أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

النهـــايـــات:

مفردها (نهاية) ويرمز لها بالرمز

نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = ل

تقرأ:

نهاية ق(س) عندما س تؤول إلى (أ) تساوي ل.

تعني:

أنه كلما اقتربت س من أ فإن قيمة الاقتران ق(س) تقترب من ل.

→ أ ←

الاقتراب من (أ) يكون من جهتين:

١) جهة اليمين: نهــا$_{س \to أ^+}$ ق (س)

٢) جهة اليسار: نهــا$_{س \to أ^-}$ ق (س)

نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س)	نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س)	نهــا$_{س \to أ}$ ق(س)
ل	ل	ل
ل	ك	غير موجودة (غ.م)
ل	غ.م	غ.م
غ.م	ك	غ.م
غ.م	غ.م	غ.م

ملاحظة هامة:

إذا كانت:

١) نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س) = نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س) ⟺ نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٢) نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س) = نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل ⟺ نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = ل

٣) نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س) ≠ نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س) ⟸ نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م

استخدام الجدول لإيجاد النهاية.

مثال:

إذا كان ق(س)= { ٢س س < ٢ ؛ س+١ س>٢ }

جد نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س)

✓ الحل

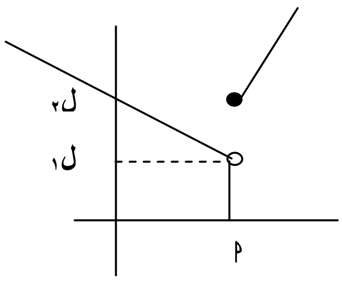
س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
ق(س)	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	X	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩

نهــا$_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٤   نهــا$_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٣

وبما أن نهــا$_{س \to ٢^+}$ ق(س) ≠ نهــا$_{س \to ٢^-}$ ق(س)

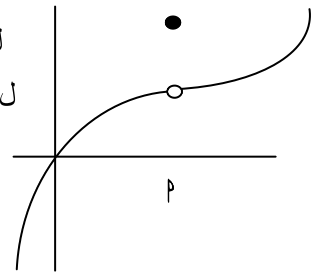
فإن نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س) غ.م

*** إيجاد النهاية من خلال الرسم**



نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س) = ل٢ ≠ نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل١

نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م أما ق(أ) = ل٢



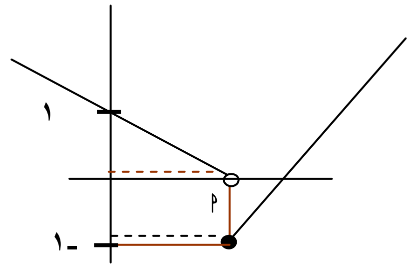
نهــا$_{س \to أ^+}$ ق(س) = نهــا$_{س \to أ^-}$ ق(س) = ل١

نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = ل١ أما ق(أ) = ل٢

ملاحظة مهمة:

ليس بالضرورة أن يكون ق(س) معرفاً عند س= أ حتى تكون النهاية موجودة

وإذا كان معرفاً ليس بالضرورة أن تكون النهاية = الصورة

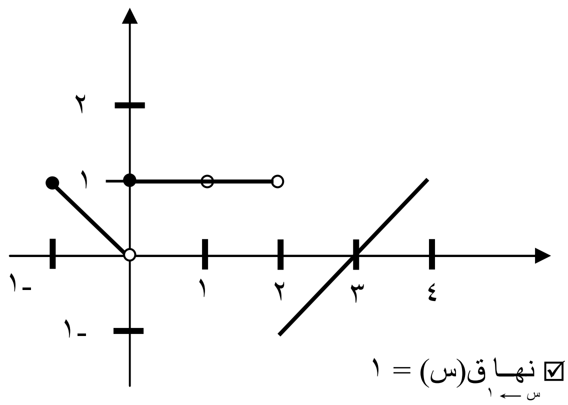


$\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −١ $\underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = صفر

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ.م

أما ق(أ) = −١

اعتمد على الشكل التالي لإيجاد ما يلي:



☑ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

☑ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ.م

☑ قيم أ: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ.م ⟸ أ ∈ { -١ ، ٠ ، ٢ ، ٤ }

☑ قيم أ: $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ⟸ أ ∈ [صفر ، ٢) ∪ {-١}

☑ قيم أ: $\underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ⟸ أ ∈ (٠ ، ٢] ∪ {٤}

☑ قيم أ: ق(أ) =١ ⟸ أ ∈ [٠ ، ١) ∪ (١ ، ٢) ∪ {-١ ، ٤}

☑ قيم أ: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ) = ١ ⟸ أ ∈ (٠ ، ٢) - {١}

ملاحظة مهمة:

إذا كان ق(س) معرفاً على [أ ، ب] فإن النهاية العامة عند أطراف الفترة غير موجودة.

← $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ.م & $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ.م

لكن $\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة & $\underset{س \leftarrow ب^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة

حساب النهاية:

١) نهاية كثيرات الحدود: بالتعويض المباشر

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ)

لذلك فإن:

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ $(٢س^{٢} + ٣) = ٢(-١)^{٢} + ٣ = ٢ + ٣ = ٥$

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ $(٨ - س^{٣}) = ٨ - (-١)^{٣} = ٨ - {}^{-}١ = ٩$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ $\frac{٣س + ١}{٥} = \frac{٣(٣) + ١}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ $(٢س+١)^{٧} = (٢(-١)+١)^{٧} = (-٢+١)^{٧}$

$= (-١)^{٧} = -١$

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $(١٧) = ١٧$

مثال:

إذا كان ق (س) = $س^{٢}+٣$ ، س ∈ [-١، ٢]،

أوجد :

١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(١) = $(١)^{٢} + ٣ = ٤$

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = غ. م (لأن (٢) طرف فترة).

٣) $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(-١) = $(-١)^{٢} + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

مثال:

جد قيمة (أ) فيما يلي:

١) إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ $(س^{٢} + س) = ١٢$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصـاع

الفرع العلمــــي

✓ الحل

نهـا$_{س \to أ}$ (س^{٢} + س) = (أ)^{٢} + (أ) = ١٢

(أ)^{٢} + (أ) − ١٢ = ٠

(أ + ٤) (أ − ٣) = ٠

أ = −٤   أ = ٣

٢) إذا كانت نهـا$_{س \to ١}$ (س^{٣} + ٢ أس + ٥) = ٢

✓ الحل

نهـا$_{س \to ١}$ (س^{٣} + ٢ أ س + ٥) = ١ + ٢ أ + ٥ = ٢

٦ + ٢ أ = ٢

٢ أ = −٤

أ = −٢

٣) إذا كانت نهـا$_{س \to أ}$ (س^{٣} − ٧س + ١) = ٧

✓ الحل

(أ)^{٣} − ٧أ − ٦ = ٠

أ = أحد عوامل الحد المطلق (٦)

أ = −١ ⟸ بالتجريب

(أ+١) أحد عوامل المعادلة

(أ^{٢} − أ − ٦) العامل الآخر (بالقسمة)

(أ − ٣)(أ + ٢) = ٠

أ = ٣ <u>أو</u> أ = −٢

∴ أ ∈ {−٢، −١، ٣}

٢) نهاية الاقتران المتشعب:

إذا كان ق(س) معرفاً بأكثر من قاعدة فإن:

نهـا$_{س \to أ}$ ق(س) = { تعويض مباشر عندما أ نقطة عادية
نجدها من الجهتين عندما أ نقطة تحول }

مثال: إذا كان ق(س) = {

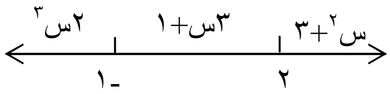
س^{٢}+٣	س > ٢
٣س+١	−١ ≤ س ≤ ٢
٢س^{٣}	س < −١

جد:

١) نهـا$_{س \to ١}$ ق(س)   ٢) نهـا$_{س \to ٣}$ ق(س)

٣) نهـا$_{س \to -٢}$ ق(س)   ٤) نهـا$_{س \to -١}$ ق(س)

٥) نهـا$_{س \to ٢}$ ق(س)

ق(س)


✓ الحل

١) نهـا$_{س \to ١}$ ق(س) = نهـا$_{س \to ١}$ (٣س+١) = ٣(١)+١ = ٤

٢) نهـا$_{س \to ٣}$ ق(س) = نهـا$_{س \to ٣}$ (س^{٢}+٣) = ٩ + ٣ = ١٢

٣) نهـا$_{س \to -٢}$ ق(س) = نهـا$_{س \to -٢}$(٢س^{٣}) = ٢(−٢)^{٣} = ٢(−٨) = −١٦

٤) نهـا$_{س \to -١}$ ق(س) ⟵ **تحول**

نهـا$_{س \to -١^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س \to -١}$(٣س+١) = −٣ + ١ = −٢

نهـا$_{س \to -١^{-}}$ ق(س) = نهـا$_{س \to -١}$ ٢س^{٣} = ٢(−١)^{٣} = −٢

∴ نهـا$_{س \to -١}$ ق(س) = −٢

٥) نهـا$_{س \to ٢}$ ق(س) ⟵ **تحول**

نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س \to ٢}$ (س^{٢} + ٣) = ٤ + ٣ = ٧

نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ ق(س) = نهـا$_{س \to ٢}$ (٣س+١) = ٦ + ١ = ٧

∴ نهـا$_{س \to ٢}$ ق(س) = ٧

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

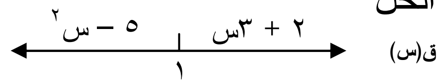
أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع

مثال:

إذا كان ق(س) = { ٢ + ٣س ، س ≤ ١ ؛ ٥ − $س^{٢}$ ، س > ١ }

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س)

✓ **الحل**



$\lim\limits_{س \leftarrow ^{+}١}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (٢ + ٣س) = ٢ + ٣ = ٥

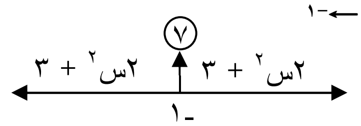
$\lim\limits_{س \leftarrow ^{-}١}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (٥ − $س^{٢}$) = ٥ − ١ = ٤

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غ.م

مثال:

إذا كان ق(س) = { ٢$س^{٢}$ + ٣ ، س ≠ −١ ؛ ٧ ، س = −١ }

جد ١) $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ق(س)　　٢) ق(−١)



✓ **الحل**

١) $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ (٢$س^{٢}$ + ٣) = ٢$(−١)^{٢}$ + ٣ = ٥

٢) ق(−١) = ٧

مثال:

إذا كان ق(س) = { ٣س + ٢ ، [$\frac{س}{٢}$] = ١ ؛ ٥س − ٢ ، [$\frac{س}{٢}$] ≠ ١ }

جد ١) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س)　　٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س)

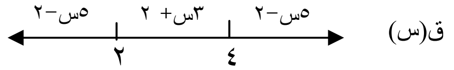
✓ **الحل**

[س] = م ⟸ م ≤ س < م + ١

[$\frac{س}{٢}$] = ١ ⟸ ١ ≤ $\frac{س}{٢}$ < ٢

⟸ ٢ ≤ س < ٤

[$\frac{س}{٢}$] ≠ ١ ⟸ س ∈ ح − [٢، ٤)



١) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (٥س − ٢) = ٥ − ٢ = ٣

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ⟵ تحول

$\lim\limits_{س \leftarrow ^{+}٢}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (٣س + ٢) = ٨

$\lim\limits_{س \leftarrow ^{-}٢}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ (٥س − ٢) = ٨

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٨

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) ⟵ تحول

$\lim\limits_{س \leftarrow ^{+}٤}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ (٥س − ٢) = ١٨

$\lim\limits_{س \leftarrow ^{-}٤}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ (٣س + ٢) = ١٤

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = غ. م

مثال:

إذا كان ق(س) = { $س^{٢}$ + ١ ، |س − ١| ≤ ١ ؛ ٣س − ١ ، |س − ١| > ١ }

جد ١) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) ⟸ ✓الحل: $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ٢

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) ⟸ ✓الحل: $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) = غ.م

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ⟸ ✓الحل: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ٥

مثال:

إذا كان ق(س) = { م$س^{٢}$ + ٣ ، س ≤ ٢ ؛ ٣س + م ، س > ٢ }

جد قيمة م علماً بأن $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) موجودة

✓ الحل

نهــا$_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = نهــا$_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)

نهــا$_{س \to ٢}$ (أس^{٢}+٣) = نهــا$_{س \to ٢}$ (٣س + أ)

٤أ + ٣ = ٦ + أ

٤أ − أ = ٦ − ٣

٣أ = ٣ ⟸ أ = ١

مثال:

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢}+٢ب\,س+٥ & س \geq ١ \\ ٣س - ٢أ & س < ١ \end{cases}$

جد أ ، ب علماً بأن نهـــا$_{س \to ١}$ ق(س) =٥

✓ الحل

نهــا$_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٥ ، نهــا$_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٥

نهــا$_{س \to ١^{+}}$ (أس^{٢} +٢ب س+٥)=٥ ، نهــا$_{س \to ١^{-}}$ (٣س − ٢أ) =٥

أ +٢ب + ٥ =٥ ، ٣ − ٢أ = ٥

أ + ٢ب = ٠ ، −٢أ = ٢ ⟵ أ =−١

∴ −١ +٢ب=٠

٢ب = ١ ⟵ ب = $\frac{١}{٢}$

تدريب:

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس + ٣ب & س > ٢ \\ س^{٢}+ب\,س+أ & س < ٢ \end{cases}$

جد أ، ب علماً بأن نهـــا$_{س \to ٢}$ ق(س) =٧

✓ الجواب أ = ٥، ب =-١

٣) نهاية اقتران القيمة المطلقة:

١) الطريقة الأولى: إعادة تعريف الاقتران والتعامل معه كمتشعب.

مثال: ق(س) = ٣|س| − |س+ ٢|

جد: ١) نهــا$_{س \to -١}$ ق(س) ٢) نهــا$_{س \to ٠}$ ق(س)

٣) نهــا$_{س \to -٢}$ ق(س)

✓ الحل

٣(-س) − (-س-٢) | ٢- | ٣(-س) -(س+ ٢) | ٠ | ٣(س) − (س+٢)

ق(س): -٢س+ ٢ | ٢- | -٤س − ٢ | ٠ | ٢س - ٢

١) نهــا$_{س \to -١}$ ق(س) = نهــا$_{س \to -١}$ (-٤س −٢) = ٤− ٢ = ٢

٢) نهــا$_{س \to ٠}$ ق(س)= تحول

نهــا$_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = نهــا$_{س \to ٠}$ (٢س−٢) = −٢

نهــا$_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = نهــا$_{س \to ٠}$ (-٤س−٢)= −٢

∴ نهــا$_{س \to ٠}$ ق(س) = −٢

٣) نهــا$_{س \to -٢}$ ق(س)= موجودة = ٦

٢) الطريقة الثانية: ق(س) = |هـ(س)|

نهــا$_{س \to أ}$ ق(س)= $\begin{cases} \text{نهــا}_{س \to أ}\,(هـ(س)) & هـ(أ) > ٠ \\ \text{نهــا}_{س \to أ}\,(-هـ(س)) & هـ(أ) < ٠ \\ \text{نعيد التعريف} & هـ(أ) = ٠ \end{cases}$

مثال:

جد: ١) نهــا$_{س \to ١}$ |٢س^{٢} − ٧|

٢) نهــا$_{س \to -١}$ (٣|س| − |س+٢|)

٣) نهــا$_{س \to -١}$ ٢س^{٢} −٣ |س−١|

أعداد الأستاذ : معاذ الصعصاع
الفرع العلمي

✓ الحل

١) **نهــا$_{س\to ١}$|٢س^{٢} − ٧|** = نهــا$_{س\to ١}$ (-٢س^{٢}+٧) = -٢+٧ =٥

٢) **نهــا$_{س\to -١}$(٣|س| − |س+٢|)**

= نهــا$_{س\to -١}$ ٣(−س) − (س+٢)= نهــا$_{س\to -١}$ − ٣س − س −٢

= نهــا$_{س\to -١}$(−٤س −٢) =٤ − ٢ = ٢

٣) **نهــا$_{س\to -١}$ ٢س^{٢} −٣ |س−١|**

= نهــا$_{س\to -١}$ ٢س^{٢} − ٣ (−س+١)

= نهــا$_{س\to -١}$ ٢س^{٢} + ٣س −٣ =٢−٣ − ٣= −٤

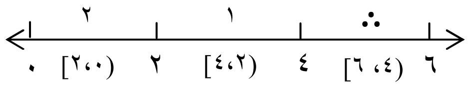
٤) نهاية اقتران أكبر عدد صحيح:

١) الطريقة الأولى: **إعادة تعريفه والتعامل معه كمتشعب.**

مثل: ق(س) = **[٣ − $\frac{١}{٢}$س]**

نهــا$_{س\to ١}$ ق(س)   **نهــا$_{س\to ٢}$** ق(س)   **نهــا$_{س\to ٤}$** ق(س)

✓ الحل



١) **نهــا$_{س\to ١}$ ق(س)** = نهــا$_{س\to ١}$ (٢) = ٢

٢) **نهــا$_{س\to ٢}$ ق(س) ⟵ تحول؟!!**

نهــا$_{س\to ٢^{+}}$ق(س)= ١، نهــا$_{س\to ٢^{-}}$ق(س)=٢

فإن نهــا$_{س\to ٢}$ ق(س) غ . م

٣) **نهــا$_{س\to ٤}$ ق(س)** = غ.م

٢) الطريقة الثانية: **إذا كان ق(س)= [هــ(س)]**

لوحده حيث

هــ(س) = ٢س + ب فإن :

نهــا$_{س\to ٢}$ ق(س) = { **[هــ (٢)]**   **هــ (٢) ∌ ص** ؛ **غ. م**   **هــ (٢) ∋ ص** }

وإذا كانت نهــا$_{س\to س_١}$ [أس+ ب] غ . م فإن:

نهــا$_{س\to س_١^{+}}$ [٢ س+ب]= { **الصورة: إذا اتفق الاتجاه مع إشارة (أ)** ؛ **الصورة − ١: إذا اختلف الاتجاه عن إشارة (أ)** }

لا حظ: نهــا$_{س\to ٤^{+}}$ [٣− $\frac{١}{٢}$س] = صفر (الصورة −١)

نهــا$_{س\to ٢^{-}}$[٣− $\frac{١}{٢}$س] = ٢ (الصورة)

✍مثال:

جد النهايات التالية:

١) **نهــا$_{س\to \frac{-١}{٣}}$[٣+٢س]** = [٣+٢ ($\frac{-١}{٣}$)]

= [٣ − $\frac{٢}{٣}$]

= [$\frac{٧}{٣}$] = ٢

أعداد الأستاذ : معاذ الصعصاع — الفرع العلمي

٢) **نهـــا (س ← −٤/٣) [س − ١]** = [− ٤/٣ − ١] = [−٧/٣] = −٣

٣) **نهـــا (س ← ٣/٢) [٢س + ١]** = غ.م

لأن نهـــا (س ← ٣/٢ +) [٢س + ١] = ٤ (الصورة)

أما نهـــا (س ← ٣/٢ −) [٢س + ١] = ٣ (الصورة − ١)

٤) **نهـــا (س ← ٣+) [١ − ٢/٣ س]** = −٢ (الصورة − ١)

٥) **نهـــا (س ← ٠,٧) [√(٢س + ٠,٦)]** = [√٢] = ١

٦) **نهـــا (س ← ١)** (س. [س +١] − ١) نجدها من الجهتين

نهـــا (س ← ١+) (س. [س+١] − ١) = ١ × ٢ − ١ = ١

نهـــا (س ← ١−) (س. [س+١] − ١) = ١ × ١ − ١ = ∴

نهـــا (س ← ١) (س. [س+١] − ١) غ. م

٧) **نهـــا (س ← ٠) ٢^[س] نجدها من الجهتين**

نهـــا (س ← ٠+) ٢^[س] = (٢)^٠ = ١

نهـــا (س ← ٠−) ٢^[س] = (٢)^−١ = ١/٢

∴ نهـــا (س ← ٠) ٢^[س] غ.م

٨) **نهـــا (س ← ٠) ([٢س+١] − [٢س − ٣])** نجدها من الجهتين

نهـــا (س ← ٠+) [٢س + ١] − [٢س −٣] = ١ − (−٣) = ٤

نهـــا (س ← ٠−) [٢س + ١] − [٢س −٣] = ∴ − (−٤) = ٤

∴ نهـــا (س ← ٠) [٢س + ١] − [٢س − ٣] = ٤

حل آخر: **نهـــا (س ← ٠) ([٢س+١] − [٢س − ٣])**

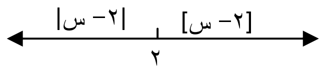
= نهـــا (س ← ٠) [٢س] + ١ − ([٢س] −٣)

= نهـــا (س ← ٠) ~~[٢س]~~ + ١ − ~~[٢س]~~ +٣

= نهـــا (س ← ٠) (٤) = ٤

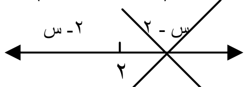
مثال:

إذا كانت ق(س)= { |٢− س| س < ٢ ؛ [٢− س] س > ٢ }



نهـــا (س ← ٢+) ق(س) = نهـــا (س ← ٢+) [٢− س] = −١ (الصورة− ١)

نهـــا (س ← ٢−) ق(س) = نهـــا (س ← ٢−) |٢− س|



نهـــا (س ← ٢) (٢− س) = ٢ − ٢ = ∴

∴ نهـــا (س ← ٢) ق(س) غ . م

مثال:

جد قيمة (أ) فيما يلي:

١) **نهـــا (س ← ١) [س + أ] = ٢ ، أ ∉ ص**

نهـــا (س ← ١) [س + أ] = [١+ أ] = ٢

٢ ≤ ١ + أ < ٣

١ ≤ أ < ٢

أ ∈ [١، ٢) لكن أ ∉ ص

أ ∈ (١، ٢)

٢) **نهـــا (س ← ١+) [أ − س] = ٣ ، أ ∈ ص**

نهـــا (س ← ١+) [أ − س] = (أ − ١) − ١ = ٣

أ − ٢ = ٣

أ = ٥

٣) **نهـــا (س ← ١−) [٢س + أ] = ٣ ، أ ∈ ص**

نهـــا (س ← ١−) [٢س + أ] = (٢)(١) + (أ)) − ١ = ٣

٢ + أ − ١ = ٣

١ + أ = ٣

أ = ٢

٤) **نهـــا (س ← أ) [س +١] = ٢**

نهـــا (س ← أ) [س +١] = [أ + ١] = ٢

٢ ≤ أ + ١ < ٣

١ ≤ أ < ٢

أ ∈ [١، ٢) لكن نهـــا (س ← ١) [س+١]غ.م

∴ أ ∈ (١، ٢) ؟؟

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع — الفرع العلمـي

ق(س) = { ١+ ٣[س]   س < ﺃ
        ٥ − [س]   س > ﺃ

جد ﺃ إذا كانت نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ}$ ق(س) موجودة، حيث ﺃ ∉ ص

✓ الحل

نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ^+}$ ق(س) = نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ^-}$ ق(س)

نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ^+}$ (١ + ٣[س]) = نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ^-}$ (٥ − [س])

١+ ٣[ﺃ] = ٥ − [ﺃ]

٣[ﺃ] + [ﺃ] = ٥ − ١

٤[ﺃ] = ٤

[ﺃ] = ١

١≤ ﺃ < ٢

ﺃ ∈ [١، ٢) ، لكن ﺃ ∉ ص

ﺃ ∈ (١، ٢)

٥) نهاية الاقتران الجذري: ق(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$

أ) الجذور الفردية: بالتعويض المباشر

١) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ $\sqrt[٣]{١ - س^٣}$ = $\sqrt[٣]{١ - ٩}$ = $\sqrt[٣]{-٨}$ = −٢

٢) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\sqrt[٥]{٣س - ٢}$ = $\sqrt[٥]{٣ - ٢}$ = $\sqrt[٥]{١}$ = ١

٣) نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ $\sqrt[٧]{س^٢ + ٢س}$ = $\sqrt[٧]{٤ - ٤}$ = $\sqrt[٧]{∴}$ = ∴

ب) الجذور الزوجية:عندما ن عدد زوجي

نهـــا$_{س \leftarrow ﺃ}$ ق(س) = {
تعويض مباشر   عندما   هـ (ﺃ) >٠
غير موجودة   عندما   هـ (ﺃ) <٠
ندرس المجال   عندما   هـ (ﺃ) =٠

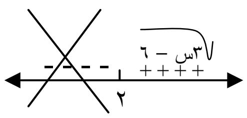
١) نهـــا$_{س \leftarrow -٢}$ $\sqrt{س^٢ + ٥}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

٢) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\sqrt{٣س - ٥}$ = غ. م لأن الناتج $\sqrt{-٢}$ (غير معرفة)

٣) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ٣ + $\sqrt{٢س + ٥}$ = ٣ + $\sqrt{٩}$ = ٣+٣ = ٦

٤) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\sqrt{٣س - ٦}$ ، ندرس المجال

٣س − ٦ = ٠ ← $\boxed{س = ٢}$

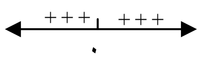


نهـــا$_{س \leftarrow ٢^+}$ $\sqrt{٣س - ٦}$ = $\sqrt{٦ - ٦}$ = ٠

أما نهـــا$_{س \leftarrow ٢^-}$ $\sqrt{٣س - ٦}$ غ. م

نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\sqrt{٣س - ٦}$ غ. م

٥) نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\sqrt[٤]{س^٢}$ ندرس المجال س^٢=٠ ← $\boxed{س = ٠}$



∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\sqrt[٤]{س^٢}$ = نهـــا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\sqrt[٤]{س^٢}$ = صفر

∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\sqrt[٤]{س^٢}$ = صفر

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع

٦) نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{٤س^{٢} - ٤س + ١}$ ندرس المجال

٤س^{٢} − ٤س + ١ = ٠

(٢س − ١) (٢س −١) = ٠

س = $\frac{١}{٢}$

+++ | +++ (عند $\frac{١}{٢}$)

∴ نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{٤س^{٢} - ٤س + ١}$ = صفر

حل آخر: نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{٤س^{٢} - ٤س + ١}$

= نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{(٢س - ١)(٢س - ١)}$ = نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{(٢س - ١)^{٢}}$

= نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ |٢س -١| ، ٢س − ١ = ٠ ← س = $\frac{١}{٢}$

(١- ٢س) ------ | +++ (٢س- ١) (عند $\frac{١}{٢}$) ← تحول

نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{+}}$ |٢س-١| = نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ (٢س-١) = ∴

نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}^{-}}$ |٢س-١| = نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ (١− ٢س) = ∴

∴ نهــا$_{س \to \frac{١}{٢}}$ $\sqrt{٤س^{٢} - ٤س + ١}$ = صفر

خواص النهايات

إذا كانت نهــا$_{س \to أ}$ ق(س)= ل ، نهــا$_{س \to أ}$ هــ(س)= ك ، فإن

١) نهــا$_{س \to أ}$(ق(س) $\pm \times$ هــ(س))= نهــا$_{س \to أ}$ق(س) $\pm \times$ نهــا$_{س \to أ}$هــ(س)

= ل $\pm \times$ ك

٢) نهــا$_{س \to أ}$ $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = $\frac{نهـا_{س \to أ} ق(س)}{نهـا_{س \to أ} هـ(س)}$ = $\frac{ل}{ك}$ ،بشرط ك ≠ ٠

٣) نهــا$_{س \to أ}$(جــ× ق(س))= جــ × نهــا$_{س \to أ}$ ق(س) = جــ × ل

٤) نهــا$_{س \to أ}$ ق^{ن}(س) = (نهــا$_{س \to أ}$ ق (س))^{ن} = (ل)^{ن}

٥) نهــا$_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{نهــا_{س \to أ} ق(س)}$

= $\sqrt[ن]{ل}$ بشرط ل > ٠ عندما ن زوجي

٦) نهــا$_{س \to أ}$ ق (س) = نهــا$_{ص \to أ}$ ق(ص) = ل

مثال:

إذا علمت أن

نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س) = ٣ ، نهــا$_{س \to ٢}$ هــ(س) = −٢، جد:

١) نهــا$_{س \to ٢}$ (ق^{٢}(س) − ٥هــ(س))

= نهــا$_{س \to ٢}$ ق^{٢}(س) − نهــا$_{س \to ٢}$٥ هــ (س)

= (نهــا$_{س \to ٢}$ ق (س))^{٢} − ٥ نهــا$_{س \to ٢}$هــ (س)

= (٣)^{٢} − ٥ × −٢ = ٩+ ١٠ =١٩

٢) نهــا$_{س \to ٢}$ (٢ق (س) − ٣س +١)

= نهــا$_{س \to ٢}$ ٢ق (س) − نهــا$_{س \to ٢}$ ٣س + نهــا$_{س \to ٢}$ ١

= ٢ × نهــا$_{س \to ٢}$ ق(س) − ٦ + ١

= ٢ × ٣ − ٦ + ١ = ١

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصاع
الفرع العلمي

٣) $\lim_{س\to٢} \left(\left[\frac{٢س+١}{٣}\right] - هـ(س) \right)$

$= \lim_{س\to٢}\left[\frac{٢س+١}{٣}\right] - \lim_{س\to٢} هـ(س) = ١ - (-٢) = ٣$

٤) $\lim_{س\to٢^+}\left(ق(س) - \left[٣ - \frac{١}{٢}س\right]\right)$

$= \lim_{س\to٢^+}ق(س) - \lim_{س\to٢^+}\left[٣ - \frac{١}{٢}س\right]$

$= ٣ - ١ = ٢$

٥) $\lim_{س\to١}\left(٢ق(س+١) - هـ^٢(٢س)\right)$

$= \lim_{س\to١}٢ق(س+١) - \lim_{س\to١}هـ^٢(٢س)$

$= ٢\times\lim_{س\to١}ق(س+١) - \left(\lim_{س\to١}هـ(٢س)\right)^٢$

ص = س + ١ ، س ← ١ ، ص ← ٢

ع = ٢س ، س ← ١ ، ع ← ٢

$= ٢\times\lim_{ص\to٢}ق(ص) - \left(\lim_{ع\to٢}هـ(ع)\right)^٢$

$٢\times٣ - (-٢)^٢ = ٦ - ٤ = ٢$

مثال:

إذا كانت

$\lim_{س\to١}٢ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س\to١}(س^٢ - ٣هـ(س)) = ٥$

جد $\lim_{س\to١}(ق^٢(س) + ٣هـ(س))$

تجهيز المعطيات: $\lim_{س\to١}٢ق(س) = ١٠$

$٢\times\lim_{س\to١}ق(س) = ١٠ \longrightarrow \lim_{س\to١}ق(س) = ٥$

$\lim_{س\to١}(س^٢ - ٣هـ(س)) = ٥$

$\lim_{س\to١}س^٢ - ٣\times\lim_{س\to١}هـ(س) = ٥$

$١ - ٣\times\lim_{س\to١}هـ(س) = ٥$

$-٣\times\lim_{س\to١}هـ(س) = ٤$

$\lim_{س\to١}هـ(س) = -\frac{٤}{٣}$

المطلوب: $\lim_{س\to١}(ق^٢(س) + ٣هـ(س))$

$= (\lim_{س\to١}ق(س))^٢ + ٣\times\lim_{س\to١}ق(س)$

$= (٥)^٢ + \cancel{٣}\times\frac{-٤}{\cancel{٣}} = ٢٥ - ٤ = ٢١$

مثال:

إذا علمت أن $\lim_{س\to٣}ق(س) = ٢$ ، ق(٣) = ٧

جد $\lim_{س\to١}(ق^٢(٢س+١) - ٥س)$

$= (\lim_{س\to١}ق(٢س+١))^٢ - \lim_{س\to١}٥س$

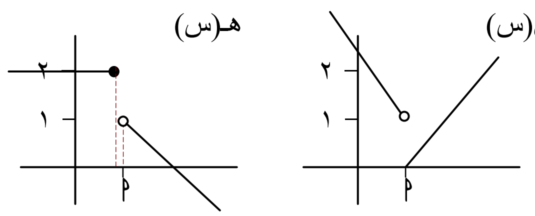
ص = ٢س+١
س ← ١
ص ← ٣

$= (\lim_{ص\to٣}ق(ص))^٢ - ٥(١)$

$= (٢)^٢ - ٥ = ٤ - ٥ = -١$

مثال:

في الشكل المجاور:



جد:

١) $\lim_{س\to م^+}(ق(س) - ٣هـ(س))$

$= \lim_{س\to م^+}ق(س) - ٣\times\lim_{س\to م^+}هـ(س)$

$= ∴ - ٣\times١ = -٣$

٢) $\lim_{س\to م^-}(٢ق(س) + هـ(س))$

$= ٢\times\lim_{س\to م^-}ق(س) + \lim_{س\to م^-}هـ(س)$

$= ٢\times١ + ٢ = ٤$

٣) $\lim_{س\to م}(هـ(س) - ق(س))$

$\lim_{س\to م^+}(هـ(س) - ق(س)) = \lim_{س\to م^+}هـ(س) - \lim_{س\to م^+}ق(س)$

$= ١ - صفر = +١$

$\lim_{س\to م^-}(هـ(س) - ق(س)) = \lim_{س\to م^-}هـ(س) - \lim_{س\to م^-}ق(س)$

$= ٢ - ١ = ١$

$∴ \lim_{س\to م}(هـ(س) - ق(س)) = ١$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} (\text{ق(س)} + \text{هـ(س)})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^+} (\text{ق(س)}+\text{هـ(س)}) = \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^+} \text{ق(س)} + \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^+} \text{هـ(س)}$

