المتكامل في الرياضيات

الرياضيات م/٣

الفرع العلمي

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

عبد اللطيف البستنجي

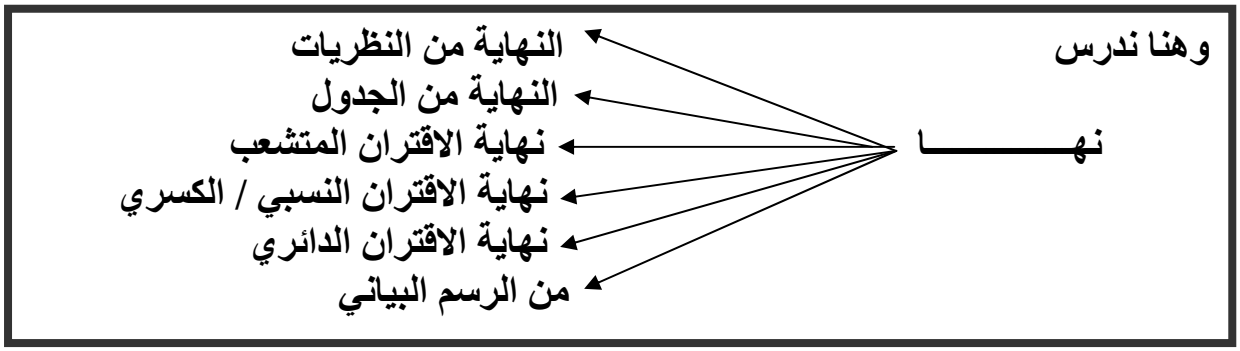
منهاجي
متعة التعليم الهادف

مركز المدينة
٥٦٥١١٩٣
٠٧٩٦٢٠٨٥٨٠
٠٧٨٦٧٤١٠٣٠

النهايات

النهاية : دراسة سلوك اقتران عندما تقترب س من عدد معين
يرمز للنهاية بالرمز نهـــــا ق (س) وتقرأ النهاية عندما تقترب س من العدد أ للاقتران
س ← أ

- **س ← أ : س تقترب من العدد أ**
- **س ← $أ^{+}$: س تقترب من يمين العدد أ**
- **س ← $أ^{-}$: س تقترب من يسار العدد أ**



أولا: النهاية من النظريات الأصل في إيجاد النهاية التعويض المباشر

نظرية (١) : نهاية الثابت = الثابت نفسه

نهـــــا أ = أ ،حيث أ عدد ثابت
س ← أي عدد

جـــــد كلا من النهايات

١) نهـــــا (٧) = ٧ **٢) نهـــــا (- ٢٢) = - ٢٢**
س ← ٣ **س ← ٦**

٣) إذا كانت نهـــــا (ك) = ٥ فان قيمة الثابت ك
س ← ٢

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٥ د) ١٠

نظرية (٢) : نهاية كثير الحدود = تعويض مباشر مكان السينات

نهـــــا (٥ س + ٧) = ٥(٢) + ٧ = ١٠ + ٧ = ١٧
س ← ٢

٢ **جـــــد قيمة كلا من النهايات التالية :**

١) $\lim_{س \to ٣}$ (٢س – ٤)

= ٢(٣) – ٤ = ٢

٢) $\lim_{س \to ٣}$ (٢س^{٢} – ٣)

٣) $\lim_{س \to -١}$ (س^{٢} – ٣س -٢)

٤) $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} – س – ١)^{٢}

٥) $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٢} – س) (٣ س + ٢)

٦) $\lim_{س \to ٣}$ (س^{٢} – ٤)^{٢}(١ – س)

٧) $\lim_{س \to -٢}$((س^{٢} – س)(٢س))^{٢}

٣ **فيما يلي جـــــد قيمة الثابت**

أ) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س +٢ أ) = ١٢

ب) $\lim_{س \to -٣}$(س^{٢} - أ) = ١٠

ت) $\lim_{س \to م}$(س^{٢} + ٢) = ٦

ث) $\lim_{س \to ك}$(س^{٢} +٢س) = صفر

ج) $\lim_{س \to ٢}$ (٣س +٢) = ك

ح) $\lim_{س \to -٢}$(س^{٣} - ٢ أ) = ٢

نظرية (٣) : النهاية توزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة بشرط أن تكون موجودة

٤ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٢}$ ع(س) = ٥ فجد

١) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + ع(س)) = ٣ + ٥ = ٨

٢) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) - ع(س)) = ٣ - ٥ = -٢

٣) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) × ع(س)) = ٣ × ٥ = ١٥

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{ع(س)} = \frac{٣}{٥}$

٥) $\lim_{س \to ٢}$ (ق (س) + ٢س) = ٣ + ٢(٢) = ٧

٦) $\lim_{س \to ٢}$ (س ق (س) + ع (س)) = ٢(٣) + ٥ = ١١

٧) $\lim_{س \to ٢}$ (س^{٢} ق^{٢}(س) + ٣س ع(س)) =

٨) $\lim_{س \to ٢}$ (٢س ق(س) -ع(س)) (س^{٢} +٦) =

٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ س ع^{٢} (س) - ٢}{س ق(س) + ١}$

---

٥ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٥ فجد $\lim_{س \to ٤}$(س^{٢}ق(س)-٢س +٤)

---

٦ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٢ فجد $\lim_{س \to ٣}$(٣س ق^{٢}(س)- س)^{٢}

---

٧ إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٣س}{س - ق(س)} = -١٠$ فإن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) =

أ) ٠ ب) ١ ج) ٣ د) -٣

٨ اذا علمت ان $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٢

وكان $\lim_{س \to ٣}$ (س ق (س)- ك)=١٠

فان قيمة الثابت ك تساوي

أ) ١٦ ب)٤ ج) ١٤ د) -٤

٩ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٣}$ (٢ق(س)+٢س) = ١٤

جد $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س)+ س^{٢} -٢)

١٠ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٤}$ (س ق(س)+٢) = ١٤

جد $\lim_{س \to ٤}$ (س^{٢} ق(س)-٢س +٦)

١١ اذا علمت ان

$\lim_{س \to ٥}$ س^{٢} ق(س) = ١٥٠

جد $\lim_{س \to ٥}$ (٤ق(س)- [$\frac{س}{٢}$ + ٧])

ثانيا: النهاية من الجدول

تكون النهاية موجودة
إذا وفقط إذا
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

في جدول النهاية :السؤال من السينات
الإجابة من الصادات / ق(س)

١٦ بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم ق (س) عندما س ← ١

جـ ـ د نهـ ـ ـ ا ق(س) =
س ← ١

س	١,١	١,٠٥	١,٠٠١		٠,٩٩٩	٠,٩٥	٠,٩
ق (س)	٥,٢	٥,١	٥,٠٠٢		٣,٩٩٨	٣,٩	٣,٨

١٧ - بالاعتماد على الجدول التالي الذي يبين قيم ق (س) عندما س ← ٣

فان نهـ ـ ـ ا ق(س) =
س ← ٣+

أ)-١ ب)٣
ج) ٤ د) ٢

س	٣,١	٣,٠٥	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٥	٠,٩
ق (س)	٤,١	٤,٠٥	٤,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩٥	١,٩

١٨ معتمدا الجدول التالى لقيم س ، ق(س) جـد ما يليه

٥

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

نهـــــا ق(س) نهـــــا ق(س) نهـــــا ق(س)
س ← ٥+ س ← ٥- س ← ٥

١٩ أذا كان

$$ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$$

باستخدام طريقة الجدول جـــد نهـــا ق(س)
س ← ٢

النهاية للجذور : فردي (طرطور) ← موجب عادي

زوجي ← سالب غير موجودة

صفر نفحص الإشارات

٢٠

جـــــــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٩} \sqrt[٣]{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to -٧} \sqrt[٣]{س - ١}$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt[٥]{س - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٧]{٢س - ١٠}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س - ٦}$

٦) $\lim_{س \to -١} \sqrt{س - ٣}$

٧) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٧ - س}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \sqrt[٤]{س + ١}$

٢١

جـــــــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س - ٥}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٢ - س}$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt{(س - ١)^{٤}}$

٤) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to +٣} \sqrt[٤]{س^{٢} - ٩}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} + س - ٦}$

ثالثا: نهاية الاقتران النسبي

أ) حل مباشر ما لم يكن الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

ب) حل غير مباشر وهنا نستخدم واحدة من

- التحليل وإخراج العامل المشترك
- توحيد المقامات
- الضرب بالمرافق (تربيعي ، تكعيبي)
- التوزيع المنتظم
- الاستبدال

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو صفر×غير موجودة

صفر أو غير موجودة ± غير موجودة

الأصل في إيجاد النهاية التعويض المباشر

أ) حل مباشر :

جـــــــد قيمـــــة كلا من النهـــايات الآتيـــــــة :

٢٢

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١}{س - ١}$

$= \frac{(٢)^٢ + ١}{٢ - ١} = \frac{٥}{١} = ٥$

٢) - $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٣}$

٣) - $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٤}{س+١}$

٤) - $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{س+١}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١}$

٦) - $\lim_{س \to ٦} \frac{٣ - ٢ س}{٢س}$

٧) - $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢}{س - ١}$

٨) - $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢}{س + ٢}$

ب) حل غير مباشر :

*** طريقة التحليل أو إخراج عامل مشترك**

⇦ إذا كل الحدود تحتوي على سينات نأخذ (س الأضعف) عامل مشترك

٢٣ جـــــد كلا من :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س}{٧س^{٢} - ٢س} = \frac{٠}{٠}$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{س(٣س + ٥)}{س(٧س - ٢)}$

$= \frac{٣(٠) + ٥}{٧(٠) - ٢} = \frac{٥}{-٢}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س - ٤س^{٣} + ٢س^{٢}}{٧س^{٢} - ٢س}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + س}{٧س^{٥} - ٢س}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س^{٣}}{٧س^{٢} - ٩س^{٣}}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣س^{٢} + ٥س}{س^{٢} - س^{٥}}$

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{١ - ٢س٣}{س - ٤}$ $\quad س^{٢} - ٤س$

٨) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س - ٣}{٧س - ٢١}$

⇦ **الفرق بين مربعين**

$س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ)(س + أ)$

٢٤ **جـــــد كلا من النهايات التالية**

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤} = \div$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}$

$= ٤ + ٤ = ٨$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{س^{٢} - ٦٤}{٣س - ٢٤}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٧} \frac{س^{٢} - ٧س}{٤٩ - س^{٢}}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س + ١)^{٢} - ٩}{٩س - ١٨}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

الفرق أو مجموع مكعبين

$س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ)(س^{٢} + أس + أ^{٢})$

١، ٨، ٢٧، ٦٤ ،،،،،،،،،،

$س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$

٢٥ جـــــد كلا من النهايات التالية ::

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{٢س^{٢} - ٤س}$

٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س + ٤}{٨س^{٣} + ٦٤}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٣} - ١٢٥}$

٥) إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ ، ع(س) = $س^{٢}$ فجـــد

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{ع(س) - ١٢}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{(٢س + ١)^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} - ٣}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{(س + ١)^{٢} - ١٦}{(س - ١)^{٣} - ٨}$

تحليل العبارة التربيعية: أس^{٢} ± ب س ± جـ

٢٦ جـــــد كلا من :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٢س - ٨}{س^{٢} - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٢س}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

٥) $\lim_{س \to -٧} \frac{س^{٢} + ٣س - ٢٨}{س^{٢} - ٤٩}$

٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢} + ٣س - ٢}{٤ - س^{٢}}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٢س}{س^{٤} - ١٦}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٢} - ١)^{١٠}}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٥}}$

٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س^{٢} + س)^{٥}}{س^{٥}}$

١٠) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^{٢} - ١}{٤س - ٤} \right)^{٣}$

⇦ استخدام القسمة الطويلة أو التركيبية

(٢٧) جد كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٢س - ٣}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

	١	٠	٢	٣-
١		١	١	٣
	١	١	٣	٠

$= \lim_{س \to ١} (س^٢ + س + ٣)$

$= (١)^٢ + ١ + ٣$

$= ٥$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + س - ٢}{س^٢ + س - ٢}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٦ - ١}{س^٣ - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٣ - ٣س - ١٠}{س^٣ - ٨}$

٥) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + س^٢ + ١٨}{٢س^٣ - ١٠س + ٢س^٢ + ٦}$

كوكتيل الاسئلة على طريقة التحليل

٢٨ جـــــد كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + ٣س - ١٨}{س + ١}$ = صفر

٢) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - ٤س + ٣}{س^3 - ٢٧}$ = $\frac{٢}{٢٧}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+١)^3 + (س-١)^3}{س^2 - ٢س}$ = -٣

٤) $\lim_{س \to ١} \left[\frac{س^2 - ١}{٢س - ٢} \right]^5$ = ١

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{(س^2 + س - ٢)^5}{(س - ١)^4}$ = صفر

٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^3 - ١٢٨}{س^2 - ٣س - ٤}$ = $\frac{٩٦}{٥}$

٧) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨ س^3 - ١}{س - \frac{١}{٢}}$ = ٦

٨) اذا كان ق(س) = $س^2 - ٢س + ١$

$ع(س) = \frac{٧}{(س - ١)^2}$

فجـــد $\lim_{س \to ١}$ (ق × ع) = ٧

٩) $\lim_{س \to ١} \sqrt{\frac{س^2 - ١}{س - ١}}$ = ٢

١٠) $\lim_{س \to ٢+} \frac{\sqrt{س^2 - ٤}}{\sqrt{س - ٢}}$ = ٢

١١) $\lim_{س \to ١} \frac{(س^3 - ١)^{٢م}}{(س^2 - ٢س + ١)^{م}}$ = ٨١

فجـــد قيمة م = ٢

١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢٥)^{س} - (٥)^{س}}{١ - (٥)^{س}}$ = -١

١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣)^{س+١} - ٣}{(٩)^{س} - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٤)^{س} - ١٧(٢)^{س} + ١٦}{(٤)^{س} - ١}$ = $\frac{-١٥}{٢}$

١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٩)^{س} - ٤(٣)^{س+١} + ٢٧}{(٣)^{س} - ٣}$ = -٦

طريقة توحيد المقامات

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{ج}{د} = \frac{أ \times د \pm ج \times ب}{ب \times د}$$

٢٩ جـــــد كلا من النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^{٢}+١٢}{س^{٣}-٤} - \frac{س+٢}{س-٢} \right)$

-١

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{٢}{٢س+٤}}{س-٤}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٣-س} \right)$

$\frac{-٢}{٩}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{٧}{س^{٣}-٨}}{س-١}$

$\frac{-٤}{٧}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{٩س}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{-٢} - س}{س^{-١} - س}$

$\frac{٣}{٢}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س-١} = \frac{صفر}{صفر}$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س+٣-٢س-٢}{(س-١)(س+١)(س+٣)} = \frac{-١}{٨}$$

٣٠

١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س+٢} - \frac{٤}{٣س+١٠} \right) \frac{١}{٢س^{٢}-٣س-٢}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\frac{١}{س-٣} + \frac{١}{س+٣}}$

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س-٢} - \frac{س+٢}{س-١}}{س-٤}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{س+١} \right) \left(\frac{١}{س-٢} \right)$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{٤}}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{س}{٢س+٤}}{س-٢}$

٨-

طريقة الضرب بالمرافق التربيعي حيث الجذر احد حدين في البسط او المقام مقدمة:

المقدار	المرافق	حاصل ضربهم
$\sqrt{س + أ} - ب$	$\sqrt{س + أ} + ب$	مربع الاول – مربع الثاني $س + أ - ب^{٢}$
$\sqrt{س - أ} - ب$	$\sqrt{س - أ} + ب$	$س - أ - ب^{٢}$
$ب - \sqrt{س + أ}$	$ب + \sqrt{س + أ}$	$ب^{٢} - (س + أ)$

٣١ جـــد قيمة كلا من :

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)} = \frac{١}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س + ١٥} - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ - \sqrt{س + ١}}{\sqrt{س^{٢} + ٧} - ٤}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٣}}{\sqrt{س^{٣} + ٤} - ٢}$

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{٢ - س} - ٢}{س^{٢} - ٤}$

٣٢ جـــــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س^2+3س} - 2}{س^3 - 1}$

٢) $\lim_{س \to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{س+1}} - 1 \right) \left(\frac{1}{س} \right)$

٣) $\lim_{س \to 4} \left(\frac{1}{\sqrt{س^2-3س}} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{س^2-16} \right)$

٤) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{5س+4} - \sqrt{11-2س}}{س - 1}$

٥) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{4+س} - 2}$

٦) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س^2+8} - 3}{س^2 + 7س - 8}$

٧) $\lim_{س \to 1} \frac{5س - \sqrt{س} - 4}{\sqrt{س} - 1}$

طريقة الضرب بالمرافق التكعيبي

مقدمة:

المقدار	المرافق	حاصل ضربهم
$\sqrt[3]{س} - ب$	الاول^{2}(عكس) الأول×الثاني +الثاني^{2}	مكعب الأول (نفس)مكعب الثاني
$\sqrt[3]{س - أ} + ب$		
$ب - \sqrt[3]{س + أ}$		

٣٣

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt[3]{س-١} - ٢}{س - ٩}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt[3]{س+٦} - ٢}$

٣) $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{٢ + \sqrt[3]{س}}$

٤) $\lim_{س \to ١٢٤} \frac{س - ١٢٤}{\sqrt[3]{س+١} - ٥}$

٥) $\lim_{س \to -١} \frac{١}{س+١} \left(\frac{١}{\sqrt[3]{٢س+١}} + ١ \right)$

٦) $\lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{٢ + \sqrt[3]{س} - ٢}$

طريقة التوزيع المنتظم :

٣٤ جـــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to 4} \frac{س^2 + \sqrt{س} - 18}{س - 4}$

٢) $\lim_{س \to 4} \frac{س^2 \sqrt{س} - 32}{س - 4}$

٣) $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - \sqrt[3]{س+6}}{س - 2}$

٤) $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س} + س^2 - 3}{س - 1}$

٥) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 \sqrt{س+2} - 8}{س - 2}$

طريقة الاستبدال :

٣٥ جـــد قيمة كلا من النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س - ١}}{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{س + ١٥} - ٢}{س - ١}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{س - ٢} - ١}{س - ٣}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^{٥} - ٣٢}{س - ١}$ ٨٠

٦) اذا علمت ان

$\lim_{س \to ١}$ ق(٢س+١) = ٨ ، ق(٣)=٦

فان $\lim_{س \to ٣}$ (ق^{٢}(س) +٢س -٧)=

أ) ٦٥ ب) ٦٤ ج) ٦٣ د) ٤٠

٧) اذا علمت ان

$\lim_{س \to ١}$ ق(٢س+١) = ٥ ، ق(٣)=٦

فان $\lim_{س \to ٣}$ (٣ق^{٢}(س) -٢س +١)=

أ) ٧٠ ب) ٥٠ ج) ٣٠ د) ٤٠

الثوابت في الاقتران النسبي

اذا كانت النهاية موجودة

وكان التعويض في المقام يساوي صفر

فان التعويض في البسط يساوي صفر

واذا النهاية غ م فان $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ومقلوبها $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ = صفر

٣٦ جـــــد قيمة الثابت في كلا من :

١) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - أ}{س - ٢} = ١٠$

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} + ب س + ٥}{س^{٢} - ٢س} = ٦$

٣) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٣} - م}{س - ١} = ٢٠$ ، -٧

٤) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + ب س - ٧}{س - ١} = جـ$

٥) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٢} - (٣-٢جـ)س - ٦جـ}{س + ٣} = ١١$

٦) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = ٥$

فجـــــــــد نهـــا $_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} ق(س) - ١٢}{س - ٢}$ ، ٣٢

٧) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow م} \frac{س - ٣}{س^{٢} - س - ٦}$ غير موجوده جد م ، -٢

اسئلة مختلفة على نهاية النسبي

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٣}{س} - \frac{٣}{٥} \right) \left[\frac{١}{س^{٢} - ٢٥} \right]$

٢) $\lim_{س \to ٣} \left(س + \frac{١}{س - ٣} \right) \left(\sqrt{س + ١} - ٢ \right)$

٣) $\lim_{س \to ٠} س \times \sqrt[٣]{١ - \frac{١}{س^{٣}}}$

٤) $\lim_{س \to ٠} س \times \sqrt{\frac{١}{س^{٢}} + ١}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س^{٢}} - ١}{\sqrt[٥]{س^{٣}} - ١}$

٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٩} + \sqrt[٣]{٢س - ٧}}{س - ٤}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - \sqrt{س + ١} - ٧}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^{٣} \sqrt{س} - ٨}{س - ١}$

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{م^{٢} س - ١}{م \sqrt{س} - ١} = ٦$ جد م

١٠) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س^{٢} - ٩} \right) = \frac{١}{٦}$
جد قيمة أ ، ب

١١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + أ س^{٢} - ٣٦}{س - ٣}$ موجودة
جد قيمة أ

١٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٢} + أ س + ب}$ غير موجودة
جد قيمة أ ، ب

١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ٥}{س - ٤} = ٨$
حيث ق(س) كثير حدود فجد
$\lim_{س \to ٤} (٦ ق(س) + س^{٢})$

١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} = ٤$
جد
$\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - س^{٢}}{س - ٣}$

١٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) - ٧}{س - ٥} = ٨$
جد
$\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{ق(س) - ٧}$

عزيزي الطالب الإجابات بعد الحل يجب أن تكون كما يلي

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥			
$\frac{-٣}{٢٥٠}$	$\frac{١}{٤}$	-١	غ م	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٩}{٣٠}$	$\frac{٢٠}{٢٣}$	١٦	٥	أ=١ ب=-٦	١	أ=-٦ ب=٩	٤٦	-٢	١			

نهاية الاقتران المتشعب

عند نقطة التشعب

تكون النهاية موجودة
إذا وفقط إذا
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

لإيجاد النهاية للاقتران المتشعب عند نقطة التشعب نجـــد
اليمين : من قاعدة الأكبر (المفتوحة إلى س)
اليسار: من قاعدة الأصغر (المفتوحة إلى العدد)
ثم نقارن

٣٧ إذا كـــان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \ س < ٣ \\ ٢س - ٣ & ، \ س \geq ٣ \end{cases}$

جـــد نهـــــا ق(س) $_{س \longrightarrow ٣}$

الحل

نهـــــا ٢ س -٣ $_{س \longrightarrow ٣^{+}}$ = ٢(٣) – ٣ = ٣

نهـــــا س^{٢} +٥ $_{س \longrightarrow ٣^{-}}$ = ٩ + ٥ = ١٤

نهـــــا ق(س) غير موجودة لان
نهـــــا ق(س) ≠ نهـــــا ق(س) $_{س \longrightarrow ٣^{+}}$ $_{س \longrightarrow ٣^{-}}$

---

٣٨ إذا كـــان ق(س) = $\begin{cases} س + ٥ & ، \ س \leq ٢ \\ ٢س + س^{٢} - ١ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

جـــد نهـــــا ق(س) $_{س \longrightarrow ٢}$

الحل

نهـــــا (س +٥) $_{س \longrightarrow ٢^{+}}$ = ٢+٥ = ٧

نهـــــا (٢س+ س^{٢} -١) $_{س \longrightarrow ٢^{-}}$ = ٤ +٤- ١ = ٧

نهـــــا ق(س) = نهـــــا ق(س) = ٧ $_{س \longrightarrow ٢^{+}}$ $_{س \longrightarrow ٢^{-}}$

نهـــــا ق(س) = ٧
$_{س \longrightarrow ٢}$

---

٤٠ ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} + ١}{٦س + ٦} & ، \ س \neq -١ \\ ٢ & ، \ س = -١ \end{cases}$

فجد ١) نهـــــا ق(س) $_{س \longrightarrow -١}$

٢)نهـــــا ق(س) $_{س \longrightarrow -٣}$

٤١

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \ س < -١ \\ س - ٣ & ، \ س \geq -١ \end{cases}$$

جـــد نهـــــا ق(س)
س ← -١

٤٢

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢}+١١س-١٢}{\sqrt{س} - ١} & ، س < ١ \\ \sqrt{س - ١} & ، س > ١ \end{cases}$$

جـــد نهـــــا ق(س)
س ← ١

٤٣

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - ٢س^{٢} & ، \ س < -٢ \\ ٢س - ١ & ، \ س \leq -٢ \end{cases}$$

جـــد نهـــــا ق(س)
س ← -٢

٤٤

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س+٣ & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ١ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$$

فجـــد كلا من النهايات التالية :

١) نهـــــا ق(س)
س ← ٢

٢) نهـــــا ق(س)
س ← ١

٣) نهـــــا ق(س)
س ← ٣

٤٥

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{أ س^{٢} + ٥} & ، \ س < ٢ \\ ٣س + ك & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$$

جـــد قيمة الثابت ك علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← ٢

٤٦

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + م & ، \ س < ٢ \\ ٣ & ، \ س = ٢ \\ م س + ك & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

جـــد قيمة ك ، م علما بان

نهـــا ق(س) = ١٢

س ← ٢

٤٧

$$ق(س) = \begin{cases} س - ك & ، \ س < ٤ \\ ٢س + ٢ك & ، \ س \geq ٤ \end{cases}$$

جـــد قيمة الثابت ك علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← ٤

٤٨

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + س & ، \ س < أ \\ ٣س + ١٥ & ، \ س \geq أ \end{cases}$$

جـــد قيمة الثابت أ علما بان

نهـــا ق(س) موجودة

س ← أ

٤٩

$$ق(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب & ، \ س < ٢ \\ ٣أ س + ١ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

جـــد قيمة أ ، ب علما بان

نهـــا ق(س) = ١٦

س ← ٢

نهاية القيمة المطلقة

تذكير في المطلق ☹ خواص:

- $|أ|$ = القيمة الموجبة للعدد أ
- $|ق(س)| = ق(س)$ اذا $ق(س) \geq 0$
- $\sqrt{ق(س)^2} = |ق(س)|$
- اذا كان $|س| = أ$ حيث $أ > 0$ فان

$س = أ$ أو $س = -أ$

مثلا $|س| = ٢ \longrightarrow س = ٢ ، س = -٢$

- اذا كان $|س| < أ$ حيث $أ > 0$

فان $-أ < س < أ$

مثلا $|س| < ٢$ فان $-٢ < س < ٢$

- اذا $|س| > أ$ حيث $أ > 0$

فان $س > أ$ او $س < -أ$

مثلا $|س| > ٢ \longrightarrow س > ٢$ او $س < -٢$

ولإيجاد النهاية لاقتران القيمة المطلقة أو اقتران يشتمل على قيمة مطلقة

نعيد تعريف الاقتران أو

نعوض مباشره داخل المطلق فإذا كان ناتج التعويض :

١) موجب : نهمل القيمة المطلقة

٢) سالب : نعكس إشارات كل الحدود داخل المطلق ونهملها

٣) صفر : نعيد التعريف لإيجاد اليمين واليسار

٥٠ جـــد

١) $\lim_{س \to ٣} |٥س - ٧| = ١٥ - ٧ = ٨$ موجب نهمل المطلق

٢) $\lim_{س \to ٣} |٧ - ٥س|$ سالب نعكس اشارة كل حد

$= -٧ + ١٥ = ٨$

٣) $\lim_{س \to ٥} |س - ٥| =$ صفر لان

$\lim_{س \to ٥^+} |س - ٥| = ٠$

$\lim_{س \to ٥^-} |-س + ٥| = ٠$

٤) $\lim_{س \to ٢} |٢س - ٤|$

٤) اذا كان $ق(س) = |٦ - ٣س|$ فجـــد

$\lim_{س \to ٣} ق(س)$

$\lim_{س \to -٣} ق(س)$

٥١

$$ق(س) = \begin{cases} |س| + ١ & ، س < ٠ \\ |س - ١| & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

جد

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} ق(س)$$

٥٢

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٣ & ، س = ٠ \end{cases}$$

جد

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} ق(س)$$

٥٣ جـــــد

١) $\text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - |٣س|}{س - ٣}$

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ١|}{س - ١}$

٣) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|٥س - ١| - ٩}{س - ٢}$

٤) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{|س - ٦| - ٤}{س - ٢}$

٥) $\text{نهـــا}_{س \to ١} \frac{|س^{٢} + ٣س - ٤|}{|س - ١|}$

٦) $\text{نهـــا}_{س \to ١+} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢س - ١}}{س - ١}$

٥٤

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} & ، |س| < ٢ \\ س^{٣} & ، |س| \geq ٢ \end{cases}$$

جد

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٢}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ٦| - س}{س - ٣}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{|٣س + ١| - |س + ٣|}{س - ١}$

٥٥

جـــــد

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س| - س}{س - ٢}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٩س^{٣}}}{س}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\left|\frac{١}{س + ٣}\right| - \frac{١}{٤}}{|٢س - ١| - |س|}$

نهاية اكبر عدد صحيح [ ]

تذكير :

[٣] = ٣ ،، [ـ ٣] = ـ٣

[٢,٨] = ٢ ،،، [ـ ٢,٨] = ـ٣

ولإيجاد النهاية في اكبر عدد صحيح فانه

نهـــا [س] = أ
س ← أ +

أ ، صحيح

نهـــا [س] = أ ـ ١
س ← أ ـ

* أذا كان معامل س داخل اكبر عدد صحيح سالب نقلب اليمين إلى يسار واليسار إلى يمين

* أذا كان ناتج التعويض داخل اكبر عدد صحيح كسر تكون النهاية من اليمين واليسار متساوية والنهاية موجودة .

٥٦ جـــــد

١) نهـــا [س + ٣] غير موجودة لان
س ← ٥

نهـــا [س + ٣] = [٨]$^{+}$ = ٨
س ← ٥+

نهـــا [س + ٣] = [٨]$^{-}$ = ٧
س ← ٥ـ

٢) نهـــا [٦ – س] غير موجودة لان
س ← ١

نهـــا [٦ – س] = [٥]$^{-}$ = ٤
س ← ١+

نهـــا [٦ – س] = [٥]$^{+}$ = ٥
س ← ١ـ

٣) نهـــا $\left[\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢}\right]$
س ← ٦

٤) نهـــا [س + ٠,٩]
س ← ٠,١

١) نهـــا $\frac{س^{٢} - [س]}{س - ١}$
س ← ١+

نهـــا $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$
س ← ١+

نهـــا $\frac{(س-١)(س+١)}{س - ١} = ٢$
س ← ١+

٥٧

$$ق(س) = \begin{cases} \left[\frac{١}{س}\right] + ١ & ، \ س \leq ١ \\ [س^{٢} + ١] & ، \ س > ١ \end{cases}$$

جد

١) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٥^{+}} \frac{س^{٢} - س[س]}{س - ٥}$

٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} - [٦ - س]}{س - ٢}$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - [س + ١٢,٧]}{س - ٤}$

٥٨

$$ق(س) = \begin{cases} |س - ١| & ، \ س \leq ٣ \\ [س - ١] & ، \ س > ٣ \end{cases}$$

جد

١) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - [س + ٠,١]س}{س - ١}$

٦) $\lim_{س \to ٣}$ $س^{٢}$ [١ - س]

٥٩ **جـــــد**

١) $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - [س + ٦]}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = ٦$

٦٠

ق(س) = { [س + ١] ، س > أ
{ ١٠- [س] ، س < أ

جـــد أ ،، أ ينتمي إلى ص
وان نهـــــا ق(س) موجودة
س ← أ

٦١

ق(س) = { [س] ، س < أ
{ ٦ - [س] ، س > أ

جـــد أ ،، أ لا ينتمي إلى ص
وان نهـــــا ق(س) موجودة
س ← أ

٦٢ جـــــــد

١) نهـــــا [٢س] = ٣ جـــد مجموعة قيم أ
س ← أ

٢) نهـــــا ([س+٥] - [س + ٢])
س ← ٢

٣) نهـــــا $\frac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$
س ← $\frac{٥}{٢}$+

٤) نهـــــا $\frac{س^{٢} - س - [س]}{س - ٢}$
س ← ٢

٥) نهـــــا $\frac{س^{٢} - |س - ٢| + [س + ٢]}{س^{٢} - ٩}$
س ← ٣-

٦) نهـــــا $\frac{[س - ٣]}{|س - ٣|}$
س ← ٣+

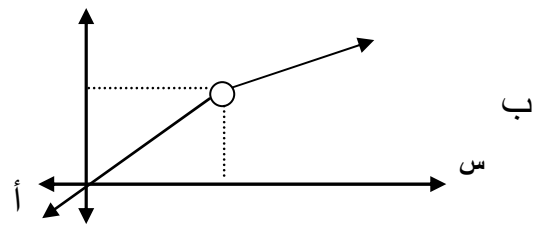
٧) نهـــــا $\frac{|س^{٢} - ٦| - س}{س - ٣}$ = نهـــا $\frac{س^{٢} - أ^{٢}}{س - أ}$
س ← ٣ س ← أ
جـــــــد أ

٨) نهـــــا ($س^{٢}$ + ١) $^{[س]}$
س ← ٠

النهاية من الرسم البياني

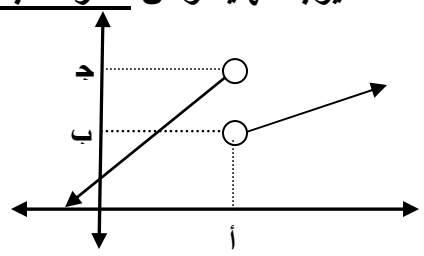
السـؤال من محور السينات
الإجابـة من محور الصادات

الحلقة لا تمنع وجود النهاية



$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \; ق(س) = ب$$

القفزة عندها لا يوجد نهاية ولكن احذر الاتجاه

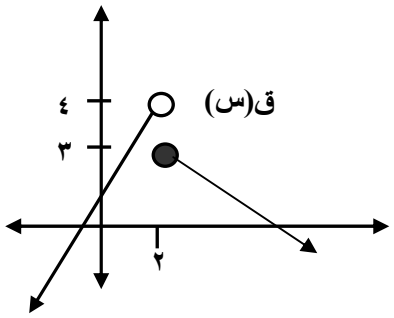


$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \; ق(س) = \text{غير موجودة}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ+} \; ق(س) = ب$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ-} \; ق(س) = جـ$$

٦٣ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

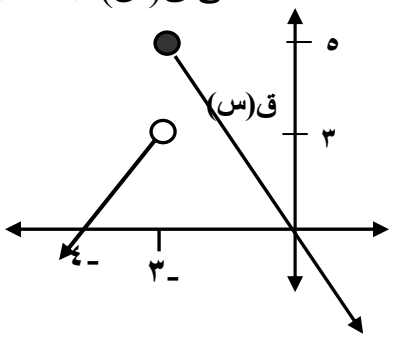


$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢+} \; ق(س) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢-} \; ق(س) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \; ق(س) =$$

٦٤ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

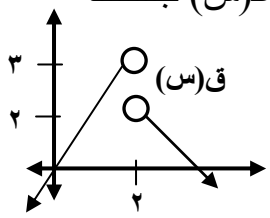


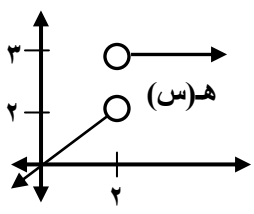
$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣+} \; ق(س) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣-} \; ق(س) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \; ق(س) =$$

٦٥ معتمد الأشكال ألمجاوره للاقترانات ق(س) ، هـ(س) جـــد





$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢+} \; (\; ق(س) + هـ(س) \;) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢-} \; (\; ق(س) + هـ(س) \;) =$$

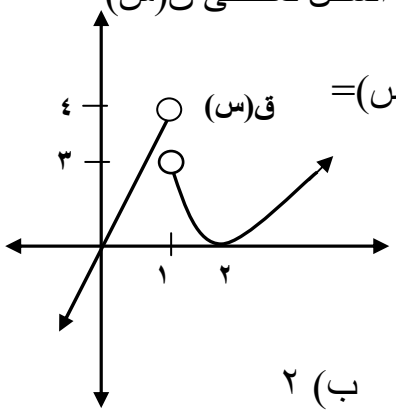
$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \; (\; ق(س) + هـ(س) \;) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢+} \; (٢س \; ق(س) + س^{٢} \; هـ(س) \;) =$$

،،

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢-} \; (٢ \; ق(س) + س \; هـ(س) \;) =$$

٦٦ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س)



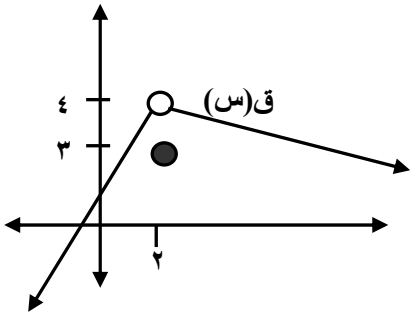
فان

نهـــــــاق(س)=
س ← ١+

أ) غ . م　　ب) ٢

جـ) ٣　　د) ٤

٦٧ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:

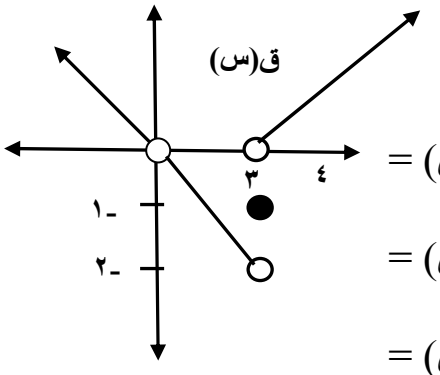


نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢+

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢-

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢

٦٨ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جـــــد:



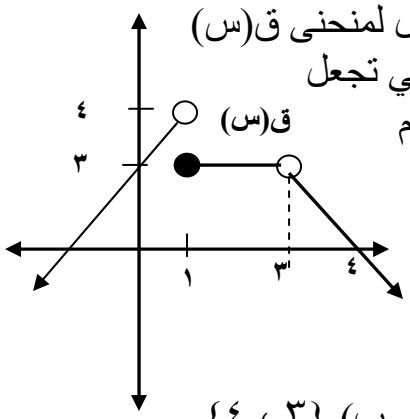
نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣+

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-

نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣

نهـــــــا ق(س) =　　ق(٣) =
س ← ٠

٦٩ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س)



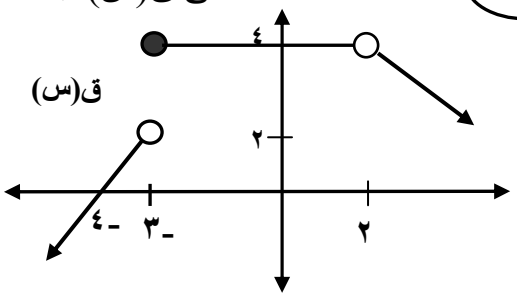
فان قيم م التي تجعل

نهـــــــاق(س) غ.م
س ← م

أ) {١ ، ٣}　　ب) {٣ ، ٤}

جـ) {١ ، ٤}　　د) {١}

٧٠ معتمدا الشكل لمنحنى ق(س) جد ما يليه:



١) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-+

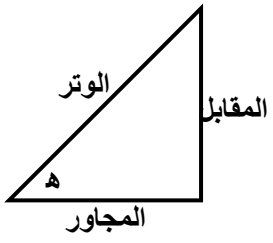
٢) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٣-

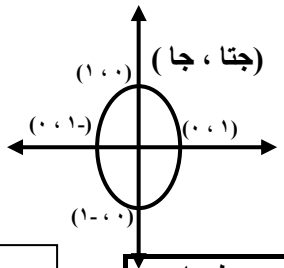
٣) نهـــــــا ق(س) =
س ← ٢

٤) اذا كانت نهـــــــاق(س) =٤
س ← أ

فجـــــد قيم أ

نهاية الاقترانات الدائرية :





مراجعة وتذكير :

الزاوية سيني	تقديرها الدائري	جـــا	جتـــا	ظـــا
٠	٠	٠	١	٠
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	
١٨٠	π	٠	-١	٠
٢٧٠	$\frac{\pi ٣}{٢}$	-١	٠	-
٣٦٠	$\pi ٢$	٠	١	٠

جـــا هـ = $\frac{\text{القابل}}{\text{الوتر}}$

جتـــا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظـــا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جـــا}}{\text{جتـــا}}$

ظتـــا = $\frac{١}{\text{ظـــا}}$ = $\frac{\text{جتـــا}}{\text{جـــا}}$

قـــا = $\frac{١}{\text{جتـــا}}$ ، قتـــا = $\frac{١}{\text{جـــا}}$

متطابقات مثلثية :

- **جا^{٢} س + جتا^{٢}س = ١**

  جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢} س

  جا^{٢} س = ١ - جتا^{٢}س

- **قا^{٢}س – ظا^{٢}س = ١**

  قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

- **قتا^{٢}س – ظتا^{٢}س = ١**

  قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

- **جا ٢س = ٢جاس جتاس**
- **جتا٢س = جتا^{٢}س – جا^{٢}س**

  = ١ – ٢جا^{٢}س

  =٢جتا^{٢}س - ١

- **ظا٢س = $\frac{\text{٢ظا س}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{س}}$**

- **جتا أ – جتا ب = -٢جا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$**
- **جا أ - جا ب = ٢جتا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$**
- **جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب**
- **جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب**
- **ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$**
- **ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$**
- **جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ – جتا ٢س)**
- **جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)**

- جا (π - س) = جا س
- جا (π +س) = - جا س
- جا (π٢ - س) =- جا س
- جتا (π - س) =- جتا س
- جتا (π+س) = - جتا س
- جا (- س) = - جا س
- جتا (- س) = جتا س
- ظا (- س) = - ظا س
- جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) = جتا س
- جا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جتا س
- جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = - جا س
- جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) =جا س

نظرية :

$$\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$$

ومن النظرية

- $$\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{س}}{\text{جا س}} = ١$$
- $$\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$
- $$\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظا س}} = ١$$

٧١ جـــــد ؟؟ مباشر

١) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س + جتا س}}$

٢) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{٣ + ظا س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$

٣) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}} \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{١ – جاس}}$

٧٣ جـــــد

١) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا٥س}}{\text{٨ س}}$

٢) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا ٦س}}{\text{جا ٥س}}$

٣) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٩} \frac{\text{جا (س -٩)}}{\text{(س – ٩)}}$

٤) $\text{نهـــــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{\text{جا (س -٥)}}{\text{ظا (س – ٥)}}$

٧٤ جـــــــد

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٥س}{٣س^{٢}}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{جا(س - ١)}{س^{٢} - ١}$

٣) $\lim_{س \to \pi} \frac{\pi^{٢} - س^{٢}}{جا(\pi - س)}$

٤) $\lim_{س \to ٩} \frac{جا(\sqrt{س} - ٣)}{س - ٩}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٥س + ظا ٧س}{٣س + جا ١٢س}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٥س}{س^{٣} - ٣س^{٢}}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٥س + ظا ٥س + جا^{٢}س}{جا ٦س}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{س جا س - ظا^{٢}س}{جا٣س - ٥س}$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٢س + س جا٣س}{ظا^{٢} س + ٣س^{٢}}$

٧٥ جـــــــد

١) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{١ - جتا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0}$ $\frac{جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}}$ $= \lim_{س \to 0}$ $\frac{جا٣س \times جا٣س}{٥س \times س}$

$= \frac{٣}{٥} \times ٣ = \frac{٩}{٥}$

٢) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{قا^{٢} س - ١}{س^{٢}}$

٣) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{١ - جتا^{٢} ٥س}{قا^{٢} ٣س - ١}$

٤) $\lim_{س \to \pi}$ $\frac{ظا^{٢} س}{قا س + ١}$

٥) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{١ + جا٥س ظا ٢س - جتا^{٢} ٩س}{س^{٢}}$

٦) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{٥س ظا ٢س}{جتا^{٢} ٢س - ١}$

٧) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{٥س ظا ٣س}{١ - قا^{٢} ٤س}$

٨) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{١ - جتا^{٢} س}{١ - جتا س}$

٩) $\lim_{س \to 0}$ $\frac{١ - جتا^{٣} س}{١ - جتا س}$

١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}}$ $\frac{جا^{٢} س - جتا^{٢} س}{جاس - جتا س}$

٧٦ جـــــــد

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢ جاس - ١}{٤جتا^{٢} س - ٣}$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا ٢س}{١ - جا س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٦س}{٧س^{٢}}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٧س}{٥س ظا ٣س}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتا ٥س}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا\left(\frac{٣س + ٥س}{٢}\right) جا\left(\frac{٣س - ٥س}{٢}\right)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢جا٤س \times جا -س}{س \times س} = -٢ \times ٤ \times -١ = ٨$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٦س - جتا ٢س}{٥س^{٢}}$

٧) $\lim_{س \to أ} \frac{جتا٢س - جتا ٢أ}{س - أ}$

٨) $\lim_{س \to أ} \frac{جاس - جا أ}{س - أ}$

٧٧ جـــــــد

١) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا س}{\pi - س}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{جا (\pi - س)}{\pi - س} =$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س}{\frac{\pi}{٢} - س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا (س + \pi)}{س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا (س + ٢\pi)}{س}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{جتا \frac{\pi}{٤} س}{س - ٢}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{جا \frac{\pi}{٤} س}{س - ١}$

اسئلة مختلفة على الدائري

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا\ س}{س}$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا\ س}{س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - قا\ س}{ظا\ س}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتا\ ٦س}}{س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - ٣س\ جا\ ٥س}{٢جا٣س\ ظا٧س - س\ جاس}$

٦) $\lim_{س \to ٠+} \frac{\sqrt{قا^{٢}\ س - ١}}{س}$

٧) $\lim_{س \to \pi ٣} \frac{جا\ س}{\frac{س - \pi}{\pi}}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{جتا\ س}}{س\ جا\ س}$

٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{س + ١} - ١)\ جا\ س}{س^{٢}}$

١٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتا\ س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \sqrt{٢}\ جا\ س}{١ - \sqrt{٢}\ جا\ س}$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - جا\ ٢س}{جاس - جتا\ س}$

١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢\ جا\ س - \sqrt{٣}}{٢جتا\ س - ١}$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جا\ ٢س - جتا^{٢}س}{٤\ س}$

١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جا\ س}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٦ - ٦جتا^{٢}\ ٤س}{٥س^{٢}}$

١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥س\ ظا\ ٣س}{١ - قا^{٢}\ ٤س}$

١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{جا^{٢}\ ٢س} - \frac{١}{٤جا^{٢}\ س}$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ (س^{٢} - ٦٤)}{س - ٨}$

٢٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ١}{جا\ (س^{٣} - ١)}$

٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س^{٢} - ٤)جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤\ س + ٤}$

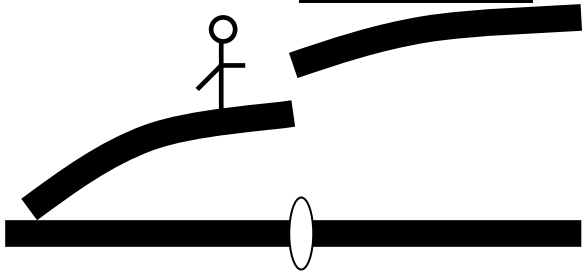
٢٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{قا\ ٢س - ١}{س^{٢}}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا\ ٥س}{١ - جتا\ ٧س}$

٢٤) $\lim_{س \to أ} \frac{جا\ ٧س - جا\ ٧أ}{س - أ}$

٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - \sqrt{٣س^{٢} + ٤}}{جتا\ ٣س - جتا\ س}$

الاتصال



يكون الاقتران ق(س) متصلا عند س = أ إذا وفقط إذا

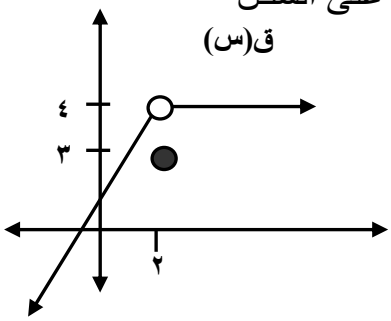
١) نهـــــا ق(س) موجودة
س ← أ

٢) ق(أ) معرف

٣) نهـــــا ق(س) = ق(أ)
س ← أ

الاتصال من الرسم البياني :

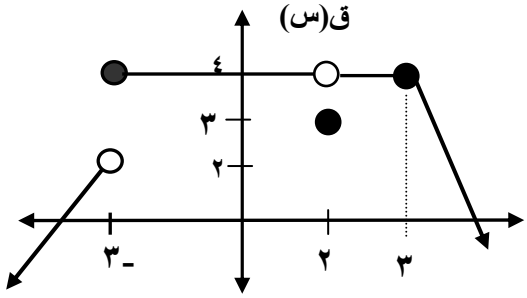
٧٨ بالاعتماد على الشكل



الاقتران متصلا لجميع قيم س عدا عند س = ٢ لان

ق(٢) ≠ نهـــا ق(س)
س ← ٢

٧٩ بالاعتماد على الشكل



ق (س) غير متصلا عند س = -٣ لان :

نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٣

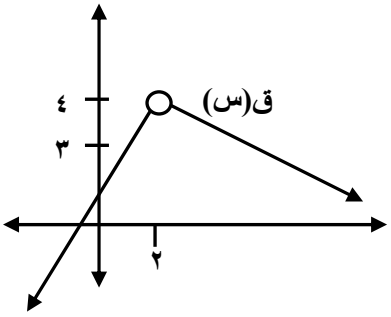
ق (س) غير متصلا عند س = ٢ لان :

نهـــــا ق(س) ≠ ق(٢)
س ← ٢

*** ق(س) متصلا لجميع قيم س عدا عند س= { – ٣ ، ٢ }

*********ق (س) متصلا عند س = ٣

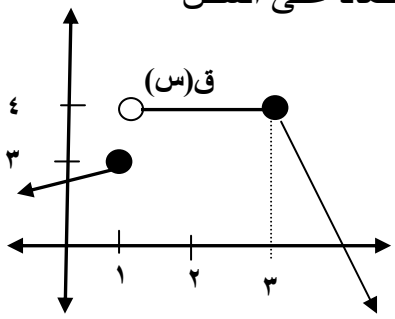
٨٠ بالاعتماد على الشكل



الاقتران متصلا لجميع قيم س عدا عند س = ٢ لان

ق(٢) = غير معرف

٨١ بالاعتماد على الشكل



ق (س) غير متصلا عند س = ١ لان :

نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← ١

*** ق(س) متصلا لجميع قيم س عدا عند س= { ١ }

ق (س) متصلا عند س = ٢

ق (س) متصلا عند س = ٣

اتصال الاقتران كثير الحدود :

الاقتران كثير الحدود متصلا على مجاله

لأنه كثير حدود

أي اقتران كثير حدود يكون متصلا على مجاله لانه كثير حدود فلا داعي للبحث فيه

ق(س) = ٢ س + ١ متصل على ح

ق(س) = ٢ س متصل على ح

ق(س) = ٢ متصل على ح

ق(س) = س^{٢} + ٥س - ٢ متصل على ح

ق(س) = (س + ١)(س +٤) متصل على ح

ق(س) = س متصل على ح

الاقترنات السابقة جميعها كثيرات حدود وجميعها متصلة على ح فلا يوجد لها نقاط انقطاع (انفصال)

اتصال الاقتران النسبي :

الاقتران النسبي متصلا على مجاله عدا أصفار المقام

مثال توضيحي

ق(س) = $\frac{٢س - س^{٢} + ٩}{٢س - ١٠}$

اصفار المقام ٢س -١٠ = ٠

٢س = ١٠

س =٥

* ق (س) متصلا على مجاله عدا س=٥

٨٢ نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{٢س + ٨}{س - ١}$ هي

أ) { ٤} ب) { -١}

جـ) { ١، ٤} د) { ١}

٨٣ اختر رمز الإجابة الصحيحة لكلا مما يلي

١)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س + ٨}{س^{٢} - ٤}$ هي

أ) { -٨} ب) { -٢}

جـ) { -٢، ٢} د) { ٢}

٢)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤س}$ هي

أ) { ٠} ب) { ٢}

جـ) { ٠، ٤} د) { ٠، ٤،٢}

٣)نقط انقطاع الاقتران

ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ١}$ هي

أ) { -٣ ، ٣} ب) { -١، ١}

جـ) { ١، ٣} د) { ١}

٤)نقط انفصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} + ٣س - ٤}$ هي

أ) { -٢} ب) { ١، -٤}

جـ) { ٤،-١} د) { ٢ ،-٢}

٥)قيم س التي تجعل الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٤}{(س - ١)(س+٢)}$ غير متصلا هي

أ) { ١} ب) { -٢}

جـ) { ١، -٢} د) { ٤}

٦)قيم س التي تجعل الاقتران

ق(س) = $\frac{س - ٣}{س (س^{٢} - ١٦)}$ غير متصلا هي

أ) { ٠} ب) { ٠، ٤، -٤}

جـ) { ٣، ٤} د) { ٤، ٠}

٧)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = $\frac{س}{س+١}$ - $\frac{٢س+١}{س}$ هي

أ) { -١} ب) { ٠}

جـ) { -١، ٠} د) { ١}

٨)نقط عدم اتصال الاقتران

ق(س) = (س-٣)(٢س +٤) هي

اتصال الجذور :

- **الجذر الفردي** متصل على مجاله ، ولكن احذر وجود النسبي تحت الفردي
- **الجذر الزوجي** متصل على الفترة الموجبة فقط

امثله :

١) ق(س) = $\sqrt[٣]{٧س + س^{٣} - ٤}$

ق : متصلا على ح

٢) ق(س) = $\sqrt[٥]{٣ - س}$

ق: متصلا على ح

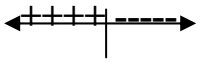
٣) ق(س) = $\sqrt{\frac{٣ - س}{س^{٢} - ٦٤}}$

ق : متصلا على مجاله عدا اصفار المقام

عدا س= ٨، -٨

٤) ق(س) = $\sqrt[٣]{٣ - س}$ جد اكبر فترة اتصال

كبرة فترة اتصال

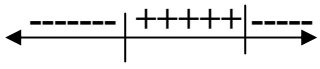


٣

$(-\infty ، ٣]$

٥) ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ جد اكبر فترة اتصال

ق متصلا على



-٣ ٣

$[-٣ ، ٣]$

٦) ق(س) = $س^{٢}$ - ٩ جد اكبر فترة اتصال

ق متصلا على

-٣ ٣

$(-\infty ، -٣] \cup [٣ ، \infty)$

اقترانات الجا والجتا والمطلق متصله عندما يكون ما بداخلها متصل ***

امثله :

١) ق(س) = جا ٣س

ق متصلا على مجاله

٢) ق(س) = جتا س + $|س + ٧|$

ق : متصلا على مجاله

٨٤

١) جد اكبر فترة اتصال للاقتران

ق(س) = $\sqrt{\frac{س - ١}{س - ٥}}$

٢) جد اكبر فترة اتصال للاقتران

ق(س) = $\sqrt{\pi - س}$

٣) ق(س) = $\frac{٣ - س}{س^{٢} + ب س + ١}$

جد قيمة ب التي تجعل ق متصلا على ح

٣) ق(س) = $\frac{٣ - س}{ب س^{٢} - ٤ س + ٥}$

جد قيمة ب التي تجعل ق متصلا على ح

اتصال الاقتران المتشعب عند نقطة :

يكون الاقتران ق(س) متصلا عند س = أ إذا وفقط إذا

١) نهـــــــا ق(س) موجودة
س ← أ

٢) ق(أ) معرف

٣) نهـــــــا ق(س) = ق(أ)
س ← أ

٨٥ **إذا كـــان ق(س) =**
$$\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \ س < ٣ \\ ٢س + ٣ & ، \ س \geq ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س) عند س=٣

الحل: **صورة**

ق(٣) = ٢ (٣) +٣
=٩

يمين

نهـــــا ٢ س +٣
س ← ٣+
= ٢(٣) + ٣
=٩

يســـــار

نهـــــا س^{٢} +٥
س ← ٣-
= ٩ +٥
=١٤

ق(س) **غير متصلا** عند س = ٣ لان

نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٣

---

٨٦ **إذا كـــان ق(س) =**
$$\begin{cases} س + ٥ & ، \ س < ٢ \\ ٧ & ، \ س = ٢ \\ ٢س + س^{٢} - ١ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٢

الحل: **صورة**

ق(٢) = ٧

يمين

نهـــــا ٢س +س^{٢} -١
س ← ٢+
= ٢ (٢) +(٢)^{٢} -١
=٧

يســـــار

نهـــــا س +٥
س ← ٢-
= ٢ +٥
=٧

ق(س) **متصلا** عند س = ٢ لان

نهـــــا ق(س) = **ق(٢)**
س ← ٢

٨٧ ق (س) = { س² + ٢ ، س > ٣ ؛ ٣ س + ٢ ، س ≤ ٣

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٣

٨٨ ق (س) = { س² + ٦ ، س < -٢ ؛ ٨ ، س= -٢ ؛ ٣ س – س² ، س >-٢

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-٢

٨٩ ق(س) = { س² + ٥ ، س ≠ ٢ ؛ ٧ ، س = ٢

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =٢

٩٠ ق(س) = { |س + ٢| ، س ≠ -٢ ؛ ٠ ، س = -٢

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-٢

٩١ ق(س) = { (س²-٣س - ٤)/(س + ١) ، س ≠ -١ ؛ -٥ ، س = -١

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س =-١

٩٢

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س - س^{٢}| & ، س \leq ٢ \\ \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \end{cases}$$

جـــــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا عند =٢

٩٣

$$ق(س) = س[\![س + ١]\!]$$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

٩٤

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢جتا س & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

٩٥

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س < ٠ \\ [\![س + ١]\!] & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق عند س = ٠

٩٦

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + م & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س = ٢ \\ س + ك & ، س > ٢ \end{cases}$$

جـــــد قيمة م ، ك علما بان الاقتران متصلا عند =٢

٩٧

$$ق(س) = \begin{cases} ك - س^{٢} + م & ، س < ٤ \\ ٢٠ & ، س = ٤ \\ ٣س + ك & ، س > ٤ \end{cases}$$

جـــــد قيمة م، ك التي تجعل الاقتران متصلا

٩٨

$$ق(س) = \begin{cases} [س + م] & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$$

جـــــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا عند =٣

٩٩

$$ق(س) = \begin{cases} [س + ٥] & ، س < م \\ |٢ - س| & ، س \geq م \end{cases}$$

جـــــد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران متصلا

١٠٠

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{جا^{٢}(ب\ س) - س^{٢}}{س\ جا\ ٢س} & ، -\dfrac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ \dfrac{س^{٢} + (١ - أ)\ س}{أ\ س} & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$$

جـــــد قيمة الثابت أ ،ب التي تجعل الاقتران متصلا عند س = ٠

اتصال الاقتران المتشعب على فترة :

نبحث
عند كل قيم س في المجال
وعند القواعـــــد

صيغ الســـــــــؤال :

1. **ابحث في اتصال الاقتران على مجاله**
2. **ابحث في اتصال الاقتران على الفترة [أ ، ب]**
3. **ابحث في اتصال الاقتران لجميع قيم س الحقيقية**
4. **جد نقط عدم الاتصال (اقتران متشعب)**

١٠١

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٢ & ، \ ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [٠ ، ٤]

*** عند س=٠**

الصورة	يمين	يسار
ق(٠) = ٢(٠) +٣	نهـــــا ٢ س +٣	نهـــــا
=٣	س ← ٠+	س ← ٠+
	= ٢(٠) + ٣	بداية فترة
	=٣	بدون يسار

ق(س) متصلا عند س = ٠ لان نهـــــا ق(س) = ق(٠)

س ← ٠+

*** عند س=٢**

الصورة	يمين	يسار
ق(٢) = ٢(٢)+٣	نهـــــا س^{٢}+٣	نهـــــا ٢س +٢
=٧	س ← ٢+	س ← ٢-
	= ٢(٢)+٣	= (٢)٢ +٢
	=٧	=٦

ق(س) غير متصلا عند س = ٢ لان

نهـــــا ق(س) غير موجودة

س ← ٢

*** عند س=٤ الصورة**

	يمين	يسار
ق(٤) = (٤)^{٢}+٢		نهـــــا س^{٢} +٢
=١٨	نهاية فترة	س ← ٢- = ١٨
	بدون يمين	

ق(س) متصلا عند س = ٤ لان

نهـــــا ق(س) = **ق(٤)**

س ← ٤-

*** عند القواعد**

٢س+ ٣ ، ٠ < س < ٢ متصل لانه كثير حدود

س^{٢} + ٢ ، ٢ < س < ٤ متصل لانه كثير حدود

* ق(س) متصلا على مجاله عدا عند س= ٢

١٠٢ ق(س) = { ٢س+ ١ ، -١ ≤ س < ٢ ; [س +٣] ، س = ٢ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [-١ ، ٢]

١٠٣ ق(س) = { (٢س+ س^{٢})/س ، -٢ ≤ س < ٠ ; [س + ٢]/٢ ، ٠ < س ≤ ١ ; ، س = ٠ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على الفترة [-٢ ، ١]

١٠٤ ق(س) =
- ٢ ، س = ٣
- $\frac{٣س + ١}{س - ١}$ ، ٣ < س < ٥
- ٤ ، س = ٥

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجاله

١٠٥ ق(س) =
- [س- ٢] ، ١ ≤ س < ٣
- **$س^{٣} + ١$** ، [س] = ٣

ابحث في اتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٤)

١٠٦ ق(س) = { |٢س +٢| ، -١< س<١ ؛ [$\frac{١}{٢}$س +١] ، ١< س < ٣ }

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجاله

١٠٧ ق(س) = { **٢س ، ٠ < س ≤ ١** ؛ **س^{٢} + ٢ ، س > ١، س ≥ ٠ جد نقط عدم اتصال الاقتران** }

١٠٨

ق(س) = { أس^{٣} + ب س + ١ ، س < ١
س^{٢} + (أ + ب)س + ٢ ، س > ١
٥ ، س = ١

جـــد قيمة أ ، ب التي تجعل ق متصلا على ح

١٠٩

ق(س) = { (٢س^{٢} − أ) / (س − ٢) ، س < ٢
ب س + جـ ، ٢ ≤ س < ٤
٦س ، س ≥ ٤

جـــد قيمة أ ، ب ، جـ التي تجعل ق متصلا على ح

١١٠

**ق(س) = { جا أ س / ٥س ، −٢ ≤ س < ١
ب(٢ + س) ، ٠ < س ≤ ٢
٤ ، س = ٠**

جـــد قيمة أ ، ب التي تجعل ق متصلا على ح

نظرية في الاتصال :

إن (جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة) اقترانات متصلة عند عدد يكون الناتج متصلا

بشرط أن لا يكون العدد صفر مقام في القسمة

١١١ **إذا علمت إن**

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٣ & ، \text{س} \leq -١ \\ ٢\text{س}^{٢} & ، \text{س} > -١ \end{cases} \quad ، \quad \text{ع(س)} = \text{س}^{٢} + ٤$$

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س) ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = -١

الحل * ق(س)

الصورة	يمين	يسار
ق(-١) = -١ +٣	نهـــا س +٣	نهـــا ٢س^{٢}
= ٢	س ← -١+	س ← -١-
	= ٢	= ٢(-١)^{٢}
		= ٢

ق(س) متصلا عند س = -١ لان

نهـــا ق(س) = ق(-١)
س ← -١

* ع(س) : متصلا عند س = -١ لأنه كثير حدود

* ل(س) : متصلا عند س = -١ حسب نظرية جمع اقترانيين متصلين

---

١١٢ **إذا علمت إن**

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} \leq ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} - ٥ & ، \text{س} > ٢ \end{cases} \quad ، \quad \text{ل(س)} = \sqrt{\text{س} - ١}$$

وكان ع(س) = ق(س) - ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٢

١١٣ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٥ \\ ١١ & ، س = ٥ \\ س + ٦ & ، س > ٥ \end{cases}$$

ع(س) = جا ٣س

وكان ل(س) = ق(س) × ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٥

١١٤ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$$

ع(س) = ٢ - س

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٣

١١٥

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٤ & ، س \leq -١ \\ ٢س^{٢} + ١ & ، س > -١ \end{cases} \quad ، \quad ع(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، س \neq -١ \\ ٤ & ، س = -١ \end{cases}$$

وكان ل(س) = ق(س) - ع(س) ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = -١

تابع النظرية:

إن (جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة) اقترانات غير متصلة عند عدد
قـــــــد يكون الناتج متصلا عند تلك العدد

١١٦ إذا علمت إن

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٣س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases} \quad ، \quad \text{ل}(س) = س - ٢$$

وكان ع(س) = ق(س) × ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٢

الحل * ق(س)

الصورة	يمين	يسار .
ق(٢) = ٢ +٣	نهـــــا س +٣	نهـــــا ٣ س -٥
= ٥	س ← ٢+ = ٥	س ← ٢- =٣(٢) -٥
		= ١

ق(س) غير متصلا عند س = -١ لان

نهـــــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٢

* ل(س) : متصلا عند س = ٢لأنه كثير حدود | ل(٢) = ٢ – ٢ = ٠ صورة ويمين ويسار

****** ع(س) = ق(س) × ل(س)

صورة = ٥ × ٠ = ٠
يمين = ٥ × ٠ = ٠
يسار = ١ × ٠ = ٠

*ل(س) متصلا عند س =٥ لان ل(٢) = نهـــــــا ل(س)
س ← ٢

١١٧ **إذا علمت إن**

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س < ٥ \\ ١٠ & ، س = ٥ \\ ٢ س & ، س > ٥ \end{cases} \quad ، \quad \text{ل}(س) = س^{٢} - ٢٥$$

وكان ع(س) = ق(س) × ل(س) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٥

١١٨

اذا كان ق(س) = س^{٢} – ٩

ع(س) =[س + ٢]

ابحث في اتصال ق(س) × ع(س) عندس=٣

١١٩ إذا علمت إن

ق(س) = { س + ١ ، س< ٢ ؛ ٧ ، س = ٢ ؛ ٢س ، س > ٢ }

ع(س) = ٢ - س

وكان ل(س) = ق(س) + ع(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٢

١٢٠

ق(س) = { س^{٢} + ٢ ، س≤ ٢ ؛ ٣ س ، س > ٢ }

، ع(س) = { س^{٢} + ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٥ ، س = ٢ }

وكان هـ(س) = ق(س) - ع(س) ابحث في اتصال الاقتران هـ(س) عند س = ٢

١٢١ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \\ س + ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$$

هـ(س) = ٦ – ٢س

وكان ع(س) = ق(س) ×هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٣

١٢٢ إذا علمت إن

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \\ ٢س + ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \frac{٦ - س}{٢س - ١٠}$$

وكان ع(س) = ق(س) ×هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ٣

١٢٣ ناقش صحة العبارة التالية :

اذا كان ق + هـ متصلا عند س = أ

فان كل من ق ، هـ يجب ان يكون متصلا عند س =أ

١٢٤ إذا علمت إن

$$هـ(س) = \frac{س + ٥}{٢س - ٤} \text{ ، } ق(س) = س + ١$$

وكان ع(س) = ق(س) ×هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) عند س = ١

١٢٥ إذا كان ق ، هـ اقترانيين متصلين عند س = ٢ وكان ق(٢) = ٦ ،

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + هـ (س)) = ٢٠ فإن هـ (٢) تساوي :

أ) ٦ ب) ١٤ ج) ١٦ د) ٢٦