$ جـ

---

٦ $\int (\frac{١}{\text{قتا}^{٢}٣س} + \text{ظا}^{٢}٢س)$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int (\text{جا}^{٢}٣س + \text{قا}^{٢}٢س-١)$ دس $= \int (\frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٦س) + \text{قا}^{٢}٢س-١)$ دس

$= \frac{١}{٢}(س - \frac{\text{جا}٦س}{٦}) + \frac{\text{ظا}٢س}{٢} - س +$ جـ

---

٧ $\int (\text{قا}٥س \ \text{ظا}٥س)$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int (\text{قا}٥س \ \text{ظا}٥س)$ دس $= \frac{\text{قا}٥س}{٥} +$ جـ

---

٨ $\int \text{قتا}(٥س-١) \ \text{ظتا}(٥س-١)$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int \text{قتا}(٥س-١) \ \text{ظتا}(٥س-١)$ دس $= \frac{-\ \text{قتا}(٥س-١)}{٥} +$ جـ

---

٩ $\int (٢س - ١)^{٢}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

$\int (٢س - ١)^{٢}$ دس $= \frac{(٢س-١)^{٣}}{٣ \times ٢} +$ جـ

الأستاذ وسام القاضي

التكامل في حالات الضرب

✻ في هذه الحالات **لا نكامل مباشرة .**

✻ في بعض الحالات يكون الضرب بسيط نفك أقواسه مباشرة، وفي حالات الضرب الأخرى نلجأ إلى طريقة التعويض، وعند فشلها نلجأ إلى الأجزاء.

المبادئ الأساسية في اختيار الفرض (ص) في طريقة التعويض:

١ اقتران × مركب ⇐ ص = ما داخل المركب (دون القوة)

٢ جا(زاوية) × جتا(نفس الزاوية) ⇐ ص = أحد الاقترانين

وإذا كان لأحدهما قوة، هو الذي يفرض (ص) بدون القوة

٣ قا^{٢}(زاوية) × ظا^{ن}(نفس الزاوية) ⇐ ص = ظا(الزاوية)

٤ قتا^{٢}(زاوية)×ظتا^{ن}(نفس الزاوية) ⇐ ص = ظتا(الزاوية)

٥ اقتران × هـ^{قوة} ⇐ ص = القوة

٦ اقتران × اقتران مثلثي ⇐ ص = الزاوية

٧ في بعض الحالات ⇐ ص = المنظر الغريب ؟؟؟

حل كلاً من التكاملات الأتية:

سؤال ١: $\int$ ٢س(س^{٢}+٣) دس ؟

☑ **الجواب:** هذا الضرب من النوع البسيط (فك أقواس)

$$\int (٢س^{٣}+٦س)\ دس = \frac{٢س^{٤}}{٤}+\frac{٦س^{٢}}{٢}+ جـ$$

سؤال ٢: $\int$ ٢س(س^{٢}+٣)^{٧} دس ؟

☑ **الجواب:** بالتعويض

ص= س^{٢}+٣ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ⇐ دس= $\frac{دص}{٢س}$

$$\int ٢س\ ص^{٧}\ \frac{دص}{٢س} = \int ص^{٧}\ دص$$

$$= \frac{ص^{٨}}{٨}+ جـ$$

$$= \frac{(س^{٢}+٣)^{٨}}{٨}+ جـ$$

سؤال ٣: $\int \frac{س^{٥}+٢س^{٢}+١}{س^{٢}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $\int (س^{٥}+٢س^{٢}+١)(س^{-٢})$دس $= \int (س^{٣}+٢+س^{-٢})$دس $= \frac{س^{٤}}{٤}+٢س+\frac{س^{-١}}{-١}+$ جـ

سؤال ٤: $\int (\sqrt{٥س+١}+\sqrt[٣]{س^{٢}-٦س+٩})$ دس ؟

☑ **الجواب:** $\int (٥س+١)^{\frac{١}{٢}}+(س^{٢}-٦س+٩)^{\frac{١}{٣}}$ دس $= \int (٥س+١)^{\frac{١}{٢}}$دس $+ \int ((س-٣)^{٢})^{\frac{١}{٣}}$ دس

$= \int (٥س+١)^{\frac{١}{٢}}$دس $+ \int (س-٣)^{\frac{٢}{٣}}$ دس

$= \frac{(٥س-١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}\times ٥}+\frac{(س-٣)^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}\times ١}+$ جـ

$= \frac{٢}{١٥}\sqrt{(٥س-١)^{٣}}+\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{(س-٣)^{٥}}+$ جـ

سؤال ٥: $\int \frac{٣س^{٢}+١}{\sqrt[٣]{س^{٣}+س+١}}$ دس ؟

ص $= س^{٣}+س+١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}+١$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}+١}$

☑ **الجواب:** $\int \frac{٣س^{٢}+١}{(س^{٣}+س+١)^{\frac{١}{٣}}}$ دس

$= \int (٣س^{٢}+١)(س^{٣}+س+١)^{-\frac{١}{٣}}$ دس

$= \int \cancel{(٣س^{٢}+١)}(ص)^{-\frac{١}{٣}}\frac{دص}{\cancel{٣س^{٢}+١}} = \int (ص)^{-\frac{١}{٣}}$ دص

$= \frac{ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}+$ جـ $= \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^{٣}+س+١)^{٢}}+$ جـ

سؤال ٦: $\int \frac{٣}{\sqrt[٣]{٢س+١}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $\int \frac{٣}{(٢س+١)^{\frac{١}{٣}}}$ دس $= \int (٣)(٢س+١)^{-\frac{١}{٣}}$ دس

$= ٣\times \frac{(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}\times ٢}+$ جـ

$= ٣\times \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}+$ جـ $= \frac{٩}{٤}\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}+$ جـ

سؤال ٧: $\int س^{٣}(س^{٢}+١)^{٥}$ دس ؟

ص $= س^{٢}+١$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$س^{٢} = ص-١$

☑ **الجواب:** $\int س^{٣}ص^{٥}\frac{دص}{٢س}$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٢}ص^{٥}$دص $= \frac{١}{٢}\int (ص-١)ص^{٥}$ دص

$= \frac{1}{2} \int (ص^{6} - ص^{5})$ دص

$= \frac{1}{2} (\frac{ص^{7}}{7} - \frac{ص^{6}}{6}) + جـ = \frac{1}{2} (\frac{(س^{2}+1)^{7}}{7} - \frac{(س^{2}+1)^{6}}{6}) + جـ$

سؤال ٨: $\int$ جا٤س جتا٤س دس ؟

الجواب: $\int ص \text{ جتا٤س} \frac{دص}{٤ \text{ جتا٤س}} = \frac{1}{4} \times \frac{ص^{2}}{2} + جـ$

$= \frac{1}{8} (\text{جا٤س})^{2} + جـ$

فكر هنا ك حل آخر

ص = جا٤س

$\frac{دص}{دس} = ٤ \text{ جتا٤س}$

$دس = \frac{دص}{٤ \text{ جتا٤س}}$

سؤال ٩: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جتا٤س جا^{2}٤س دس ؟

الجواب: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا٤س} ص^{2} \frac{دص}{٤ \text{ جتا٤س}}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{ص^{3}}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{ص^{3}}{3} = \frac{1}{12} (\text{جا٤س})^{3} \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{12} \times ٠ - \frac{1}{12} \times ٠ = \text{صفر}$

ص = جا٤س

$\frac{دص}{دس} = ٤ \text{ جتا٤س}$

$دس = \frac{دص}{٤ \text{ جتا٤س}}$

حل آخر: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا٤س} ص^{2} \frac{دص}{٤ \text{ جتا٤س}}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{ص^{3}}{3} = \frac{1}{12} ص^{3} \Big|_{0}^{} = \text{صفر}$

ص = جا٤س

س = $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ص = ٠

س = ٠ ⇐ ص = ٠

سؤال ١٠: $\int$ س^{2} (س+١)^{6} دس ؟

الجواب: $\int$ س^{2} (س+١)^{6} دس

نجزئ التكامل

ق = س^{2} ⇐ دق = ٢س دس

دهـ = (س+١)^{6} دس ⇐ هـ = $\frac{(س+1)^{7}}{7}$

$\therefore$ س^{2} $\frac{(س+1)^{7}}{7} - \int \frac{٢س}{7} (س+1)^{7}$ دس

نجزئ مرة ثانية

ق = $\frac{2}{7}$ س ⇐ دق = $\frac{٢}{7}$ دس

دهـ = (س+١)^{7} دس ⇐ هـ = $\frac{(س+1)^{8}}{8}$

$\frac{٢س}{7} \frac{(س+1)^{8}}{8} - \int \frac{2}{7} \frac{(س+1)^{8}}{8}$ دس

$\therefore \frac{٢س}{٥٦} (س+1)^{8} - \frac{2}{٥٦} \frac{(س+1)^{9}}{9}$ دس

$\therefore$ س^{2} $\frac{(س+1)^{7}}{7} - (\frac{س}{٢٨} (س+1)^{8} - \frac{1}{٩ \times ٢٨} (س+1)^{9}) + جـ$

سؤال ١١: $\int$ جتاس $\sqrt{١+\text{جاس}}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}^{\frac{١}{٢}}$ (ص) $= \int$ ص $^{\frac{١}{٢}}$ دص

$$= \frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{ص}^{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٣}\sqrt{(١+\text{جاس})^{٣}} + \text{جـ}$$

ص = ١ + جاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

سؤال ١٢: $\int$ قا^{٢} ٢س ظا^{٨} ٢س دس ؟

الجواب: $\int \frac{\text{دص}}{٢\text{قا}^{٢}٢\text{س}}$ ص$^{٨} = \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ص}^{٩}}{٩} + \text{جـ}$

$$= \frac{١}{١٨}(\text{ظا}٢\text{س})^{٩} + \text{جـ}$$

ص = ظا ٢س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{قا}^{٢}٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{قا}^{٢}٢\text{س}}$

سؤال ١٣: $\int$ قتا^{٢} ٢س ظتا^{٨} ٢س دس ؟

الجواب: $\int \frac{\text{دص}}{-٢\text{قتا}^{٢}٢\text{س}}$ ص$^{٨} = \frac{١}{-٢} \times \frac{\text{ص}^{٩}}{٩} + \text{جـ}$

$$= \frac{-١}{١٨}(\text{ظتا}٢\text{س})^{٩} + \text{جـ}$$

ص = ظتا ٢س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{قتا}^{٢}٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢\text{قتا}^{٢}٢\text{س}}$

سؤال ١٤: $\int \frac{\text{قتا}^{٢}٣\text{س}}{\text{ظا}٣\text{س}}$ دس ؟

الجواب: $\int$ قتا^{٢} ٣س ظتا ٣س دس $= \int \frac{\text{دص}}{-٣\text{قتا}^{٢}٣\text{س}} \times \text{ص} \times$

$$= \frac{-١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٦}(\text{ظتا}٣\text{س})^{٢} + \text{جـ}$$

ص = ظتا ٣س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\text{قتا}^{٢}٣\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٣\text{قتا}^{٢}٣\text{س}}$

سؤال ١٥: $\int$ س^{٢} هـ$^{\text{س}^{٣}}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$ س^{٢} هـ$^{\text{ص}} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{١} + \text{جـ}$

$$= \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$$

ص = س^{٣}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$

سؤال١٦: $\int_{0}^{1} ٢س\ هـ^{٢س}$ دس ؟

الجواب: $٢س \times \frac{هـ^{٢س}}{٢} \Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} ٢ \times \frac{هـ^{٢س}}{٢}$ دس

$= (هـ^{٢} - ٠) - \frac{١}{٢} هـ^{٢س} \Big|_{0}^{1}$

$= هـ^{٢} - (\frac{١}{٢} هـ^{٢} - \frac{١}{٢} هـ^{٠}) = هـ^{٢} - \frac{١}{٢} هـ^{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} هـ^{٢} + \frac{١}{٢}$

ق=٢س ⇐ دق=٢ دس

دهـ= هـ^{٢س} ⇐ هـ= $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$

سؤال١٧: $\int \frac{س^{٣}}{هـ^{س}}$ دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

سؤال١٨: $\int$ ٢س جا(س^{٢}+١) دس ؟

الجواب: $\int$ ~~٢س~~ جاص $\frac{دص}{~~٢س~~}$ = $\int$ جاص دص

$= \frac{-\ جتاص}{١} + جـ = -\ جتا(س^{٢}+١) + جـ$

ص= س^{٢}+١

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س

دس = $\frac{دص}{٢س}$

سؤال١٩: $\int$ ٢س جا(س+١) دس ؟

الجواب: يكون الحل بالأجزاء:

$= -٢س\ جتا(س+١) + \int ٢جتا(س+١)$ دس

$= -٢س\ جتا(س+١) + ٢جا(س+١) + جـ$

ق=٢س ⇐ دق=٢ دس

دهـ= جا(س+١)دس ⇐ هـ= -جتا(س+١)

سؤال٢٠: $\int$ ٢س جتا^{٢}٢س دس ؟

الجواب: يكون الحل بالأجزاء:

$= س(س + \frac{جا٤س}{٤}) - \int (س + \frac{١}{٤} جا٤س)$ دس

$= س(س + \frac{جا٤س}{٤}) - (\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{١}{٤} \times - \frac{جتا٤س}{٤}) + جـ$

ق=٢س ⇐ دق=٢ دس

دهـ= جتا^{٢}٢س دس

هـ= $\int$ جتا^{٢}٢س دس= $\int \frac{١}{٢}(١ + جتا٤س)$دس

$= \frac{١}{٢}(س + \frac{جا٤س}{٤})$

سؤال ٢١ : $\int \frac{هـ^{٢س+٥}}{هـ^{٣س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

سؤال ٢٢ : $\int$ (٥ جا^{٢}٢س + ٥ جتا^{٢}٢س) دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

سؤال ٢٣ : $\int$ (س^{٢} + ٢س + ١)^{٨} دس ؟

☑ **الجواب:** $\int ((س+١)(س+١))^{٨}$ دس $= \int ((س+١)^{٢})^{٨}$ دس $= \int (س+١)^{١٦}$ دس $= \frac{(س+١)^{١٧}}{١٧ \times ١} + جـ$

سؤال ٢٤ : $\int \sqrt[٣]{س^{٣}+٢س^{٥}}$ دس ؟

ص $= ١+٢س^{٢}$
$\frac{دص}{دس} = ٤س$
$دس = \frac{دص}{٤س}$

☑ **الجواب:** $\int \sqrt[٣]{س^{٣}(١+٢س^{٢})}$ دس $= \int \sqrt[٣]{س^{٣}} \times \sqrt[٣]{١+٢س^{٢}}$ دس

$= \int س \times (١+٢س^{٢})^{\frac{١}{٣}}$ دس

$= \int س \times (ص)^{\frac{١}{٣}} \frac{دص}{٤س}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{ص^{٤}} + جـ = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(١+٢س^{٢})^{٤}} + جـ$

سؤال ٢٥ : $\int \sqrt{س^{٤}+٢س^{٢}}$ دس ، س > ٠ ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

سؤال٢٦: $\int \frac{س^{٢}}{قتا^{٢}س^{٣}}$ دس ؟

الجواب: $\int س^{٢} \times جا^{٢}س^{٣}$ دس $= \int س^{٢}$ جا^{٢}ص $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \frac{١}{٣} \int$ جا^{٢}ص دص

$= \frac{١}{٣} \int \frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢ص) دص

$= \frac{١}{٦}$ (ص $- \frac{جا٢ص}{٢}$) + جـ $= \frac{١}{٦}$ ($س^{٣} - \frac{جا٢س^{٣}}{٢}$) + جـ

ص $= س^{٣}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$

دس $= \frac{دص}{٣س^{٢}}$

سؤال٢٧: $\int \frac{س^{٢}}{قتاس}$ دس ؟

الجواب: $\int س^{٢}$ جاس دس (تكامل بالأجزاء)

ق $= س^{٢}$ ⇦ دق $= ٢س$ دس

دهـ $=$ جاس دس ⇦ هـ $= -$ جتاس

$= - س^{٢}$ جتاس $+ \int ٢س$ جتاس دس

ق $= ٢س$ ⇦ دق $= ٢$ دس

دهـ $=$ جتاس دس ⇦ هـ $=$ جاس

$= - س^{٢}$ جتاس $+ ٢س$ جاس $- \int ٢$ جاس دس

$= - س^{٢}$ جتاس $+ ٢س$ جاس $+ ٢$ جتاس $+$ جـ

تمرين١: جد: $\int س \times \sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{٥}{س^{٢}}}$ دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

تمرين٢: جد: $\int \frac{\sqrt[٣]{س^{٣} + ٢س}}{س^{٤}}$ دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

سؤال٢٨: $\int \frac{جا\sqrt{٧س}}{\sqrt{٧س}}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{جاص}{\sqrt{٧س}} \times ٢\sqrt{٧س}$ دص $= ٢ \times -$ جتاص $+$ جـ

$= -٢$ جتا$\sqrt{٧س}$ $+$ جـ

ص $= \sqrt{٧س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{٧س}}$

دس $= ٢\sqrt{٧س}$ دص

سؤال ٢٩: $\int$ جا$\sqrt{٧س}$ دس ؟

الجواب:

$\int$ جاص × ٢$\sqrt{٧س}$ دس

$= \int$ ٢ص جاص دص

$= -$٢ص جتاص + $\int$ ٢ جتاص دص

$= -$٢ص جتاص + ٢ جاص + جـ

$= -$٢$\sqrt{٧س}$ جتا$\sqrt{٧س}$ + ٢ جا$\sqrt{٧س}$ + جـ

ص = $\sqrt{٧س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{٧س}}$

دس = ٢$\sqrt{٧س}$ دص

ق = ٢ص ⇦ دق = ٢ دص

دهـ = جاص دص ⇦ هـ = − جتاص

سؤال ٣٠: $\int$ هـ$^{\sqrt{٧س}}$ دس ؟

الجواب:

$\int$ هـ^{ص} ٢$\sqrt{٧س}$ دص

$= \int$ ٢ص هـ^{ص} دص

$=$ ٢ص هـ$^{ص} - \int$ ٢ هـ^{ص} دص

$=$ ٢ص هـ$^{ص} -$ ٢ هـ^{ص} + جـ

$=$ ٢$\sqrt{٧س}$ هـ$^{\sqrt{٧س}} -$ ٢ هـ$^{\sqrt{٧س}}$ + جـ

ص = $\sqrt{٧س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{٧س}}$

دس = ٢$\sqrt{٧س}$ دص

ق = ٢ص ⇦ دق = ٢ دص

دهـ = هـ^{ص} دص ⇦ هـ = هـ^{ص}

سؤال ٣١: $\int$ جا^{٢}(جاس) جتاس دس ؟

الجواب:

$\int$ جا^{٢}ص $\frac{دص}{جتاس} = \int \frac{١}{٢}$(١ − جتا٢ص) دص $= \frac{١}{٢}$(ص − $\frac{جا٢ص}{٢}$) + جـ

$= \frac{١}{٢}$(جاس − $\frac{جا٢(جاس)}{٢}$) + جـ

ص = جاس

$\frac{دص}{دس} =$ جتاس

دس = $\frac{دص}{جتاس}$

سؤال ٣٢: $\int$ قا^{٢}س هـ^{ظاس} دس ؟

الجواب:

$\int$ قا^{٢}س هـ^{ص} $\frac{دص}{قا^{٢}س} = \int$ هـ^{ص} دص

$=$ هـ^{ص} + جـ $=$ هـ^{ظاس} + جـ

ص = ظاس

$\frac{دص}{دس} =$ قا^{٢}س

دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

سؤال ٣٣: $\int$ هـ^{٢س} ظا^{٢}(هـ^{٢س}) دس ؟

الجواب:

هـ^{٢س} ظا^{٢}ص $\frac{دص}{٢هـ^{٢س}} = \int \frac{١}{٢}$(قا^{٢}ص − ١) دص

$= \frac{١}{٢}$(ظاص − ص) + جـ

$= \frac{١}{٢}$(ظا(هـ^{٢س}) − هـ^{٢س}) + جـ

ص = هـ^{٢س}

$\frac{دص}{دس} =$ ٢هـ^{٢س}

دس = $\frac{دص}{٢هـ^{٢س}}$

سؤال ٣٤: $\int$ هـ^{٢س} جا^{٢}(ظا هـ^{٢س}) قا^{٢}(هـ^{٢س}) دس ؟

الجواب: $\int$ هـ^{٢س} جا^{٢}ص قا^{٢}(هـ^{٢س}) $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{هـ}^{٢س}\times\text{هـ}^{٢س}\times٢}$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{١}{٢}(١-\text{جتا}٢\text{ص})\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٤}(\text{ص}-\frac{\text{جا}٢\text{ص}}{٢}) + \text{جـ} = \frac{١}{٤}(\text{ظا هـ}^{٢س} - \frac{\text{جا}٢(\text{ظا}(\text{هـ}^{٢س}))}{٢}) + \text{جـ}$

ص= ظاهـ^{٢س}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{هـ}^{٢س}\times\text{هـ}^{٢س}\times٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{هـ}^{٢س}\times\text{هـ}^{٢س}\times٢}$

سؤال ٣٥: $\int$ ٢س جاس^{٢} جتا^{٧}س^{٢} دس ؟

الجواب: $\int$ ٢س جاس جتا^{٧}ص $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$= \int$ جاس جتا^{٧}ص دص

$= \int$ جاص ع^{٧} $\frac{\text{دع}}{-\text{جاص}}$

$= -\int$ ع^{٧} دع $= -\frac{\text{ع}^{٨}}{٨} + \text{جـ} = \frac{-\text{جتا}^{٨}\text{س}^{٢}}{٨} + \text{جـ}$

ص= س^{٢} ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$ ⇦ دس= $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

ع= جتاص ⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = -\text{جاص}$ ⇦ دص= $\frac{\text{دع}}{-\text{جاص}}$

فكر هنالك حل آخر

سؤال ٣٦: $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا٢س هـ$^{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ دس ؟

الجواب: $\int$ جا٢س هـ^{ص} $\frac{\text{دص}}{٢\text{جاس جتاس}}$

$= \int$ ٢جاس جتاس هـ^{ص} $\frac{\text{دص}}{٢\text{جاس جتاس}}$

$= \int$ هـ^{ص} دص = هـ^{ص} = هـ$^{\text{جا}^{٢}\text{س}}\Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ = هـ^{١} − هـ$^{\frac{١}{٢}}$

ص= جا^{٢}س= (جاس)^{٢}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{جاس جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{جاس جتاس}}$

جا٢س= ٢جاس جتاس

سؤال ٣٧: $\int$ ٢س ظاس قا^{٢}س دس ؟

الجواب: يكون الحل بالأجزاء:

$= ٢\text{س}\times\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} - \int ٢\times\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}\ \text{دس}$

$= \text{س ظا}^{٢}\text{س} - \int (\text{قا}^{٢}\text{س}-١)\ \text{دس}$

$= \text{س ظا}^{٢}\text{س} - (\text{ظاس}-\text{س}) + \text{جـ}$

ق=٢س ⇦ دق=٢ دس

دهـ=ظاس قا^{٢}س دس ⇦ هـ= $\int$ ظاس قا^{٢}س دس

$\int$ ظاس قا^{٢}س دس

$= \int$ ص $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int$ ص دص= $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$

ص= ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

تدريب: جد: $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}$ دس ؟

سؤال ٣٨: $\int \frac{هـ^{٥س}}{\sqrt{هـ^{٥س}+٢}}$ دس ؟

الجواب: $\int هـ^{٥س} \times (هـ^{٥س}+٢)^{-\frac{١}{٢}}$ دس $= \int هـ^{٥س}$ ص $^{-\frac{١}{٢}} \frac{دص}{٥هـ^{٥س}}$

$= \frac{١}{٥} \int ص^{-\frac{١}{٢}}$ دص $= \frac{١}{٥} \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٥}\sqrt{هـ^{٥س}+٢} + جـ$

ص $= هـ^{٥س}+٢$
$\frac{دص}{دس} = ٥هـ^{٥س}$
$دس = \frac{دص}{٥هـ^{٥س}}$

سؤال ٣٩: $\int هـ^{س}$ جتاس دس ؟

الجواب: $\int هـ^{س}$ جتاس دس

$= هـ^{س}$ جاس $- \int هـ^{س}$ جاس دس

$= هـ^{س}$ جاس $- (-هـ^{س}$ جتاس $+ \int هـ^{س}$ جتاس دس)

ق $= هـ^{س} \Leftarrow$ دق $= هـ^{س}$ دس
دهـ $=$ جتاس دس $\Leftarrow$ هـ $=$ جاس

ق $= هـ^{س} \Leftarrow$ دق $= هـ^{س}$ دس
دهـ $=$ جاس دس $\Leftarrow$ هـ $= -$ جتاس

$\therefore \int هـ^{س}$ جتاس دس $= هـ^{س}$ جاس $+ هـ^{س}$ جتاس $- \int هـ^{س}$ جتاس دس

٢ $\int هـ^{س}$ جتاس دس $= هـ^{س}$ جاس $+ هـ^{س}$ جتاس

$\int هـ^{س}$ جتاس دس $= \frac{١}{٢}(هـ^{س}$ جاس $+ هـ^{س}$ جتاس $) + جـ$

سؤال ٤٠: $\int هـ^{س}$ جاس دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

.....

سؤال ٤١: $\int \frac{١+جا٢س}{جاس+جتاس}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{جا^{٢}س+جتا^{٢}س+٢جاس\ جتاس}{جاس+جتاس}$ دس $= \int \frac{(جاس+جتاس)\cancel{(جاس+جتاس)}}{\cancel{(جاس+جتاس)}}$ دس

$= \int$ (جاس+جتاس) دس $= -$ جتاس $+$ جاس $+ جـ$

سؤال ٣٩: $\int \sqrt{١+جا٢س}$ دس ، $٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢}$ ؟

الجواب: $\int \sqrt{جا^{٢}س+جتا^{٢}س+٢جاس\ جتاس}$ دس

$= \int \sqrt{(جاس+جتاس)^{٢}}$ دس

$= \int |جاس+جتاس|$ دس $= \int$ جاس $+$ جتاس دس $= -$ جتاس $+$ جاس $+ جـ$

الأستاذ وسام القاضي

سؤال ٤٣: $\int \frac{1}{1+جاس}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{1}{1+جاس} \times \frac{1-جاس}{1-جاس}$ دس

$= \int \frac{1-جاس}{1-جا^{٢}س}$ دس $= \int \frac{1-جاس}{جتا^{٢}س}$ دس $= \int \frac{١}{جتا^{٢}س}$ دس $- \int \frac{جاس}{جتاس \ جتاس}$ دس

$= \int قا^{٢}س$ دس $- \int$ ظاس قاس دس

$=$ ظاس $-$ قاس $+$ جـ

سؤال ٤٤: $\int \frac{\sqrt{١+\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} \ ٢\sqrt{س}$ دص $= \int ٢$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ دص

$= ٢ \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} +$ جـ $= ٢ \times \frac{٢}{٣} \sqrt{(١+\sqrt{س})^{٣}} +$ جـ

ص$= ١+\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

دس$= ٢\sqrt{س}$ دص

سؤال ٤٥: $\int$ قا^{٥}س ظاس دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

.....

.....

سؤال ٤٦: $\int$ قا$^{٢}\sqrt{س}$ دس ؟

الجواب: $\int$ قا^{٢}ص $٢\sqrt{س}$ دص

$= \int ٢$ص قا^{٢}ص دص

$=$ ٢ص ظاص $- \int ٢$ ظاص دص

$=$ ٢ص ظاص $- \int ٢ \frac{جاص}{جتاص}$ دص

$=$ ٢ص ظاص $- ٢ \int \frac{جاص}{ع} \times \frac{دع}{-جاص}$

$=$ ٢ص ظاص $+$ ٢ لوهـ(ع) $+$ جـ

$=$ ٢ص ظاص $+$ ٢ لوهـ(جتاص) $+$ جـ

$= ٢\sqrt{س}$ ظا$\sqrt{س}$ $+$ ٢ لوهـ(جتا$\sqrt{س}$) $+$ جـ

ص$= \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

دس$= ٢\sqrt{س}$ دص

ق$= ٢$ص $\Leftarrow$ دق$= ٢$ دص

دهـ$=$ قا^{٢}ص دص $\Leftarrow$ هـ$=$ ظاص

ع$=$ جتاص

$\frac{دع}{دص} = -$ جاص

دص$= \frac{دع}{-جاص}$

سؤال ٤٧: $\int \frac{٤س\ هـ^{\sqrt{س^٢+١}}}{\sqrt{س^٢+١}}$ دس ؟

الجواب:

$$= \int ٤\ هـ^{ص}\ دص = ٤هـ^{ص} + جـ = ٤هـ^{\sqrt{س^٢+١}} + جـ$$

$$\int \frac{٤س\ هـ^{ص}}{\sqrt{س^٢+١}} \times \frac{\sqrt{س^٢+١}}{س}\ دص$$

ص = $\sqrt{س^٢+١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

دس = $\frac{\sqrt{س^٢+١}}{س}$ دص

سؤال ٤٨: $\int$ جا^{٣}س دس ؟

الجواب:

$$\int \text{جاس}\ (١ - \text{جتا}^٢س)\ دس = \int \text{جاس}\ (١ - ص^٢)\ \frac{دص}{-\text{جاس}} = -ص + \frac{ص^٣}{٣} + جـ = -\text{جتاس} + \frac{١}{٣}\text{جتا}^٣س + جـ$$

ص = جتاس

$\frac{دص}{دس} = -$ جاس

دس = $\frac{د\ ص}{-\text{جاس}}$

سؤال ٤٩: $\int$ جا^{٤}س دس ؟

الجواب:

$$\int \text{جا}^٢س\ \text{جا}^٢س\ دس = \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س) \times \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س)\ دس$$

$$= \frac{١}{٤}\int (١ - \text{جتا}٢س)^٢\ دس = \frac{١}{٤}\int (١ - ٢\text{جتا}٢س + \text{جتا}^٢٢س)\ دس$$

$$= \frac{١}{٤}\int (١ - ٢\text{جتا}٢س + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٤س)\ دس$$

$$= \frac{١}{٤}((س - ٢\frac{\text{جا}٢س}{٢}) + \frac{١}{٢}(س + \frac{\text{جا}٤س}{٤})) + جـ$$

سؤال ٥٠: $\int$ جا^{٣}س جتا^{٢}س دس ؟

الجواب:

.....

.....

.....

.....

.....

سؤال ٥١: $\int$ (جتاس + جاس)^٢ دس ؟ (مركب غير خطي)

الجواب:

$$\int (\text{جتا}^٢س + ٢\text{جتاس جاس} + \text{جا}^٢س)\ دس$$

$$= \int (١ + \text{جا}٢س)\ دس$$

$$= س + \frac{-\text{جتا}٢س}{٢} + جـ$$

سؤال٥٢: $\int (س^{٥} - ٣س)^{٣}$ دس ؟ (مركب غير خطي)

الجواب: $\int (س(س^{٤} - ٣))^{٣}$ دس $= \int س^{٣}(س^{٤} - ٣)^{٣}$ دس

$= \int س^{٣} ص^{٣} \frac{دص}{٤س^{٣}} = \frac{١}{٤} \int ص^{٣}$ دص

$= \frac{١}{٤} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{١}{١٦} (س^{٤} - ٣)^{٤} + جـ$

ص $= س^{٤} - ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

سؤال٥٣: $\int جا^{٢}س$ $جتا^{٢}س$ دس ؟

الجواب:

$\int (جاس\ جتاس)^{٢}$ دس $= \int (\frac{١}{٢} جا٢س)^{٢}$ دس $= \int \frac{١}{٤} جا^{٢}٢س$ دس

$= \frac{١}{٤} \int \frac{١}{٢} (١ - جتا٤س)$ دس

$= \frac{١}{٨} (س - \frac{جا٤س}{٤}) + جـ$

جا٢س $=$ ٢ جاس جتاس

$\frac{١}{٢}$ جا٢س $=$ جاس جتاس

سؤال٥٤: $\int جا\frac{س}{٢}$ $جتا\frac{س}{٢}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{١}{٢}$ جاس دس $= \frac{١}{٢} \times -$ جتاس $+ جـ$

جا٢س $=$ ٢ جاس جتاس

$\frac{١}{٢}$ جاس $= \frac{٢جا\frac{س}{٢}\ جتا\frac{س}{٢}}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ جاس $= جا\frac{س}{٢}\ جتا\frac{س}{٢}$

سؤال٥٥: $\int (قا^{٢}س - ظا^{٢}س)$ دس ؟

الجواب: $\int$ قا^{٢}س $-$ (قا^{٢}س -١) دس $= \int ١$ دس $= س + جـ$

سؤال٥٦: $\int_{١}^{٢} \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ دس ؟

الجواب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

سؤال٥٧: $\int$ (س−٢)^{٢} جتا(س+١) دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

سؤال٥٨: $\int \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{\text{جتا}^{٧}\text{س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين للإثبات

١ **أثبت أن:** $\int$ (أس + ب)^{ن} دس = $\frac{١}{\text{أ}} \frac{(\text{أ س+ ب})^{\text{ن+١}}}{\text{ن +١}}$ + جـ ؟

☑ **الجواب:** بالتعويض: ص= أس+ب ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ ⇐ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$\int$ (أس + ب)^{ن} دس = $\int$ ص^{ن} $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$= \frac{١}{\text{أ}} \frac{\text{ص}^{\text{ن+١}}}{\text{ن +١}}$ + جـ

$= \frac{١}{\text{أ}} \frac{(\text{أ س+ ب})^{\text{ن+١}}}{\text{ن +١}}$ + جـ

---

٢ **أثبت قانون الأجزاء ؟**

ق. دهـ + هـ. دق = (ق.هـ)َ

$\int$ ق. دهـ + $\int$ هـ. دق = $\int$ (ق.هـ)َ

$\int$ ق. دهـ + $\int$ هـ. دق = (ق.هـ)

$\int$ ق. دهـ = (ق.هـ) − $\int$ هـ. دق

تمارين متنوعة

جد قيمة كلاً مما يلي:

١ $\int \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٢}}$ دس ؟

ص= ١ + $\frac{١}{س}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}}$
دس = − $س^{٢}$ دص

☑ **الجواب:** $\int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٥}$ دس = $\int \frac{١}{س^{٢}} \left(١+\frac{١}{س}\right)^{٥}$ دس

= $\int \frac{١}{س^{٢}}$ $ص^{٥}$ × − $س^{٢}$ دص

= − $\int ص^{٥}$ دص = − $\frac{ص^{٦}}{٦}$ + جـ = − $\frac{(١+\frac{١}{س})^{٦}}{٦}$ + جـ

---

٢ $\int س^{١٠} \left(س^{٢}+\frac{٢}{س}\right)^{٥}$ دس ؟

ص= $س^{٣}$ + ٢
$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$
دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$
$س^{٣}$ = ص − ٢

☑ **الجواب:** = $\int س^{٥} \times س^{٥} \left(س^{٢}+\frac{٢}{س}\right)^{٥}$ دس

= $\int س^{٥}$ $(س^{٣}+٢)^{٥}$ دس = $\int س^{٥}$ $ص^{٥}$ $\frac{دص}{٣س^{٢}}$ = $\frac{١}{٣}$ $\int س^{٣}$ $ص^{٥}$ دص

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ (ص − ٢) $ص^{٥}$ دص

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ ($ص^{٦}$ − ٢$ص^{٥}$) دص

= $\frac{١}{٣}$ ($\frac{ص^{٧}}{٧}$ − ٢ $\frac{ص^{٦}}{٦}$) + جـ

= $\frac{١}{٣}$ ($\frac{(س^{٢}+٢)^{٧}}{٧}$ − $\frac{(س^{٢}+٢)^{٦}}{٣}$) + جـ

---

٣ **إذا كان:** $\int_{١}^{هـ}$ س ق(س) دس = ٤ ، **جد** $\int_{١}^{٢}$ $هـ^{س}$ ق($\sqrt{هـ^{س}}$) دس ؟

ص= $\sqrt{هـ^{س}}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{٢\sqrt{هـ^{س}}}$
دس = $\frac{٢\sqrt{هـ^{س}}\ دص}{هـ^{س}}$

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{هـ}$ $هـ^{س}$ ق(ص) × $\frac{٢ص}{هـ^{س}}$ دس = ٢ $\int_{١}^{هـ}$ ص ق(ص) دص

= ٢ × ٤ = ٨

---

٤ **إذا كان:** $\int_{١}^{١}$ ق(س) دس = − ٥ ، **جد** $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا٢س ق(جا٢س) دس ؟

ص= جا٢س
$\frac{دص}{دس}$ = ٢جتا٢س
دس = $\frac{دص}{٢ جتا٢س}$
س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇦ ص = ٠
س = $\frac{\pi}{٤}$ ⇦ ص = ١

☑ **الجواب:** $\int_{١}^{١}$ جتا٢س ق(ص) $\frac{دص}{٢جتا٢س}$ = $\frac{١}{٢}$ $\int_{١}^{١}$ ق(ص) دص

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ = ٢,٥

٥ **إذا كان:** ق(١)=٨، ق(٢)=٦، $\int_{1}^{2}$ ق(س) دس=٤، **جد** $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ٢س قَ(٢س) دس؟

ق=٢س ⇦ دق=٢ دس
دهـ = قَ(٢س) دس ⇦ هـ= ق(٢س) / ٢

الجواب: = س ق(٢س) $\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$ − $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ق(٢س) دس

$= (١ \times ق(٢) - \times \frac{١}{٢} ق(١)) - \int_{١}^{٢} \frac{١}{٢}$ ق(ص) دص

$= (١ \times ٦ - \frac{١}{٢} \times ٨) - ٤ \times \frac{١}{٢}$

= ٦ − ٤ −٢ = صفر

ص= ٢س
دص/دس = ٢
دس = دص/٢

---

٦ **إذا كان:** $\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس=٤، ق(٥)=٣، ق(−١)=٤ ، **جد** $\int_{٢}^{-١}$ س قَ(٣−٢س) دس ؟

الجواب: ق= س ⇦ دق=١ دس

دهـ = قَ(٣−٢س) دس ⇦ هـ= ق(٣ − ٢س) / −٢

$= - س \frac{ق(٣ - ٢س)}{٢} \Big|_{٢}^{-١} - \int_{٢}^{-١} \frac{-١}{٢}$ ق(٣−٢س) دس

$= \frac{ق(٥)}{٢} + \frac{٢ق(-١)}{٢} + \frac{١}{٢} \int_{-١}^{١}$ ق(ص) $\frac{دص}{-٢}$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{٨}{٢} - \frac{١}{٤} \times ٤ = \frac{١١}{٢} - ١ = \frac{٩}{٢} = ٤,٥$

ص=٣−٢س
دص/دس = −٢
دس = دص/−٢
س=−١ ⇦ ص=٥
س=٢ ⇦ ص=−١

ملاحظة ١ جتاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ (جتا(أ+ب)+ جتا(أ−ب))

سؤال: **جد** : $\int$ جتا٣س جتا٥س دس ؟

الجواب: $\int$ جتا٣س جتا٥س دس = $\int \frac{١}{٢}$ (جتا٨س + جتا٢س) دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{جا٨س}{٨} + \frac{جا٢س}{٢}) +$ جـ

ملاحظة ٢ جاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ (جا(أ+ب)+ جا(أ−ب))

سؤال: **جد** : $\int$ جا٣س جا٥س دس ؟

الجواب: $\int$ جا٣س جا٥س دس = $\int \frac{١}{٢}$ (جا٨س+ جا−٢س) دس

$= \int \frac{١}{٢}$ (جا٨س− جا٢س) دس

$= \frac{١}{٢} (\frac{- جتا٨س}{٨} + \frac{جتا٢س}{٢}) +$ جـ

ملاحظة ٣ جاأ جاب = $\frac{١}{٢}$ (جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب))

سؤال: جد: $\int$ جا٣س جا٥س دس ؟

☑ **الجواب:** $\int$ جا٣س جا٥س دس = $\int \frac{١}{٢}$ (جتا٢س− جتا٨س) دس = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ − $\frac{\text{جا٨س}}{٨}$) + جـ

تكامل الاقترانات الكسرية

كما ذكرنا في السابق أن في الكسور، المقام يرفع إلى البسط مع تغيير القوة إلا إذا كانت القوة للمقام (١)، فنبقي المقدار كسراً، وفي هذه الحالة هناك عدة طرق:

١ إذا كان المقام خطي من الدرجة الأولى، فالتكامل لوغاريتمي مباشرة، كما يلي:

$\int \frac{١}{س}$ دس = لوهـ |س| + جـ

$\int \frac{١}{أ\,س + ب}$ دس = $\frac{\text{لوهـ}\,|أ\,س+ب|}{أ}$ + جـ

٢ إذا كان المقام تربيعي، يحلل إلى عوامل مختلفة، عند ذلك نعتمد على الكسور الجزئية.

٣ إذا كان المقام تربيعي، يحلل إلى عوامل متشابهة ⇐ ندمج.

٤ إذا كان المقام من غير الحالات التي ذكرت سابقاً، نعتمد عادةً على التعويض بحيث نفرض (ص) تساوي المقام دائماً.

ملاحظة في بعض المسائل يكون للبسط درجة تزيد أو تساوي درجة المقام، عندها يجب أن نقسم **قسمة طويلة.**

جد قيمة كلاً مما يلي:

١ $\int$ ($\frac{٥}{س^{٦}}$ − $\frac{٣}{س}$) دس ؟

☑ **الجواب:** $\int$ (٥س$^{-٦}$ − $\frac{٣}{س}$) دس = $\frac{٥س^{-٥}}{-٥}$ − ٣ لوهـ |س| + جـ

---

٢ $\int \frac{٢}{(٤س+١)^{٦}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $\int$ (٤س+١)$^{-٦}$ دس = $\frac{٢(٤س+١)^{-٥}}{-٥ \times ٤}$ + جـ

---

٣ $\int \frac{٢}{٤س+١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $\frac{٢\ \text{لوهـ}\,|٤س+١|}{٤}$ + جـ

= $\frac{\text{لوهـ}\,|٤س+١|}{٢}$ + جـ

٤ $\int \left(\frac{1}{\sqrt{٤-٣س}} - \frac{٢}{٢-٤س} \right)$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \left((٤-٣س)^{-\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٢-٤س} \right)$ دس

$= \frac{(٤-٣س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times -٣} - \frac{٢ \text{ لوهـ}|٢-٤س|}{-٤} + $ جـ

$= \frac{-٢}{٣}\sqrt{(٤-٣س)} + \frac{١}{٢}$ لوهـ(٢-٤س) + جـ

---

٥ $\int \frac{٥}{س^{٢}-٤}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{٥}{(س-٢)(س+٢)}$ دس

$= \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س-٢}$ دس $- \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س+٢}$ دس

$= \frac{٥}{٤}$ لوهـ(س-٢) $- \frac{٥}{٤}$ لوهـ(س+٢) + جـ

$\frac{٥}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$

أ(س+٢)+ ب(س-٢)= ٥

نجد(أ) ⇦ نضع س=٢ ⇦ ٤أ=٥ ⇦ أ= $\frac{٥}{٤}$

نجد(ب) ⇦ نضع س=-٢ ⇦ -٤ب=٥ ⇦ ب= $\frac{-٥}{٤}$

---

٦ $\int \frac{٦س^{٢}}{س^{٣}+١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{٦س^{٢}}{ص} \times \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \int \frac{٢}{ص}$ دص = ٢لوهـ(ص) + جـ = ٢لوهـ$(س^{٣}+١)$ + جـ

ص= $س^{٣}+١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$

دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

---

٧ $\int \frac{٨س^{٣}}{س^{٤}-١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{٨س^{٣}}{ص} \times \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$= \int \frac{٢}{ص}$ دص = ٢لوهـ(ص) + جـ = ٢لوهـ$(س^{٤}-١)$ + جـ

ص= $س^{٤}-١$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$

دس = $\frac{دص}{٤س^{٣}}$

---

٨ $\int \left(\sqrt{\frac{١}{٥-٢س}} + \frac{١}{٥-٢س} \right)$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \left((٥-٢س)^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٥-٢س} \right)$ دس

$= \frac{(٥-٢س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times -٢} + \text{لوهـ} \frac{|٥-٢س|}{-٢} + $ جـ

$= -\sqrt{(٥-٢س)} - \frac{١}{٢}$ لوهـ$|٥-٢س|$ + جـ

٩ $\int \frac{س^{٣}+٥س-٣}{س^{٢}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int (س^{٣}+٥س-٣)(س^{-٢})$ دس

$= \int (س+٥س^{-١}-٣س^{-٢})$ دس

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥لو_{هـ}(س) - \frac{٣س^{-١}}{-١} + جـ = \frac{س^{٢}}{٢} + ٥لو_{هـ}(س) + \frac{٣}{س} + جـ$

---

١٠ $\int \frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}-س}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int (١ + \frac{س+٣}{س^{٢}-س})$ دس

$= \int (١ + \frac{-٣}{س} + \frac{٤}{س-١})$ دس

$= س - ٣لو_{هـ}|س| + ٤لو_{هـ}|س-١| + جـ$

١	
$س^{٢}+٣$	$س^{٢}-س$
$-س^{٢}\pm س$	
$س+٣$	

$\frac{س+٣}{س^{٢}-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

أ(س−١)+ ب(س)= س+٣

نجد(أ) ⇦ نضع س=٠ ⇦ ٣=−أ ⇦ أ= −٣

نجد(ب) ⇦ نضع س=١ ⇦ ١+٣=ب ⇦ ب=٤

---

١١ $\int \frac{٢س+١}{س^{٢}+س+٥}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

---

١٢ $\int \frac{١}{س^{٢}+٤س+٣}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

---

١٣ $\int \frac{١}{س^{٢}+٢س+١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

١٤ $\int \frac{\sqrt{س^٤+٦س^٢+٩}}{س^٢-س}$ دس ؟

الجواب: $= \int \frac{\sqrt{(س^٢+٣)^٢}}{س^٢-س}$ دس

$= \int \frac{|س^٢+٣|}{س^٢-س}$ دس $= \int \frac{س^٢+٣}{س^٢-س}$ دس

$= \int (١+\frac{س+٣}{س^٢-س})$ دس

$= \int (١+\frac{-٣}{س}+\frac{٤}{س-١})$ دس

$= س - ٣$لوهـ$|س| + ٤$لوهـ$|س-١| +$ جـ

$$\frac{س+٣}{س^٢-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$$

أ(س−١)+ ب(س)= س+٣

نجد(أ) ⇦ نضع س=٠ ⇦ ٣=−أ ⇦ أ= −٣

نجد(ب) ⇦ نضع س=١ ⇦ ١+٣=ب ⇦ ب=٤

١
س^٢+٣ | س^٢ − س
− س^٢ ± س
س + ٣

---

١٥ $\int$ ظا٢س دس ؟

الجواب: $= \int \frac{جا٢س}{جتا٢س}$ دس

$= \int \frac{\cancel{جا٢س}}{ص} \times \frac{دص}{-٢\cancel{جا٢س}}$

$= \frac{-١}{٢} \int \frac{١}{ص}$ دص $= \frac{-١}{٢}$لوهـ(ص) + جـ $= \frac{-١}{٢}$لوهـ(جتا٢س) + جـ

ص= جتا٢س

$\frac{دص}{دس} = -٢جا٢س$

$دس = \frac{دص}{-٢جا٢س}$

---

١٦ $\int$ ظتا٤س دس ؟

الجواب: $= \int \frac{جتا٤س}{جا٤س}$ دس

$= \int \frac{\cancel{جتا٤س}}{ص} \times \frac{دص}{٤\ \cancel{جتا٤س}}$

$= \frac{١}{٤} \int \frac{١}{ص}$ دص

$= \frac{١}{٤}$لوهـ(ص) + جـ $= \frac{١}{٤}$لوهـ(جا٤س) + جـ

ص= جا٤س

$\frac{دص}{دس} = ٤جتا٤س$

$دس = \frac{دص}{٤جتا٤س}$

---

١٧ $\int \frac{١+ظا^٢س}{ظا\ س}$ دس ؟

الجواب: $= \int \frac{قا^٢س}{ظا\ س}$ دس

$= \int \frac{\cancel{قا^٢س}}{ص} \times \frac{دص}{\cancel{قا^٢س}}$

$= \int \frac{١}{ص}$ دص

$=$ لوهـ(ص) + جـ $=$ لوهـ(ظاس) + جـ

ص= ظاس

$\frac{دص}{دس} = قا^٢س$

$دس = \frac{دص}{قا^٢س}$

الأستاذ وسام القاضي

١٨ $\int \frac{\text{جا س}}{١ - \text{جتا س}}$ دس ؟

الجواب: $= \int \frac{\text{جا س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{جا س}} = \int \frac{١}{\text{ص}}$ دص

$= \text{لو}_{هـ} |\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{هـ} |١ - \text{جتا س}| + \text{جـ}$

ص = ١ − جتا س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جا س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جا س}}$

---

١٩ $\int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٤}\text{س}}$ ؟

الجواب: $= \int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}\,(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}$

$= \int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{جا}^{٢}\text{س}} = \int \frac{\text{دس}}{(\text{جتا س جا س})^{٢}}$

$= \int \frac{\text{دس}}{(\frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س})^{٢}} = \int \frac{\text{دس}}{\frac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}٢\text{س}}$

$= ٤ \int \text{قتا}^{٢}٢\text{س}\ \text{دس} = -٤\,\frac{\text{ظتا}٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

---

٢٠ $\int \frac{١ - \text{جا}٢\text{س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ دس ؟

الجواب: $= \int \frac{(\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س}) - ٢\,\text{جا س جتا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ دس

$= \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{جا س جتا س}}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ دس $= \int \frac{(\text{جا س} - \text{جتا س}) \times (\text{جا س} - \text{جتا س})}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$ دس

$= -\text{جتا س} - \text{جا س} + \text{جـ}$

---

٢١ $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}$ دس ؟

الجواب: $= \int \text{ظا س} \times \text{ظا}^{٢}\text{س}$ دس $= \int \text{ظا س}\,(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)$ دس

$= \int \text{ظا س قا}^{٢}\text{س}$ دس $- \int \text{ظا س}$ دس

$= \int \text{ظا س قا}^{٢}\text{س}$ دس $- \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ دس

$= \int \text{ص}_{١}\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\frac{\text{دص}_{١}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} - \int \frac{\text{جا س}}{\text{ص}_{٢}}\,\frac{\text{دص}_{٢}}{-\text{جا س}}$

$= \int \text{ص}_{١}\ \text{دص}_{١} + \int \frac{١}{\text{ص}_{٢}}\ \text{دص}_{٢}$

$= \frac{\text{ص}_{١}^{٢}}{٢} + \text{لو}_{هـ}(\text{ص}_{٢}) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} + \text{لو}_{هـ}(\text{جتا س}) + \text{جـ}$

ص$_{١}$ = ظا س

$\frac{\text{دص}_{١}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}_{١}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

ص$_{٢}$ = جتا س

$\frac{\text{دص}_{٢}}{\text{دس}} = -\text{جا س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}_{٢}}{-\text{جا س}}$

٢٢ $\int \frac{\sqrt{س}}{س-٤}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٢٣ $\int \frac{١}{هـ^{س}+١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{١}{ص+١} \times \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{ص(ص+١)}$ دص

$= \int \frac{١}{ص}$ دص $- \int \frac{١}{ص+١}$ دص

$=$ لوهـ(ص) $-$ لوهـ(ص+١) $+$ جـ

$=$ لوهـ($هـ^{س}$) $-$ لوهـ($هـ^{س}+١$) $+$ جـ

ص $= هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

$دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$\frac{١}{ص(ص+١)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{ص+١}$

أ(ص+١)+ ب(ص)= ١

نجد(أ) ⇦ نضع ص= ٠ ⇦ أ= ١

نجد(ب) ⇦ نضع ص=−١ ⇦ ب=−١

---

٢٤ $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س}+٢هـ^{س}+١}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{هـ^{س}}{ص^{٢}+٢ص+١} \times \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{(ص+١)(ص+١)}$ دص

$= \int \frac{١}{(ص+١)^{٢}}$ دص $= \int (ص+١)^{-٢}$ دص

$= \frac{(ص+١)^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-١}{(ص+١)} + جـ = \frac{-١}{هـ^{س}+١} + جـ$

ص $= هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

$دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

---

٢٥ $\int \frac{٨}{س^{٣}-س}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{٨}{س(س^{٢}-١)}$ دس

$= \int \frac{٨}{س(س-١)(س+١)}$ دس

$= \int \frac{-٨}{س}$ دس $+ \int \frac{٤}{س-١}$ دس $+ \int \frac{٤}{س+١}$ دس

$=$ −٨ لوهـ(س) $+$ ٤ لوهـ(س−١) $+$ ٤ لوهـ(س+١) $+$ جـ

$\frac{٨}{س(س-١)(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} + \frac{جـ}{س+١}$

أ(س−١)(س+١)+ ب(س)(س+١)+جـ(س)(س−١)=٨

نجد(أ) ⇦ نضع س= ٠ ⇦ أ= −٨

نجد(ب) ⇦ نضع س= ١ ⇦ ب= ٤

نجد(جـ) ⇦ نضع س=−١ ⇦ جـ= ٤

فكر هنالك حل آخر

٢٦ $\int \frac{1}{س^{٨}-س}$ دس ؟

الجواب: $\int \frac{1}{س^{٨}(١-س^{-٧})}$ دس $= \int \frac{س^{-٨}}{١-س^{-٧}}$ دس

$= \int \frac{\cancel{س^{-٨}}}{ص} \frac{دص}{٧\cancel{س^{-٨}}}$

$= \frac{١}{٧} \int \frac{١}{ص}$ دص

$= \frac{١}{٧}$ لوهـ|ص| + جـ $= \frac{١}{٧}$ لوهـ|١−س$^{-٧}$| + جـ

ص= ١ − س$^{-٧}$

$\frac{دص}{دس} = ٧ س^{-٨}$

دس= $\frac{دص}{٧س^{-٨}}$

---

٢٧ $\int \frac{٦}{١+\sqrt{س}}$ دس ؟

الجواب: $= \int \frac{٦}{١+ص} ٢\sqrt{س}$ دص

$= \int \frac{٦}{١+ص} ٢ص$ دص

$= \int \frac{١٢ص}{١+ص}$ دص

$= \int ١٢$ دص − $\int \frac{١٢}{١+ص}$ دص

$= ١٢ص - ١٢$ لوهـ(ص+١)+جـ $= ١٢\sqrt{س} - ١٢$ لوهـ($\sqrt{س}$ +١) + جـ

ص= $\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

دس= $٢\sqrt{س}$ دص

	١٢
١٢ص	ص+١
∓١٢ص∓١٢	
−١٢	

---

٢٨ $\int \frac{٢}{س-\sqrt{س}}$ دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٢٩ $\int \frac{١}{١-هـ^{س}}$ دس ؟

الجواب: .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

٣٠ $\int \sqrt{١ + هـ^{س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٣١ $\int \frac{\text{جتا}^{٢}٢س}{\text{جا}^{٢}س \ \text{جتا}^{٢}٢س}$ دس ؟

$\text{جا}^{٢}س \ \text{جتا}^{٢}س = (\text{جاس جتاس})^{٢}$

$\text{جا}٢س = ٢ \ \text{جاس جتاس}$

$\text{جاس جتاس} = \frac{١}{٢} \ \text{جا}٢س$

☑ **الجواب:** $= \int \frac{\text{جتا}٢س}{(\frac{١}{٢} \ \text{جا}٢س)^{٢}}$ دس $= \int \frac{\text{جتا}٢س}{\frac{١}{٤} \ \text{جا}^{٢}٢س}$ دس

$= \int \frac{٤ \times \text{جتا}٢س}{\text{جا}٢س \times \text{جا}٢س}$ دس

$= \int ٤ \ \text{ظتا}٢س \times \text{قتا}٢س$ دس

$= \frac{-٤ \ \text{قتا}٢س}{٢} + جـ$

$= -٢ \ \text{قتا}٢س + جـ$

---

٣٢ $\int \frac{\text{جتا}^{٣}س - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}س}$ دس ؟

☑ **الجواب:** $= \int \frac{\text{جتا}^{٣}س - ٥}{\text{جتا}^{٢}س}$ دس $= \int \frac{\text{جتا}^{٣}س}{\text{جتا}^{٢}س} - \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}س}$ دس

$= \int \text{جتاس} - ٥ \ \text{قا}^{٢}س$ دس

$= \int \text{جتاس}$ دس $- \int ٥ \ \text{قا}^{٢}س$ دس $= \text{جاس} - ٥ \ \text{ظاس} + جـ$

---

٣٣ $\int \frac{١ - \text{جا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}\frac{س}{٢} \ \text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}$ دس ؟

$\text{جا}٢س = ٢ \ \text{جاس جتاس}$

$\text{جاس} = ٢ \ \text{جا}\frac{س}{٢} \ \text{جتا}\frac{س}{٢}$

$\frac{١}{٢} \ \text{جاس} = \text{جا}\frac{س}{٢} \ \text{جتا}\frac{س}{٢}$

$(\text{جتا}\frac{س}{٢} \ \text{جا}\frac{س}{٢})^{٢} = (\frac{١}{٢} \ \text{جاس})^{٢}$

☑ **الجواب:** $= \int \frac{\text{جتا}^{٢}س}{(\frac{١}{٢} \ \text{جاس})^{٢}}$ دس $= \int \frac{٤ \ \text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}^{٢}س}$ دس

$= \int ٤ \ \text{ظتا}^{٢}س$ دس

$= \int ٤ (\text{قتا}^{٢}س - ١)$ دس $= ٤ (- \text{ظتاس} - س) + جـ$

ص = س^{٢} + ١
$\frac{دص}{دس}$ = ٢س
دس = $\frac{دص}{٢س}$

٣٤ $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** = $\int$ س (س^{٢} + ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ دس

= $\int$ س (ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{دص}{٢س}$

= $\frac{١}{٢}$ $\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{ص}$ = $\sqrt{س^{٢}+١}$ $\Big|_{٠}^{\sqrt{٨}}$ = ٣ − ١ = ٢

---

٣٥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس\ جتاس}{\sqrt{١+جا^{٢}س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٣٦ $\int$ س قا(١ − ٢س^{٢}) ظا(١ − ٢س^{٢}) دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٣٧ $\int$ س^{٢} $\sqrt[٣]{س^{٧} - س^{٣}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

٣٨ $\int_{1}^{2} \sqrt[3]{٢س - ٣}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

---

٣٩ $\int \frac{س - ١}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٣}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

---

٤٠ $\int \frac{١}{\sqrt{س}\,(٢ + \sqrt{س})}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٤١ $\int \frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س\sqrt[٣]{س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٤٢ $\int (س - ١)^{٣}$ جتا$(س^{٢} - ٢س + ٣)$ دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

الأستاذ وسام القاضي

ملاحظات في التكاملات اللوغارتمية

ملاحظة ١ من المعروف لدينا أن اللوغاريتم لا يكامل مباشرة، ولكننا نعرف مشتقته، لذلك نبادر إلى التعويض بحيث نضع (ص = اللوغاريتم)

ملاحظة ٢ في بعض الحالات تفشل طريقة التعويض لعدم وجود اختصار، عندها نلجأ إلى الأجزاء بحيث (ق=اللوغاريتم) وذلك كي نشتقه.

جد قيمة كلاً مما يلي:

١ $\int \frac{\text{لوهـ س}}{\text{س}}$ دس ؟

ص= لوهـ س
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}$
دس= س دص

☑ **الجواب:** $= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}} \cancel{\text{س}}$ دص

$= \int$ ص دص $= \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \frac{(\text{لوهـ س})^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

---

٢ $\int \frac{\text{جتا}(\text{لوهـ س})}{\text{س}}$ دس ؟

ص= لوهـ س
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}$
دس= س دص

☑ **الجواب:** $= \int \frac{\text{جتاص}}{\cancel{\text{س}}} \cancel{\text{س}}$ دص

$= \int$ جتاص دص = جاص+ جـ = جا(لوهـ س)+ جـ

---

٣ $\int \frac{١}{\text{س لوهـ س}}$ دس ؟

ص= لوهـ س
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}$
دس= س دص

☑ **الجواب:** $= \int \frac{١}{\cancel{\text{س}}\text{ص}} \cancel{\text{س}}$ دص

$= \int \frac{١}{\text{ص}}$ دص = لوهـ(ص) + جـ = لوهـ(لوهـ س)+ جـ

---

٤ $\int$ س لوهـ س دس ؟

ص= لوهـ س ⇦ س= هـ$^{\text{ص}}$
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}$
دس= س دص

ق= ص ⇦ دق=١ دص
دهـ = هـ$^{٢\text{ص}}$ دص ⇦ هـ= $\frac{\text{هـ}^{٢\text{ص}}}{٢}$

فكر هنالك حل آخر

☑ **الجواب:** $= \int$ س ص س دص

$= \int \text{س}^{٢}$ ص دص

$= \int$ ص هـ$^{٢\text{ص}}$ دص

$= \frac{١}{٢}$ص هـ$^{٢\text{ص}} - \int \frac{١}{٢}$هـ$^{٢\text{ص}}$ دص

$= \frac{١}{٢}$ص هـ$^{٢\text{ص}} - \frac{١}{٤}$هـ$^{٢\text{ص}}$ + جـ

$= \frac{١}{٢}$(لوهـ س)(هـ$^{٢\text{لوهـ س}}$) $- \frac{١}{٤}$(هـ$^{٢\text{لوهـ س}}$) + جـ

٥ $\int$ لوهـ س دس ؟

ق= لوهـ س ⇦ دق= $\frac{١}{س}$ دس
دهـ = دس ⇦ هـ= س

☑ **الجواب:** = س لوهـ س − $\int$ س × $\frac{١}{س}$ دس

= س لوهـ س − $\int$ ١ دس

= س لوهـ س − س + جـ

---

٦ $\int$ جا(لوهـ س) دس ؟

☑ **الجواب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

٧ $\int$ س هـ$^{س+لوهـ س}$ دس ؟

ق= س^{٢} ⇦ دق= ٢س دس
دهـ = هـ^{س} دس ⇦ هـ= هـ^{س}

☑ **الجواب:** = $\int$ س^{٢} هـ^{س} دس

= س^{٢} هـ^{س} − $\int$ ٢س هـ^{س} دس

ق= ٢س ⇦ دق= ٢ دس
دهـ = هـ^{س} دس ⇦ هـ= هـ^{س}

= س^{٢} هـ^{س} − (٢س هـ^{س} − $\int$ ٢هـ^{س} دس)

= س^{٢} هـ^{س} − (٢س هـ^{س} − ٢هـ^{س}) + جـ

= س^{٢} هـ^{س} − ٢س هـ^{س} + ٢هـ^{س} + جـ

---

٨ **إذا كان ق(س) يمر بـ** (١، ٣) ، (٥، ٩)، **وكان** $\int_{١}^{٢}$ ق(س)=٧ ، **فما قيمة كل مما يلي:**

(١) $\int_{١}^{٢}$ ٨س ق(س^{٢}+١) دس ؟ (٢) $\int_{١}^{٥}$ س قَ(س) دس ؟

☑ **الجواب:**

ص= س^{٢}+١
$\frac{دص}{دس}$ = ٢س
دس= $\frac{دص}{٢س}$

(١) $\int_{١}^{٢}$ ٨س ق(س^{٢}+١) دس = $\int_{١}^{٢}$ ~~٨س~~ ق(ص) $\frac{دص}{~~٢س~~}$

= $\int_{١}^{٢}$ ٤ق(ص) دص = ٤ × $\int_{١}^{٢}$ ق(ص) دص = ٤×٧=٢٨

ق= س ⇦ دق= دس
دهـ = قَ(س) دس ⇦ هـ= ق(س)

(٢) $\int_{١}^{٥}$ س قَ(س) دس = س ق(س) $\Big|_{١}^{٥}$ − $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس

= ٥ق(٥)− ١ق(١)− ٧

= ٥×٩− ١×٣ − ٧ = ٤٥ − ١٠ = ٣٥

❁ المعادلات التفاضلية ❁

تحل المعادلة التفاضلية بمكاملة الطرفين، شريطة فصل الرموز.

① الميل = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$	② السرعة = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$	③ التسارع = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

ملاحظة ❁إذا وردت كلمة معدل التغير ⇐ هي المشتقة بالنسبة للزمن

حل المعادلات التفاضلية التالية :

١ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \sqrt{\text{س}+١}\ \text{ص}^{٥} = \text{صفر}$ ؟

☑ **الجواب:** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س}+١}\ \text{ص}^{٥}$

$\text{دص} = \sqrt{\text{س}+١}\ \text{ص}^{٥}\ \text{دس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٥}} = \sqrt{\text{س}+١}\ \text{دس}$

$\int (\text{ص})^{-٥}\ \text{دص} = \int (\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$\frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} = \frac{(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$ ⇐ $\frac{-٤}{\text{ص}^{٤}} = \frac{٢}{٣}\sqrt{(\text{س}+١)^{٣}} + \text{جـ}$

---

٢ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س} + \text{جا}٢\text{س}$ ؟

☑ **الجواب:** $\int \text{دص} = \int (٦\text{س} + \text{جا}٢\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٣\text{س}^{٢} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

---

٣ س ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاص}$ ؟

☑ **الجواب:** $\frac{\text{س ص}}{\text{س قاص}}\ \text{دص} = \frac{\text{قاص}}{\text{س قاص}}\ \text{دس}$

$\int \text{ص جتاص دص} = \int \frac{١}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص جاص} - \int \text{جاص دص} = \int \frac{١}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص جاص} + \text{جتاص دص} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

ق= ص ⇦ دق= ١ دص

دهـ = جتاص دص ⇦ هـ= جاص

٤ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^{٢}}{ص}$ ؟

☑ **الجواب:** $\int ص\ دص = \int ٣س^{٢}\ دس$

$\frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{٣س^{٣}}{٣} + جـ$

$\frac{١}{٢}ص^{٢} = س^{٣} + جـ$

---

٥ $٢جا^{٢}س\ دص + ص^{٢}\ دس = ٢\ دص$ ؟

☑ **الجواب:** $ص^{٢}\ دس = ٢\ دص - ٢جا^{٢}س\ دص$

$\frac{ص^{٢}\ دس}{(٢ - ٢جا^{٢}س) \times ص^{٢}} = \frac{(٢ - ٢جا^{٢}س) \times دص}{(٢ - ٢جا^{٢}س) \times ص^{٢}}$

$\frac{دس}{٢(١ - جا^{٢}س)} = ص^{-٢}\ دص$

$\frac{دس}{٢\ جتا^{٢}س} = ص^{-٢}\ دص$

$\int \frac{١}{٢}\ قا^{٢}س\ دس = \int ص^{-٢}\ دص$

$\frac{١}{٢}ظاس = \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ$

$\frac{١}{٢}ظاس = \frac{-١}{ص} + جـ$

---

٦ $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، حيث أن: س> ٠ ، ص> ٠ ؟

☑ **الجواب:** $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{ص^{\frac{١}{٢}}}$

$ص^{\frac{١}{٢}}\ دص = س^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$\frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$ ⇚ $\frac{٢}{٣}\sqrt{ص^{٣}} = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + جـ$

---

٧ $\sqrt{س}\ دص = \sqrt[٣]{ص}\ دس$ ، **جد حل المعادلة عند النقطة** (١ ، ١) ؟

☑ **الجواب:** $\frac{\sqrt{س}\ دص}{\sqrt{س}\ \sqrt[٣]{ص}} = \frac{\sqrt[٣]{ص}\ دس}{\sqrt{س}\ \sqrt[٣]{ص}}$

$\frac{دص}{ص^{\frac{١}{٣}}} = \frac{دس}{س^{\frac{١}{٢}}}$

الأستاذ وسام القاضي

$$\int ص^{-\frac{1}{3}}\ دص = \int س^{-\frac{1}{2}}\ دس$$

$$\frac{ص^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{س^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + جـ$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{ص^2} = 2\sqrt{س} + جـ \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

نجد قيمة (جـ) بتعويض النقطة (١، ١) في المعادلة (*)

$$\frac{3}{2} = 2 + جـ \Leftarrow \frac{3}{2} - 2 = جـ \Leftarrow جـ = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{ص^2} = 2\sqrt{س} + \frac{-1}{2}$$

تمرين(١): **منحنى ميله ($2س هـ^{ص}$)، ما معادلته بحيث يمر بالنقطة (٢، ٠) ؟**

☑ **الجواب:** $\frac{دص}{دس} = 2س هـ^{ص}$

$$\frac{دص}{هـ^{ص}} = \frac{2س هـ^{ص}\ دس}{هـ^{ص}}$$

$$\int هـ^{-ص}\ دص = \int 2س\ دس$$

$$-هـ^{-ص} = س^2 + جـ \quad \ldots\ldots (*)$$

بتعويض النقطة (٢، ٠) في المعادلة (*) ينتج أن:

$$-1 = 4 + جـ \Leftarrow جـ = -5$$

$$\therefore -هـ^{-ص} = س^2 - 5$$

تمرين(٢): **يتحرك جسم بحيث سرعته تساوي (٨م/ ث)، ويقطع الجسم مسافة (٢٥م)، بعد ثانية واحدة، فكم يقطع بعد ثانيتين ؟**

☑ **الجواب:** $\frac{دف}{دن} = 8$

$$\int دف = \int 8\ دن$$

$$ف = 8ن + جـ$$

$$ف(1) = 25 \Leftarrow 25 = 8 + جـ \Leftarrow جـ = 17$$

$$\therefore ف = 8ن + 17$$

$$ف(2) = 8 \times 2 + 17$$

$$= 16 + 17 = 33$$

تمرين(٣): **إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (س،ص) يساوي (٣س^{٢}−٢س)، فجد قاعدة الاقتران (ق)، علماً بأن: ق(٠)= ٣ ؟**

☑ **الجواب:** $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}-٢س$

$ص = \int دص = \int (٣س^{٢}-٢س)\ دس$

$ص = س^{٣}- س^{٢} + جـ$

$ق(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ٠ - ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٣$

$ص = س^{٣}- س^{٢} + ٣$

تمرين(٤): **يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ($ت = \frac{١}{ع}$ ، ع > صفر)، حيث (ت: تسارع الجسم ، ع:سرعة الجسم)، إذا تحرك الجسم من السكون فقطع مسافة مقدارها ($١٠\sqrt{٢}$ م) بعد (٤ ثوان) من حركته، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته ؟**

☑ **الجواب:** تحرك من السكون ع(٠)=٠

$ت = \frac{١}{ع} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{١}{ع}$

$\int ع\ دع = \int ١\ دن$

$\frac{١}{٢}ع^{٢} = ن + جـ$

$٠ = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$\therefore \frac{١}{٢}ع^{٢} = ن \Leftarrow ع^{٢} = ٢ن \Leftarrow ع = \sqrt{٢ن}$ ، $ع = -\sqrt{٢ن}$ لأن ع>٠

$ع = \sqrt{٢ن} \Leftarrow \frac{دف}{دن} = \sqrt{٢ن}$

$\int دف = \int (٢ن)^{\frac{١}{٢}}\ دن$

$ف = \frac{(٢ن)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}\times ٢} + جـ = \frac{١}{٣}\sqrt{(٢ن)^{٣}} + جـ$

$ف(٤) = ١٠\sqrt{٢}$

$١٠\sqrt{٢} = \frac{١}{٣}\sqrt{٨\times٨\times٨} + جـ$

$١٠\sqrt{٢} = \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢} + جـ$

$١٠\sqrt{٢} - \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢} = جـ \Leftarrow جـ = \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

$ف = \frac{١}{٣}\sqrt{(٢ن)^{٣}} + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

ف(١) = $\frac{١}{٣}\sqrt{٨}$ + $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

ف(١) = $\frac{٢}{٣}\sqrt{٢}$ + $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}\sqrt{٢}$ م

تمرين(٥): إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقته عند النقطة (س،ص) يساوي ($\frac{\text{جاس} - \text{قا}^٢\text{س}}{٣\text{ص}^٢}$)، فجد قاعدة العلاقة علماً بأن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤) تقع على منحناها ؟

☑ **الجواب:** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^٢\text{س}}{٣\text{ص}^٢}$

$\int ٣\text{ص}^٢ \text{ دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^٢\text{س}) \text{ دس}$

$\text{ص}^٣ = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$ ..... (*)

بتعويض النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤) في المعادلة (*) ينتج أن:

$٦٤ = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} - ١ + \text{جـ}$ ⇐ $\text{جـ} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + ٦٥$

$\therefore \text{ص}^٣ = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

تمرين(٦): إذا كان: قً(س) = ٦س+ ٢ ، النقطة (١، ٧) نقطة حرجة، فما قيمة ق(٥) ؟

☑ **الجواب:**

قً(س)= ٦س+٢ ، (١، ٧) نقطة حرجة ⇐ ق(١)=٧ ، قَ(١)= صفر

$\int$ قً(س) دس = $\int$ ٦س+٢ دس

قَ(س) = ٣س^٢ + ٢س + جـ

قَ(١)= صفر = ٣(١)^٢ + ٢(١) + جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = -٥}$

$\int$ قَ(س) دس = $\int$ (٣س^٢ + ٢س −٥) دس

ق(س) = س^٣ + س^٢ − ٥س + جـ

ق(١) = ٧ = (١)^٣ + (١)^٢ − ٥(١) + جـ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ١٠}$

⇐ ق(س) = س^٣ + س^٢ − ٥س + ١٠

⇐ ق(٥) = (٥)^٣ + (٥)^٢ − ٥(٥) + ١٠

= ١٢٥+ ٢٥ − ٢٥ + ١٠ = ١٣٥

تمرين (٧): بركة ماء وضع بها (١٠٠) سمكة، ومعدل الزيادة في عدد الأسماك ($\frac{١}{\sqrt{٢ن+١}}$ سمكة/يوم)، ما عدد الأسماك بعد (٢٤) يوم ؟

☑ **الجواب:** $\frac{دع}{دن} = \frac{١}{\sqrt{٢ن+١}}$

$دع = \int (٢ن+١)^{-\frac{١}{٢}}$ دن

$ع = \frac{(٢ن+١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}\times ٢} + جـ = \sqrt{٢ن+١} + جـ$

الآن: عدد الأسماك = ١٠٠ ⇐ ١٠٠ = ١ + جـ ⇐ جـ = ٩٩

$\therefore ع = \sqrt{٢ن+١} + ٩٩$

ع(٢٤) = $\sqrt{٤٩} + ٩٩ = ٧ + ٩٩ = ١٠٦$ سمكات

تمرين (٨): قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها (٦٤ قدم/ث)، على ارتفاع (٨٠ قدم)، جد معادلة الحركة لهذه الكرة، إذا علمت أن تسارع الكرة يساوي (− ٣٢ قدم / ث^{٢}) ؟

☑ **الجواب:** $\frac{دع}{دن} = -٣٢$

$ع = \int -٣٢$ دن $= -٣٢ن + جـ_{١}$

$ع|_{ن=٠} = ٦٤$ ⇐ $جـ_{١} = ٦٤$

$\therefore ع = -٣٢ن + ٦٤$

$ف = \int (-٣٢ن + ٦٤)$ دن $= \frac{-٣٢ن^{٢}}{٢} + ٦٤ن + جـ_{٢} = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ_{٢}$

ف(٠) = ٨٠ ⇐ $جـ_{٢} = ٨٠$

$\therefore ف = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٨٠$

تمارين متنوعة

جد قيمة كلاً مما يلي:

١ $\int \frac{١}{س\sqrt{س^{١٢}+س^{١٦}}}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

٢ ⌠ لوهـ $\left(\frac{س+٢}{س+٣}\right)$ دس ؟

☑ **الجواب:**

٣ ⌠ لوهـ $\frac{هـ^{ظتاس}}{١- جتا^{٢}س}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

٤ ⌠ $هـ^{س+٣هـ^{-س}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

٥ ⌠ $\frac{٦ \text{ جتاس}}{(٢جاس-١)(جاس+١)}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

الأستاذ وسام القاضي

٦ ⌠ $\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(١+\text{س})^{٢}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

---

٧ ⌠ س هـ$^{\text{س}+\text{لو هـ}^{\text{س}}}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

---

٨ ⌠ قاس دس ؟

☑ **الجواب:**

---

٩ ⌠ قتاس دس ؟

☑ **الجواب:**

---

١٠ **إذا كان:** ع$_{\text{ن}}$ = ⌠ ظا$^{\text{ن}}$ دس ، **أثبت أن:** ع$_{\text{ن}}$ = $\frac{١}{\text{ن}-١}$ (ظا$^{\text{ن}-١}$س) − (ع$_{\text{ن}-٢}$) ؟

☑ **الجواب:**

الأستاذ وسام القاضي

١١ **إذا كان** ق(س) **قابلاً للاشتقاق على** (ح) **وكان** ق(٢)=٣ ،

وكان: $\int_{٠}^{٢} س^{ن}$ قَ(س) دس + ن $\int_{٠}^{٢} س^{ن-١}$ ق(س) دس = ٩٦ ، **جـد الثابت** (ن) ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

.....

---

١٢ **إذا كان:** $ق^{ن}(س) = \frac{(-١)^{ن-١}(ن-١)!}{(س+٨)^{ن}}$ ، س > −٨ ،**حيث** $ق^{ن}$(س) **هي المشتقة النونية للاقتران** ق(س)،

فجد قاعدة الاقتران ق(س) ؟

☑ **الجواب:** $قَ(س) = \frac{(-١)^{١-١}(١-١)!}{(س+٨)^{١}}$

$\int$ قَ(س) دس = $\int \frac{١}{س+٨}$ دس

ق(س) = لو$_{هـ}$|س + ٨| + جـ

---

١٣ **جـد معادلة المماس لمنحنى الاقتران :** ص = (س−١) هـ^{س} + ٣ لو$_{هـ}$(س)+٢ ،**عند النقطة** (١، ٢) ؟

☑ **الجواب:** صَ = (س−١)×هـ^{س} + هـ^{س} ×١ + ٣ $\frac{١}{س}$ + صفـر

= (س−١)×هـ^{س} + هـ^{س} + $\frac{٣}{س}$

الميل = م = صفر + هـ + ٣ = (هـ + ٣)

ص − ص$_{١}$ = م (س− س$_{١}$)

ص − ٢ = (هـ+٣) (س− ١)

ص = (هـ+٣) (س− ١)+٢

---

١٤ $\int \frac{١}{س - \sqrt{س} - ٢}$ دس ؟

☑ **الجواب:** .....

.....

.....

.....

.....

١٥ $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٩}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

١٦ $\int \frac{قا^{٢}س}{٥ ظا^{٢}س - ٣ ظاس - ٢}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

١٧ $\int \frac{\sqrt{س - ٢} + ١}{\sqrt{س + ٢} - ١}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

١٨ $\int \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤}$ دس ؟

☑ **الجواب:**

الأستاذ وسام القاضي