$= ٠ + ١ = ١$

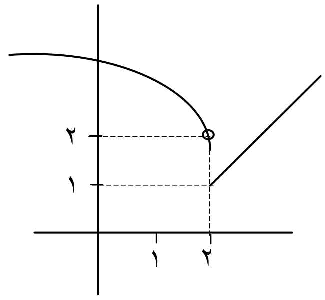
$= \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^-} (\text{ق(س)}+\text{هـ(س)}) = \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^-} \text{ق(س)} + \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}^-} \text{هـ(س)}$

$= ١ + ٢ = ٣$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} (\text{ق(س)}+\text{هـ(س)})$ غ . م

تدريب

يبين الشكل المجاور منحنى ق(س)، جد:



١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)}$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} \text{ق(س} - ١)$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} \text{ق(٥} - \text{س)}$

٦) نهاية الاقتران النسبي:

إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{هـ (س)}}{\text{م (س)}}$ **فـإن:**

$\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \text{ق(س)} =$
- **تعويض مباشر عندما** م (أ) $\neq$ ∴
- **غير موجودة عندما** ق (أ) $= \dfrac{\text{عدد}}{\therefore}$
- **بحاجة للبحث عندما** ق (أ) $= \dfrac{\therefore}{\therefore}$ ← ق(أ) $= \left(\dfrac{\text{عدد}}{\therefore} \pm \dfrac{\text{عدد}}{\therefore}\right)$

مثال: جد النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to -١} \dfrac{٣\text{س} + ١}{\text{س} - ١} = \dfrac{٣(-١) + ١}{(-١) - ١}$

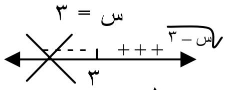
$= \dfrac{-٣ + ١}{-٢} = \dfrac{-٢}{-٢} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س} + ٥} = \dfrac{(-٢)^٢ + ٢(-٢)}{-٢ + ٥}$

$= \dfrac{٤ - ٤}{٣} = \therefore$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{١ + \sqrt{\text{س} - ٣}}{\text{س} - ١}$ ندرس المجال س−٣ = ٠

س = ٣



$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^+} \dfrac{١ + \sqrt{\text{س} - ٣}}{\text{س} - ١} = \dfrac{٤ - \therefore}{٢} = \dfrac{١}{٢}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣^-} \dfrac{١ + \sqrt{\text{س} - ٣}}{\text{س} - ١}$ غ . م

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{١ + \sqrt{\text{س} - ٣}}{\text{س} - ١}$ غ . م

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \dfrac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ٤}$ غ . م لأن الناتج $\dfrac{-٣}{\therefore}$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$?!

بحاجة لبحث

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

الفرع العلمـــــــــي

ملاحظة:

إذا كان ق(ﻡ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإنه يجب البحث عند المقدار (س – ﻡ) في البسط والمقام لإظهاره ثم اختصاره ثم التعويض مرة أخرى.

ويمكن إظهاره بعدة طرق:

١- التحليل إلى العوامل.

٢- توحيد المقامات.

٣- الضرب بالمرافق.

٤- الاستبدال.

٥- التجزئة.

٥) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+س-٢}{س^{٢}-١} = \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}(س+١)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س+٢}{س+١} = \frac{٣}{٢}$

٦) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣}-٨}{٢س^{٢}-٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{٢(س^{٢}-٤)}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س-٢)}(س^{٢}+٢س+٤)}{٢\cancel{(س-٢)}(س+٢)}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٢س+٤}{٢س+٢} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

٧) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣}-س}{س^{٢}-٢س+١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س(س^{٢}-١)}{(س-١)(س-١)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س\cancel{(س-١)}(س+١)}{\cancel{(س-١)}(س-١)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{س(س+١)}{(س-١)} = \text{غ . م}$

٨) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س+١)^{٢}-٩}{(س-١)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س+١-٣)(٢س+١+٣)}{(س-١)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س-٢)(٢س+٤)}{(س-١)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(س-١)}(٢س+٤)}{\cancel{(س-١)}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} ٢(٢س+٤) = ١٢$

٩) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+١)^{٢}-(٢س+١)^{٢}}{٢-س}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+١+٢س+١)(س^{٢}+١-(٢س+١))}{٢-س}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+٢س+٢)(س^{٢}-٢س)}{(٢-س)}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+٢س+٢)(س)\overset{-١}{\cancel{(س-٢)}}}{\cancel{(٢-س)}}$

$= ١٠ \times ٢ \times -١ = -٢٠$

١٠) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}-١)^{٦}}{(س^{٢}-٢س+١)^{٣}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{((س-١)(س+١))^{٦}}{((س-١)(س-١))^{٣}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)^{٦}(س+١)^{٦}}{(س-١)^{٣}(س-١)^{٣}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س-١)^{٦}}(س+١)^{٦}}{\cancel{(س-١)^{٦}}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} (س+١)^{٦} = ٦٤$

١١) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢}-٢س}{س^{٢}-٤}\right)^{-٣} = \left(\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}-٤}{س^{٢}-٢س}\right)^{٣}$

$= \left(\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س+٢)}{س(س-٢)}\right)^{٣}$

$= \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٣} = (٢)^{٣} = ٨$

١٢) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س+١)^{٣}-٨}{(س-٣)^{٤}-١٦}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{((س+١)-٢)((س+١)^{٢}+٢(س+١)+٤)}{((س-٣)^{٢}-٤)((س-٣)^{٢}+٤)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)((س+١)^{٢}+٢(س+١)+٤)}{(س-٣-٢)(س-٣+٢)((س-٣)^{٢}+٤)}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}\left((س+1)^2 + 2(س+1) + 4\right)}{(س-5)\cancel{(س-1)}\left((س-3)^2 + 4\right)}$$

$$= \frac{12}{(-4)(8)} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

١٣) $\lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{2س^2 - س^3}$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س-2)}^{-1}(س^4 + 2س^3 + 4س^2 + 8س + 16)}{س^2\cancel{(2-س)}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(-1)(\cancel{16}^{4} \times 5)}{\cancel{4}} = -20$$

١٤) $\lim_{س \to 1} \frac{س^ن - 1}{س^2 - 1} = 4$ ، **جد قيمة ن، حيث ن عدد طبيعي**

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^{ن-1} + س^{ن-2} + س^{ن-3} + \dots + 1)}{(س-1)(س+1)} = 4$$

$$= \frac{ن \times 1}{2} = \frac{4}{1} \longrightarrow \boxed{ن = 8}$$

١٥) $\lim_{س \to 1} \frac{س^3 + 2س - 3}{1 - س^3} = \frac{صفر}{صفر}$

$س^3$	$س^2$	$س^1$	$س^0$
١	٠	٢	-٣
	١	١	٣
١	١	٣	٠

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^3 + س + 3)}{(1-س)(1 + س + س^2)}$$

$$= \frac{-1(5)}{3} = \frac{-5}{3}$$

١٦) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - |2س - 3|}{(س+1)^2 - 4}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س^2 - (-2س + 3)}{(س+1)^2 - 4}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س^2 + 2س - 3}{(س+1-2)(س+1+2)}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}\cancel{(س+3)}}{\cancel{(س-1)}\cancel{(س+3)}} = 1$$

١٧) $\lim_{س \to 2} \frac{2س^2 + س - 10}{|3س - 6|}$

$3س - 6 = 0$
$س = 2$

ق(س): $\frac{2س^2 + س - 10}{6 - 3س}$ ← ٢ → $\frac{2س^2 + س - 10}{3س - 6}$

٢ تحول

$$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2} \frac{2س^2 + س - 10}{3س - 6} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س-2)}(2س+5)}{3\cancel{(س-2)}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = \lim_{س \to 2} \frac{2س^2 + س - 10}{6 - 3س} = -3$$

$$\therefore \lim_{س \to 2} \frac{2س^2 + س - 10}{|3س - 6|} \quad غ.م$$

١٨) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - \left[\frac{2س+1}{2}\right]}{س - س^2}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س^2 - 1}{س - س^2} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س+1)}{س - س^2} = \frac{-(2)}{1} = -2$$

١٩) $\lim_{س \to 1^-} \frac{3س^2 - [س + 3]}{س - 1}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{3س^2 - 3}{س - 1} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{3\cancel{(س-1)}(س+1)}{\cancel{(س-1)}} = 3(2) = 6$$

تدريب

٢٠) $\lim_{س \to 0} (|س| + 1)^{[س]} = 1$

٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{س-6}{س+3} + \frac{2}{1}}{س^2 - 3س}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{س - \cancel{6} + 2س + \cancel{6}}{(س+3)}}{س^2 - 3س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{3س}{س+3} \times \frac{1}{س^2 - 3س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{3\cancel{س}}{س+3} \times \frac{1}{\cancel{س}(س-3)}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{3}} \times \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

٢٢) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{س^{٢}}{س+١} - \dfrac{٤}{٣}}{\dfrac{١}{س} - \dfrac{١}{٢}}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٣س^{٢} - (٤س+٤)}{٣(س+١)}}{\dfrac{س-٢}{٢س}}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢} - ٤س - ٤}{٣(س+١)} \times \dfrac{٢س}{س-٢}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(٣س+٢)}{٣(س+١)} \times \dfrac{٢س}{\cancel{(س-٢)}}$

$= \dfrac{٨}{٩} \times ٤ = \dfrac{٣٢}{٩}$

٢٣) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٢س^{٢} + س - ٣} \times \left(\dfrac{١}{س+٢} - \dfrac{٢}{س^{٢}+٥}\right)$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٢س^{٢} + س - ٣} \times \dfrac{س^{٢}+٥ - (٢س+٤)}{(س+٢)(س^{٢}+٥)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٢س^{٢} + س - ٣} \times \dfrac{س^{٢} - ٢س + ١}{(س+٢)(س^{٢}+٥)}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\cancel{(س-١)}(٢س+٣)} \times \dfrac{\cancel{(س-١)}(س-١)}{(س+٢)(س^{٢}+٥)}$

$= \dfrac{١}{٥} \times \dfrac{٠}{١٨} = \text{صفر}$

٢٤) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{س-٢} - \dfrac{٢}{س^{٢} - ٢س}\right)$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س}{س(س-٢)} - \dfrac{٢}{س(س-٢)}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{س-٢}}{س\cancel{(س-٢)}} = \dfrac{١}{٢}$

تدريب

٢٥) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{س-١} - \dfrac{٣}{س^{٣} - ١}\right) = ١$

٢٦) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥^{٢س+١} - ٥}{٥^{س} - ١} = \text{نهـا} \dfrac{٥(٥^{٢س} - ١)}{٥^{س} - ١}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥(٥^{س}+١)\cancel{(٥^{س}-١)}}{\cancel{(٥^{س}-١)}} = ٥(١+١) = ١٠$

٢٧) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢^{٢س} + ٢^{س+١} - ٨}{٢^{٣س} - ٨} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$٢^{٢س} = (٢^{س})^{٢}$

$٢^{٣س} = (٢^{س})^{٣}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(٢^{س} - ٢)}(٢^{س} + ٤)}{\cancel{(٢^{س} - ٢)}(٢^{٢س} + ٢\times٢^{س} + ٤)}$

$= \dfrac{٢+٤}{١٢} = \dfrac{٦}{١٢} = \dfrac{١}{٢}$

٢٨) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢}+٣} - ٢}{س - ١} \times \dfrac{\sqrt{س^{٢}+٣} + ٢}{\sqrt{س^{٢}+٣} + ٢}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٣ - ٤}{س - ١} \times \dfrac{١}{\sqrt{س^{٢}+٣} + ٢}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} \times \dfrac{١}{٤}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س-١)}(س+١)}{\cancel{(س-١)}} \times \dfrac{١}{٤}$

$= \cancel{٢} \times \dfrac{١}{\cancel{٤}} = \dfrac{١}{٢}$

٢٩) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س - ٦}{\sqrt{س^{٢}+٥} - \sqrt{٢س+٥}} \times \dfrac{\sqrt{س^{٢}+٥} + \sqrt{٢س+٥}}{\sqrt{س^{٢}+٥} + \sqrt{٢س+٥}}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س - ٦}{(س^{٢}+٥) - (٢س+٥)} \times \dfrac{٦}{١}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س - ٦}{س^{٢} - ٢س} \times \dfrac{٦}{١}$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣(س-٢)}{س(س-٢)} \times \dfrac{٦}{١}$

$= \dfrac{٣}{\cancel{٢}} \times \overset{٣}{\cancel{٦}} = ٩$

٣٠) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣س+١} - ٢}{٢ - \sqrt{س^{٢}+٣}} \times \dfrac{\sqrt{٣س+١} + ٢}{\sqrt{٣س+١} + ٢} \times \dfrac{٢ + \sqrt{س^{٢}+٣}}{٢ + \sqrt{س^{٢}+٣}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س + ١ - ٤}{٤ - (س^{٢} + ٣)} \times \dfrac{١}{\cancel{٤}} \times \dfrac{\cancel{٤}}{١}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س - ٣}{١ - س^{٢}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣(س - ١)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \dfrac{-٣}{٢}$

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

٣١) $\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - \text{٨}}{\text{س} - \text{٤}} \times \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{٨}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{٨}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{\text{٢}} .\ \text{س}) - \text{٦٤}}{\text{س} - \text{٤}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١٦}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٦٤}}{\text{س} - \text{٤}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١٦}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - \text{٤})(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤س} + \text{١٦})}{\text{س} - \text{٤}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{١٦}}$

$= \dfrac{\text{٣} \times \cancel{\text{١٦}}}{\cancel{\text{١٦}}} = \text{٣}$

٣٢) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣}} - \text{٢س}}{\text{س} - \text{١}} = \dfrac{\text{-٥}}{\text{٤}}$

٣٣) $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{١}}{\text{س} - \text{٣}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - \text{١}) - \sqrt{\text{س} + \text{١}}}{\text{س} - \text{٣}} \times \dfrac{(\text{س} - \text{١}) + \sqrt{\text{س} + \text{١}}}{(\text{س} - \text{١}) + \sqrt{\text{س} + \text{١}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}} - (\text{س} + \text{١})}{\text{س} - \text{٣}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \cancel{\text{١}} - \text{س} - \cancel{\text{١}}}{\text{س} - \text{٣}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}{\text{س} - \text{٣}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\,\cancel{(\text{س} - \text{٣})}}{\cancel{\text{س} - \text{٣}}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$

٣٤) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + \text{٣}}} - \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}}$

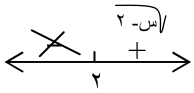
$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - \sqrt{\text{س} + \text{٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٣}} \times (\text{س} - \text{١})} \times \dfrac{\text{٢س} + \sqrt{\text{س} + \text{٣}}}{\text{٢س} + \sqrt{\text{س} + \text{٣}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٣}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٣}} \times (\text{س} - \text{١})} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - \text{١})}\,(\text{٤س} + \text{٣})}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٣}} \times \cancel{(\text{س} - \text{١})}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}}$

$= \dfrac{\text{٧}}{\text{٤}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٤}} = \dfrac{\text{٧}}{\text{١٦}}$

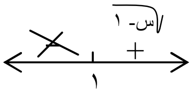
٣٥) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١} - \sqrt{\text{س} - \text{٢}}}{\text{س} - \text{١}} = \text{غ.م}$



٣٦) $\underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{١}}{\sqrt{\text{س} - \text{١}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{١}}}{\sqrt{\text{س} - \text{١}}}$ **(إنطاق المقام)**

$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{١}}{\text{س} - \text{١}} \times \sqrt{\text{س} - \text{١}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - \text{١}} = \text{صفر}$



٣٧) $\underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{١}}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} - \text{١}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - \text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}{(\text{س} - \text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}} = \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} (\text{س} - \text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} (\text{س} - \text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٦}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}^{+}}{\text{نها}} \sqrt[\text{٦}]{\text{س} - \text{١}} = \text{صفر}$

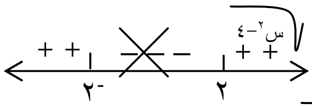
٣٨) $\underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{٢}}}{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{٢}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{٢}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}}{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}}$

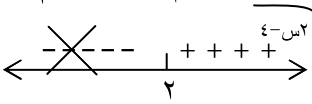
$= \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - \text{٢})}}{\cancel{(\text{س} - \text{٢})}} \times \dfrac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}}{\text{١}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} \times \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - \text{٢}}$

$= \dfrac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} \times \text{صفر} = \text{صفر}$

٣٩) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}}{\sqrt{\text{٢س} - \text{٤}}}$





$\leftarrow \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}}{\sqrt{\text{٢س} - \text{٤}}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(\text{س} - \text{٢})(\text{س} + \text{٢})}}{\sqrt{\text{٢}(\text{س} - \text{٢})}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٢}^{+}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}} \times \sqrt{\text{س} + \text{٢}}}{\sqrt{\text{٢}} \times \cancel{\sqrt{\text{س} - \text{٢}}}} = \dfrac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٢}}$

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

أما $\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٤}{٢\text{س} - ٤}}$ غ.م

٤٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٤}{٢\text{س} - ٤}}$

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ٤}{٢\text{س} - ٤}}$

$= \sqrt{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{٢\text{س} - ٤}}$

$= \sqrt{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{٢\cancel{(\text{س}-٢)}}}$

$= \sqrt{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٢}{٢}} = \sqrt{\frac{٤}{٢}} = \sqrt{٢}$

٤١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢}}{٣\text{س}}$

$\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢ = ٠$

$\text{س}^٢ (\text{س}+٤) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } -٤$

--- | ٤^- | + + + ($-$س) | ٠ | + + (س)

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ \times (\text{س}+٤)}}{٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{|\text{س}| \times \sqrt{\text{س}+٤}}{٣\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \frac{|\text{س}| \times \sqrt{\text{س}+٤}}{٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}} \times \sqrt{\text{س}+٤}}{٣\cancel{\text{س}}} = \frac{٢}{٣}$

$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \frac{|\text{س}| \times \sqrt{\text{س}+٤}}{٣\cancel{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{-\cancel{\text{س}} \times \sqrt{\text{س}+٤}}{٣\cancel{\text{س}}} = \frac{-٢}{٣}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ \times (\text{س}+٤)}}{٣\text{س}}$ غ . م

٤٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}}{١ - \text{س}}$

$\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ = ٠$

$(\text{س}-١)(\text{س}-١) = ٠$

$\text{س} = ١$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(\text{س}-١)(\text{س}-١)}}{١ - \text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(\text{س}-١)^٢}}{١ - \text{س}}$

(١-س) + + + + + | ١ | (س-١) + + + +

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{|\text{س}-١|}{١ - \text{س}}$ غ م وذلك لأن

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نها}} \frac{|\text{س}-١|}{١ - \text{س}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}-١}{١ - \text{س}} = -١$

أما $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نها}} \frac{|\text{س}-١|}{١ - \text{س}} = \text{نها} \frac{\text{س} - ١}{١ - \text{س}} = ١$

تدريب

٤٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣ + \sqrt[٣]{\text{س}}} - ٢}{\text{س} - ١}$ الحل: $\frac{١}{١٢}$

٤٤) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{٢\sqrt{\text{س}} - \sqrt{١٢}}{\text{س} - ٣}$ الحل: $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٤٥) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢} - ١}{\text{س}^٢ - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{(\text{س}+٢)^٢} + \sqrt[٣]{\text{س}+٢} + ١}{\sqrt[٣]{(\text{س}+٢)^٢} + \sqrt[٣]{\text{س}+٢} + ١}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٢ - ١}{\text{س}^٢ - ١} \times \frac{١}{٣}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س}+١)}}{(\text{س} - ١)\cancel{(\text{س}+١)}} \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{١}{-٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{-١}{٣}$

٤٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س} - ٢}}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} - \sqrt[٣]{\text{س}(\text{س}-٢)} + \sqrt[٣]{(\text{س}-٢)^٢}}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} - \sqrt[٣]{\text{س}(\text{س}-٢)} + \sqrt[٣]{(\text{س}-٢)^٢}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س} + \text{س} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{١}{٣}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{١}{٣}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{(\text{س} - ١)}} \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع

تدريب:

٤٧) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣\text{س}+٥} - ٢}{٢ - \sqrt{\text{س}+٣}}$ ✓الحل: -١

٤٨) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ١}$ ✓الحل: $\dfrac{٤}{٣}$

٤٩) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} . \sqrt[٣]{\text{س}} - ١٦}{\text{س} - ٨}$

نفرض أن س= $\text{ص}^٣$
س ← ٨
ص ← ٢

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^٣ . \text{ص} - ١٦}{\text{ص}^٣ - ٨}$

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^٤ - ١٦}{\text{ص}^٣ - ٨}$

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ص}-٢)(\text{ص}^٣ + ٢\text{ص}^٢ + ٤\text{ص} + ٨)}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} + ٤)}$

$= \dfrac{٨ \times ٤}{٣ \times ٤} = \dfrac{٨}{٣}$

٥٠) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢} - ١}{\text{س}^٢ - ١}$

س + ٢ = $\text{ص}^٣$
س= $\text{ص}^٣ - ٢$
س ← -١
ص ← ١

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢} - ١}{\text{س} + ١} \times \dfrac{١}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص} - ١}{\text{ص}^٣ - ١} \times \dfrac{١}{-٢}$

$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ص} - ١)}}{\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص}^٢ + \text{ص} + ١)} \times \dfrac{-١}{٢}$

$= \dfrac{١}{٣} \times \dfrac{-١}{٢} = \dfrac{-١}{٦}$

٥١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}^٣+٥} - ٢}{\text{س}^٣ - ٢٧}$

$\text{س}^٣ + ٥ = \text{ص}^٥$
$\text{س}^٣ = \text{ص}^٥ - ٥$
س ← ٣
ص ← ٢

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص} - ٢}{\text{ص}^٥ - ٣٢}$

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ص} - ٢)}}{\cancel{(\text{ص} - ٢)}(\text{ص}^٤ + ... + ١٦)}$

$= \dfrac{١}{١٦ \times ٥} = \dfrac{١}{٨٠}$

تدريب:

٥٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{س} - ١}$ ✓الحل: $\dfrac{١}{٦}$

٥٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١)^٣ - ٣\text{س} - ٥}{\text{س} - ١}$

س+ ١ = ص
س= ص − ١
س ← ١
ص ← ٢

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^٣ - ٣(\text{ص}-١) - ٥}{\text{ص} - ١ - ١}$

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ص}^٣ - ٣\text{ص} - ٢}{\text{ص} - ٢}$

$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ص} - ٢)\ (\text{بالقسمة.....})}{(\text{ص} - ٢)} = ٩$

إيجاد النهاية بالتجزئة :

المقصود بالتجزئة هو تقسيم المسألة إلى مسألتين على الأقل ثم حل كل مسألة على حده.

١) فصل البسط عن المقام: بالقسمة على (س−أ) وتوزيع النهاية.

٥٤) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}+٢} - ١}{(\text{س}-١)^٥ + ٣٢}$

بالقسمة س+ ١
وتوزيع النهاية

$= \dfrac{\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}+٢} - ١}{\text{س} + ١}}{\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)^٥ + ٣٢}{\text{س} + ١}} = ...$

٢) فصل حدين في نفس المقدار بينهما جمع أو طرح:

بطرح و إضافة ناتج التعويض في الحد الأول.

٥٥) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١} - \sqrt[٣]{٣\text{س}+٥}}{\text{س}-١} \quad \pm ٢$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١} - ٢ + ٢ - \sqrt[٣]{٣\text{س}+٥}}{\text{س}-١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١} - ٢}{\text{س}-١} + \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \sqrt[٣]{٣\text{س}+٥}}{\text{س}-١}$

تدريب

٥٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{٦}{\text{س}+٢} - \sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س} - ١} = \dfrac{-١١}{١٢}$

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع   الفرع العلمي

٣) **فصل حدين بينهما ضرب :**

بطرح و إضافة أحد المقدارين × ناتج التعويض في الآخر

مثل ق(س). هـ (س) $\pm$ ق(أ) × هـ (س)

أو $\pm$ هـ(أ) × ق(س)

٥٨) $\lim\limits_{س\to ٨} \dfrac{س.\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س-٨}$ $\pm$ $٨\sqrt[٣]{س}$ أو $\pm$ ٢س

$= \lim\limits_{س\to ٨} \dfrac{(س.\sqrt[٣]{س} - ٨\sqrt[٣]{س}) + ٨\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س-٨}$

$= \lim\limits_{س\to ٨} \dfrac{س.\sqrt[٣]{س} - ٨\sqrt[٣]{س}}{س-٨} + \dfrac{٨\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س-٨}$

$= \lim\limits_{س\to ٨} \sqrt[٣]{س} \times \dfrac{س-٨}{س-٨} + ٨\dfrac{\cancel{\sqrt[٣]{س} - ٢}}{(\cancel{\sqrt[٣]{س}-٢})(\sqrt[٣]{س^٢}+٢\sqrt[٣]{س}+٤)}$

$= ٢ + \dfrac{٨}{١٢} = ٢ + \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{٨}{٣}$

٥٩) $\lim\limits_{س\to ٤} \dfrac{(س+١)^٢.\sqrt{س} - ٥٠}{س-٤}$ $\pm ٢٥\sqrt{س}$ أو $\pm ٢(س+١)^٢$

$= \lim\limits_{س\to ٤} \dfrac{(س+١)^٢.\sqrt{س} - ٢٥\sqrt{س}}{س-٤} + \dfrac{٢٥\sqrt{س} - ٥٠}{س-٤}$

$= \lim\limits_{س\to ٤} \sqrt{س} \times \dfrac{(س+١)^٢ - ٢٥}{س-٤} + ٢٥\dfrac{\sqrt{س} - ٢}{س-٤}$

٦٠) $\lim\limits_{س\to ٣} \dfrac{\sqrt[٣]{١- س^٢} + \sqrt{س+١}}{س-٣}$ $\pm (-٢) = +٢$

$= \lim\limits_{س\to ٣} \dfrac{\sqrt[٣]{١-س^٢} + ٢ + \sqrt{س+١} - ٢}{س-٣}$

$= \lim\limits_{س\to ٣} \dfrac{\sqrt[٣]{١-س^٢} + ٢}{س-٣} + \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٣}$

٦١) $\lim\limits_{س\to ٣^+} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٩} + \sqrt{س} - \sqrt{٣}}{\sqrt{س-٣}} = \sqrt{٦}$

$= \lim\limits_{س\to ٣} \dfrac{\sqrt{س^٢-٩}}{\sqrt{س-٣}} + \lim\limits_{س\to ٣^+} \dfrac{\sqrt{س} - \sqrt{٣}}{\sqrt{س-٣}}$

$\sqrt{س^٢-٩}$: ‎++ | −− −− | ++‎ (‎-٣‎ ، ٣)

$\sqrt{س-٣}$: ‎−− −− | +++‎ (٣)

إيجاد الثوابت في النهايات النسبية:

١) إذا كانت $\lim\limits_{س\to أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ موجودة و هـ (أ)= ٠

فإن: التعويض في البسط = ∴ ⟵ ق(أ) = ٠

٢) إذا كانت $\lim\limits_{س\to أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ = ل و هـ (أ)= ٠

فإن: ق (أ) = ∴ و التعويض بعد الاختصار = ل

٢) إذا كانت $\lim\limits_{س\to أ} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ =غ. م

فإن $\lim\limits_{س\to أ} \dfrac{هـ(س)}{ق(س)}$ = صفر

مثال:

جد أ ، ب فيما يلي:

١) إذا كانت $\lim\limits_{س\to ٢} \dfrac{س^٢ + أس + ١}{س - ٢} = ب$

البسط (٢) =٠

$٤ + ٢أ + ١ = ٠$

$٢أ = -٥$

$أ = \dfrac{-٥}{٢}$

التعويض بعد الاختصار

$\lim\limits_{س\to ٢} \dfrac{س^٢ - \frac{٥}{٢}س + ١}{س-٢} = ب$

$\lim\limits_{س\to ٢} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(س-\frac{١}{٢})}{\cancel{(س-٢)}} = ب$

$٢ - \dfrac{١}{٢} = ب$

$ب = \dfrac{٣}{٢}$

٢) $\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{س^٢ + أس + ب}{س^٢ - ١} = \dfrac{٣}{٢}$

البسط (١) =٠

$١ + أ + ب = ٠$ ....①

التعويض بعد الاختصار $= \dfrac{٣}{٢}$

$\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{\cancel{(س-١)}(س-ب)}{(س+١)\cancel{(س-١)}} = \dfrac{٣}{٢}$

$\dfrac{١ - ب}{٢} = \dfrac{٣}{٢}$

$١ - ب = ٣$

$\boxed{ب = -٢}$

$١ - أ = ٠$

$\boxed{أ = ١}$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع

٣) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{٣س}^{٢} - (\text{٣م}+\text{٦})\text{س} + \text{٦م}}{\text{٤س} - \text{٨}} = \text{٣}$

البسط (٢) = ٠

$\text{١٢} - (\text{٣أ}+\text{٦})(\text{٢}) + \text{٦م} = \text{٠}$

$\cancel{\text{١٢}} - \cancel{\text{٦م}} - \cancel{\text{١٢}} + \cancel{\text{٦م}} = \text{٠}$

التعويض بعد الاختصار = ٣

$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\ \frac{\cancel{(\text{س} - \text{٢})}(\text{٣س} - \text{٣م})}{\text{٤}\cancel{(\text{س}-\text{٢})}} = \text{٣}$

$\frac{\text{٦} - \text{٣م}}{\text{٤}} = \text{٣}$

$\text{٦} - \text{٣م} = \text{١٢}$

$-\text{٣م} = \text{٦} \Leftarrow \boxed{\text{م} = -\text{٢}}$

٤) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٣} + \text{٢م س} - \text{ب}}{\text{س} - \text{١}} = \text{٥}$

البسط (١) = ٠

$\text{١} + \text{٢أ} - \text{ب} = \text{٠} \ldots\ldots$ ①

التعويض بعد الاختصار = ٥

$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\cancel{(\text{س} - \text{١})}(\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{٢م} + \text{١})}{\cancel{(\text{س} - \text{١})}} = \text{٥}$

$= \text{١} + \text{١} + \text{٢م} + \text{١} = \text{٥}$

$\text{٣} + \text{٢م} = \text{٥}$

$\text{٢م} = \text{٢}$

$\boxed{\text{م} = \text{١}}$

$\text{١} + \text{٢} - \text{ب} = \text{٠}$

$\boxed{\text{ب} = \text{٣}}$

$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{١}$	$\text{س}^{٠}$
١	٠	٢م	ب
↓	١	١	٢م + ١
١	١	٢م + ١	١+٢م − ب

تدريب:

٥) إذا كانت $\underset{\text{س}\to-\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٣} + \text{م س}^{٢} + \text{م س} + \text{١}}{\text{س}^{٢} - \text{١}} = -\text{٣}$

٦) إذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س} - \text{١}}{\text{٣س}^{٢} + \text{٢م س} + \text{ب}} = \text{غ م}$

مثال:

إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} = \text{٢}$ **وأن ق كثير حدود، جد:**

١) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}(\text{٢ق(س)} - \text{س}^{٢} + \text{٧})$

بما أن $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} = \text{٢}$

البسط (١) = ٠

$\text{ق(١)} - \text{٣} = \text{٠} \longrightarrow \boxed{\text{ق(١)} = \text{٣}}$

المطلوب:

$\text{٢} \times \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} - \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{س}^{٢} + \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{٧}$

٢× ق(١) − ١ + ٧ ؟! لأن ق كثير حدود

$\text{٢} \times \text{٣} - \text{١} + \text{٧} = \text{١٢}$

٢) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}(\text{٣س}^{٢} - \text{٢م ق(س)} + \text{١}) = \text{٧}$ **، جد م.**

$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{٣س}^{٢} - \text{٢م}\ \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} + \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{١} = \text{٧}$

$\text{٣} - \text{٢م} \times \text{٣} + \text{١} = \text{٧}$

$\text{٤} - \text{٦م} = \text{٧}$

$-\text{٣} = \text{٦أ} \longrightarrow \boxed{\text{م} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}}}$

٣) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\left(\frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س}^{٣} - \text{١}} + \text{٥س}\right)$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س}^{٣} - \text{١}} + \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \text{٥س}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{١}} + \text{٥}(\text{١})$

$= \text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{٥} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}} + \frac{\text{٥}}{\text{١}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٣}}$

٤) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{٢س}^{٢} + \text{٣س} - \text{٥}}{\text{٣} - \text{ق(س)}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س} - \text{١})(\text{٢س} + \text{٥})}{\text{٣} - \text{ق(س)}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س} - \text{١}}{\text{٣} - \text{ق(س)}} \times \frac{\text{٢س} + \text{٥}}{\text{١}}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٧} = \frac{-\text{٧}}{\text{٢}}$

٥) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} + \text{س}^{٢} - \text{٤}}{\text{س} - \text{١}}$ $\quad \pm\ \text{ق(١)} = \text{٣}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣} + \text{٣} + \text{س}^{٢} - \text{٤}}{\text{س} - \text{١}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}} + \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\ \frac{\cancel{\text{س}^{٢} - \text{١}}^{\ \text{س} + \text{١}}}{\cancel{\text{س} - \text{١}}}$

$= \text{٢} + \text{٢} = \text{٤}$

أعداد الأستاذ : معاذ الصعصاع
الفرع العلمي

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢}\,ق(س) - ٣}{س - ١} \quad \pm ٣س^{٢}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢}.\,ق(س) - ٣س^{٢}}{س - ١} + \dfrac{٣س^{٢} - ٣}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}}\, س^{٢} \times \dfrac{ق(س) - ٣}{س - ١} + \dfrac{٣\,\cancel{(س - ١)}(س + ١)}{\cancel{(س - ١)}}$

$= ١ \times ٢ + ٦ = ٢ + ٦ = ٨$

٧) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{ق(س) + ١} - ٢}{س - ١} \times \dfrac{\sqrt{ق(س) + ١} + ٢}{\sqrt{ق(س) + ١} + ٢}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{ق(س) + ١ - ٤}{س - ١} \times \dfrac{١}{٤}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{ق(س) - ٣}{س - ١} \times \dfrac{١}{٤}$

$= ٢ \times \dfrac{١}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

نهاية الاقترانات المثلثية (الدائرية):

النظرية الأساسية: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}س}{س} = ١$ ، حيث س بالتقدير الدائري

النظرية الفرعية: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}(س)}{س} = ١$

الإثبات: $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}(س)}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{\text{جا}(س)}{\text{جتا}(س)}}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(س)}{\text{جتا}(س)} \times \dfrac{١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}س}{س} \times \dfrac{١}{\text{جتا}س} = ١$

نتائج على النظرتين:

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,أس}{ب\,س} = \dfrac{أ}{ب} \Longleftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,أس}{ب\,س} = \dfrac{أ}{ب}$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{أس}{\text{جا}\,ب\,س} = \dfrac{أ}{ب} \Longleftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \dfrac{أ}{ب}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{\text{جا}\,ب\,س} = \dfrac{أ}{ب} \Longleftarrow \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \dfrac{أ}{ب}$

٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{\text{ظا}\,ب\,س} \quad \dfrac{أ}{ب}$

إثبات:

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{ب\,س} = \dfrac{أ}{ب}$

أ س = ص
س = $\dfrac{١}{أ}$ ص
ص ← ٠

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{ب\,س} = \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}ص}{\frac{ب}{أ} \times ص}$

$= \dfrac{أ}{ب} \times \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}ص}{ص}$

$= \dfrac{أ}{ب} \times ١ = \dfrac{أ}{ب}$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{\text{ظا}\,ب\,س} = \dfrac{أ}{ب}$

بالقسمة على س − ٠ = س وتوزيع النهاية

$= \dfrac{\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}أس}{س}}{\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}ب\,س}{س}} = \dfrac{\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}ص}{\frac{١}{أ}ص}}{\underset{ع \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,ع}{\frac{١}{ب}ع}}$

أ س = ص
ب س = ع

$$=\frac{\frac{\text{أ}}{\text{١}}\times\underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}}{\frac{\text{ب}}{\text{١}}\times\underset{\text{ع}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{ظاع}}{\text{ع}}}=\frac{\text{أ}\times\text{١}}{\text{ب}\times\text{١}}=\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\ \#$$

مثال:

جد النهايات التالية

١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}}$

$\text{٢س}=\text{ص}$
$\text{س}=\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ص}$
$\text{ص}\to\text{٠}$

$$\underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاص}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ص}}$$

$$\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\text{١}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\pi}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}}=\frac{\text{جا٢}\pi}{\text{٣}\pi}=\frac{\therefore}{\text{٣}\pi}=\therefore$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٢س}}{\text{٣س}^{\text{٣}}}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}\times\text{جا٢س}\times\text{جا٢س}}{\text{٣ س}\times\text{س}\times\text{س}}$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}}\times\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}\times\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}$$

$$=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\frac{\text{٢}}{\text{١}}\times\frac{\text{٢}}{\text{١}}=\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$$

حل آخر:

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٢س}}{\text{٣س}^{\text{٣}}}=\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\left(\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}\right)^{\text{٣}}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}\right)^{\text{٣}}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\frac{\text{٢}}{\text{١}}\right)^{\text{٣}}=\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\text{٨}=\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}^{\text{٣}}}{\text{٣س}^{\text{٣}}}$

$\text{٢س}^{\text{٣}}=\text{ص}$
$\text{س}^{\text{٣}}=\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ص}$

$$\underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاص}}{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{ص}}$$

$$=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$$

$$=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\text{١}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

نتيجة هامة

$$\boxed{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاأس}^{\text{ن}}}{\text{ب س}^{\text{ن}}}=\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$$

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}^{\text{٣}}}{\text{٣س}^{\text{٢}}}\times\frac{\text{س}}{\text{س}}$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}^{\text{٣}}}{\text{٣س}^{\text{٣}}}\times\frac{\text{س}}{\text{١}}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\therefore=\therefore=\text{صفر}$$

٦) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{٣س}}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}\times\text{جا٢س}}{\text{٣س}}$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}}\times\frac{\text{جا٢س}}{\text{١}}$$

$$=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}\times\therefore=\therefore=\text{صفر}$$

٧) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{+}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاس}}{\sqrt{\text{س}}}\times\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$ $\quad \cancel{-\ -}\ \ |_{\text{٠}}\ \ +\ +\ \sqrt{\text{س}}$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{+}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{+}}{\text{نهــا}}\sqrt{\text{س}}=\text{١}\times\therefore=\therefore=\text{صفر}$$

٨) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}$ تحول؟! $\quad \frac{\text{-جاس}}{\text{-س}}\ -\ -\ |_{\text{٠}}\ +\ +\ \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{+}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جاس}}{\text{س}}=\text{١}$$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}^{-}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}-\text{س}}{\text{س}}$$

$$=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{-\text{جا س}}{\text{س}}=-\text{١}$$

$$\therefore\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}\ \text{غ . م}$$

٩) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{ظا٣س}}$ بالقسمة على س وتوزيع النهاية

$$=\frac{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}}=\text{.................}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

١٠) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}^{\text{٢}}}{\text{ظا٣س}^{\text{٢}}}$ بالقسمة على $\text{س}^{\text{٢}}$

$$=\frac{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}}{\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{ظا٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}}=\frac{\frac{\text{٢}}{\text{١}}}{\frac{\text{٣}}{\text{١}}}=\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

أعداد الأستاذ : معــاذ الصعصــاع
الفرع العلمــــي

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع
الفرع العلمـي

١١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\,٣\text{س}}$

$$= \left(\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{ظا}٣\text{س}}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$$

١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{ظا}\,٣\text{س}^{٢}}$ بالقسمة على $\text{س}^{٢}$

$$= \frac{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{ظا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}} = \frac{\left(\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\dfrac{٣}{١}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{٢}{١}\right)^{٢}}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

تدريب:

١٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} ٣\text{س}^{٣}\,.\,\text{ظتا}^{٢}\,٢\text{س}\,.\,\text{قتاس}$ — ✓الحل: $\frac{٣}{٤}$

١٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٣}\,٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦}}$ — ✓الحل: ٨

١٥) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}٣\text{س}^{٢} - \text{س}\,.\,\text{ظا}٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} - \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س ظا}٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{٣}{١} - \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا}٢\text{س}}{\text{س}}$$

$$= ٣ - ٢ = ١$$

١٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س}^{٣} - \text{ظا}٣\text{س}^{٢}}$ بالقسمة على $\text{س}^{٢}$

$$= \frac{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{ظا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}} - \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{جا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{٢}{١}\right)^{٢}}{\lim\limits_{\text{س}\to ٠}\text{س} - \dfrac{٣}{١}} = \frac{٤}{٠ - ٣} = \frac{-٤}{٣}$$

تدريب:

١٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}\,.\,\text{جا}٢\text{س} - \text{ظا}^{٢}\,٣\text{س}}{٥\text{س}^{٢} - \text{جا}٣\text{س}^{٢}}$ — ✓الحل: $\frac{-٧}{٢}$

١٨) $\lim\limits_{\text{س}\to \pi} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س} - \pi}$

ص = π − س
س ← π
ص ← ٠

$$= \lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{(\text{س} - \pi)}$$

$$= \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جاص}}{-\text{ص}} = -١$$

١٩) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{جا}\,\pi\,\text{س}}{\text{س} - ٢}$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{-\text{جا}(٢\pi - \pi\,\text{س})}{(\text{س} - ٢)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{-\text{جا}\,\pi(٢ - \text{س})}{(\text{س} - ٢)}$$

ص = ٢ − س

$$= \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{-\text{جا}\,\pi\,\text{ص}}{-\text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}\,\pi\,\text{ص}}{\text{ص}} = \pi$$

٢٠) $\lim\limits_{\text{س}\to \pi} \dfrac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س} - \pi}$

$$= \lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}(٣\pi - ٣\text{س})}{(\text{س} - \pi)}$$

ص = π − س

$$= \lim_{\text{س}\to \pi} \frac{\text{جا}٣\,(\pi - \text{س})}{(\text{س} - \pi)}$$

$$= \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\,(\text{ص})}{-\text{ص}} = -٣$$

تدريب:

٢١) $\lim\limits_{\text{س}\to \pi} \dfrac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}}$ — ✓الحل: $-\frac{٢}{٣}$

٢٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{جا}(٢\text{س} - ٦)}{\text{س}^{٢} - ٩}$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{جا}٢(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)} \times \frac{١}{(\text{س} + ٣)}$$

أعداد الأستاذ : معاذ الصعصاع

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جا}٢ص}{ص} \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

٢٣) $\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}(\sqrt{س} - ١)}{س^{٣} - ١}$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}(\sqrt{س} - ١)}{(س - ١)} \times \frac{١}{(س^{٢} + س + ١)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}(\sqrt{س} - ١)}{(\sqrt{س} - ١)} \times \frac{١}{(\sqrt{س} + ١)(س^{٢}+س+١)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جاص}}{ص} \times \frac{١}{٢ \times ٣}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$$

تدريب:

٢٤) $\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}(\sqrt{س + ٣} - ٢)}{س^{٢} - ١}$ — ✓الحل: $\frac{١}{٨}$

٢٥) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}(٣\text{ظا}^{٢}٢س)}{س^{٢}}$ — ✓الحل: ١٢

٢٦) $\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{س}}{١ - س} = \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}(\pi - \frac{\pi}{س})}{١ - س}$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}\,\pi(١ - \frac{١}{س})}{(١ - س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\text{جا}\,\pi(١ - \frac{١}{س})}{س(\frac{١}{س} - ١)}$$

$$= -\pi \times \text{نهـا}_{س\to ١} \frac{١}{س}$$

$$= -\pi \times ١ = -\pi$$

أسئلة تحتوي جتا س:

I. إذا كانت منفردة: $\text{جتاس} = \text{حا}(\frac{\pi}{٢} \pm س)$

٢٧) $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا س}}{٢س - \pi}$

$$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(س - \frac{\pi}{٢})}$$

$ص = \frac{\pi}{٢} - س$

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جاص}}{-٢ص} = \frac{-١}{٢}$$

تدريب

٢٨) $\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$ — ✓الحل: $\frac{\pi}{٤}$

II. إذا كانت على إحدى الصور الآتية:

$\text{جتا}٢س = ١ - ٢\text{جا}^{٢}س$

$\text{جتا}^{٢}س = ١ - \text{جا}^{٢}س$

$\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\text{جا}(\frac{س+ص}{٢}).\ \text{جا}(\frac{س-ص}{٢})$

٢٩) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢}٣س - \text{جتا}٨س}{س^{٢}}$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{١ - \text{جا}^{٢}٣س - (١ - ٢\text{جا}^{٢}٤س)}{س^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{١ - \text{جا}^{٢}٣س - ١ + ٢\text{جا}^{٢}٤س}{س^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^{٢}٤س - \text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{٢\text{جا}^{٢}٤س}{س^{٢}} - \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢}}$$

$$= ٢(٤)^{٢} - (٣)^{٢}$$

$$= ٣٢ - ٩ = ٢٣$$

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

٣٠) $\lim\limits_{س\to٠} \dfrac{\text{جتا٢س} - ١}{١ - \text{جتا ٤س}}$

$= \lim\limits_{س\to٠} \dfrac{١ - ٢\,\text{جا}^٢\text{س} - ١}{١ - (١ - ٢\,\text{جا}^٢\,\text{س})}$

$= \lim\limits_{س\to٠} \dfrac{-٢\,\text{جا}^٢\text{س}}{٢\,\text{جا}^٢\text{٢س}} = -١ \left(\lim\limits_{س\to٠} \dfrac{\text{جاس}}{\text{جا٢س}}\right)^٢$

$= -١ \left(\dfrac{١}{٢}\right)^٢ = -\dfrac{١}{٤}$

تدريب:

٣١) $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٢}} \dfrac{١ + \text{جتا٢س}}{١ - \text{جاس}}$ ✓الحل: ٤

٣٢) $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٦}} \dfrac{٤\,\text{جتا}^٢\text{س} - ٣}{٢\text{جاس} - ١}$

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٦}} \dfrac{٤(١ - \text{جا}^٢\text{س}) - ٣}{٢\text{جاس} - ١}$

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٦}} \dfrac{٤ - ٤\,\text{جا}^٢\,\text{س} - ٣}{٢\text{جاس} - ١}$

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٦}} \dfrac{١ - ٤\,\text{جا}^٢\,\text{س}}{٢\text{جاس} - ١}$

$= \lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٦}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(١ - ٢\text{جاس})}}\,(١ + ٢\text{جاس})}{\cancel{(٢\text{جاس} - ١)}}$

$= -١\left(١ + ٢ \times \dfrac{١}{٢}\right) = -١\ (٢) = -٢$

٣٣) $\lim\limits_{س\to٠} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جتا٣س}}{\text{س . ظا٣س}}$

$= \lim\limits_{س\to٠} \dfrac{\text{٢جا٢س جاس}}{\text{س} \times \text{ظا٣س}}$

$= \lim\limits_{س\to٠} \dfrac{\text{٢ جا٢س}}{\text{ظا٣س}} \times \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}$

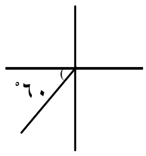
$= ٢ \times \dfrac{٢}{٣} \times ١ = \dfrac{٤}{٣}$

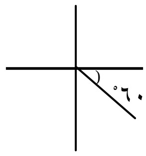
٣٤) $\lim\limits_{س\to م} \dfrac{\text{جتا٢س} - \text{جتا ٢م}}{\text{س} - م} = \sqrt{٣}$ ، جد $م \in [٠ ، \pi]$

$= \lim\limits_{س\to م} \dfrac{-٢\text{جا}\,(\text{س}+م) \times \text{جا}(\text{س} - \text{أ})}{\text{س} - م} = \sqrt{٣}$

$= \lim\limits_{س\to م} -٢\text{جا}(\text{س}+م)\ \dfrac{\text{جا}(\text{س} - م)}{(\text{س} - م)} = \sqrt{٣}$

$= -٢\text{جا}\ ٢م = \sqrt{٣} \Longleftarrow \text{جا}٢م = \dfrac{-\sqrt{٣}}{٢}$





$٢م = ٢٤٠^\circ$ ، $م = ١٢٠^\circ$

$٢م = ٣٠٠$ ، $م = ١٥٠^\circ$

$\therefore\ م \in \left\{\dfrac{٢\pi}{٣} ، \dfrac{٥\pi}{٦}\right\}$

تدريب:

٣٥) $\lim\limits_{س\to م} \dfrac{\text{جاس} - \text{جا}م}{\text{س}^٢ - م^٢}$ ✓الحل: $\dfrac{\text{جتا}م}{٢م}$

٣٦) $\lim\limits_{س\to م} \dfrac{\text{ظاس} - \text{ظا}م}{\text{س} - م}$

$= \lim\limits_{س\to م} \dfrac{\text{ظا}\,(\text{س}-م)\ .\ (١+\text{ظاس . ظا}م)}{(\text{س} - م)}$

$= \lim\limits_{س\to م} \dfrac{\text{ظا}\,(\text{س}-م)}{(\text{س} - م)} \times (١ + \text{ظا س .ظا}م)$

$= ١ \times (١ + \text{ظا}^٢م) = \text{قا}^٢م$

تدريب:

٣٧) $\lim\limits_{س\to\frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{٤\text{س} - \pi}$ ✓الحل: $\dfrac{١}{٢\sqrt{٢}}$

III. إذا احتوت النهاية إحدى ما يلي:

- ١ ± جتا
- ١ ± جا
- ١ ± $\sqrt{٢}$ جتا
- ١ ± $\sqrt{٢}$ جا
- ١ ± $\sqrt{\text{جتا}}$
- $\sqrt{١ \pm \text{جتا}}$
- ١ ± قا
- جتاس ± جاس

يكون الحل بالضرب بالمرافق للوصول إلى متطابقة.

٣٨) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{١-\text{جتا}٣س}{س^{٢}} \times \dfrac{١+\text{جتا}٣س}{١+\text{جتا}٣س}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{١-\text{جتا}^{٢}٣س}{س^{٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= ٩ \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٩}{٢}$

٣٩) $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{١-\text{جاس}}{(٢س-\pi)^{٢}} \times \dfrac{١+\text{جاس}}{١+\text{جاس}}$

$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{١-\text{جا}^{٢}س}{(٢س-\pi)^{٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}س}{(٢س-\pi)^{٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \left(\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{\text{جتاس}}{٢س-\pi}\right)^{٢} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \left(\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}-س)}{٢(س-\frac{\pi}{٢})}\right)^{٢} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \left(\dfrac{-١}{٢}\right)^{٢} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٨}$

تدريب:

٤٠) $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{جتاس}-\text{جاس}}{\sqrt{٢}\,\text{جتاس}-١}$ ✓الحل: $-\sqrt{٢}$

٤١) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{١-\text{قا}٢س}{\text{جا}^{٢}٣س} \times \dfrac{١+\text{قا}٢س}{١+\text{قا}٢س}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{١-\text{قا}^{٢}٢س}{\text{جا}^{٢}٣س} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{-\text{ظا}^{٢}٢س}{\text{جا}^{٢}٣س} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \dfrac{-١}{٢}\left(\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\text{ظا}٢س}{\text{جا}٣س}\right)^{٢}$

$= \dfrac{-١}{٢} \times \dfrac{٤}{٩} = \dfrac{-٢}{٩}$

تدريب:

٤٢) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\text{جا}(١-\sqrt{\text{جتا}٢س})}{س^{٢}}$ ✓ الحل: ١

٤٣) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا س}}}{س} \times \dfrac{\sqrt{١+\text{جتا س}}}{\sqrt{١+\text{جتا س}}}$

++ | ++ ($-\pi$ ، ٠ ، π)

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا}^{٢}س}}{س} \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{جا}^{٢}س}}{س} \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{|\text{جا س}|}{س} \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

-جاس -جاس | +جاس +جاس ($-\pi$ ، ٠ ، π)

$\therefore \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\sqrt{١-\text{جتا س}}}{س}$ غ.م

٤٤) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{\text{جا}٢س-٢\text{جاس}}{س^{٣}}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{٢\text{جاس جتاس}-٢\text{جاس}}{س^{٣}}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{٢\text{جاس}(\text{جتاس}-١)}{س^{٣}} \times \dfrac{\text{جتا س}+١}{\text{جتا س}+١}$

$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \dfrac{٢\text{جاس}(\text{جتا}^{٢}س-١)}{س^{٣}} \times \dfrac{١}{٢}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس} \times \text{- جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٣}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{- جا}^{٣}\text{س}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= -\left(\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)^{٣} \longrightarrow \; = \; -١ \; \#$$

٤٥) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس (قاس - ١)}}{\text{س}^{٣}} \times \frac{\text{قاس+١}}{\text{قاس+١}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس (قا}^{٢}\text{س} - ١)}{\text{س}^{٣}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس} \times \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٣}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٤٦) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{\text{٣جاس} - \text{جا٣س}}{\text{س}^{٣}}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس} + \text{جاس} - \text{جا٣س}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس - ٢جاس} \times \text{جتا٢س}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس (١- جتا٢س)}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٢جاس (١- (١- ٢جا}^{٢}\text{س))}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{٤جا}^{٣}\text{س}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= ٤\left(\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)^{٣}$$

$$= ٤ \times ١ = ٤$$

الاتصـــال

١)الاتصال عند نقطة (عندما س= م)

٢)الاتصال على الفترة [م، ب]

٣)الاتصال على ح.

الاتصال عند نقطة:

يكون ق(س) متصلاً عند س= م إذا حقق الشروط التالية:

١)أن يكون ق(س) معرفاً عند س= م (م ∋ مجال ق(س)).

٢)أن تكون $\lim_{س \to م}$ ق(س) موجودة.

٣)أن يكون ق(م) = $\lim_{س \to م}$ ق(س).

ملاحظات مهمة:

١) كثيرات الحدود متصلة عند أي نقطة في مجالها وكذلك جاس & جتاس

٢) الاقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام. وكذلك ظاس، ظتاس، قاس، قتاس.

٣) الجذور الزوجية: ق(س) = $\sqrt{\text{هـ(س)}}$

متصلة لكل س: هـ(س)>٠

غير متصلة لكل س: هـ(س)<٠

٤) الجذور الفردية: ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{هـ(س)}}$

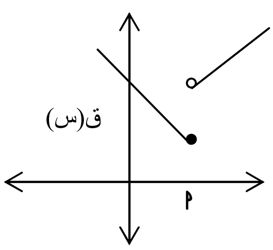
متصلة إذا كانهـ (س) متصل

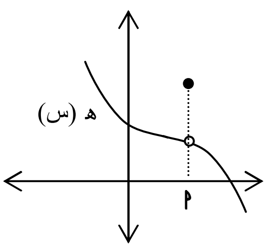
٥) ق(س)= [هـ (س)] = $\begin{cases} \text{متصلة لكل س: هـ(س)} \notin \text{ص} \\ \text{غ متصلة لكل س: هـ(س)} \in \text{ص} \end{cases}$

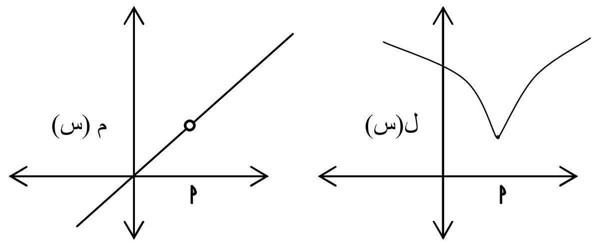
حيث هـ (س) = مس + ب

مثال:

أي الأشكال التالية تمثل اقتراناً متصلاً عند س = م







١) ق غ متصل عند س = ﻡ لأن $\lim_{س \to ﻡ}$ ق(س) غ.م

٢) هـ غ متصل عند س = ﻡ لأن هـ (ﻡ) ≠ $\lim_{س \to ﻡ}$ هـ (س)

٣) ل (س) متصل عند س = ﻡ (لتحقق الشروط)

٤) م(س) غ متصل عند س = ﻡ لأنه غير معرف عندها

(ﻡ ∌ مجاله)

لا يوجد صورة للعدد (ﻡ)

مثال: ابحث في اتصال كل من:

١) ق(س) = ