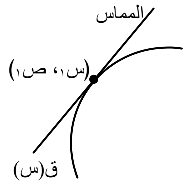
أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمـــــــي

التفسير الهندسي للمشتقة

المماس: مستقيم يمسّ منحنى



ق (س) **عند النقطة**

(س١، ص١): ص١ = ق(س١)

وتسمى **نقطة التماس وميله**(م)= قَ(س١)= $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(\text{س}_١،\text{ص}_١)}$

أما معادلته: ص – ص١ = م(س– س١)

أما ميل العمودي على المماس عند (س١، ص١) فهو:

$$\frac{-١}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{\text{قَ}(\text{س}_١)}$$

زاوية الميل: هي **الزاوية المحصورة** بين المستقيم والإتجاه الموجب **لمحور السينات** حيث ظاهـ = الميل ، هـ∋ [٠، π]

مثال:

جد معادلة المماس لمنحنى:

١) ق(س)= س^٢ +٣س – ١ عند س = ١

نقطة التماس (١، ق(١)) = (١، ٣)

ميل المماس = قَ(١) = ٢(١) + ٣= ٥

⟸ معادلة المماس:

ص– ٣= ٥ (س–١)

ص = ٥ س – ٢

٢) ق(س)= $\frac{٦}{\text{س}^٢+٢}$ عند س = –١

نقطة التماس (–١، ق(–١)) = (–١، ٢)

ميل المماس = قَ(–١)

وبما أن قَ(س) = $\frac{-١٢\text{ س}}{(\text{س}^٢+٢)^٢}$

⟸م = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$

⟸ معادلة المماس:

ص– ٢= $\frac{٤}{٣}$ (س+١)

٣) ق(س)= س^٢ – $\sqrt{\text{س}}$ عند س = ١

نقطة التماس(١، ٠)

ميل المماس= قَ(١)

وبما أن قَ (س) = ٢س – $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

⟸م =ق(١)= ٢ – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

⟸ معادلة المماس:

ص– ٠ = $\frac{٣}{٢}$ (س–١)

٤) ص^٣ = (٣س+ ٥)^٢ عندما س = ١

نقطة التماس (١، ٤)

ميل المماس = $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(١،٤)}$ = ١

⟸ معادلة المماس: ص– ٤= ١(س–١)

٥) س^٢ + ص^٣= ٣ عند(٢، – ١)

نشتق ضمنياً

٢س + ٣ص^٢. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{-٢\text{س}}{٣\text{ص}^٢}$

∴ م= $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(٢،-١)}$ = $\frac{-٤}{٣}$

⟸ معادلة المماس: ص+١= $\frac{-٤}{٣}$ (س– ٢)

٦) ق(س)= س^٢–٥س +١ عندما ص = ٧

نجد س١؟؟!!

ق(س١) = ص١

س$_١^٢$– ٥ س١ + ١ = ٧

س$_١^٢$– ٥ س١ – ٦= ٠

(س١ – ٦) (س١+ ١) = ٠

⟸س١ = ٦ أو س١ = –١

∴ المماس الأول عند (٦، ٧) وميله قَ(٦)= ٧

⟸ معادلته: ص –٧ = ٧ (س– ٦)

المماس الثاني عند (–١، ٧) وميله قَ(–١)= –٧

⟸ معادلته: ص –٧ = – ٧ (س+١)

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصــــاع
الفرع العلمـــــــي

٧) ق(س)= (س+ ١)^{٣} − ٩س+ ١
والذي ميله ٣

نجد س$_{١}$ = قَ(س$_{١}$) = ٣ (الميل)

٣(س$_{١}$+ ١)^{٢} − ٩ = ٣

٣(س$_{١}$+ ١)^{٢} = ١٢

(س$_{١}$+ ١)^{٢} = ٤

(س$_{١}$+ ١) = ± ٢ $\Longleftarrow$ س$_{١}$=١، −٣

المماس الأول عند (١، ٠)

$\Longleftarrow$ معادلته: ص −٠ = ٣(س− ١)

المماس الثاني عند (−٣، ٢٠)

$\Longleftarrow$ معادلته: ص −٢٠ = ٣(س+٣)

٨) ق(س)= س^{٢}+ ٣س + ١
والذي زاوية ميله $\frac{٣\pi}{٤}$

بما أن زاوية الميل = $\frac{٣\pi}{٤}$

$\Longleftarrow$ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = −١

ولإيجاد س$_{١}$: قَ(س$_{١}$) = −١

٢س$_{١}$ + ٣ = −١

٢س$_{١}$ = −٤

$\boxed{\text{س}_{١} = −٢}$

∴ نقطة التماس (−٢، ق(−٢)) = (−٢، −١)

$\Longleftarrow$ معادلة المماس:

ص+ ١ = −١ (س+٢)

٩) ق(س)= س^{٣} + س + ٥ والذي يوازي
المستقيم ص − ٤س = ١

بما أن المماس // المستقيم

$\Longleftarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم = ٤

$\Longleftarrow$ قَ(س$_{١}$) = ٤

٣س^{٢} + ١ = ٤

$\Longleftarrow$ س$_{١}$ = ±١

∴ المماس الأول عند (١، ٧)

ومعادلته ص− ٧ = ٤ (س−١)

المماس الثاني عند (−١، ٣)

ومعادلته ص− ٣ = ٤ (س+١)

١٠) ق(س)= ٣س − س^{٢} والذي يعامد المستقيم
٢ص + ١ = س

بما أن المماس ⊥ المستقيم

$\Longleftarrow$ ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المستقيم}}$ = $\frac{-١}{\frac{١}{٢}}$ = − ٢

$\Longleftarrow$ قَ(س$_{١}$) = الميل

٣− ٢س$_{١}$ = −٢

−٢س$_{١}$ = −٥ $\Longleftarrow$ س$_{١}$= $\frac{٥}{٢}$

∴ نقطة التماس ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$)

معادلته: ص − $\frac{٥}{٤}$ = −٢(س− $\frac{٥}{٢}$)

١١) ق(س)= (س + ١) ^{٢} − ٦س+ ٢ وذلك عند تقاطع المنحنى مع محور السينات

$\Longleftarrow$عند تقاطعه مع محور السينات

$\Longleftarrow$ ص$_{١}$ = ٠

$\Longleftarrow$ق(س$_{١}$) = ٠

(س$_{١}$ + ١)^{٢} − ٦س$_{١}$ + ٢= ٠

س$_{١}$ = ١ أو س$_{١}$ = ٣

الأول: عند (١، ٠) و ميله = قَ(١) = −٢

ومعادلته: ص− ٠ = − ٢(س − ١)

الثاني: عند (٣، ٠) و ميله = قَ(٣) = ٢

ومعادلته: ص− ٠ = ٢(س −٣)

١٢) ق(س)= ٢س^{٢} − ٦س +٥ والذي يوازي محور السينات

ميل المماس = ميل محور السينات = صفر

⟸ قَ (س$_{١}$) = ٠

٤س$_{١}$ − ٦ = ٠ ⟸ س$_{١}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ نقطة التماس ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

⟸ معادلة المماس:

ص − $\frac{١}{٢}$ = ∴ (س − $\frac{٣}{٢}$)

ص = $\frac{١}{٢}$

١٣) لمنحنى ق(س) = س^{٢} − س + ١ وذلك عند تقاطعه مع المستقيم ص − س = ٤

نقطة التماس: نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم.

ق(س) = ص

س^{٢}− س + ١ = ٤ + س

س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠

(س− ٣) (س+ ١)= ٠

⟸ س$_{١}$ = ٣ أو س$_{١}$ = −١

المماس الأول: عند (٣، ٧) وميله قَ (٣) = ٥

ومعادلته ص− ٧ = ٥ (س − ٣)

المماس الثاني: عند (−١ ، ٣) وميله قَ (− ١) =−٣

ومعادلته ص− ٣ = −٣ (س+ ١)

١٤) لمنحنى ق(س)= س^{٢} + ١ والذي يمر بالنقطة (٠، ٠)

(٠، ٠) ليست نقطة التماس.لأن ق(٠)≠ ٠

⟸ نفرض أن نقطة التماس (س$_{١}$، س$_{٢}$)

⟸ ميل المماس =$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

قَ(س$_{١}$) = $\frac{ص_{١} - ٠}{س_{١} - ٠}$ لكن ص$_{١}$ = ق(س$_{١}$)

٢س$_{١}$ = $\frac{س_{١}^{٢} + ١}{س_{١}}$

⟸ ٢س$_{١}^{٢}$ = س$_{١}^{٢}$ + ١ ⟸ س$_{١}$ = ± ١

الأول: عند (١، ٢) و ميله =قَ(١) = ٢

ومعادلته: ص− ٢ = ٢(س − ١)

الثاني: عند (−١، ٢) و ميله = قَ(١) =−٢

ومعادلته: ص− ٢ = −٢ (س + ١)

١٥) لمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ١٨ والمرسوم من النقطة (٦، ٠)

(٦، ٠) ليست نقطة التماس ....؟؟؟!!

⟸ ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{(س_{١}، ص_{١})}$ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

= $\frac{- س_{١}}{ص_{١}}$ = $\frac{ص_{١} - ٠}{س_{١} - ٦}$

⟸ ص$_{١}^{٢}$ =− س$_{١}^{٢}$ +٦س$_{١}$

⟸ص$_{١}^{٢}$ + س$_{١}^{٢}$ = ٦س$_{١}$

لكن ص^{٢} + س^{٢} = ١٨

⟸ ١٨ = ٦س$_{١}$ ⟸ $\boxed{س_{١} = ٣}$

ص = ± ٣

الأول: عند (٣، ٣) و ميله = −١ ....

الثاني: عند (٣، −٣) و ميله = ١ ....

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

١٦) لمنحنى ق(س)= $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ عند تقاطعه مع المستقيم ص= ١– س

نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم تحقق المعادلتين

$\Longleftarrow$ $س_١^٢ + ص_١^٢ = ٢٥$ <u>و</u> $ص_١ = ١ - س_١$

$\Longleftarrow$ $س_١^٢ + (١ - س_١)^٢ = ٢٥$

$\Longleftarrow$ $س_١^٢ + س_١^٢ - ٢س_١ + ١ - ٢٥ = ٠$

$٢س_١^٢ - ٢س_١ - ٢٤ = ٠$

$(س_١ - ٤)(س_١ + ٣) = ٠$

$\Longleftarrow$ $س_١ = ٤$ <u>أو</u> $س_١ = -٣$

$\Longleftarrow$ $ص_١ = -٣$ $ص = ٤$

الأول: عند (٤ ،–٣) وميله $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٤،-٣)} = \frac{٤}{٣}$

ومعادلته $ص + ٣ = \frac{٤}{٣}(س - ٤)$

الثاني: عند (–٣ ، ٤) وميله $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(-٣،٤)} = \frac{٣}{٤}$

ومعادلته $ص - ٤ = \frac{٣}{٤}(س + ٣)$

١٧) لمنحنى $س^٢ + س ص = ص^٢ - ١$ والذي ميله $\frac{٤}{٣}$

الميل = $\frac{٤}{٣}$

$\Longleftarrow$ $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(س_١،ص_١)} = \frac{٤}{٣}$

وبما ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س + ص}{٢ص - س}$

$\Longleftarrow$ $\frac{٢س_١ + ص_١}{٢ص_١ - س_١} = \frac{٤}{٣}$ $\Longleftarrow$ $ص_١ = ٢س_١$

لكن: $س_١^٢ + س_١ ص_١ = ص_١^٢ - ١$

$\Longleftarrow$ $س_١^٢ + ٢س_١^٢ = ٤س_١^٢ - ١$

$\Longleftarrow$ $س_١^٢ = ١$

$\Longleftarrow$ $س_١ = \pm ١$

الأول: عند (١ ، ٢) و ميله $\frac{٤}{٣}$ ....

الثاني: عند (–١، –٢) و ميله $\frac{٤}{٣}$ ....

١٨) لمنحنى ق(س)= $(س - ٣)^٢$ والمرسوم من النقطة (٠،٠)

(٠،٠) ليست نقطة التماس ....؟؟؟!!

$\Longleftarrow$ ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\Longleftarrow$ $قَ(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$٢(س - ٣) = \frac{ص - ٠}{س - ٠}$

$٢(س - ٣) = \frac{(س - ٣)^٢}{س}$

$٢س(س - ٣) - (س - ٣)^٢ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$\Longleftarrow$ $س_١ = ٣$ أو $س_١ = -٣$

عند (٣ ، ٠) و م = ٠ $\Longleftarrow$ معادلته ص = ٠

عند (–٣، ٣٦) و م = –٦

$\Longleftarrow$ معادلته $ص - ٣٦ = -٦(س + ٣)$

مثال:

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س)= $س^٢ - س + ١$ عند س = ٢

✓الحل:

نقطة التماس (٢، ٣)

وميله = $قَ(٢) = ٣$

ومعادلته: $ص - ٣ = ٣(س - ٢)$

أما ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{ميل المماس} = \frac{-١}{٣}$

ومعادلته: $ص - ٣ = \frac{-١}{٣}(س - ٢)$

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

مثال:

جد معادلة العمودي على منحنى

ق(س)= ٣س − $\frac{٨}{\sqrt{س}}$ عندما س = ٤

الحل:

نقطة التماس (٤، ٨)

ميل المماس = قَ(٤) = $\frac{٧}{٢}$

لأن قَ(س) = ٣ + $\frac{٤}{\sqrt{س^٣}}$

⟸ ميل العمودي على المماس= $\frac{-٢}{٧}$

ومعادلته ص− ٨ = $\frac{-٢}{٧}$ (س− ٤)

مثال:

جد معادلة العمودي على المماس

لمنحنى ق(س) = س^٢ والذي يمر بالنقطة (٠، $\frac{٩}{٢}$)

الحل:

(٠، $\frac{٩}{٢}$) ليست نقطة على التماس؟!

ميل العمودي = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\frac{-١}{قَ(س_١)}$ = $\frac{ص_١ - \frac{٩}{٢}}{س_١ - ٠}$ لكن ص$_١$ = ق(س$_١$)

$\frac{-١}{٢س_١}$ = $\frac{س_١^٢ - \frac{٩}{٢}}{س_١}$

٢س$_١^٣$ − ٩س$_١$ = − س$_١$

٢ س$_١^٣$ −٨ س =٠

٢س (س$_١^٢$ −٤) =٠

⟸ س$_١$=٠ أو ± ٢

*عند (٠، ٠) وميله = $\frac{-١}{٠}$ ومعادلته س =٠

*عند (٢ ،٤) وميله = $\frac{-١}{٤}$

ومعادلته ص−٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س− ٢)

*عند النقطة (−٢، ٤) وميله = $\frac{١}{٤}$

ومعادلته ص−٤ = $\frac{١}{٤}$ (س+٢)

مثال:

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى

ق(س)= س − حا٢س في[٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

والذي يوازي محور الصادات.

الحل:

بما أن العمودي // محور الصادات

⟸ المماس // محور السينات

⟸ ميل المماس = ٠

قَ(س$_١$) = ٠

١−٢ جتا ٢ س =٠

⟸ س$_١$ = $\frac{\pi}{٦}$ ⟸ ص$_١$= $\frac{\pi}{٦}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⟸ معادلة المماس : ص = $\frac{\pi}{٦}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

اما معادلة العمودي س= $\frac{\pi}{٦}$

نتيجة هامة

معادلة المماس الأفقي لمنحنى ق(س)
عند النقطة(س$_١$،ص$_١$) هي ص =ص$_١$
ومعادلته العمودي عليه هي س= س$_١$

أسئلة الثوابت

جد قيمة أ، ب، ج فيما يلي:

١) اذا كان ميل المماس لمنحنى

ق(س) = س^٢ + أس +٣ب عند (−١ ، −٢)

يساوي −٣

الحل :

نقطة التماس (−١ ، −٢) ⟸ق(−١) =−٢

⟸١− أ+ ٣ب =−٢

$\boxed{- أ + ٣ب = -٣}$ ...... (١)

وميل المماس = −٣

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

الميل = قَ (−١) = −٣

٢(−١) + أ = −٣

−٢ + أ = −٣

$\boxed{\text{أ = −١}}$ نعوض في (١)

١ + ٣ب = −٣

٣ب = −٤ ⟸ ب = $\frac{-٤}{٣}$

٢) إذا كان ص + ٢س = ٠، مماساً لمنحنى ق(س)= س^{٣}+أس^{٢}+ ب س+ ٧،عند النقطة (١، ق(١))

✓الحل :

بما أن ص= −٢س مماس لمنحنى ق(س) عند (١،ق(١))

فإن ق(١) = ص(١)

١+ أ + ب + ٧ = −٢

أ + ب = −١٠ .... (١)

و قَ(١) = ميل المستقيم

٣+ ٢أ + ب = −٢

٢أ + ب = −٥ ....(٢)

تدريب:

٣) إذا كان المستقيم ٢ص + س=أ عمودياً على منحنى ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س+ ١ عند (−١، ق(−١))

الجواب: أ= $\frac{١}{٣}$ ، ب = $\frac{-١}{٣}$

٤) إذا كان محور السينات مماساً لمنحنى ق(س)= أس^{٢} + ٤س + ١

✓الحل:

نقطة التماس (س$_{١}$،٠)

⟸ق(س$_{١}$)=٠

أس$_{١}^{٢}$ + ٤س$_{١}$ + ١ = ٠ .... (١)

و ميل المماس= ٠

قَ(س$_{١}$) =٠

٢أ س$_{١}$ + ٤ = ٠ ⟸ س$_{١}$ = $\frac{-٢}{أ}$

نعوض في (١)

$\frac{٤}{أ}$ − $\frac{٨}{أ}$ + ١ =٠

⟸ $\boxed{\text{أ = ٤}}$

٥) إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = أس^{٢}+ س+٣ يمر بالنقطتين (٠ ، −١) (−٢، ٥)

✓الحل :

نجد معادلة المماس

أ = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = −٣

⟸ص +١ = −٣ (س − ٠)

$\boxed{\text{ص = −٣ س −١}}$

وعند نقطة التماس (س$_{١}$، ص$_{١}$)

فإن ق(س$_{١}$) = ص (س$_{١}$)

أس$_{١}^{٢}$ + س$_{١}$ + ٣ = −٣س −١

أس$_{١}^{٢}$ + ٤س$_{١}$ +٤ = ٠ ...... (١)

و قَ(س$_{١}$) = الميل

٢أس$_{١}$ + ١ = −٣ ⟸ س = $\frac{-٢}{أ}$

وعند التعويض في (١)

نجد أن $\boxed{\text{أ = ١}}$

٦) اذا كان ق(س) = أس^{٢}+ ب س+ جـ و ﻫ(س) = جـ س − س^{٢} متماسين عند (٢ ، ٠)

✓الحل :

الاقترانين المتماسين عند (٢ ،٠)

⟸ ق(٢) = ﻫ (٢) = ٠ و قَ(٢) = ﻫَ (٢)

ﻫ(٢) =٠⟸ ٢جـ − ٤ =٠ ⟸ $\boxed{\text{جـ = ٢}}$

ق(٢) =٠ ⟸ ٢أ + ب = −١....... (١)

قَ (٢) = ﻫَ (٢)⟸ −٢= ٤أ + ب....... (٢)

وعند حل النظام المكون من المعادلتين نجد أن

$\boxed{\text{أ} = \frac{-١}{٢}}$ وأن $\boxed{\text{ب = ٠}}$

٧) اذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق (س)= س^{٢} +أ، عند (١ ،ب) يقطع محور السينات عندما س= −١

✓الحل: (١، ب) نقطة التماس

⟸ ق(١) = ب

⟸ ١ + أ = ب .... (١)

(−١، ٠) نقطة خارجية

⟸ ميل المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

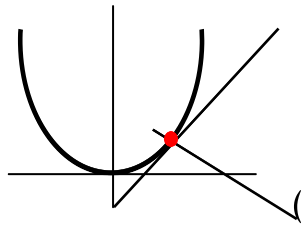
قَ(١) = $\frac{٠ - ب}{-١ - ١}$ ⟸ ٢ = $\frac{-ب}{-٢}$

⟸ $\boxed{\text{ب = ٤}}$ ، $\boxed{\text{أ = ٣}}$

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع

مثال:

جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س)= س^{2} ، عندما س=٢ ومحور السينات.



✓الحل:

نقطة التماس (٢، ٤)

المقطع السيني للماس (م، ٠)

⟸ ميل المماس= $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\text{ق}'(٢) = \frac{٤ - ٠}{٢ - \text{م}} = ٤$ ⟸ $\boxed{\text{م} = ١}$

القطع السيني العمودي على المماس (ب، ٠)

⟸ ميل العمودي= $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-١}{٤} = \frac{٤ - ٠}{٢ - \text{ب}}$ ⟸ $\boxed{\text{ب} = ١٨}$

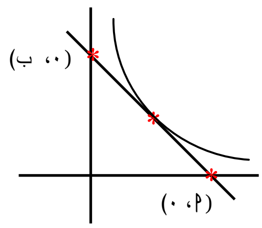
∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ (١٨ − ١) × ق(٢)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة

مثال:

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس لمنحنى ص= $\frac{٢}{\text{س}}$ عند أي نقطة في الربع الأول ومحوري الاحداثيات تساوي ٤ وحدات مربعة .



✓الحل:

نقطة التماس (س١ ، $\frac{٢}{\text{س}_١}$)

المقطع السيني للمماس (م، ٠)

⟸ ميل المماس= $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-٢}{\text{س}_١^{٢}} = \frac{\frac{٢}{\text{س}_١} - ٠}{\text{س}_١ - \text{م}}$ ⟸ $\boxed{\text{م} = ٢\text{س}_١}$

المقطع الصادي للمماس (٠، ب)

⟸ ميل المماس= $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-٢}{\text{س}_١^{٢}} = \frac{\frac{٢}{\text{س}_١} - \text{ب}}{\text{س}_١ - ٠}$ ⟸ $\boxed{\text{ب} = \frac{٤}{\text{س}_١}}$

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٢س١ × $\frac{٤}{\text{س}_١}$ = ٤وحدات مربعة

تدريب:

جد مساحة المثلث المكون من المماسين المرسومين لمنحنى س^{2}+ ص^{2} = ٥، من النقطة (٠، ٥) والخط الواصل بين نقطتي التماس.

✓**الجواب: م = ٨ وحدات مربعة**

مثال:

جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠، ١) لمنحنى ق(س) = س^{3} + ٣ والعمودي عليه والمستقيم ص = ١

✓الحل:

(٠،١) ليست نقطة التماس ....؟؟؟!!

نفرض أن نقطة التماس (س١ ، ص١)

⟸ ميل المماس= $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}_١) = \frac{\text{ص}_١ - ١}{\text{س}_١ - ٠}$

$٣\text{س}_١^{٢} = \frac{\text{س}_١^{٣} + ٣ - ١}{\text{س}_١}$ ⟸ $\boxed{\text{س}_١ = ١}$

∴ نقطة التماس (١، ٤)

⟸ ارتفاع المثلث = ٣وحدات

نقطة تقاطع العمودي مع ص= ١ هي (س٢ ، ١)

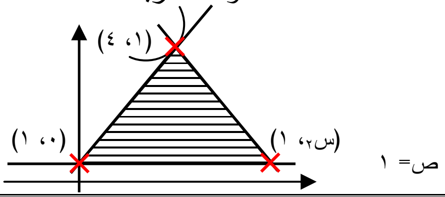
ميل العمودي = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-١}{٣} = \frac{٤ - ١}{١ - \text{س}_٢}$ ⟸ س٢ = ١٠

⟸ طول قاعدة المثلث = ١٠ وحدات

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ×١٠ × ٣ = ١٥ وحدة مربعة

توضيح



التفسير الفيزيائي للمشتقة

ذكرنا سابقاً أنه إذا كانت ف(ن) تمثل المسافة المقطوعة فإن السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

ولكن عندما $ن_2 \longrightarrow ن_1$

فإن السرعة اللحظية = ع(ن) = فَ (ن)

وكذلك إذا كانت ع(ن) تمثل سرعة الجسم فإن التسارع المتوسط = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

وعندما $ن_2 \longrightarrow ن_1$

فإن التسارع اللحظي = ت(ن) = عَ (ن)= فً(ن)

مثال(١):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^3$ + ن + ١٥

حيث: ف المسافة بالأمتار و ن الزمن بالثواني، أوجد

١) السرعة المتوسطة في [٠، ١].
٢) سرعة الجسيم عندما ن = ٢ ثانية.
٣) التسارع المتوسط في [٠، ٢].
٤) تسارع الجسيم عند الثانية الثانية.

✓الحل:

ف(ن) = $ن^3$ + ن +١٥

ع(ن) = $٣ن^2$ + ١

ت(ن) = ٦ ن

١) $\bar{ع}$ = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف (١) - ف (٠)}{١ - ٠}$ = ٢م/ث

٢) ع(٢) = $٣(٢)^2$ + ١ = ١٣ م/ ث

٣) $\bar{ت}$ = $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ = $\frac{ع(٢) - ع(٠)}{٢ - ٠}$ = ٦م /$ث^2$

٤) ت(٢) = ٦(٢) = ١٢ م/$ث^2$

مثال(٢):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ $ن^3$ – $ن^2$ –٣ن + ١٥ ، أوجد

١) سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.
٢) تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته .

✓الحل:

ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ $ن^3$ – $ن^2$ – ٣ن + ١٥

ع(ن) = $ن^2$ – ٢ن – ٣

ت(ن) = ٢ن – ٢

١) $ع(ن)\Big|_{ت=٠}$

٢ن – ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{ن = ١}$

∴ ع(١) = ١ – ٢ – ٣ = –٤م/ث

٢) $ت(ن)\Big|_{ع=٠}$

$ن^2$ – ٢ن –٣ = ٠

(ن– ٣) (ن+ ١)= ٠ ⟸ $\boxed{ن=٣}$

∴ ت(٣) = ٢(٣) – ٢ = ٤م/$ث^2$

مثال (٣):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف= $ن^3$ ،

إذا كانت سرعته عندما ن = ٢ تساوي سرعته المتوسطة في [٠، م] فما قيمة م

✓الحل:

ع (٢) = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

$٣(٢)^2$ = $\frac{ف(م) - ف(٠)}{م - ٠}$

١٢ = $\frac{(م)^3 - ٠}{م - ٠}$

١٢ = $(م)^2$ ⟸ م = $\sqrt{١٢}$

تدريب:

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف= $(ن+١)^3$ – ٥ن + ٧ ،
جد تسارع الجسيم عندما تصبح سرعته ٧م/ث

الجواب: ١٢م/$ث^2$

مثال(٤):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف(ن) = جا^{2}ن: ن ∋ [٠، $\frac{\pi}{2}$] ، أوجد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه .

✓الحل:

ف(ن) = (جان) ^{2}

ع(ن) = ٢جان جتان =جا٢ن

ت(ن) = ٢جتا ٢ن

وعندما ت= ٠ ⟸ ٢ن = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ ن = $\frac{\pi}{4}$

∴ ع ($\frac{\pi}{4}$) = جا $\frac{\pi}{2}$ = ١م/ ث

مثال(٥):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف(ن) = جا^{4}ن، أوجد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه لأول مرة بعد انطلاقه .

✓الحل:

ف(ن) = (جان)^4

ع(ن) = ٤(جان)^3 × جتان

ت(ن) = −٤جا^{4}ن + ١٢جا^{2}ن جتا^{2}ن

وعندما ت = ٠

٤جا^{4}ن − ١٢جا^{2}ن جتا^{2}ن = ٠

٤جا^{2}ن (جا^{2}ن −٣جتا^{2}ن) = ٠

إما جان = ٠ ⟸ ن = ٠ ، π ،....

أو جا^{2}ن −٣ جتا^{2}ن = ٠ ⟸ ظا ن = ± $\sqrt{3}$

⟸ ن = $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$،.......

∴ المطلوب: ع ($\frac{\pi}{3}$) = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ م/ ث

مثال(٦):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف(ن) = $\frac{ن^3}{3}$ − $\frac{5}{2}$ ن^2 + ٣٧

جد التسارع عندما تكون السرعة −٦م/ث.

✓الحل:

ع(ن) = ن^2 − ٥ ن

ت(ن) = ٢ن− ٥ وعندما ع = −٦

ن٢ − ٥ ن = −٦ ⟸ ن٢ −٥ ن + ٦ = ٠

⟸ ن = ٢، ٣

ت(٢) = −١ م/ث^2

ت(٣) = ١ م/ث^2

مثال (٧):

يتحرك جسيم وفق العلاقة

ف(ن) = $\frac{1}{4}$ (ن+٢)^4 −٦ ن^2 جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث.

✓الحل:

ف = $\frac{1}{4}$ (ن+٢)^4 −٦ ن^2

ع= (ن +٢)^3 −١٢ ن

ت= ٣(ن+٢)^2 − ١٢

وعندما ع = ٨٩

⟸ ن^3 + ٦ن^2 + ١٢ن + ٨ − ١٢ن = ٨٩

⟸ ن^3 + ٦ن^2 −٨١ = ٠

ن = أحد عوامل الحد المطلق

وبما أن (٣)^3 + ٦(٣)^2 − ٨١ = ٠

⟸ $\boxed{ن = ٣}$ بالقسمة

	ن^3	ن^2	ن^1	ن^0
٣	١	٦	٠	−٨١
		٣	٢٧	٨١
	١	٩	٢٧	٠

⟸ن^2 + ٩ن + ٢٧ ≠ ٠

لأن المميز < ٠

∴ ت (٣) = ٦٣م / ث^2

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع — الفرع العلمـــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

مثال(٨):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{١}{٣}\text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٢٤\text{ن} + ١٥$$

بين أن الجسم توقف مرتين وغير اتجاهه في كل مرة.

$$\text{ع}(\text{ن}) = \text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٢٤$$

عندما ع = ٠

$$\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٢٤ = \text{صفر}$$

⟸ ن= ٤ أو ن = ٦

وهذا يدل على أن الجسم توقف مرتين

أما بالنسبة لاتجاه الجسيم

فندرس اشارة ع (ن)

٠ +++ ٤ ---- ٦ +++

وبما أن إشارة السرعة تغيرت مرتين فإن هذا يدل على تغير اتجاه الجسيم

مثال(٩):

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

ف(ن) = $\sqrt{\text{ن}}$ (٢٧ − ن) بين أن الجسيم يبدأ بالعودة بعد ٩ ثوان من انطلاقه.

✓الحل:

يبدأ بالعودة ⟸ يغير اتجاهه

⟸ ندرس الاشارة

$$\text{ع}(\text{ن}) = \sqrt{\text{ن}} \times -١ + (٢٧ - \text{ن}) \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}$$

$$= -\sqrt{\text{ن}} + \frac{٢٧ - \text{ن}}{٢\sqrt{\text{ن}}} = ٠$$

$$= \frac{-٢\text{ن} + ٢٧ - \text{ن}}{٢\sqrt{\text{ن}}} = ٠$$

$$\boxed{\text{ن} = ٩}$$

٠ +++++++ ٩ ----

لاحظ أن الاتجاه تغير عندما ن = ٩

⟸ يبدأ بالعودة عندما ن = ٩ ثوان

مثال(١٠):

يسير جسيم بسرعة تعطى بالعلاقة ع = $\frac{\text{ن}}{\text{ف}(\text{ن})}$

جد تسارع الجسيم عندما ن = ٣

علماً بأن سرعته عندئذٍ $\frac{١}{٢}$ م/ث

✓الحل:

$$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}}{\text{ف}(\text{ن})}$$

$$\text{ت}(\text{ن}) = \frac{\text{ف}(\text{ن}) \times ١ - \text{ن} \times \text{ع}(\text{ن})}{(\text{ف}(\text{ن}))^{٢}}$$

$$\text{ت}(٣) = \frac{\text{ف}(٣) \times ١ - ٣ \times \text{ع}(٣)}{(\text{ف}(٣))^{٢}}$$

وبما أن ع(٣) = $\frac{١}{٢}$

$$\frac{٣}{\text{ف}(٣)} = \frac{١}{٢} \Longleftarrow \text{ف}(٣) = ٦$$

$$\therefore \text{ت}(٣) = \frac{٦ - ٣ \times \frac{١}{٢}}{٣٦} = \frac{١}{٨}\ \text{م/ث}^{٢}$$

☜ **تدريب:**

يسير جسيم بحيث تعطى سرعته بالعلاقة

ع = $\sqrt{\text{أ} \cdot \text{ف}(\text{ن})}$ جد قيمة أ علماً بأن تسارعه ٨م/ث^{٢}

مثال (١١):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ع^{٢}= ٨− ف^{٣}(ن) جد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

✓الحل:

$$\text{ع}^{٢}(\text{ن}) = ٨ - \text{ف}^{٣}(\text{ن})$$

$$٢\text{ع}(\text{ن}) \times \text{ت}(\text{ن}) = -٣\text{ف}^{٢}(\text{ن}) \times \text{ع}(\text{ن})$$

$$\text{ت}(\text{ن}) = \frac{-٣\text{ف}^{٢}(\text{ن})}{٢}$$

$$\text{وعندما ع} = ٠ \Longleftarrow ٨ - \text{ف}^{٣}(\text{ن}) = ٠$$

$$\Longleftarrow \text{ف}(\text{ن}) = ٢$$

$$\therefore \text{ت}(\text{ن})\Big|_{\text{ع}=٠} = \frac{-٣ \times ٤}{٢} = -٦\text{م/ث}^{٢}$$

☜ **تدريب:**

يسير جسيم حسب العلاقة ف =ن^{٣} + ٣ن^{٢}− ٢١ن+ ٢٥ جد المسافة المقطوعة عندما تتساوي سرعة الجسيم مع تسارعه.

الجواب ١٦م

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

مثال(١٢):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف= ن^{٢}– ٤ن + ٧

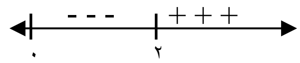
جد الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة

✓الحل:

ع = ٢ن – ٤

٢ن – ٤= ٠ ⟸ $\boxed{\text{ن= ٢}}$

ع (ن)



∴ ع(ن) < ٠ لكل ن ∋ [٠، ٢)

مثال(١٣):

يتحرك جسيم حسب العلاقة

ف= $\frac{١}{٤}$ ن^{٤}– $\frac{٧}{٣}$ن^{٣} +٨ن^{٢}+١٠

جد تسارع الجسيم عندما سرعته ١٢م/ث

✓الحل:

ع= ن^{٣}– ٧ن^{٢} +١٦ن =١٢

ن^{٣}– ٧ن^{٢} +١٦ن – ١٢ =٠

⟸ بالتجريب: ن=٢ وبالقسمة التركيبية

نجد أن ن = ٣

⟸ ت(٢) = ٠م/ث^{٢}

ت(٣) = ١م/ث^{٢}

مثال(١٤):

سقط جسيم سقوطاً حراً من ارتفاع ١٠٠م عن سطح الأرض فكانت المسافة المقطوعة ف=٤ن^{٢} جد:

١) ارتفاع الجسيم عن سطح الأرض بعد ثانيتين.

٢) سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ٣٦م.

٣) سرعة الجسيم لحظة وصوله سطح الأرض.

✓الحل:

١) ارتفاع الجسيم عن سطح الأرض بعد ثانيتين.

ف(٢) = ٤(٢)^{٢} =١٦م

⟸ ارتفاعه = ١٠٠ – ١٦ = ٨٤م

٢)) سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ٣٦م.

عندما ارتفاعه ٣٦م

⟸ ف= ٦٤

٤ن^{٢} = ٦٤ ⟸ $\boxed{\text{ن =٤}}$

∴ع(٤) = ٨(٤) = ٣٢ م/ث

٣) سرعة الجسيم لحظة وصوله إلى سطح الأرض

عند وصوله سطح الأرض

ف= ١٠٠

٤ن^{٢}= ١٠٠ ⟸ $\boxed{\text{ن = ٥}}$

∴ ع(٥)= ٨(٥) =٤٠م/ث

مثال(١٥):

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى فكان أرتفاعه

ف= ٤٠ن– ٤ن^{٢} جد

١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم

٢) سرعة الجسيم عند اصطدامه بسطح الأرض

٣) إرتفاع الجسيم عندما يفقد نصف سرعته التي انطلق بها.

✓الحل:

١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم

ع= ٠

٤٠ – ٨ ن ⟸ $\boxed{\text{ن = ٥}}$

∴ أقصى ارتفاع = ف(٥) = ١٠٠م

٢) سرعة الجسيم عند اصطدامه بسطح الأرض

عند اصطدام الجسم بسطح الأرض

⟸ ف = ٠ ∴

٤٠ ن – ٤ن^{٢} = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ن= ١٠}}$

⟸ ع(١٠) = –٤٠م/ث

٣) إرتفاع الجسيم عندما يفقد نصف سرعته التي انطلق بها.

⟸ ع(ن) = $\frac{١}{٢}$ ع (٠) = ٢٠

⟸ ٤٠ – ٨ن = ٢٠

٨ن = ٢٠ ⟸ ن = $\frac{٥}{٢}$

∴ ف($\frac{٥}{٢}$) = ٧٥م

مثال(١٦)

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى فكان ارتفاعه:

ف= أن– ٤ن^{٢} ، جد قيمة أ علماً بان أقصى ارتفاع وصل إليه هو ٦٤م

✓الحل:

عند أقصى ارتفاع

ع= ٠ و ف =٦٤

م – ٨ن= ٠

ن = $\frac{م}{٨}$ ⟸ ف ($\frac{م}{٨}$) = ٦٤

⟸ $\frac{م^{٢}}{٨}$ – $\frac{م^{٢}}{١٦}$ = ٦٤

⟸ م^{٢} = ٦٤ × ١٦

⟸ م = ٣٢.....؟!

مثال(١٧):

قذف جسيم من نقطة عن سطح الأرض رأسياً إلى أعلى فكان ارتفاعه ف= ١٦ن– ن^{٢} وبعد ثانيتين قذف جسيم آخر من نفس النقطة فكان إرتفاعه ف=٢٤ن – ن^{٢}،

أوجد:

سرعة كلا الجسمين عندما يكونا على نفس الارتفاع.

✓الحل:

عندما يكونا على نفس الارتفاع

⟸ ف$_{١}$(ن) = ف$_{٢}$(ن–٢)

١٦ن – ن^{٢} = ٢٤ (ن–٢) – (ن–٢)^{٢}

١٦ن – ن^{٢} = ٢٤ن – ٤٨ – ن^{٢} + ٤ن – ٤

١٦ن = ٢٨ن – ٥٢

٥٢ = ١٢ ن ⟸ن = $\frac{١٣}{٣}$

⟸ ع$_{١}$ ($\frac{١٣}{٣}$)= $\frac{٢٢}{٣}$ م/ث ، ع$_{٢}$($\frac{٧}{٣}$) = $\frac{٥٨}{٣}$ م/ث

مثال(١٨):

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من سطح بناية ترتفع٤٠م عن سطح الأرض فكان ارتفاعه: ف= ٣٢ن – ٨ن^{٢}

أوجد:

١) أقصى ارتفاع وصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

٢) سرعة الجسم عند اصطدامه بسطح الأرض .

✓الحل:

١) أقصى ارتفاع وصل إليه الجسيم عن سطح الأرض.

عند أقصى ارتفاع: ع (ن) =٠

⟸ ٣٢ – ١٦ن = ٠

⟸ن = ٢

∴ أقصى إرتفاع للجسم عن سطح الأرض

هو ف(٢) = ٣٢(٢) – ٨(٢)٢ + ٤٠

⟸ = ٧٢ م

٢) سرعة الجسم عند اصطدامه بسطح الأرض .

عند اصطدامه بسطح الأرض

⟸ف= ∴

٣٢ن – ٨ن^{٢} + ٤٠ = ٠

– ٨ن^{٢} + ٣٢ن + ٤٠= ٠

ن^{٢}– ٤ن – ٥= ٠

(ن–٥) (ن+١)= ٠ ⟸ ن = ٥

∴ ع(٥) = ٣٢ – ١٦ (٥)

= ٣٢ – ٨٠ = –٤٨ م/ث

مثال(١٩):

قذف جسيم من سطح بناية رأسياً إلى أعلى فكان ارتفاعه ف= ٢٧ن – ٣ن^{٢} فاصطدم بسطح الأرض بسرعة ٣٣ م/ث ، جد ارتفاع البناية.

✓الحل:

عند اصطدام الجسم بسطح الأرض

فإن ع= –٣٣ و ف= ∴

٢٧ – ٦ن = –٣٣

٢٧ + ٣٣ = ٦ن

٦٠ = ٦ن

$\boxed{ن = ١٠}$

وعلى فرض أن إرتفاع البناية م

⟸ ف(ن)= ٢٧ن– ٣ن^{٢} + م (ارتفاع الجسم عن سطح الأرض)

⟸ف(١٠)=٠

٢٧٠– ٣٠٠ + م = ٠

⟸ $\boxed{م =٣٠م}$

تدريب:

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٢٠م فكان ارتفاعه ف(ن)= ٤٠ن–٥ن^{٢}

بين أن الجسيم يفقد نصف سرعته عندما يكون على ارتفاع ١٨٠م عن سطح الأرض.

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

مثال(٢٠):

سقط جسيم من ارتفاع ١٠٠م فكانت المسافة المقطوعة ف= ٥ن^{٢} وفي نفس اللحظة قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض فكان ارتفاعه ف= ٥٠ن − ٥ن^{٢} جد سرعة الجسمين عندما يكونا على نفس الارتفاع.

✓الحل:

عندما يكون ارتفاع الأول= ارتفاع الثاني

١٠٠− ٥ن^{٢} = ٥٠ن− ٥ن^{٢}

١٠٠ = ٥٠ن $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{ن = ٢}}$

سرعة الأول: ع$_{١}$ (٢) = ١٠(٢) = ٢٠م/ث

سرعة الثاني: ع$_{٢}$(٢) = ٥٠ − ١٠(٢)

= ٣٠ م /ث

مثال(٢١):

افلت شخص جسيماً من سطح بناية فكان يقطع مسافة ف=٤ن^{٢} ، جدا ارتفاع البناية علماً بأن سرعته عند اصطدامه بسطح الارض ٣٢م/ث

✓الحل:

إذا وصل الجسم سطع الأرض في زمن مقداره ن$_{١}$ فإن:

$\Longleftarrow$ ع (ن$_{١}$)=٣٢   و ف(ن$_{١}$)= ارتفاع البناية

$\Longleftarrow$ ٨ن$_{١}$= ٣٢

$\boxed{\text{ن}_{١}\text{ =٤}}$

$\Longleftarrow$ ف(٤) = ارتفاع البنايه =٤(٤)^{٢}

= ٤ × ١٦

=٦٤م

تدريب:

من سطح بنايه أفلت شخص جسيماً فكانت المسافة التي يقطعها الجسم ف=١٦ن^{٢} ، وفي نفس اللحظه رمى شخص جسيماً لأسفل حسب العلاقه ف=٢٠ن+١٦ن^{٢} جد ارتفاع البنايه علماً بأن الجسم الأول وصل سطح الارض بعد $\frac{١}{٢}$ ثانيه من وصول الجسم الثاني.

الجواب: ٣٦ م

المعدلات المرتبطة بالزمن

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ فيما يلي:

١) ص= ن^{٣} $\Longrightarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٣ن^{٢}

٢) ص= ٢س^{٢}+٥ $\Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ =٤س. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

٣) ص=ع^{٢}+ س^{٢} $\Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ =٢ع . $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ +٢س. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

٤) ص=س^{٢}.ع $\Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = س^{٢}. $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ +ع×٢س. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

٥) ص= π. نق^{٢} $\Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٢π . نق. $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

مثال:

تتحرك النقطه م على منحنى: ص= س^{٢} + ٣س +١ بحيث يتغير الاحداثي السيني لها بمعدل ٣سم/د جد معدل التغير في ص عندما س=١

✓الحل

معدل التغير في س $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٣سم/ د

معدل التغير في ص عندما س= ١

هو $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١}$

وبما أن ص= س^{٢}+٣س+١

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ =٢ س× $\frac{\text{دس}}{\text{د ن}}$ + ٣× $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\Longleftarrow \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١}$ = ٢× ١× ٣+ ٣×٣

= ١٥سم / د

خطوات حل المسأله

١− الرسم ان أمكن مع تحديد الثوابت والمتغيرات.

٢− نحدد العلاقه الرئيسه للمسأله:

وهي التي تربط المطلوب بالمعطيات.

٣− نشتق العلاقه ضمنياً بالنسبه للزمن وذلك بعد تجهيزها..؟!

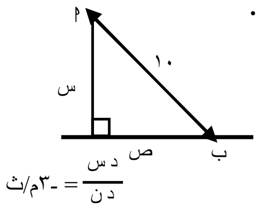
٤− نعوض قيم المتغيرات.

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

الفرع العلمـــــــي

أمثلة

١) سلم طوله ١٠م يرتكز طرفه ﺃ على حائط ، وطرفه ب على الارض بدأ طرفهﺃ بالنزول نحو الارض بمعدل ٣م/ ث، جد معدل ابتعاد طرفه ب عن الحائط عندما يكونﺃ على بعد ٦م عن الارض.



✓الحل:

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١٠٠$

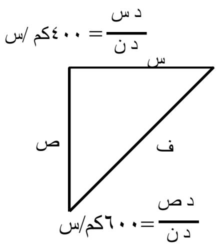
$\text{ص}^2 = ١٠٠ - \text{س}^2$

$\text{ص} = \sqrt{١٠٠ - \text{س}^2}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٠ - ٢\text{س} . \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{س}^2}}$

$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=٦} = \frac{-٦ \times -٣}{\sqrt{١٠٠ - ٣٦}} = \frac{١٨}{٨} = \frac{٩}{٤}$ م/ث

٢)غادرت طائرة المطار الساعه السابعه صباحاً متجهة نحو الشرق بسرعه ٤٠٠كم/س ، وفي الساعه الثامنه غادرت طائره من نفس المكان متجهة نحو الجنوب السرعه ٦٠٠كم/ س، جد بمعدل التغير في المسافه بين الطائرتين عند الساعه التاسعه.



✓الحل:

المطلوب: $\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{الساعة التاسعة}}$

$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س}. \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص}. \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}}$

وعند الساعة التاسعة س= ٤٠٠× ٢ = ٨٠٠كم

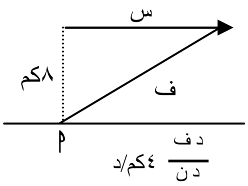
س= ٦٠٠× ١ = ٦٠٠كم

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٨٠٠ \times ٤٠٠ + ٦٠٠ \times ٦٠٠}{\sqrt{(٨٠٠)^2 + (٦٠٠)^2}} = ٦٨٠$كم/س

٣)تطير طائرة بسرعة ثابتة وفي خط مستقيم على ارتفاع ٨كم عن سطح الارض مبتعدة عن النقطة ﺃ بمعدل ٤كم/د جد سرعة الطائرة عندما تصبح على بعد ١٠كم عن ﺃ

✓الحل:

سرعة الطائرة = $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$



$\text{س}^2 + ٦٤ = \text{ف}^2$

$\text{س}^2 = \text{ف}^2 - ٦٤$

$\text{س} = \sqrt{\text{ف}^2 - ٦٤}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{ف}. \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{ف}^2 - ٦٤}}$

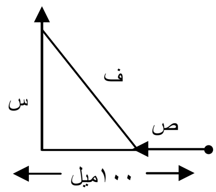
$\left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ف}=١٠} = \frac{١٠ \times ٤}{\sqrt{١٠٠ - ٦٤}} = \frac{٤٠}{٦} = \frac{٢٠}{٣}$ كم/د

٤) سفينتان البعد بينهما ١٠٠ميل ﺃ غرب ب وتسير شمالاً بسرعة ٣٠ميل/س أما ب تسير غربا بسرعة ٤٠ميل/ س جد معدل التغير في المسافة بينهما بعد مرور ساعتين من انطلاقهما

✓الحل:

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣٠$ ميل/ س

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤٠$ميل /س



المطلوب: $\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن}=٢}$

$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + (١٠٠ - \text{ص})^2$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + (١٠٠ - \text{ص})^2}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س}. \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢(١٠٠ - \text{ص}) \times - \frac{\text{دص}}{\text{د ن}}}{\sqrt{\text{س}^2 + (١٠٠ - \text{ص})^2}}$

بعد ساعتين: س = ٣٠ × ٢ = ٦٠ ميل

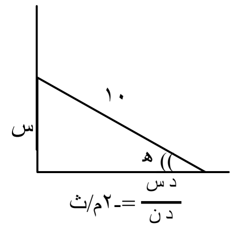
ص = ٤٠ × ٢٠ = ٨٠ ميل

$\therefore \left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن}=٢} = \frac{٦٠ \times ٣٠ - ٢ \times ٢٠ \times ٤٠}{\sqrt{(٦٠)^2 + (٢٠)^2}}$

$= \frac{١٨٠٠ - ١٦٠٠}{\sqrt{٣٦٠٠ + ٤٠٠}}$

$= \frac{٢٠٠}{٢٠\sqrt{١٠}} = \sqrt{١٠}$ ميل/س

٥) سُلم طوله ١٠م يرتكز على حائط، بدأ طرفه الذي على الحائط بالإنزلاق بمعدل ٢م/ث ، جد معدل التغير في الزاوية بين السُلم والأرض عندما يكون على أرتفاع ٦م عن الأرض.



✓الحل:

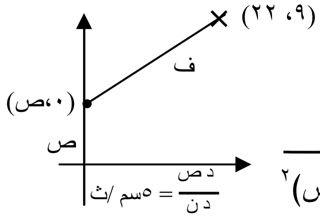
$\text{جاهـ} = \frac{\text{س}}{١٠}$

$\text{جتاهـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{١٠}$

$\frac{٨}{١٠} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-٢}{١٠}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-٢}{٨} = -\frac{١}{٤}$ راد / ث

٦) بدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور الصادات الموجب بسرعة ٥سم/ ث، جد معدل التغير في المسافة بينة وبين النقطة (٩،٢٢) بعد ثانيتين من انطلاقة.



✓الحل:

المطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٢ \text{ ثانية}}$

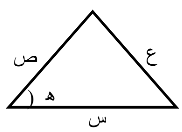
$\text{ف} = \sqrt{(٩-٠)^٢ + (٢٢-\text{ص})^٢}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٠ + ٢(٢٢-\text{ص}) \times -\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٨١ + (٢٢-\text{ص})^٢}}$

وبعد ثانيتين: ص= ٥× ٢ = ١٠سم

$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ص}=١٠} = \frac{-١٢ \times ٥}{\sqrt{٨١ + ١٤٤}} = \frac{-٦٠}{١٥} = -٤$ سم/ث

٧) في المثلث المجاور يتزايد الضلع س بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم/ث والضلع ص بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم/ث، جد معدل التغير في الضلع الثالث عندما س=٦سم ص=١٠سم علماً بأن ظاهـ= $\frac{٣}{٤}$



✓الحل:

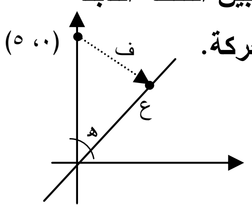
$\text{ع}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\text{س ص جتاهـ}$، لكن $\text{جتا هـ} = \frac{٤}{٥}$

$\text{ع} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \frac{٨}{٥}\text{س ص}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س}.\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \frac{٨}{٥}(\text{س}.\frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \text{ص}.\frac{\text{دس}}{\text{دن}})}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \frac{٨}{٥}\text{س ص}}}$

$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=٦,\ \text{ص}=١٠} = \frac{٢١}{١٠\sqrt{٢٨}}$ سم/ ث

٨) بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل على المستقيم ص= $\frac{\text{س}}{\sqrt{٣}}$ باتجاه الربع الأول وبسرعة ٢سم/د جد معدل التغير في المسافة بينها وبين النقطة الثابتة (٠، ٥) بعد دقيقتان من بدا الحركة.



✓الحل:

المطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن}=٢}$

$\text{ف}^٢ = \text{ع}^٢ + ٢٥ - ٢ \times ٥ \times \text{ع} \times \text{جتاهـ}$

بما أن $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٣}}$

$\Leftarrow$ ميله = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\Leftarrow$ زاوية الميل= ٣٠°

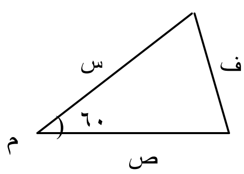
$\Leftarrow$ هـ = ٦٠° $\Leftarrow$ جتاهـ= $\frac{١}{٢}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{ع}^٢ + ٢٥ - ٥\text{ع}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{ع}.\frac{\text{دع}}{\text{دن}} - ٥.\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{ع}^٢ + ٢٥ - ٥\text{ع}}}$

$\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ع}=٤} = \frac{٢\times٤\times٢ - ٥\times٢}{٢\sqrt{١٦+٢٥-٢٠}} = \frac{٦}{٢\sqrt{٢١}}$ سم/د

٩) خطان حديديان يميل أحدهما على الآخر بزاوية ٦٠° و يلتقيان في م، يسير القطار أ على أحدهما بسرعة ٨كم/س والقطار ب على الآخر بسرعة ٥كم/س مفتربان من م عند الساعة التاسعة صباحاً كانا على بعد ٣٠كم، ٢٠كم من م، جد معدل التغير في المسافة بينهما عند الساعة الحادية عشر صباحاً



✓الحل:

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٨$سم/د

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٥$كم/ د

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

والمطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{س}=١٤،\ \text{ص}=١٠}$

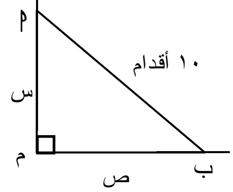
$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\text{س ص جتا}٦٠$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \text{س ص}}$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س}.\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \left(\text{س}.\frac{\text{دص}}{\text{دن}} + \text{ص}.\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - \text{س ص}}}$$

$$\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١٤،\ \text{ص}=١٠} = \frac{-١٧٤}{٢\sqrt{١٥٦}} \text{ كم/ د}$$

١٠) أب سلم طوله ١٠ أقدام يرتكز أ على الحائط و ب على الأرض، بدأ الطرف ب بالإبتعاد عن الحائط بمعدل ٤ قدم/ث ، جد معدل التغير في مساحة المثلث أ م ب حيث م نقطة تلاقي الحائط مع الأرض وذلك عندما يصبح السلم على بعد ٦ أقدام عن الحائط.



✓الحل:

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٤$ قدم / ثانية.

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{ص} \times \text{س}$

لكن $\text{ص}^٢ + \text{س}^٢ = ١٠٠$

$\text{س}^٢ = ١٠٠ - \text{ص}^٢$

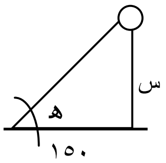
$\text{م} = \frac{١}{٢} . \text{ص} . \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢}$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}\text{ص} \times \frac{-٢\text{ص} . \frac{\text{دص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢}} + \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢} \times \frac{١}{٢} . \frac{\text{د ص}}{\text{دن}}$$

$$\left.\frac{\text{د م}}{\text{دن}}\right|_{\text{ص}=٦} = ٧\text{قدم}^٢ / \text{ث}$$

١١) يرتفع بالون رأسياً إلى الأعلى بمعدل ٣٠م/د، تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ١٥٠ متر عن مسقط البالون على الارض جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠م عن سطح الارض.

✓الحل:



$\text{ظاهـ} = \frac{\text{س}}{١٥٠}$

عندما س= ١٥٠

$\Leftarrow$ ظاهـ =١

$\Leftarrow$ قا^{٢}هـ=٢

$\text{قا}^٢\text{هـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٥٠} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

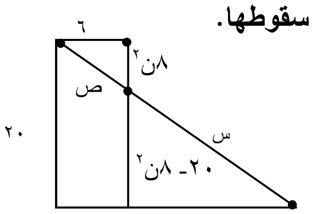
$٢ \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٥٠} \times ٣٠$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٠}$ راد/ د

تدريب:

١٢) يمشي رجل طوله ٦ أقدام نحو عمود عليه مصباح طوله ٣٠ قدم بسرعة ٤ قدم لكل دقيقة، جد معدل التغير في طول ظل الرجل على الأرض.

١٣) يقع مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٢٠ قدم أسقطت كرة من نقطة على بعد ٦ قدم عن المصباح ومن نفس الارتفاع فكانت المسافة التي تقطعها الكرة مقدرة بالأقدام ف=٨ن^٢ ، جد معدل التغير في المسافة بين الكرة وظلها بعد مرور ثانية من سقوطها.



✓الحل:

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢٠ - ٨\text{ن}^٢}{٨\text{ن}^٢}$

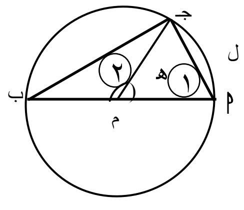
لكن $\text{ص} = \sqrt{٣٦ + ٦٤\text{ن}^٤}$

$\Leftarrow \text{س} = \left(\frac{٥}{٢\text{ن}^٢} - ١\right) . \sqrt{٣٦ + ٦٤\text{ن}^٤}$

$\left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن}=١} = \frac{-١٥٤}{٥٠}$ قدم /ث

١٤) أب قطر في دائرة طوله ٨ سم بدأت النقطة جـ الحركة من أ على منحنى الدائرة بسرعة ٢سم/ د جد معدل التغير في مساحة المثلث أ جـ ب ، عندما يكون طول القوس أ جـ = ٢π سم

✓الحل:



$\frac{\text{د ل}}{\text{دن}} = ٢\text{سم/د}$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمــــــي

= $\frac{1}{2}\times ١٦$ جاهـ + $\frac{1}{2}\times ١٦$ جا$(\pi -$ هـ$)$

= ٨جا هـ + ٨جاهـ

=١٦جاهـ   لكن ل= ٤ هـ

⟸ هـ = $\frac{\text{ل}}{٤}$

م = ١٦جا $\left(\frac{\text{ل}}{٤}\right)$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٦ \times$ جتا $\left(\frac{\text{ل}}{٤}\right) \times \frac{\frac{\text{دل}}{\text{دن}}}{٤}$

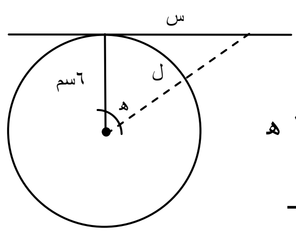
$\left.\frac{\text{دم}}{\text{دن}}\right|_{\text{ل}=٢\pi} = ١٦\times$ جتا $\frac{\pi}{٢} \times \frac{٢}{٤} =$ صفر

تدريب:

١٥) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها (٠، ٠) من النقطة (٢، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه أثناء حركتها بمعدل ٨سم/ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٢، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{٣}$

✓ **الجواب: ٤ $\sqrt{٣}$ سم/ث**

١٦) المستقيم ل يمس منحنى دائرة نصف قطرها ٦سم عند النقطة ٢، بدأ جسيم الحركة من ٢ على منحنى الدائرة بسرعة ٢سم/ث، وكان في مركز الدائرة مصدر للضوء جد سرعة ظل الجسيم على المستقيم عندما يقطع مسافة ٢π سم



والمطلوب: $\left.\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right|_{\text{ل}=٢\pi}$

ظا هـ = $\frac{\text{س}}{٦}$ ⟸ س=٦ ظا هـ

لكن ل = ٦ هـ ⟸ هـ = $\frac{\text{ل}}{٦}$

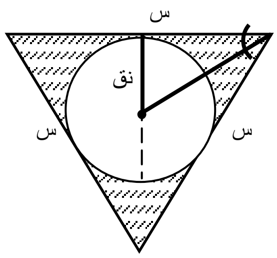
∴ س = ٦ ظا $\left(\frac{\text{ل}}{٦}\right)$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٦ \times$ قا$^{٢}\left(\frac{\text{ل}}{٦}\right) \times \frac{\frac{\text{دل}}{\text{دن}}}{٦}$

$\left.\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right|_{\text{ل}=٢\pi} = ٦\times$ قا$^{٢}\frac{\pi}{٣}\times\frac{١}{٣} =$ ٨سم/ث

١٧) تمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٢سم/د وكان داخل المثلث دائرة تمس أضلاعه وتتمدد معه، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢سم.

✓ الحل: $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} =$ ٢سم/ث



$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١٢ \text{ سم}}$

م = مساحة المنطقة المظللة

= م$_{\Delta}$ − م$_{\circ}$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} جا٦٠° − π نق^{٢}

لكن ظا٣٠° = $\frac{\text{نق}}{\frac{١}{٢}\text{س}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

⟸ $\sqrt{٣}$ نق = $\frac{١}{٢}$ س

⟸ ٣ نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ⟸ نق^{٢} = $\frac{١}{١٢}$ س^{٢}

م = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} − $\frac{\pi}{١٢}$ س^{٢}

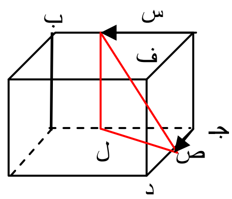
$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س × $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ − $\frac{\pi}{٦}$ س× $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ×١٢×٢ − $\frac{\pi}{٦}$ ×١٢×٢

= $(١٢\sqrt{٣} - ٤\pi)$ سم^{٢}/د

١٨) صندوق مكعب من الخشب طول ضلعه ٢٠سم كما في الشكل تحركت نملتان في الوقت نفسه الأولى من أ نحو ب وبسرعة ٤سم /ث والثانية من جـ إلى د بسرعة ٣سم/ث، جد معدل التغير في المسافة بينهما بعد مرور ثانيتين .

✓الحل:



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} =$ ٤سم /ث

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} =$ ٣سم/ث

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

المطلوب:

$ف^{٢} = (٢٠)^{٢} + ل^{٢}$

لكن $ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$

$ف^{٢} = ٤٠٠ + س^{٢} + ص^{٢}$

$ف = \sqrt{٤٠٠ + س^{٢} + ص^{٢}}$

$$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٠ + ٢س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ص \times \frac{د س}{د ن}}{٢\sqrt{٤٠٠ + س^{٢} + ص^{٢}}}$$

$$\left.\frac{د ف}{د ن}\right|_{ن=٢} = \sqrt{٥}\ \text{سم/ث}$$

١٩) جد النقطة الواقعة على منحنى دائرة معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ص - ١٦ = ٠$ والتي يكون عندها معدل الزيادة في ص مساوياً لمعدل النقصان في س .

✓الحل:

نفرض أن النقطة المطلوبة هي (س،ص)

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د ن} = \frac{-د س}{د ن}$$

وبما أن $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ص - ١٦ = ٠$ .... (١)

$$\Leftarrow ٢س \times \frac{د س}{د ن} + ٢ص \times \frac{د ص}{د ن} - ٨ \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$$

$$\Leftarrow ٢س \times \frac{د س}{د ن} - ٢ص \times \frac{د س}{د ن} + ٨ \times \frac{د س}{د ن} = ٠$$

$$٢ \times \frac{د س}{د ن}\ (س - ص + ٤) = ٠ \quad \text{لكن}\ \frac{د س}{د ن} \neq ٠$$

$\Leftarrow$ س − ص + ٤ = ٠

$\Leftarrow \boxed{س = ص - ٤}$ نعوض في (١)

نجد أن ص = ٠ $\Leftarrow$ س = −٤

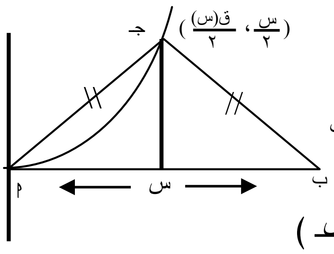
أو ص = ٨ $\Leftarrow$ س = ٤

∴ النقاط المطلوبة هي (−٤ ، ٠) (٤ ، ٨)

٢٠) بدأت نقطتان (ب وَ جـ) الحركة معاً من نقطة الأصل أ بحيث تتحرك ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤سم/ث وتتحرك جـ في الربع الأول على منحنى ق(س) = $س^{٢}$ بحيث يبقى دائماً أجـ = ب جـ ، جد معدل التغير في مساحة المثلث أب جـ بعد ٢ ث من بدء الحركة.

✓الحل:

المطلوب: $\left.\frac{د م}{د ن}\right|_{ن=٢ث}$



$$م = \frac{١}{٢} \times س \times ق(\frac{س}{٢})$$

$$= \frac{١}{٢}\ س \times \frac{س^{٢}}{٤}$$

$$= \frac{١}{٨}\ س^{٣}$$

$$= \frac{٣}{٨}\ س^{٢} \times \frac{د س}{د ن} \qquad \text{وعندما ن = ٢ ث}$$

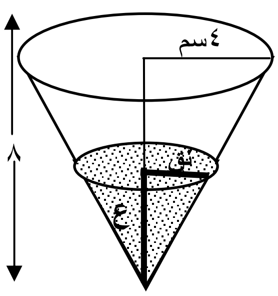
$\Leftarrow$ س = ٨سم

$$\left.\frac{د م}{د ن}\right|_{س=٨} = \frac{٣}{٨} \times ٦٤ \times ٤ = ٩٦\ \text{سم}^{٢}\text{/ث}$$

تدريب:

٢١) جسر للمشاة يرتفع عن مستوى الشارع ٦م يسير عليه رجل بسرعة ٣م/ث وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠كم/س ، جد معدل ابتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة.

٢٢) يصب الماء في وعاء مخروطي رأسه إلى أسفل نصف قطره ٤سم، ارتفاعه ٨سم بمعدل $٣سم^{٣}$/ث جد معدل التغير في ارتفاع الماء عندما يكون على ارتفاع ٤سم.



✓الحل:

$$\frac{د ح}{د ن} = ٣\text{سم}^{٣}\text{/ث}$$

$$ح = \frac{١}{٣}\ \pi\ نق^{٢} \times ع$$

لكن $\frac{\text{نق}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٨}$

$\Leftarrow$ نق $= \frac{\text{ع}}{٢}$

ح $= \frac{١}{٣} \pi \times \left(\frac{\text{ع}}{٢}\right)^٢ \times$ ع $= \frac{١}{١٢} \pi$ ع^٣

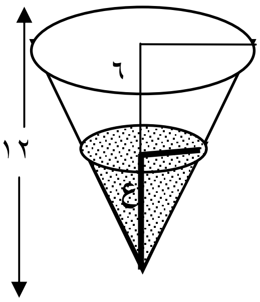
$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٤} \pi$ ع$^٢ \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$٣ = \frac{١}{٤} \pi \times (٤)^٢ \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$\therefore \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤\pi}$ سم /ث

٢٣) وعاء مخروطي ارتفاعه ١٢سم، نصف قطر قاعدته ٦سم يصب فيه الماء بمعدل ١٠سم^٣/ث ويتسرب الماء منه بحيث يزداد ارتفاع الماء بمعدل $\frac{٣}{\pi}$ سم/ث جد معدل تسرب الماء من الوعاء عندما يكون ارتفاع الماء ٢سم.

✓الحل:



ح $= \frac{١}{٣} \pi$ نق$^٢ \times$ع

لكن $\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{\text{ع}}{١٢}$

$\Leftarrow$ نق $= \frac{١}{٢}$ ع

ح $= \frac{١}{٣} \pi \times \frac{١}{٤}$ ع^٣

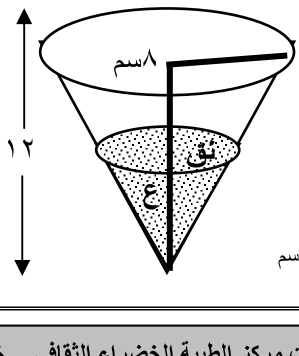
ح $= \frac{\pi}{١٢}$ ع^٣ $\Leftarrow$ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi}{٤}$ ع$^٢ \times \frac{\text{دع}}{\text{د ن}}$

$\left.\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ع} = ٢\text{سم}} = \frac{\pi}{٤} \times (٢)^٢ \times \frac{٣}{\pi} = ٣$سم^٣/ث

$\therefore$ معدل التسرب = ١٠−٣ = ٧ سم^٣/ث

٢٤) وعاء مخروطي رأسه للأسفل ارتفاعه ١٦سم وطول نصف قطر قاعدته ٨سم يتسرب سائل منه بمعدل ٥سم^٣/د جد معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون على ارتفاع ٤سم.

✓الحل:



$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٥$سم^٣ /د

والمطلوب : $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ع} = ٤\text{سم}}$

م $= \pi$ نق^٢ $\Leftarrow$ $\frac{\text{دم}}{\text{د ن}} = ٢\pi$ نق $\times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

لكن: ح $= \frac{١}{٣} \pi$ نق$^٢\times$ع

وبما أن $\frac{\text{نق}}{٨} = \frac{\text{ع}}{١٦}$

$\Leftarrow$ ٢نق = ع

ح $= \frac{٢}{٣} \pi$ نق^٣

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢ \pi$ نق$^٢ \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ وعندما ع=٤ $\Leftarrow$نق =٢

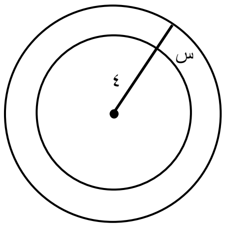
$-٥ = ٢ \pi \times ٤ \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

$\Leftarrow$ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{-٥}{٨\pi}$ سم /د

$\Leftarrow$ $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{نق} = ٢} = ٢ \pi \times ٢ \times \frac{-٥}{٨\pi} = \frac{-٥}{٢}$ سم^٢/د

٢٥) كرة حديدية قطرها ٨سم مغطاة بطبقة من الجليد، أخذ الجليد بالذوبان بمعدل ١٠سم^٣/د جد معدل التغير في مساحة سطحها الخارجي عندما يصبح سمك الجليد ٢سم.

✓الحل:



$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = -١٠$سم^٣/د

والمطلوب : $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = ٢\text{سم}}$

م $= ٤ \pi ($س$+٤)^٢$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨ \pi ($س$+٤) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ .... (١)

ح $= \frac{٤}{٣} \pi ($ س$+٤)^٣$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤ \pi ($ س$+٤)^٢ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$-١٠ = ٤ \pi (٢ + ٤)^٢ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

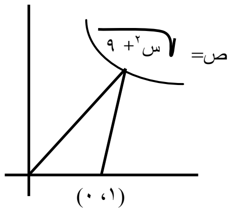
$-١٠ = ٤ \pi \times ٣٦ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{-١٠}{٤\pi \times ٣٦}$

$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = ٢} = ٨ \pi (٢ + ٤) \times \frac{-١٠}{٤\pi \times ٣٦} = \frac{-١٠}{٣}$سم^٢/د

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمــــــي

٢٦) تتحرك النقطة أ على منحنى ص = $\sqrt{\text{س}^2+9}$ بحيث يتزايد الإحداثي السيني لها بمعدل ٢ و/ث جد معدل التغير في مساحة المثلث الذي رؤوسه النقطة أ والنقطتين (٠، ٠) (١، ٠) عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة أ هو ٤.



✓الحل:

نفرض أن النقطة أ هي (س، ص)

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 2$ و/ث   ص = $\sqrt{\text{س}^2+9}$

والمطلوب : $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=4}$

م = $\frac{1}{2} \times 1 \times$ ص   لكن ص = $\sqrt{\text{س}^2+9}$

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}\sqrt{\text{س}^2+9}$

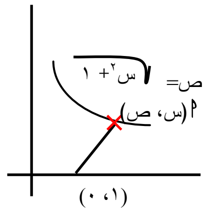
$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{2}\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2+9}}$

$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=2} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{4 \times \cancel{2}}{\sqrt{(4)^2+9}}$

$= \frac{4}{5}$ و²/ث

٢٧) تتحرك النقطة أ على منحنى ص = $\sqrt{\text{س}^2+1}$ بحيث يتزايد الإحداثي السيني لها بمعدل ٢ سم/د جد معدل التغير في المسافة بينهما وبين النقطة (١ ،٠) عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة أ هو ٦.

✓الحل:



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 2$سم/ د

والمطلوب : $\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=6}$

ف = $\sqrt{(\text{س}-1)^2 + \text{ص}^2}$ لكن ص² = س² + ١

ف = $\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 + \text{س}^2 + 1}$

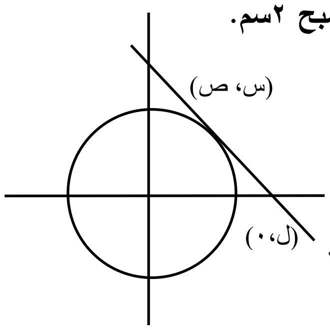
$\sqrt{2\text{س}^2 - 2\text{س} + 2}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{4\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} - 2 \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{2\sqrt{2\text{س}^2 - 2\text{س} + 2}}$

$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=6} = \frac{4 \times 6 \times 2 - 2 \times 2}{2\sqrt{2(6)^2 - 2(6) + 2}}$

$= \frac{24 - 2}{\sqrt{2(36) - 12 + 2}} = \frac{22}{\sqrt{62}}$ سم/د

٢٨) يتحرك مستقيم بحيث يبقى ملامساً للدائرة س² + ص² = ١ عند نقطة في الربع الأول معدل التغير في احداثيها السيني ٣سم/د جد معدل التغير في المقطع السيني للمستقيم عندما يصبح ٢سم.



✓الحل:

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 3$سم/ د

والمطلوب : $\left.\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ل}=2}$

ميل المماس = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\frac{-\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - \text{ل}}$

ص² = − س² + س× ل

ص² + س² = س× ل

١ = س× ل

ل = $\frac{1}{\text{س}}$ وعندما ل = ٢ $\Leftarrow$ س = $\frac{1}{2}$

$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{-1 \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{\text{س}^2}$

$\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=\frac{1}{2}} = \frac{-1 \times 3}{\frac{1}{4}} = -12$ سم/د

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

خصائص المنحنيات

١ النقاط الحرجة

يكون للاقتران ق (س) قيمة حرجة عند النقطة (أ. ق (أ)) اذا كانت قَ (أ) = صفر أو غير موجودة حيث أ ∈ مجال ق (س).

وتكون قَ (أ) غير موجودة عند أطراف الفترة المغلقة أو عند نقاط التحول حيث ق(س) غير متصل عندها أو ق(س) متصل عندها ولكن $قَ_{+}(أ) \neq قَ_{-}(أ)$ أو عند أصفار مقام قَ (س)

مثال:

حدد النقاط الحرجة لكل من الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٥$

✓الحل:

$قَ(س) = ٣س^٢ - ٣$

قَ (س)=٠	قَ(س) غ . م
$٣س^٢ - ٣ = ٠$	أطراف مغلقة ×
$س^٢ = ١$	تحولات ×
$\boxed{س = \pm ١}$	جذور مقام ×

∴ للاقتران قيمة حرجة عند النقاط (١،ق(١)) ، (−١ ، ق(−١))

٢) $ق(س) = ١٢س - (س - ١)^٣$

حيث س ∈ [١، ٥]

✓الحل:

$قَ(س) = ١٢ - ٣(س-١)^٢$

قَ (س)=٠	قَ(س) غ.م
$١٢ - ٣(س-١)^٢ = ٠$	أطراف مغلقة ١ ، ٥
$(س-١)^٢ = ٤$	تحولات ×
$(س-١) = \pm ٢$	أصفار مقام ×

$\boxed{س = ٣}$ أو $\boxed{س = -١}$ ⟸ تهمل

∴ للاقتران قيمة حرجة عند النقاط التالية

(١،ق(١)) ، (٣، ق(٣)) ، (٥، ق(٥))

٣) $ق(س) = \frac{س}{س^٢+١}$

✓الحل:

$قَ(س) = \frac{١ - س^٢}{(س^٢+١)^٢}$

قَ (س)=٠	قَ(س) غ . م
البسط = ٠	أطراف ×
$١ - س^٢ = ٠$	تحولات ×
$س^٢ = ١$	جذور مقام ×
$\boxed{س = \pm ١}$	

∴ النقاط الحرجة هي (١،ق(١)) ، (−١ ، ق(−١))

٤) $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٣ - ٩س}$

✓الحل:

$قَ(س) = \frac{٣س^٢ - ٩}{٣\sqrt[٣]{(س^٣-٩س)^٢}}$

قَ (س)=٠	قَ(س) غ . م
$٣س^٢ - ٩ = ٠$	أطراف ×
$٣س^٢ = ٩$	تحولات ×
$س = \pm \sqrt{٣}$	جذور مقام ×
	$س^٣ - ٩س = ٠$
	$س(س^٢ - ٩) = ٠$
	$\boxed{س = ٠، \pm ٣}$

∴ للاقتران قيم حرجة لكل

س ∈ {$\pm\sqrt{٣}$ ، ٠، ±٣}

☜ **تدريب:**

٤) $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ٦س}$

٦) ق(س) = س^{٢} (٣ − س)^{٣}

✓الحل:

قَ(س) = س^{٢}×٣(٣ − س)^{٢} × −١ + (٣ − س)^{٣}×٢س

= −٣س^{٢}. (٣ − س)^{٢} + ٢س (٣ − س)^{٣}

= س. (٣ − س)^{٢} (−٣س + ٦ − ٢س)

= س. (٣ − س)^{٢}(٦ − ٥س)

قَ(س) = ∴	قَ(س) غ . م
$\boxed{س = ٠}$	×
أو (٣ − س)^{٢} = ٠	×
س = ٣	×
أو ٦ − ٥س = ٠
⟸ س = $\frac{٦}{٥}$

للاقتران قيم حرجة لكل س ∋ {٠، ٣، $\frac{٦}{٥}$}

٧) ق(س) = { س^{٢} − ٤س ، س > ١ ؛ $\sqrt[٣]{س}$ ، س ≤ ١ }

✓الحل:

قَ(س) = { ٢س − ٤ ، س > ١ ؛ $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ ، س < ١ ؛ غ . م ، س = ١ }

قَ(س) = ∴
- س > ١ : ٢س − ٤ = ∴ ، $\boxed{س = ٢}$
- س < ١ : ×

قَ(س) غ.م
- أطراف ×
- تحولات $\boxed{س = ١}$
- جذور المقام
  - س > ١ : ×
  - س < ١ : $\boxed{س = ٠}$

للاقتران قيم حرجة لكل ∋ {٠، ١، ٢}

٨) ق(س) = جاπس + جتاπس

حيث س ∋ [٠، ٢]

تدريب:

مثال:

إذا كان الإقتران

ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٣

قيمة حرجة عند النقطة (١، ٥) ، فما قيمة أ، ب

✓الحل:

بما أن للاقتران قيمة حرجة عند (١، ٥) فإن:

ق(١) = ٥

١ + أ + ب + ٣ = ٥

$\boxed{أ + ب = ١}$ ١

قَ(١) = صفر أو ~~غ م~~

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب

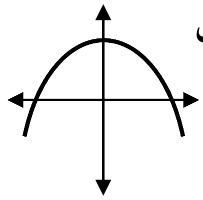
قَ(١) = ٣ + ٢أ + ب = ∴

⟸ $\boxed{٢أ + ب = −٣}$ ٢

وبحل النظام فإن $\boxed{أ = −٤}$ ، $\boxed{ب = ٥}$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمــــــي

٢ مجالات التزايد والتناقص



في الشكل التالي:

نلاحظ أن

منحنى ق (س) متزايداً في (−∞، ٠]

ومتناقصاً في [٠، ∞)

إذاً يكون ق (س) متزايداً في [أ، ب]

إذا كان ق (س$_٢$) > ق (س$_١$) لكل س$_٢$ > س$_١$ في [أ، ب]

ويكون ق(س) متناقصاً في[أ، ب]

إذا كان ق(س$_٢$) < ق(س$_١$) لكل س$_٢$ >س$_١$ في [أ، ب]

ملاحظة:

تكون زاوية ميل المماس لمنحنى ق(س) في فترة التزايد حادة.
أما زاوية ميل المماس لمنحنى ق(س) في فترة التناقص منفرجة؟!!.

دور إشارة قَ (س) في تحديد فترات التزايد والتناقص

١) إذا كانت قَ (س) >٠ لكل س ∋(أ ، ب)
فإن ق (س) متزايداً في [أ ، ب]

٢) إذا كانت قَ (س) <٠ لكل س ∋ (أ ، ب)
فإن ق (س) متناقصاً في [أ ، ب]

٣) إذا كانت قَ (س) = ٠ لكل س ∋ (أ ، ب)
فإن ق (س) ثابتاً في [أ ، ب]

لتحديد إشارة قَ (س)

١) نجد قيم س: قَ(س) = صفر أو غ. م.

٢) نحدد هذه القيم على خط أعداد.

٣) ندرس اشارة كل منطقة بتعويض أحد ارقامها في قَ(س).

مثال:

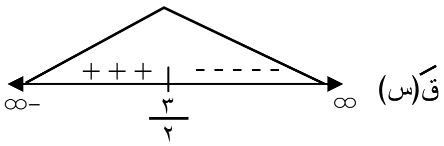
حدد فترات التزايد والتناقص لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = ٣س − س^٢

✓الحل:

قَ(س) = ٣ − ٢س

قَ(س)= ٠ ∴	قَ(س) غ.م
٣ −٢س= ٠ ∴	× أطراف
س = $\frac{٣}{٢}$	× تحولات
	× جذور مقام



∴ ق(س) متزايداً في (−∞، $\frac{٣}{٢}$]

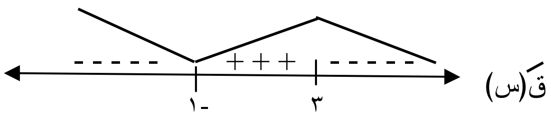
ومتناقصاً في [$\frac{٣}{٢}$، ∞)

٢) ق(س)= − س^٣+٣س^٢ +٩س −٧

✓الحل:

قَ(س) = −٣س^٢ +٦س +٩

قَ(س)= ٠ ∴	قَ(س) غ.م
−٣س^٢ +٦س +٩= ٠ ∴	أطراف ×
س^٢ − ٢س − ٣= ٠ ∴	تحول ×
(س−٣) (س+١)= ٠	جذور مقام ×
س= ٣ ، −١	



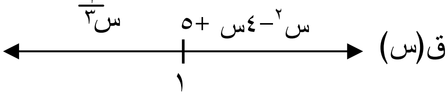
∴ ق(س) متزايداً في [−١، ٣]

ومتناقصاً في (−∞، −١] ∪[٣، ∞)

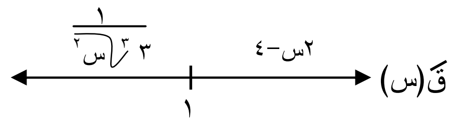
تدريب: ٣) ق (س) = ٤س^٣ − س^٤

٤) ق(س) = $\begin{cases} \sqrt[٣]{س} & س \leq ١ \\ س^٢ - ٤س + ٥ & س > ١ \end{cases}$

✓الحل:



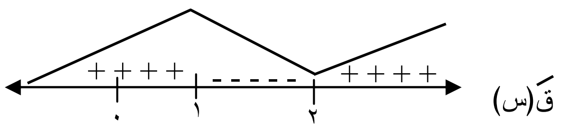
لاحظ أن ق(س) متصل عندما س= ١



ق'₊(١) ≠ ق'₋(١) ⟸ ق'(١) غ.م

ق'(س)= ∴
- س>١ : ٢س−٤=∴ ⟸ $\boxed{\text{س=٢}}$
- س<١ : ×

ق' (س) غ.م
- أطراف×
- تحول $\boxed{\text{س=١}}$
- جذور المقام
  - س>١ : ×
  - س<١ : $\boxed{\text{س=٠}}$



ق(س) متزايداً في (−∞، ١] ∪[٢، ∞)

ومتناقصاً في [١ ، ٢]

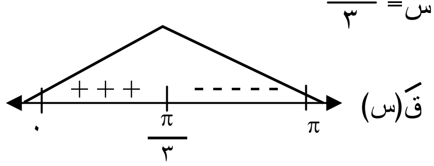
٥) ق (س) = جا^{2}س+ جتاس س ∈ [٠، π]

✓الحل:

ق'(س) = ٢جاس. جتاس − جاس

ق'(س)= ∴
- جاس(٢جتاس −١)= ٠
- جاس≠٠ في (٠، π)
- ٢جتاس − ١ = ٠
- جتاس = $\frac{١}{٢}$
- س= $\frac{\pi}{٣}$

ق'(س) غ. م
- أطراف س= ٠ ، π
- تحول ×
- جذور مقام ×



∴ ق(س) متزايداً في [٠، $\frac{\pi}{٣}$]

ومتناقصاً في [$\frac{\pi}{٣}$، π]

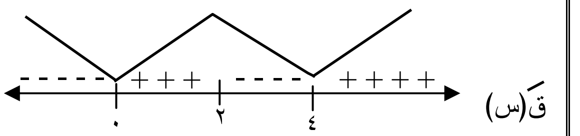
٦) ق(س)= (س^2 − ٤س)^4

✓الحل:

ق'(س) = ٤(س^2 −٤س)^3 (٢س−٤)

ق'(س)= ∴
- س^2 − ٤س =٠ ⟸ $\boxed{\text{س= ٠، ٤}}$
- أو ٢س − ٤ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س= ٢}}$

ق'(س) غ.م
- أطراف ×
- تحولات ×
- جذور مقام ×



ق(س) متزايداً في [٠، ٢] ∪[٤، ∞)

ومتناقصاً في (−∞ ،٠] ∪ [٢، ٤]

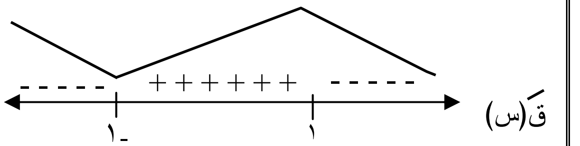
٧) ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^2+١}$

✓الحل:

ق'(س) = $\frac{١-\text{س}^2}{(\text{س}^2+١)^2}$

ق'(س)= ٠
- ١− س^2 = ٠
- ⟸ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$

ق'(س) غ.م
- أطراف ....×
- تحولات ....×
- جذور مقام ×



ق(س) متزايداً في [−١، ١]

ومتناقصاً في (−∞، −١] ∪[١، ∞)

٨) ق (س) = $\sqrt{٣\text{س} - \text{س}^2}$ ☞ **تدريب:**

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

٣ القيــم القصـــوى

و تقسم إلى قسمين

أ) قيم عظمى: وهي نوعان

١– قيم عظمى محلية

يكون للاقتران قيمة عظمى محلية عند س=ا وهي ق (ا) إذا كانت ق (ا) > ق (س) لكل س يقع في فترة مفتوحة تحتوي ا.

٢– قيم عظمى مطلقة

يكون للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س=ا وهي ق (ا) أذا كانت ق (ا) > ق (س) لكل س يقع في مجال الاقتران.

ب) قيم صغرى: وهي نوعان

١– قيم صغرى محلية

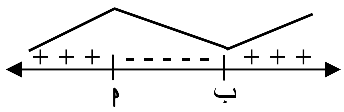
يكون للاقتران قيمة صغرى محلية عند س=ا وهي ق (ا) إذا كانت ق (ا) < ق (س) لكل س يقع في فترة مفتوحة تحتوي ا.

٢– قيم صغرى مطلقة

يكون للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س=ا وهي ق (ا) أذا كانت ق (ا) < ق (س) لكل س يقع في مجال الاقتران.

توضيح :

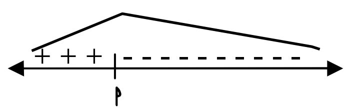
١) قَ(س)



للاقتران قيمة عظمى محلية عند س=ا هي ق(ا)

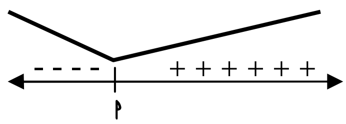
للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ب هي ق(ب)

٢) قَ(س)



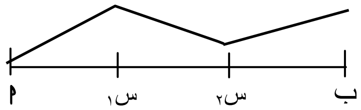
للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س=ا هي ق(ا)

٣) قَ(س)



للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س=ا هي ق(ا)

٤) قَ(س)



إذا كانت ق(ب) > ق(س$_1$)

⟸ ق(ب) قيمة عظمى مطلقة

أما ق(س$_1$) قيمة عظمى محلية

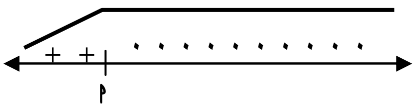
إذا كانت ق(س$_1$) > ق(ب)

⟸ ق(س$_1$) قيمة عظمى مطلقة و محلية

أما ق(ب) فلا يوجد عندها قيم قصوى

وكذلك بالنسبة لِ ق(ا) و ق(س$_2$)

٥) قَ(س)



للاقتران قيمة عظمى مطلقة لكل س∈ [ا، ∞)

للاقتران قيمة صغرى محلية لكل س∈ (ا، ∞)

مثال:

جد القيم القصوى لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢س + ٧

✓الحل:

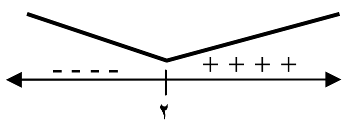
قَ(س) = ٦س – ١٢

∴ قَ(س)= ٠ ق غ. م

٦س –١٢=٠ ×

س = ٢ ×

قَ(س)



∴ للاقتران قيمة صغرى مطلقة

عند س= ٢ وهي ق(٢) –٥

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصــــاع
الفرع العلمــــــي

٢) ق(س) = ٢س^{٣} −٣س^{٢} − ١٢س+٧

✓الحل:

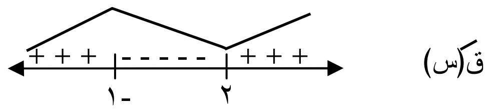
قَ(س) = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

∴ قَ(س)= ٠ ق غ.م

٦س^{٢} −٦س −١٢=٠ ×

(س−٢) (س+١)=٠ ×

س=٢، س=−١ ×



∴ للاقتران قيمة عظمى محلية هي ق(−١) =١٤

للاقتران قيمة صغرى محلية هي ق(٢)= −١٣

٣) ق(س) = ١٢س− س^{٣} ، حيث س ∈[−٣، ٤]

✓الحل:

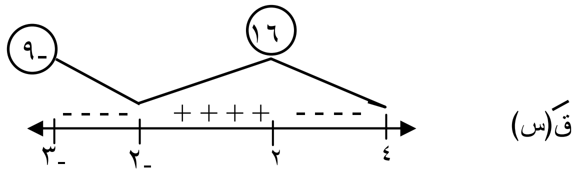
قَ(س) = ١٢س − ٣س^{٢}

∴ قَ(س)= ٠ قَ غ. م

س= ± ٢ أطراف س = {−٣، ٤}

تحولات ×

جذور مقام×



بما أن ق(٢) > ق(−٣)

∴ للاقتران قيمة عظمى مطلقة (محلية)

عند س = ٢ وهي ق(٢) = ١٦

وبما أن ق(−٢) = ق(٤) =−١٦

فإن للاقتران قيمة صغرى مطلقة

لكل س ∈ {−٢، ٤} وهي (−١٦)

٤) ق (س) = جا^{٢}π س: س ∈ [٠، π]

✓الحل:

قَ(س) = ٢جاπس. جتاπس×π

= π. جا٢πس

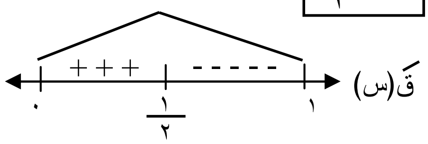
∴ قَ(س)= ٠ ق(س) غ. م

جا٢πس=٠ أطراف س∈ {٠، ١}

٢π س = ٠، π،٢π

س= ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١

$\boxed{س=\frac{١}{٢}}$



∴ للاقتران قيمة عظمى مطلقة

عند س = $\frac{١}{٢}$ ، وهي ق ($\frac{١}{٢}$) =١

للاقتران قيمة صغرى مطلقة لكل س ∈ {٠، ١} وهي صفر

٥) ق (س) = $\frac{س}{س^{٢}+١}$

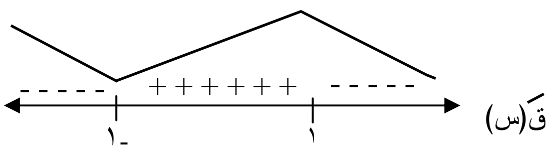
✓الحل:

قَ(س) = $\frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

قَ(س)= ٠ قَ(س) غ.م

١− س^{٢} = ٠ ×

⟸ $\boxed{س = \pm ١}$



للاقتران قيمة عظمى محلية عند س=١

وهي ق(١) = $\frac{١}{٢}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س=−١

وهي ق(−١) = $\frac{-١}{٢}$

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

٦) ق(س) = ١٢ $\sqrt[3]{س}$ − س

✓الحل:

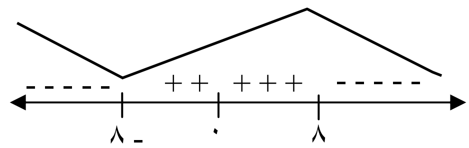
$ق̀(س) = \frac{٤}{\sqrt[3]{س^{٢}}} - ١$

$= \frac{٤ - \sqrt[3]{س^{٢}}}{\sqrt[3]{س^{٢}}}$

ق̀(س) = ٠ ⟸ س = ±٨

ق̀(س) = غ.م ⟸ س = ٠

ق̀(س)



للاقتران قيمة عظمى محلية هي ق(٨)=١٦

للاقتران قيمة صغرى محلية هي ق(−٨)= −١٦

٧) ق(س) = $س^{٢}$ − |٣س − ٦|

✓الحل:

|٣س− ٦| : ٣س − ٦ | ٢ | ٦ − ٣س

ق(س) : $س^{٢}$ − ٣س + ٦ | ٢ | $س^{٢}$ + ٣س − ٦

ق̀(س) : ٢س − ٣ | ٢ | ٢س + ٣   ق̀(٢) غ.م

ق̀(س) = ٠   ق̀(س) غ.م

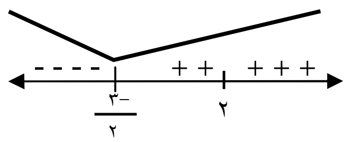
س > ٢   ق̀ ≠ ٠

س < ٢   ق̀ = ٠   س = $\frac{-٣}{٢}$

أطراف ×

تحولات $\boxed{س=٢}$

جذور مقام ×



∴ للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي ق ($\frac{-٣}{٢}$)

☜ **تدريب:**

٨) ق(س) = { س + $\frac{٤}{س}$ س> ١ ; ٥ $\sqrt[3]{س}$ س≥ ١ }

٩) ق(س) = $(س - ٢)^{٣}$. $(س + ١)^{٢}$

✓الحل:

ق̀(س) = (س+١) $(س−٢)^{٢}$ (٥س−١)

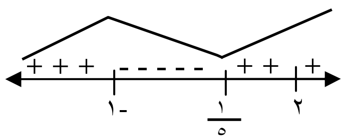
∴ ق̀(س)= ٠   ق غ.م ×

س = − ١

س = ٢

س = $\frac{١}{٥}$

ق̀(س)



∴ للاقتران قيمة عظمى محلية هي ق(−١)

للاقتران قيمة صغرى محلية هي ق($\frac{١}{٥}$)

١٠) ق(س) = { ٣   س ≤ ١ ; ٢$س^{٢}$ − ٢   س ≥ ١ }

✓الحل:

ق(س) : ٣ | ١ | ٢$س^{٢}$ + ١

ق̀(س) : ∴ | ١ | ٤س   ق̀(١) غ.م

ق̀(س) = ٠   ق̀(س) غ.م

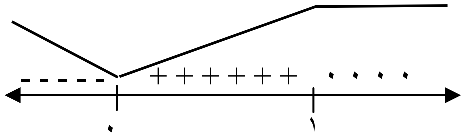
س > ١   لكل قيم س

س < ١   ٤س = ٠ $\boxed{س = ٠}$

أطراف ×

تحولات $\boxed{س=١}$

جذور مقام ×



∴ للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي ق (٠) =−٢

للاقتران قيمة عظمى محلية لكل س ∋ [١، ∞) وهي ٣

للاقتران قيمة صغرى محلية لكل س∋(١، ∞) وهي ٣

١١) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}-٢\text{س}+١ & \text{س} \geq ٠ \\ \sqrt{-\text{س}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

✓الحل:

ق(س) : $\sqrt{-\text{س}}$ | س^{٢}−٢س+ ١ ، (٠) غ متصل عند س=٠

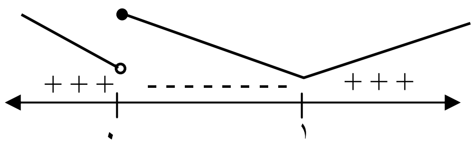
ق َ(س) : $\frac{-١}{٢\sqrt{-\text{س}}}$ | ٢س−٢ ، ق َ(٠) غ.م

ق َ(س) = ٠ ق َ(س) غ.م

$\boxed{\text{س}=٠}$

س> صفر س< صفر

$\boxed{\text{س}=١}$ ×



للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٠ هي ق (٠)=١

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س =١ هي ق (١)=٠

☜ **تدريب:**

١٢) ق (س) = س. |٢س− ٢|

١٣) ق (س) = جاس + $\sqrt{٣}$ جتاس

حيث س ∋ [٠، ٢π]

✓الحل:

ق َ(س) = جتاس − $\sqrt{٣}$ جاس

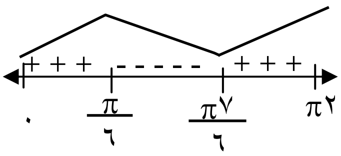
ق َ(س)= ∴ ق َ غ. م

جتاس −$\sqrt{٣}$ جاس =٠ أطراف س = {٠، ٢π}

١− $\sqrt{٣}$ ظاس= ٠

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

س= $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$



∴ للاقتران قيمة عظمى مطلقة هي ق($\frac{\pi}{٦}$) =٢

للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي ق($\frac{٧\pi}{٦}$)= −٢

١٤) ق(س) = س^{٢} (٣− س)^{٣}

✓الحل:

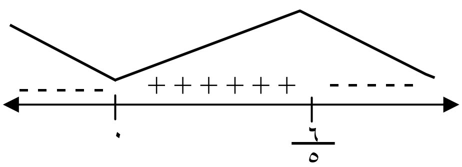
ق(س) = س^{٢} × ٣(٣−س)^{٢} ×−١ + (٣− س)^{٣}× ٢س

= ٣س^{٢} . (٣−س)^{٢} +٢س . (٣− س)^{٣}

⟸ س . (٣− س)^{٢} (−٣س +٦−٢)

⟸ س . (٣− س)^{٢} (٦ − ٥س)= ٠

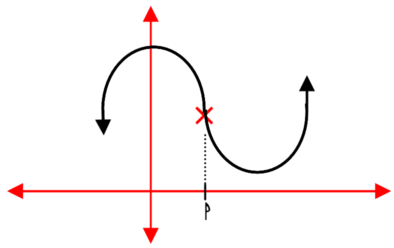
∴ س= ∴ ، ٣ ، $\frac{٦}{٥}$



للاقتران قيمة عظمى محلية عند س= $\frac{٦}{٥}$ ، هي ق($\frac{٦}{٥}$)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س=٠ ، هي ق(٠)

٤ التقعــــــر



نقول أن ق(س) مقعراً للأسفل في الفترة (−∞،م]
و عندها يكون منحنى ق(س) تحت مماسته.
أما في الفترة [م، ∞) فهو مقعراً للأعلى
وعندها يكون المنحنى فوق مماساته.

دور أشارة قً(س) في تحديد فترات التقعر لمنحنى ق(س)

١) إذا كانت قً(س) > ٠ في (م، ب) فإن منحنى ق(س) مقعراً للأعلى في [م ، ب].

٢) إذا كانت قً(س) < ٠ في(م، ب) فإن منحنى ق(س) مقعراً للأسفل في [م ، ب].

٣) إذا كانت قً(س) = ٠ في(م، ب) فإن ق(س) مستقيمًا في [م ، ب] (لا تقعرفيه).

٥ نقاط الإنعطاف

يكون للإقتران ق(س) إنعطاف عند النقطة (م ، ق (م)) إذا تحول منحنى ق(س) عند تلك النقطة من مقعر للأعلى إلى مقعرللأسفل أو العكس بشرط أن يكون ق(س) متصلاً عند س = م

ملاحظة

يكون الإنعطاف أفقياً عند النقطة (م، ق (م)) إذا كانت قَ(م) = صفراً

مثال:

حدد فترات التقعر ونقاط الإنعطاف لمنحنى ق(س):

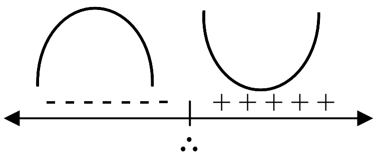
١) ق(س) = س^3 – ١٢س +٥

✓الحل:

قَ(س)= ٣س^2 – ١٢ ⟸ قً(س) = ٦س

وعندما قً(س) = ٠ ∴ أو غ. م

فإن $\boxed{\text{س = ٠}}$



∴ ق (س) مقعراً للأسفل في (−∞، ٠]

و مقعراً للأعلى في [٠، ∞)

للاقتران انعطاف عند النقطة (٠، ق (٠))

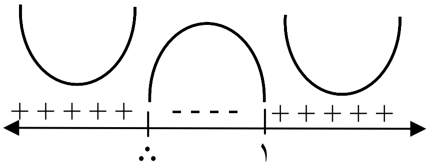
٢) ق (س) = س^4 – ٢س^3

قَ (س) = ٤س^3 -٦س^2

قً (س) = ١٢س^2 -١٢س

وعندما قً (س) = ٠ ∴ أو غ .م.

فإن س= { ٠ ، ١}



∴ ق (س) مقعراً للأعلى في (−∞، ٠] ∪ [١، ∞)

و مقعراً للأسفل في [٠، ١]

نقاط الإنعطاف (٠ ، ق (٠)) و (١، ق (١))

لا حظ أن

للاقتران ق (س) انعطاف أفقي عند (٠، ق (٠))
لأن قَ (٠) =٠

٣) ق (س) = جاπس −جتاπس، س ∈ [٠، ٢]

✓الحل:

قَ (س) = πجتاπس+ πجاπس

قً (س) = π^2 × - جاπس + π^2 × جتا πس

= π^2. جتا π س− π^2. جا π س

وعندما قً (س) =٠

⟸ظا π س = ١

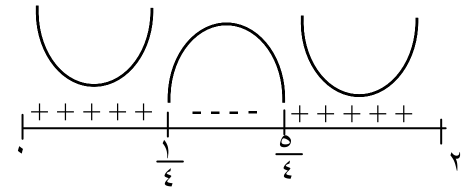
⟸ π س= $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

أعداد الأستاذ : معــــاذ الصعصـــــاع
الفرع العلمـــــــــي

⟸ س = $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$

أما قً(س) غ. م لكل س ∈ {٠، ٢}

قً (س)



∴ ق (س) مقعراً للأعلى في [٠ ، $\frac{١}{٤}$] ∪ [$\frac{٥}{٤}$ ، ٢]

و مقعراً للأسفل في [$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$]

نقاط الإنعطاف ($\frac{١}{٤}$ ، ق ($\frac{١}{٤}$)) و ($\frac{٥}{٤}$ ، ق ($\frac{٥}{٤}$))

٧) ق (س) = $\frac{٣س}{س-٢}$

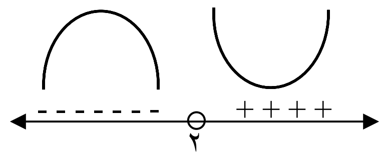
✓الحل:

قً(س) = $\frac{١٢}{(س-٢)^{٣}}$

لاحظ أن قً (س) ≠ صفر

لكن قً(س) غ . م عندما $\boxed{س=٢}$

قً (س)



∴ ق (س) مقعراً للأعلى في (٢ ، ∞)

مقعراً للأسفل في (−∞، ٢)

⟸وبما أن ٢ ∉ مجال ق(س) فليس

للاقتران انعطاف عندما س= ٢

٥) ق (س) = جاس – $\sqrt{٣}$ جتاس، حيث س ∈ [٠، ٢π]

✓الحل:

قَ (س) = جتاس + $\sqrt{٣}$ جاس

قً (س) = – جاس + $\sqrt{٣}$ جتاس

وعندما قً (س) =٠:

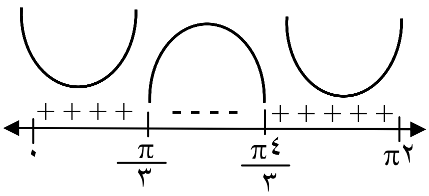
$\sqrt{٣}$ جتاس = جاس

ظا س = $\sqrt{٣}$

س= $\frac{π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$

أما قً (س) غ.م عندما س =٠، ٢π

قً (س)



∴ ق (س) مقعراً للأعلى في [٠ ، $\frac{π}{٣}$] ∪ [$\frac{٤π}{٣}$ ، ٢π]

و مقعراً للأسفل في [$\frac{π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$]

نقاط الانعطاف ($\frac{π}{٣}$ ، ق($\frac{π}{٣}$)) ($\frac{٤π}{٣}$ ، ق($\frac{٤π}{٣}$))

تدريب:

٦) ق (س) = $\frac{س}{س^{٢}+١}$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمـــــــي

٦ زاويــة الإنعطــاف

هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق (س) عند نقطة الانعطاف (م، ق (م))

⟸ ظا هـ = قَ (م) : هـ $\in$ [٠، π]

تدريب:

إذا كان لمنحنى ق (س) إنعطاف عند النقطة (٢ ، ٣)

وكان قَ (٣) = ١ ، قَ (٢) = $\sqrt{٣}$

فإن زاوية الانعطاف هي :

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{٢\pi}{٣}$

مثال:

حدد زاوية الانعطاف لكل من الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = س^{٣} − س + ١٠

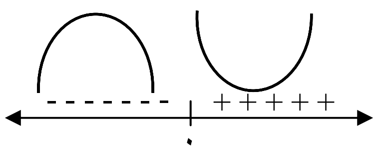
✓الحل:

نجد نقطة الانعطاف

قَ (س) = ٣س^{٢} − ١

قً(س) = ٦س

قً (س)



نقطة الإنعطاف (٠، ق(٠))

زاوية الإنعطاف هـ: ظاهـ = قَ(٠) = −١

⟸ هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

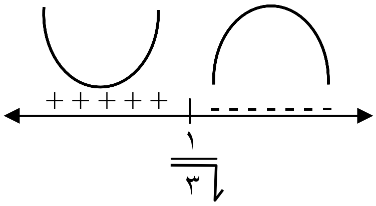
٢) ق (س) = $\sqrt{٣}$ س^{٢} − س^{٣}

✓الحل:

قً (س) = ٢$\sqrt{٣}$ − ٦س

وعندما قً(س) = ٠ ⟸ س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قً (س)



نقطة الإنعطاف ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ق($\frac{١}{\sqrt{٣}}$))

زاوية الإنعطاف هـ: ظاهـ = قَ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

⟸ ظاهـ = ١

∴ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

٢) ق (س) = (س−٢)^{٣} − $\sqrt{٣}$ س + ١

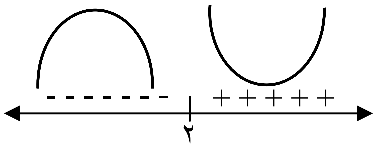
✓الحل:

قَ(س) = ٣ (س−٢)^{٢} − $\sqrt{٣}$

قً (س) = ٦ (س−٢)

و عندما قً (س) = ٠ $\boxed{\text{س=٢}}$

قً (س)



نقطة الانعطاف (٢ ، ق (٢))

زاوية الانعطاف هـ: ظا هـ = قَ (٢)

⟸ ظاهـ = −$\sqrt{٣}$

هـ = $\frac{٢\pi}{٣}$

مثال:

إذا كان للاقتران

ق (س) = س^{٣} − مس^{٢} + ب س + ٨

قيمة عظمى عند النقطة (−٢، ٤) فجد قيمة كلا من م ، ب

✓الحل:

قَ (س) = ٣س^{٢} − ٢مس + ب

١) ق (−٢) = ٤

−٨ −٤م −٢ب + ٨ = ٤

⟸ $\boxed{\text{٢م + ب = −٢}}$ ..... (١)

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

٢) قَ (−٢) = صفر أو غ م ← مستحيل لان ق(س) كثير حدود معرفا على ح

قَ (−٢) =١٢ + ٤ م +ب = صفر

$\boxed{\text{٤م + ب = −١٢}}$ ....(١)

و بحل النظام الخطي نجد أن:

م =−٥ ، ب =٨

مثال:

إذا كان لمنحنى الاقتران

ق (س) = م س³ + ب س² + جـ س + ١٠

انعطاف عند النقطة (−١ ، ٨) زاويته $\frac{\pi}{4}$

فجد م، ب ، جـ

✓الحل:

ق (−١) = ٨ ⟸ −م + ب − جـ + ١٠ =٨

⟸ $\boxed{\text{−م + ب − جـ = −٢}}$ ......(١)

قَ (س) = ٣ م س² + ٢ب س + جـ

قَ(−١) = ظا $\frac{\pi}{4}$ = ١

$\boxed{\text{٣م −٢ب + جـ = ١}}$ ......(٢)

قً (س) =٦م س +٢ب

قً (−١)= −٦م +٢ب = ٠

⟸ $\boxed{\text{−٣م +ب =٠}}$ ......(٣)

و بحل النظام نحصل على

$\boxed{\text{م = ١}}$ ، $\boxed{\text{ب = ٣}}$ ، $\boxed{\text{جـ =٤}}$

تدريب:

حدد منحنى الاقتران ق(س)= س⁴ −٦س² + ٨س+١٣

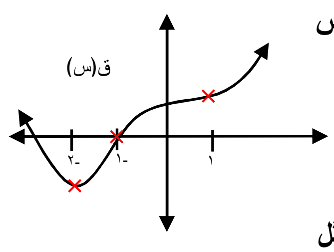
١) فترات التزايد والتناقص

٢) نقاط القيم القصوى

٣) فترات التقعر

٤) نقاط الإنعطاف

٥) ارسم رسمًا تقريبًا يمثل منحنى الاقتران ق (س)



تدريب:

إذا كان ق(س) = |س² −٣س|

حدد مجالات التقعر و نقاط الإنعطاف للاقتران ق (س)

مثال:

إذا كان ق(س) = س⁴ + م س³ + ٣س²

ولم يكن للاقتران نقاط انعطاف فما قيمة الثابت م

✓الحل:

قَ (س) = ٤س³ + ٣ م س² +٦س

قً (س) =١٢س² + ٦ م س +٦

وبما أنه ليس للاقتران نقاط إنعطاف

⟸ قً (س) ≤ صفر أو قً (س) ≥ صفر

⟸ المميز ≥ صفر

(٦م)² −٤ × ١٢ × ٦ ≥ صفر

٣٦م² − ١٨٨ ≥ صفر

م² −٨ ≥ صفر

⟸ م ∈ [−√٨ ، √٨]

مثال:

إذا كان للاقتران

ق (س) = س³ + م س² + ب س + جـ

إنعطاف أفقي عند النقطة (٢ ، ١٨)

فما قيمة م، ب ، جـ

✓الحل:

بما أن للاقتران ق(س) إنعطاف أفقي عند النقطة (٢ ، ١٨) فإن:

ق (٢) =١٨

قَ(٢)=٠

قً (٢)=٠

.

.

.

مثال:

إذا كانت ق(س) = (س− أ)^{٢}. (س − ب)

أثبت أن للاقتران أنعطاف عندما س = $\frac{١}{٣}$ (٢أ + ب)

✓الحل:

قَ (س) =(س− أ)^{٢} ×١ + (س− ب)×٢ (س− أ)

=(س− أ)^{٢} +٢ (س− أ) (س − ب)

قً (س) =٢ (س− أ) +٢ (س− أ) + (س− ب)×٢

= ٤ (س− أ)+ ٢(س − ب)

= ٤س − ٤أ + ٢س −٢ب

= ٦س −٤أ −٢ب

وبمأ أن قً (س) اقتران خطي فإن أشارتها تتغير عند أصفارها

⟸ انعطاف عندما ٦س−٤أ −٢ب =صفر

٦س =٤أ +٢ب

س = $\frac{١}{٣}$ (٢أ + ب)

دور إشارة قً(س) في تحديد أنواع القيم القصوى للاقتران ق(س)

إذا كانت قَ (أ) = صفر فإن للاقتران قيمة عظمى عندما س= أ إذا كانت قً (أ) < صفر

وللاقتران قيمة صغرى عندما س أ إذا كانت قً (أ) > صفر

مثال:

استخدم اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن) لتحديد أنواع القيم القصوى للإقترانات التالية:

١) ق(س)= س^{٢} +٣س

✓الحل:

قَ(س) = ٢س+٣

قَ(س) = صفر

٢س+٣ =صفر ⟸ س= $\frac{-٣}{٢}$

وبما أن قً ($\frac{-٣}{٢}$) =٢ > صفر

فإن للاقتران قيمة صغرى عندما س= $\frac{-٣}{٢}$ وهي ق($\frac{-٣}{٢}$)

٢) ق(س) = س^{٣} −٦س^{٢}

✓الحل:

قَ(س) =٣س^{٢} −١٢س

قَ(س)= صفر

(٣س) (س−٤) = صفر

⟸ س= صفر أو س=٤

وبما أن قً (س) =٦س−١٢

⟸ قً(صفر) =−١٢ (سالب)

∴ للاقتران قيمة عظمى عندما س= صفر

وكذلك قً(٤) =١٢ (موجب)

∴ للاقتران قيمة صغرى عندما س=٤

٣) ق(س) = (س+١)^{٤}

تدريب:

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمـــــي

مثال:

أذا كانت قَ(س) = س^{٢} − √٣

فجد زاوية الإنعطاف للاقتران ق(س)

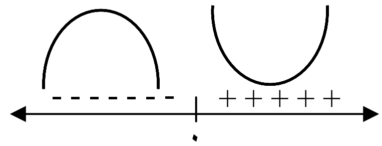
✓الحل:

قً(س) = ٢س

قً(س) = صفر ، قً(س) غ.م

٢س = صفر ، ×

⟸ س = صفر



∴ للاقتران انعطاف عندما س=صفر

⟸ زاوية الانعطاف هي

هـ : ظاهـ = قَ(صفر)

ظاهـ = − √٣

هـ = $\frac{٢\pi}{٣}$

☜ **تدريب:**

إذا علمت أن قَ (٢) = صفر

وكان ق(٢)=١ ، ق(٣)= −١

قً(٢) = −٣ فإن للاقتران قيمة عظمى هي:

أ) ١ ب) ٢ ج) −٣ د) −١

رسم المنحنيات

لرسم منحنى ق(س) يلزم تعيين كل من الخصائص التالية :

١ ـ مجالات التزايد و التناقص .

٢ـ القيم القصوى للاقتران .

٣ـ مجالات التقعر ونقاط الانعطاف .

٤ـ المقطع السيني والمقطع الصادي (إن أمكن).

خطوات الرسم

بعد تحديد إشارة كل من قَ (س) ، قً(س) على خط الأعداد .

نقوم بدمج الخطين على خط ثالث يمثل الرسم الأولي لمنحنى ق(س).

ثم نحدد نقاط القيم القصوى ونقاط الإنعطاف في المستوى الديكارتي و نقل الرسم الأولي إلى ذلك المستوى مرورا بالنقاط.

مثال:

ارسم رسماً تقريبياً يمثل منحنى

ق (س) = ٦س^{٢} − س^{٣}

✓الحل:

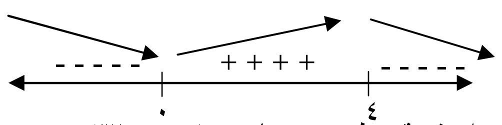
قَ(س) = ١٢س −٣س^{٢}

قَ(س) = صفر

١٢س − ٣س^{٢} = صفر

٣س (٤− س) =صفر

⟸ س = صفر أو س=٤



للاقتران قيمة عظمى عندما س=٤ هي ٣٢

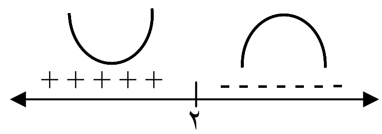
للاقتران قيمة صغرى عندما س= صفر هي صفر

قً(س) =١٢ −٦س

قً(س) = صفر

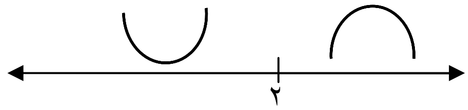
⟸ ١٢−٦س= صفر ⟸ $\boxed{س=٢}$

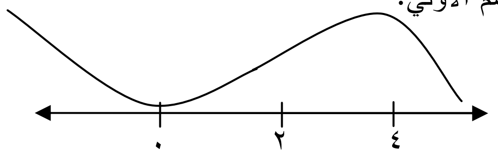
أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

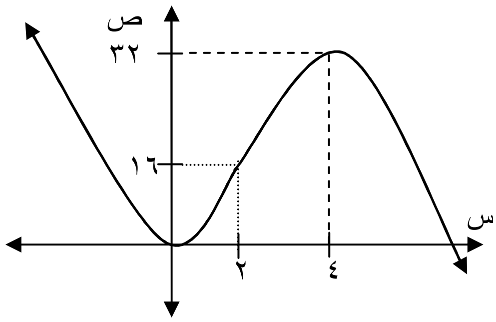
ق ً (س)


∴ للاقتران انعطاف عند النقطة (٢، ١٦)

قَ


ق ً


الرسم الأولي:


∴ يكون رسم ق (س) كما يلي:


مثال:

ارسم رسماً تقريبياً يمثل منحنى

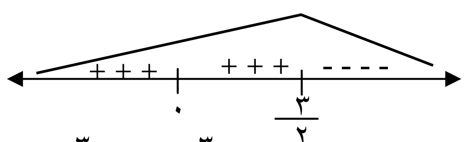
ق(س) =٦س^{٣} – ٣س^{٤}

✓الحل:

قَ(س) = ١٨س^{٢} –١٢س^{٣}

قَ(س) = صفر

١٦س^{٢} (٣– ٢س) = صفر ⟸ س = {٠، $\frac{٣}{٢}$}

⟸ ق ً


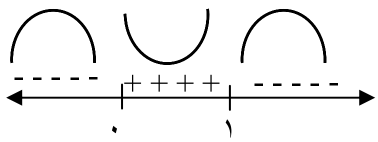
للاقتران قيمة عظمى عندما س= $\frac{٣}{٢}$ هي ق ($\frac{٣}{٢}$)

ق ً (س) =٣٦س–٣٦ س^{٢}

ق ً (س) = صفر

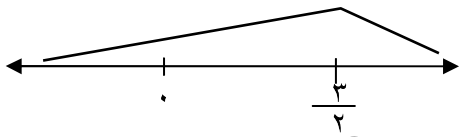
٣٦س (١– س) =صفر

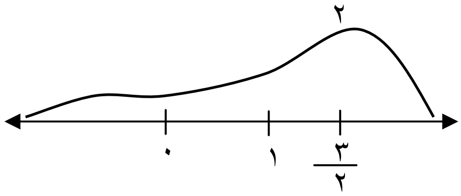
⟸ س= {صفر ، ١}



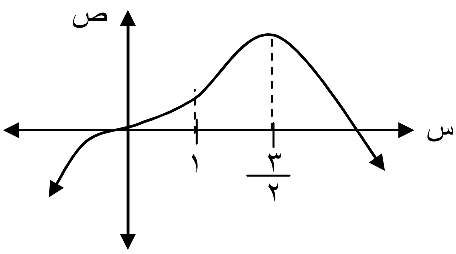
نقاط الانعطاف هي (٠،٠) ، (١ ، ٣)

الرسم الاولي

قَ(س)


ق(س)


نحدد نقاط القيم القصوى ونقاط الانعطاف ثم الرسم السابق مروراً فيها



تدريب:

ارسم رسماً تقريبيًا يمثل منحنى

١) ق(س) = س^{٤} – ٨س^{٢}

٢) ق(س) = ٩س – $\frac{س^{٤}}{١٢}$

مثال:

ارسم رسمًا تقريبياً يمثل منحنى

ق(س) المار بالنقطة (٠،١) علمًا بأن

قَ(س) >٠ لكل س: | س –١| < ١

قَ(س) <٠ لكل س: | س –١| >١

ق ً(س) >٠ لكل س<١ ، ق ً (س) <٠ لكل س >١

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمــــي

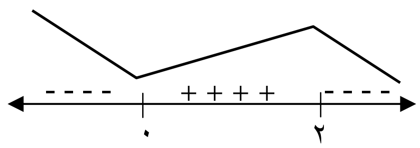
✓الحل:

|س− ١| >١ ⟸ −١> س −١>١

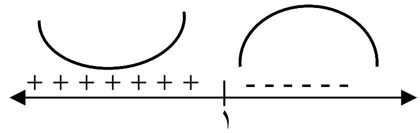
⟸ ٠ > س > ٢

|س−١| <١ ⟸ س <٢ أو س > ٠

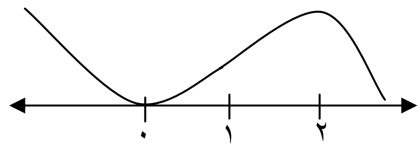
∴ قَ (س)



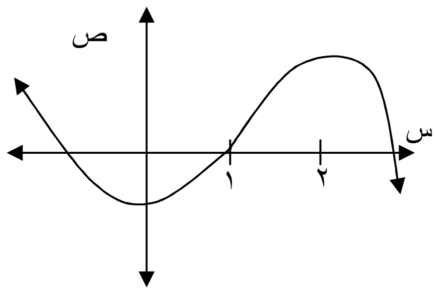
قً (س)



ق(س)



⟸ يكون رسم منحنى ق(س) كما يلي:



☜ **تدريب:**

ارسم منحنى ق(س) الذي يمر بالنقطة (٢،٠) علمًا بأن

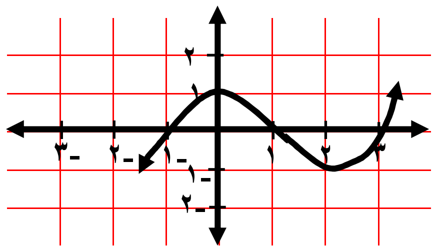
قَ(س) >٠ لكل س>٢

قَ(س)<٠لكل س<٢

قً(س) > ٠ لكل س∈ح

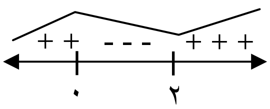
إيجاد خصائص ق(س) من الرسم

اعتمد على الشكل التالي في تحديد خصائص الاقتران ق(س)



١) النقط الحرجة (٠، ١) (٢، −١)

٢) ق(س) متناقص في [٠، ٢]



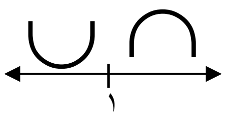
متزايد في (−∞، ٠]∪[٢، ∞)

٣) للاقتران قيمة عظمى عند س=٠ هي ق(٠) =١

للاقتران قيمة صغرى عند س=٢ هي ق(٢)=−١

٤) ق (س) مقعر للاعلى(−∞،١]

ق(س) معقر للأسفل [١، ∞)



٥) نقاط الانعطاف (١ ، ٠)

٦) أصفار كل من ق(س) ، قَ(س) ، قً(س)

ق(س)= ∴ لكل س∈ {−١، ١، ٣}

قَ(س)= ∴ لكل س∈ {٠، ٢}

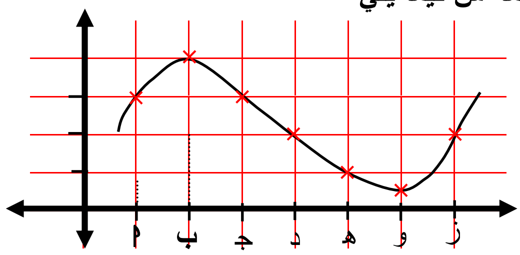
قً(س)= ∴ عندما س = ١

٧) إشارة كل من قَ(−١) ، قً(٣)

قَ(−١) < ∴ (تزايد)

قً(٣) >٠ (تقعر للأعلى)

جد قيمة س فيما يلي



إذا كانت :

١) قَ(س) >٠ ، قً (س) > ٠ ⟸ س = ز

٢) قَ(س) >٠ ، قً (س) <٠ ⟸

٣) قَ(س) <٠ ، قً (س) > ٠ ⟸

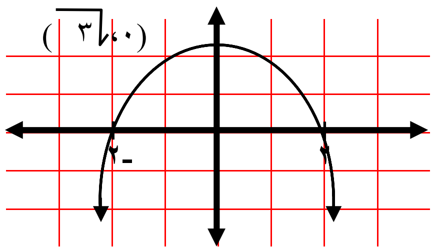
٤) قَ(س) <٠ ، قً (س) <٠ ⟸

٥) قَ(س) <٠ ، قً (س) =٠ ⟸

٦) قَ(س) =٠ ، قً (س) > ٠ ⟸

٧) قَ(س) =٠ ، قً (س) <٠ ⟸

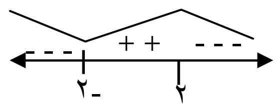
يبين الشكل التالي منحنى ق(س)



جد لمنحنى ق(س) كل ما يلي

١)النقاط الحرجة (-٢ ، ق(-٢)) (٢، ق(-٢))

٢) فترات التزايد و التناقص



متزايد على [-٢ ، ٢]

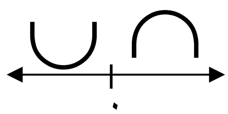
متناقص على (-∞، -٢]∪[٢، ∞)

٣) القيم القصوى:

عظمى عند النقطة (٢، ق(٢))

صغرى عند النقطة (-٢، ق(-٢))

٤) فترات التقعر



(-∞، ٠] تقعر للأعلى

[٠، ∞) تقعر للأسفل

٥) نقطة الأنعطاف (٠،ق(٠))

٦) زاوية الانعطاف:

هـ: ظا هـ = قَ(٠) = √٣

⟸ هـ = ٦٠°

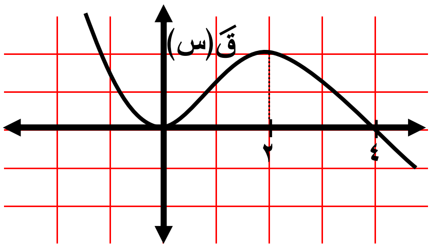
٧) إذا كان ق(٠) = ٠ ارسم رسما تقريبا

يمثل منحنى ق(س)

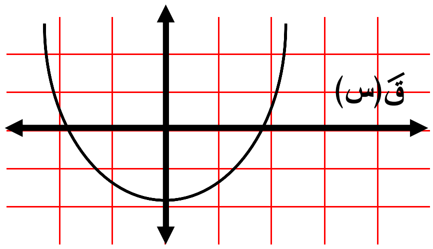
تدريب:

من خلال الشكل التالي و الذي يمثل منحنى قَ(س) ارسم رسمًا تقريبيًا يمثل منحنى ق(س)علماً بأن ق(٠)=٠

أ)

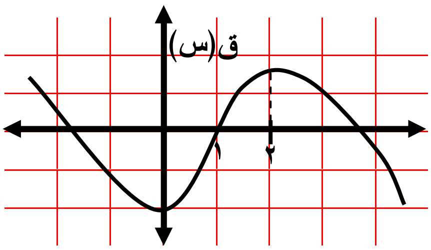


ب)

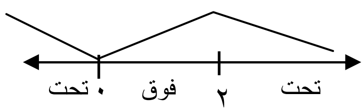


يبين الشكل التالي منحنى ق(س) ارسم رسماً تقريبياً يمثل منحنى قَ(س)

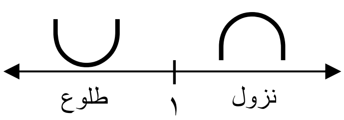
أ)



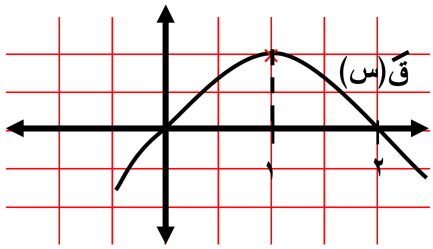
قَ(س)



قً(س)



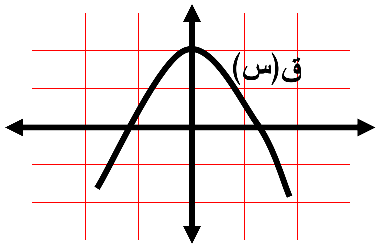
ق(٠) = ق(٢) = ∴ (قيم قصوى)



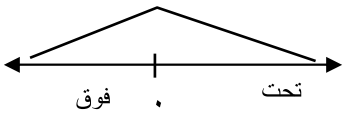
أعداد الأستاذ : معــــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــــي

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــــي

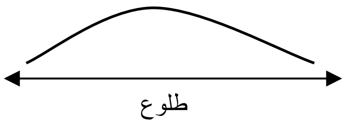
ب)



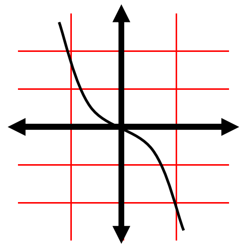
ق̃(س)

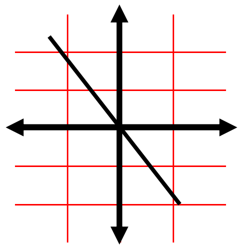


ق̋(س)



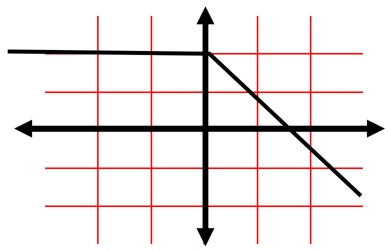
ق̋(٠) = صفر؟!!



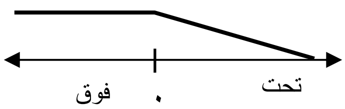


~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

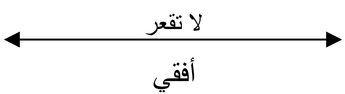
ج)



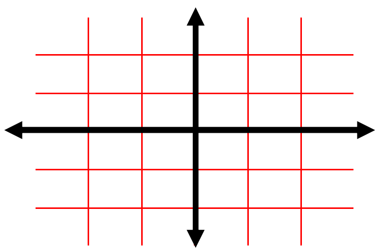
ق̃(س)



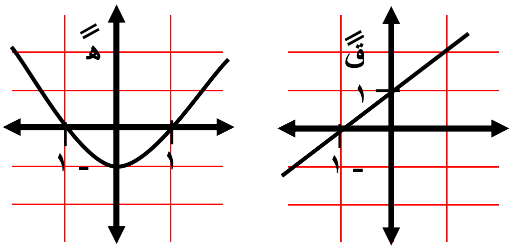
ق̋(س)



ق((٠) غ. م؟!!!

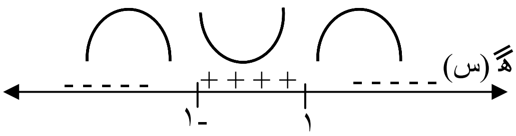


اعتمد الشكلين التاليين لتحديد ما يليهما:



١) فترات التقعر لمنحنى ق(س)

٢) فترات التزايد والتناقص لمنحنى ه̃(س)



ه̃ (س) متزايد على (−∞، ١)∪[١، ∞)

ه (س) متناقص [−١، ١]

٣) نقط الانعطاف لمنحنى ق(س)
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

تطبيقات على القيم القصوى

(المسائل العملية)

خطوات التعامل مع المسألة

١-الرسم أن أمكن مع تحديد الثوابت والمتغيرات عليه .

٢- تحديد اقتران الهدف .

(المطلوب ايجاد القيمة القصوى له).

٣-جعل الاقتران بدلالة متغير واحد.

٤- إيجاد القيم القصوى له عند أصفار المشتقة الأولى.

الأسئلة

١) جد العدد الذي إذا أضيف إلى مربعه يكون الناتج أقل ما يمكن.

✓الحل:

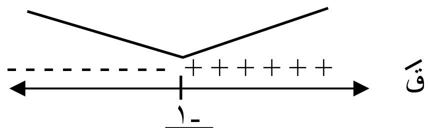
نفرض أن العدد هو س

⟸مربعه هو $س^{٢}$

⟸ق= س+ $س^{٢}$

قَ=١+٢س

قَ=٠ ⟸ س= $\frac{-١}{٢}$



∴ العدد الذي إذا أضيف إلى مربعه كان الناتج أقل ما يمكن هو $\frac{-١}{٢}$

٢) جد العددين الموجبين اللذين حاصل ضربهما ٣٦ و مجموعهما أقل ما يمكن

✓الحل:

نفرض إن العددين هما س و ص

⟸ق= س+ ص

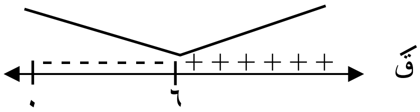
لكن س×ص =٣٦ ⟸ص= $\frac{٣٦}{س}$

∴ق= س + $\frac{٣٦}{س}$

قَ = ١- $\frac{٣٦}{س^{٢}}$ = $\frac{س^{٢}-٣٦}{س^{٢}}$

وعندما قَ= ٠ ⟸ س = ± ٦

تهمل

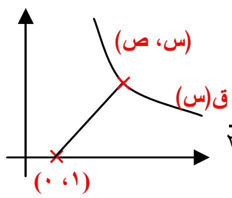


∴ يكون الناتج أقل ما يمكن عندما س = ٦

⟸ ص = ٦

٣) جد النقطة الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢}-١٠س+٢٥}$ والتي يكون بعدها عند (١ ،٠) أقل ما يمكن

✓الحل:



ق= المسافة بين نقطتين

= $\sqrt{(س-١)^{٢} + (ص-٠)^{٢}}$

= $\sqrt{(س-١)^{٢} + ص^{٢}}$

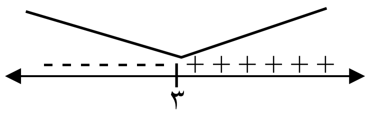
لكن ص= $\sqrt{س^{٢}-١٠س+٢٥}$

ق= $\sqrt{س^{٢}-٢س+١+س^{٢}-١٠س+٢٥}$

$ق^{٢}$= ٢$س^{٢}$ -١٢س+٢٦

٢ق × قَ = ٤س-١٢

وعندما قَ=٠ ⟸ $\boxed{س=٣}$



∴ تكون المسافة أقل ما يمكن عندما س=٣

⟸ ص=٢

٤) يبيع مصنع (س) من القطع أسبوعيًا سعر الواحدة منها (٢٠٠ – ٠,٠١س) فلس فإذا كانت تكلفة إنتاج (س) من القطع يعطي بالعلاقة (٥٠ س +٢٠٠٠٠) فلس، جد عدد القطع اللازم بيعها ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن

✓الحل:

ق= الربح الكلي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

=الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

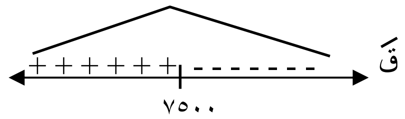
= س(٢٠٠ – ٠,٠١س) – (٥٠س + ٢٠٠٠)

= ٢٠٠س – ٠,٠١س^{2} – ٥٠ س – ٢٠٠٠

قَ = ٢٠٠ – ٠,٠٢س – ٥٠

= ١٥٠ – ٠,٠٢س

⟸ وعندما قَ=٠ ⟸ س= ٧٥٠٠ قطعة



يكون الربح أكبر ما يمكن عند بيع ٧٥٠٠قطعة

٥) وجد تاجر أنه إذا كان سعر الواحدة من سلعةٍ ما دينارًا واحداً فأنه يبيع (٤٠٠) سلعة وأن هـذا العـدد يـنقص بمقدار (٢٠) سلعة لكل زيادة قدرها (١٠) قروش علـى سعر الواحدة ، جد سعر السلعة الذي يجعل الإيراد أكبر ما يمكن.

✓الحل:

سعر الواحدة	عدد السلع
١٠٠ قرش	٤٠٠
(١٠٠+ ١٠س)	(٤٠٠ – ٢٠س)

ق = الايراد الكلي

= عدد السلع × سعر السلعة الواحدة

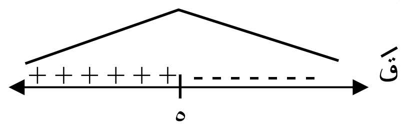
= (٤٠٠ – ٢٠س) (١٠٠+١٠س)

قَ = (٤٠٠ – ٢٠س) (١٠) + (١٠٠+ ١٠س)(–٢٠)

= ٤٠٠٠ – ٢٠٠س – ٢٠٠٠ – ٢٠٠س

= ٢٠٠٠ – ٤٠٠س

وعندما قَ=٠ ⟸ س=٥

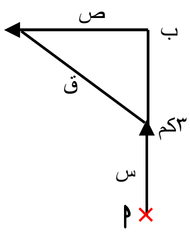


∴ يكون الإيراد أكبر ما يمكن عندما بيع ٥ سلع

⟸ سعر الواحدة = دينار ونصف

٦) الباخرة أ على بعد ٣٠كم جنوب ب وتـسير شـمالاً بسرعة ١٥كم/س ، ب تسير غربًا بسرعة ١٠كم/س جد الزمن اللازم لتكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن.

✓الحل:



ق = المسافة بين الباخرتين

ق^{2} = ص^{2}+(٣٠– س)^{2}

لكن س= ١٥ن

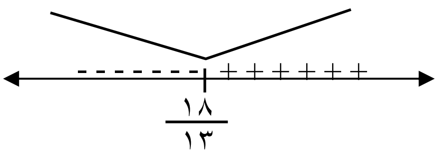
ص=١٠ن

ق^{2} =١٠٠ن^{2} + (٣٠ –١٥ ن)^{2}

٢ق × قَ =٢٠٠ن +٢(٣٠–١٥ن)×–١٥

٢ق × قَ = ٦٥٠ ن – ٩٠٠

و عندما قَ =٠ ⟸ ن = $\frac{١٨}{١٣}$

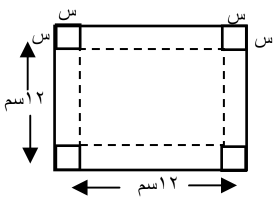


تكون المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن

عندما ن= $\frac{١٨}{١٣}$ ساعة

٧) قطعة من الكرتون المقوى مربعة الشكل طول ضلعها ١٢سم، قُص من أطرافها الأربعة أربع مربعات متساوية ثم ثنيت بحيث يكون لدينا صندوق مفتوح من أعلى ، جد أكبرحجم ممكن للصندوق.

✓الحل:



ق= حجم الصندوق

= س(١٢ –٢س)^{2}

قَ= س × ٢(١٢ –٢س) ×–٢ + (١٢ –٢س)^{2}

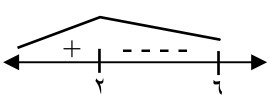
=–٤س(١٢–٢س) +١٤٤ –٤٨س +٤س^{2}

=–٤٨س+ ٨س^{2} +١٤٤ –٤٨س +٤س^{2}

=١٢س^{2} –٩٦ س +١٤٤ =٠

س^{2} – ٨س +١٢=٠

(س–٢) (س–٦)=٠ ⟸ س=٢ ، ٦



يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما س=٢سم

∴ أكبر حجم = ق(٢)= ٢× (٨)^{2} =١٢٨ سم^{3}

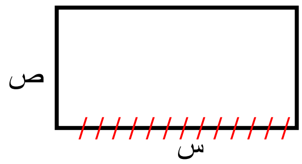
تدريب:

٨) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل جد أبعاد النافذة لتسمح بمرور أكبر كمية من الضوء ، علما بأن محيط المستطيل ٨م.

٩) سلك طوله ٢٤ سم ثُنيّ على شكل مستطيل بحيث مر على كل ضلع مرتين ما عدا ضلع واحد فقد مر عليه مرة واحدة ، جد ابعاد المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن

✓الحل:

ق= مساحة المستطيل



ق= س × ص

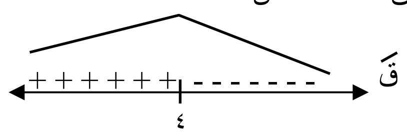
لكن ٣س+٤ص =٢٤

⟸ ص= $\frac{٢٤ - ٣س}{٤}$

ق= س× $\frac{٢٤ - ٣س}{٤}$ = $\frac{٢٤س - ٣س^{٢}}{٤}$

قَ= $\frac{٢٤ - ٦س}{٤}$

وعندما قَ=٠ ⟸ س=٤



تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما س=٤سم

⟸ ص =٣سم

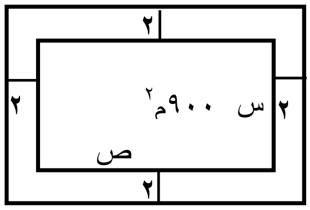
تدريب:

١٠) لدى رجل حقل مستطيل يريد أن يسيجه ثم يقسمه ألى ثلاثة اقسام بسياجين يوازيان أحد أبعادة ، فإذا كان لديه ٦٠٠م من السياج جد أكبر مساحة يمكن تسيجيها.

١١) يراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠م^{٢} و أحاطة جميع جوانبها بطريق خارجي عرضه ٢م ، جد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحةالكلية أقل ما يمكن.

✓الحل:

ق =المساحة الكلية



= (س+٤) (ص+٤)

لكن س × ص =٩٠٠

⟸ ص= $\frac{٩٠٠}{س}$

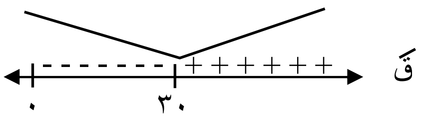
ق= (س+٤) ($\frac{٩٠٠}{س}$ +٤)

⟸ ق =٩١٦ + $\frac{٣٦٠٠}{س}$ +٤س

قَ= $\frac{-٣٦٠٠}{س^{٢}}$ +٤ = $\frac{٤س^{٢} - ٣٦٠٠}{س^{٢}}$

وعندما قَ= ٠ ⟸ س = $\pm$٣٠م

تهمل



∴ تكون المساحة الكلية أقل ما يمكن عندما

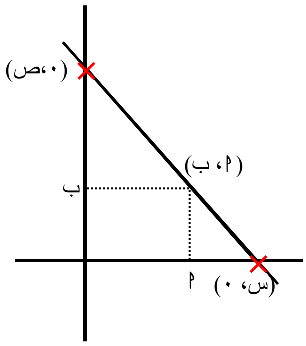
س=٣٠م ⟸ ص =٣٠م

١٢) مرّ مستقيم بالنقطة (أ ، ب) و التي تقع في الربع الأول فقطع محوري الإحداثيات الموجبين ، جد أصغر مساحة للمثلث الناتج .

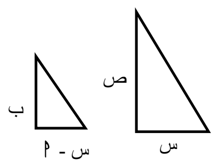
✓الحل:

ق= مساحة المثلث

= $\frac{١}{٢}$ س ×ص



من تشابه المثلثين



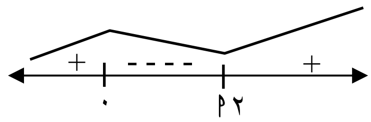
⟸ $\frac{ص}{ب}$ = $\frac{س}{س - أ}$

⟸ ص = ب × $\frac{س}{س - أ}$

∴ ق = $\frac{١}{٢}$ س× ب× $\frac{س}{س - أ}$ = $\frac{١}{٢}$ ب× $\frac{س^{٢}}{س - أ}$

قَ= $\frac{١}{٢}$ ب × $\frac{(س - أ)(٢س) - (س^{٢})(١)}{(س - أ)^{٢}}$

ق̀ = ٠ ⟸ س = صفر أو ٢أ



تكون مساحة المثلث أقل ما يمكن

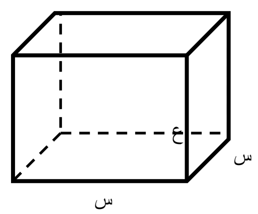
عندما س= ٢أ ⟸ ص =٢ب

∴ أصغر مساحة للمثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢أ × ٢ب

= (٢أ ب) وحدة مربعة

١٣) يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة،جد أكبر حجم للصندوق بحيث تبلغ تكلفة إنتاجه ١٤٤ دينار، علما بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب الرقيق ٣ دنانير.

✓الحل:



ق= حجم الصندوق

= س × س × ع

= س^{2} ×ع

لكن تكلفة الأنتاج =١٤٤

٣(المساحة الجانبية + مساحة القاعدة) =١٤٤

٣(٤س ع + س^{2}) =١٤٤

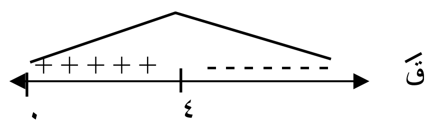
٤س ع + س^{2} = ٤٨ ⟸ ع = $\frac{\text{٤٨} - \text{س}^{2}}{\text{٤}}$

ق = س^{2}× $\frac{\text{٤٨} - \text{س}^{2}}{\text{٤س}}$ = $\frac{\text{٤٨س} - \text{س}^{3}}{\text{٤}}$

ق̀= $\frac{\text{٤٨} - \text{٣س}^{2}}{\text{٤}}$

وعندما ق̀= ٠ ⟸ س = ± ٤

تهمل

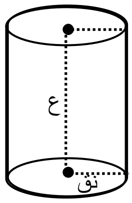


∴ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن

عندما س= ٤ ⟸ع=٢سم

∴ أكبر حجم = ١٦× ٢= ٣٢سم^{3}

١٤) جد أقل كمية من الصفيح اللازم لصناعة علبة أسطوانية مغلقة من القاعدتين بحيث تبلغ سعتها ١٦π سم^{3}.



✓الحل:

ق= كمية الصفيح

= المساحة الجانبية +٢ × مساحة القاعدة

= ٢π نق× ع + ٢ π نق^{2}

⟸ لكن ح = ١٦π

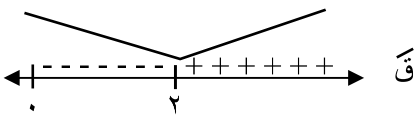
π نق×ع =١٦π ⟸ ع = $\frac{\text{١٦}}{\text{نق}^{2}}$

⟸ ق=٢πنق × $\frac{\text{١٦}}{\text{نق}^{2}}$ + ٢π نق^{2}

=٢π ($\frac{\text{١٦}}{\text{نق}}$ + نق^{2})

ق̀= ٢π ($\frac{\text{-١٦}}{\text{نق}^{2}}$ + ٢نق) = ٢π($\frac{\text{٢نق}^{3} \text{-١٦}}{\text{نق}^{2}}$)

وعندما ق̀=٠ ، $\boxed{\text{نق=٢}}$



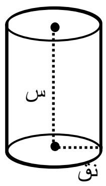
∴ تكون كمية الصفيح أقل ما يمكن عندما نق =٢سم

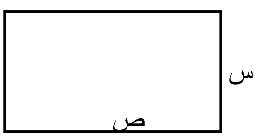
⟸ ع = ٤سم

∴ أقل كمية من الصفيح=٢٤π سم^{2}

١٥) لوح من الصفيح مستطيل الشكل محيطه ٣٦ سم، ثُني على شكل اسطوانة مفتوحة القاعدتين جد ابعاد اللوح ليكون حجمها أكبر ما يمكن.

✓الحل:





ق= حجم الاسطوانة = πنق^{2} × س

لكن ٢س +٢ص =٣٦

س+ ص= ١٨

⟸ وبما أن ص= محيط قاعدة الإسطوانة

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصــاع
الفرع العلمــــي

⟸ س + ٢πنق = ١٨

س = ١٨ − ٢πنق

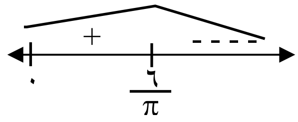
∴ ق = πنق^{٢} (١٨ − ٢πنق)

= π(١٨نق^{٢} − ٢πنق^{٣})

قَ = π (٣٦نق − ٦πنق^{٢})

⟸ ٦π (٦نق − π نق^{٢}) = صفر

⟸ نق = ∴ أو نق = $\frac{٦}{\pi}$



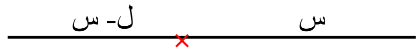
يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن عندما نق = $\frac{٦}{\pi}$

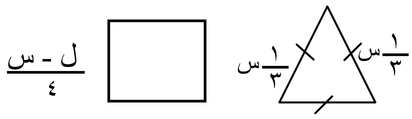
⟸ س = ٦ سم

⟸ ص = ١٢سم

١٦) سلك طوله ل سم تم قطعه جزأين صنع من الأول مثلث متساوي الأضلاع ومن الثاني مربع، بين أن مجموع مساحيتهما أقل ما يمكن عندما تكون النسبة بين الجزأين كنسبة ٣$\sqrt{٣}$: ٤

✓الحل:





ق = مساحة المثلث + مساحة المربع

$= \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٣}س)^{٢} \times$ جا٦٠ + $(\frac{ل - س}{٤})^{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$ س^{٢} + $\frac{١}{١٦}$(ل − س)^{٢}

قَ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$س + $\frac{١}{٨}$ (ل−س)×−١

وعندما قَ = ٠

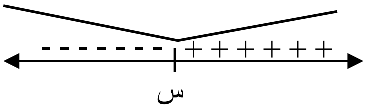
⟸ $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ س − $\frac{١}{٨}$ (ل − س) = ٠

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{١٨}$ س = $\frac{١}{٨}$ (ل − س)

$\frac{\sqrt{٣}}{١٨} = \frac{س}{ل - س} = \frac{١}{٨}$

$\frac{س}{ل - س} = \frac{١}{٨} \times \frac{١٨}{\sqrt{٣}} = \frac{٩}{٤\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$

⟸ س = $\frac{٩}{٩ + ٤\sqrt{٣}}$

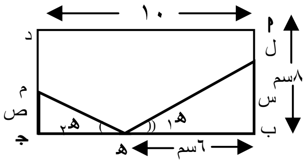


∴ يكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن

عندما س: ل− س كنسبة ٣$\sqrt{٣}$: ٤ #

١٧) أب جـ د مستطيل فيه أب =٨سم ، ب جـ = ١٠ سم هـ نقطة على ب جـ حيث ب هـ =٦سم ، ل، م نقطتان على أب ، د جـ حيث ق∠ ل هـ م = ٩٠°، جد طول كل من ل ب م جـ لتكون مساحة المضلع أل هـ م د أكبر ما يمكن

✓الحل:



ق = مساحة المضلع أ ل هـ م د

= مساحة المستطيل − مجموع مساحتي المثلثين

= ٨٠ − ($\frac{١}{٢}$× ٦ × س + $\frac{١}{٢}$ ×٤ × ص)

= ٨٠− ٣س − ٢ص

لكن هـ$_{١}$ + هـ$_{٢}$ = ٩٠°

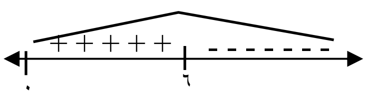
⟸ ظا هـ$_{١}$ = ظتا هـ$_{٢}$

⟸ $\frac{س}{٦} = \frac{٤}{ص}$ ⟸ س = $\frac{٢٤}{ص}$

ق = ٨٠ − $\frac{٧٢}{ص}$ −٢ص

قَ = $\frac{٧٢}{ص^{٢}}$ −٢ = $\frac{٧٢ - ٢ص^{٢}}{ص^{٢}}$

وعندما قَ=٠ ⟸ ص= ±٦ (− تهمل)



∴ تكون المساحة الكلية أقل ما يمكن عندما

ص=٦سم ⟸ س=٤سم

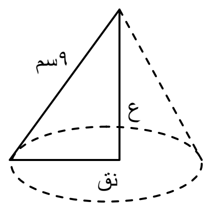
أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

تدريب:

١٨) أب ج د مستطيل فيه أب =٦سم ، ب ج =١٠سم مدّ الضلع د ج على استقامته إلى هـ ثم وصل أهـ ليقطع ب ج في النقطة جد الزيادة في طول الضلع د ج ليكون مجموع مساحتي المثلثين أب و ، و ج هـ ، أقل ما يمكن

١٩) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩ سم ، دار دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة جد أكبر حجم للجسم الناتج عند الدوران

✓الحل:



ق= حجم المخروط

= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ع

لكن نق^{٢} + ع^{٢} =٨١

نق^{٢} =٨١ − ع^{٢}

∴ ق = $\frac{١}{٣}$ π (٨١ −ع^{٢}) × ع

= $\frac{١}{٣}$ π(٨١ ع − ع^{٣})

ق̀= $\frac{١}{٣}$ π(٨١ −٣ع^{٢})

وعندما ق̀=٠ ⟸ ع = ± $\sqrt{٢٧}$

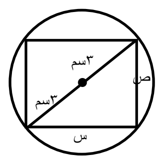
وبما أن ق̀̀ ($\sqrt{٢٧}$) < ∴

∴ يكون حجم الجسم أكبر ما يمكن عندما ع= $\sqrt{٢٧}$ = ٣$\sqrt{٣}$

∴ أكبر حجم = ق(٣$\sqrt{٣}$) ٢٧$\sqrt{٣}$ π سم^{٣}

٢٠) جد أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٣سم.

✓الحل:



ق = مساحة المستطيل

= س × ص

لكن س^{٢} + ص^{٢} =٣٦

⟸ س = $\sqrt{٣٦ - ص^{٢}}$

ق = ص × $\sqrt{٣٦ - ص^{٢}}$

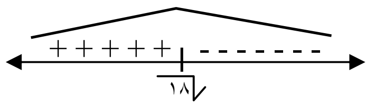
ق^{٢}= ص^{٢} (٣٦− ص^{٢})

=٣٦ص^{٢} − ص^{٤}

٢ق × ق̀ =٧٢ ص −٤ص^{٣}

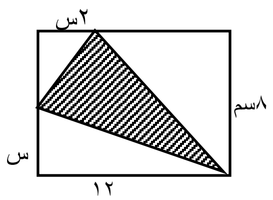
وعندما ق̀=٠

⟸ ص = $\sqrt{١٨}$



∴ أكبر مساحة للمستطيل هي ١٨سم^{٢}

٢١) من الشكل المجاور جد قيمة س حتى تكون مساحة المثلث المظلل أقل ما يمكن



✓الحل:

ق= مساحة المثلث المظلل

= ٨×١٢− ($\frac{١}{٢}$×١٢× س+ $\frac{١}{٢}$×٨×(١٢−٢س))+ $\frac{١}{٢}$×٢س(٨−س))

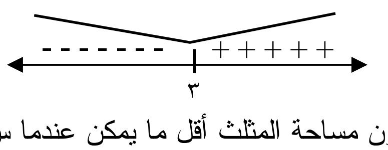
=٩٦ − (٦س + ٤٨ −٨س +٨س −س^{٢})

=٩٦ − (٦س +٤٨ − س^{٢})

= ٩٦ −٦س −٤٨ +س^{٢}

ق̀=٢س−٦

وعندما ق̀=٠ ⟸ $\boxed{\text{س=٣}}$



∴ تكون مساحة المثلث أقل ما يمكن عندما س= ٣

٢٢) جد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٣سم.

✓الحل:

ق= مساحة المثلث

$= \frac{1}{2} \times 2$ س $\times$ ص

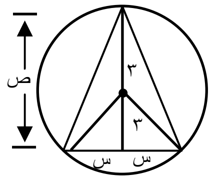
$=$ س $\times$ ص

ق $=$ ص $\times \sqrt{6ص - ص^2}$

ق$^2 =$ ص^2 $(6ص - ص^2)$

$= 6ص^3 - ص^4$

2قَ $\times$ ق $= 18ص^2 - 4ص^3$



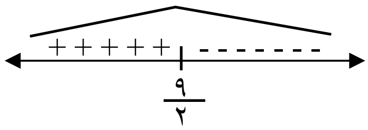
س$^2 + (ص-3)^2 = 9$

س$^2 +$ص$^2 - 6$ص$=0$

س$^2 = 6$ص$-$ص^2

س$= \sqrt{6ص - ص^2}$

وعندما قَ $= ٠ \Longleftarrow$ ص $= \frac{9}{2}$



∴ أكبر مساحة للمثلث عندما ص$= \frac{9}{2}$

وهي ق$(\frac{9}{2}) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ سم^2

٢٣) جد أكبرحجم لإسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $3\sqrt{3}$ سم .

✓الحل:

ق= حجم الاسطوانة

$= \pi$نق$^2 \times 2$س

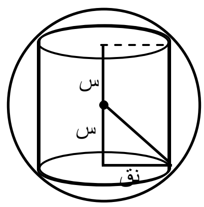
$= \pi (27 -$ س$^2) \times 2$س

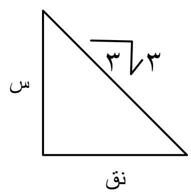
$= 2\pi (27$س $-$ س$^3)$

قَ $= 2\pi (27 - 3$س$^2)$

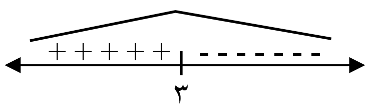
وعندما قَ$= ٠$

$\Longleftarrow$ س $= 3$





نق$^2 = 27 -$ س^2



∴ أكبر حجم للاسطوانة عندما س= ٣سم

وهو ق$(3) = 108\pi$ سم^3

تدريب:

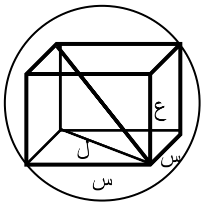
٢٤) جد ارتفاع أكبر مخروط من حيث الحجم والذي يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها ٨سم.

الجواب: $\frac{32}{3}$سم

٢٥) جد حجم أكبر صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها ٤سم.

✓الحل:

ق= حجم متوازي المستطيلات



$=$ س$\times$ س$\times$ ع

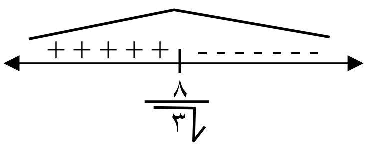
$=$ س$^2 \times$ع

$= \frac{64 - ع^2}{2} \times$ ع

$= \frac{1}{2}(64$ ع $-$ ع$^3)$

قَ$= \frac{1}{2}(64 - 3$ع$^2)$

وعندما قَ$= ٠ \Longleftarrow$ ع $= \frac{8}{\sqrt{3}}$

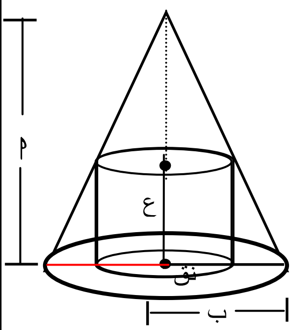


∴ أكبر حجم للصندوق هو ق$(\frac{8}{\sqrt{3}}) = \frac{512}{3\sqrt{3}}$ سم

٢٦) برهن أن اكبر حجم للإسطوانة يمكن رسمها داخل مخروط هو $\frac{4}{9}$ حجم المخروط.

✓الحل:

ق= حجم الإسطوانة



$= \pi$ نق$^2 \times$ ع

$= \pi$ نق$^2 \times \frac{م}{ب}$ (ب$-$ نق)

$= \frac{م}{ب}\pi$ (ب نق^2 $-$نق^3)

قَ $= \frac{م}{ب}\pi$ (٢ب نق $-$٣نق^2)

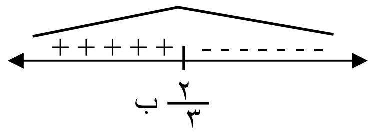
أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع

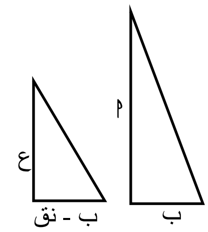
الفرع العلمـي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

$ق' = ٠$

$\Leftarrow نق = \frac{٢}{٣} ب$





$\frac{ع}{م} = \frac{ب - نق}{ب}$

$ع = \frac{م}{ب} (ب - نق)$

∴ أكبر حجم للاسطوانة

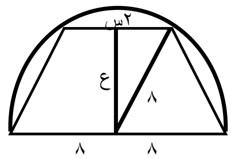
عندما $نق = \frac{٢}{٣} ب$

وهو $ق(\frac{٢}{٣} ب) = \frac{٤}{٩} (\frac{١}{٣} \pi ب^٢ \times م)$

$= \frac{٤}{٩}$ حجم المخروط #

٢٧) جد مساحة أكبر شبه منحرف يمكن رسمه داخل نصف دائرة قطرها ٨سم بحيث تنطبق إحدى قاعدتيه على قطر الدائرة.

✓الحل:



ق= مساحة شبه المنحرف

$= \frac{١}{٢} (١٦+٢س) \times ع$

$ع^٢ + س^٢ = ٦٤$

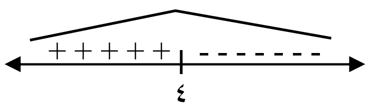
$ع^٢ = ٦٤ - س^٢$

$= (٨+س) . \sqrt{٦٤ - س^٢}$

$ق' = (٨+س) \times \frac{-س}{\sqrt{٦٤ - س^٢}} + \sqrt{٦٤ - س^٢}$

وعندما $ق' = ٠$

$\Leftarrow س = ٤$

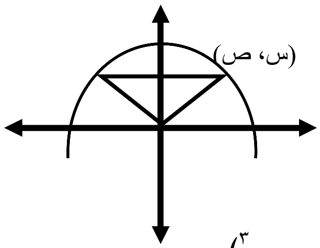


∴ أكبر مساحة لشبه المنحرف عندما س= ٤

وهي $ق(٤) = ٤٨\sqrt{٣}$ سم²

٢٨) جد أكبر مساحة للمثلث الذي أحد رؤوسه عند نقطة الأصل ورأساه الاخرين على منحنى $ق(س) = ٤ - س^٢$

✓الحل:



ق= مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times ٢س \times ص$

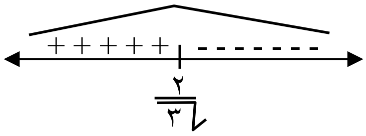
$= س \times ق(س)$

$= س(٤-س^٢) = (٤س - س^٣)$

$ق' = ٤ - ٣س^٢$

وعندما $ق' = ٠$

$\Leftarrow س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$



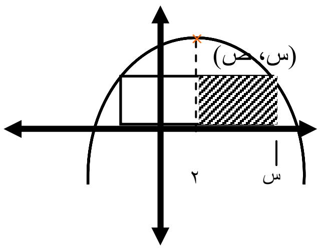
∴ أكبر مساحة للمثلث عندما $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

وهي $ق(\frac{٢}{\sqrt{٣}}) = \frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ سم²

٢٩) جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث ينطبق أحد أضلاعه على محور السينات ورأساه الآخرين على منحنى الإقتران $ق(س) = ٨ + ٤س - س^٢$

✓الحل:

رأس القطع (٢،١٢)



ق = مساحة المستطيل

$= ٢ \times$ مساحة المظلل

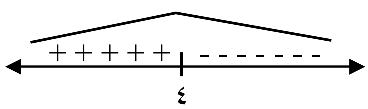
$= ٢(س-٢) \times ق(س)$

$= ٢(س-٢)(٨+٤س - س^٢)$

$= ١٢س^٢ - ٢س^٣ - ٣٢$

$ق' = ٢٤س - ٦س^٢$

وعندما $ق' = ٠ \Leftarrow س = ٤$

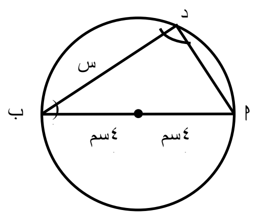


∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما س=٤

وهي $ق(٤) = ٣٢$سم²

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع
الفرع العلمـي

٣٠) أب قطر في دائرة طوله ٨سم ، د نقطة على منحنى الدائرة ، جد قياس الزاوية أ ب د لتكون مساحة المثلث أ د ب أكبر ما يمكن



✓الحل:

ق = $\frac{١}{٢}$ ×٨×س ×جاهـ

لكن جتا هـ = $\frac{س}{٨}$

⟸ س=٨جتا هـ

ق= $\frac{١}{٢}$ ×٨جتا هـ × ٨جا هـ

=٣٢ جاهـ جتاهـ

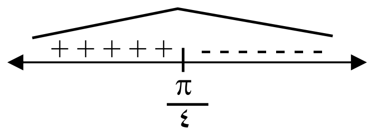
=١٦ جا٢هـ

قَ =٣٢جتا٢هـ

قَ=٠

جتا٢ هـ ⟸ ٢ هـ =٩٠°، $\boxed{٢٧٠}$ ⟵ تهمل

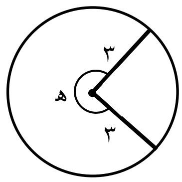
هـ = $\frac{\pi}{٤}$

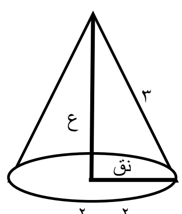


∴ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما

ق ∢ ب =٤٥°

٣١) قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته ٣ ، حول إلى مخروط دائري قائم ، جد قياس الزاوية هـ التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن





نق^{٢}+ع^{٢}=٩

نق^{٢} =٩-ع^{٢}

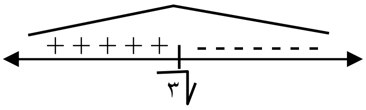
✓الحل:

ق= حجم المخروط

= $\frac{١}{٢}$π نق^{٢}×ع = $\frac{\pi}{٣}$(٩ع – ع^{٣})

ق= $\frac{\pi}{٣}$(٩-٣ع^{٢})

وعندما قَ=٠ ⟸ $\sqrt{٣}$



∴ أكبر حجم للمخروط عندما ع = $\sqrt{٣}$

⟸ نق^{٢} =٩-٣ =٦

⟸ طول قوس القطاع =محيط قاعدة المخروط

٣هـ = ٢π $\sqrt{٦}$ ⟸ هـ = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$ π

تمت بحمد الله ورعايته

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــــي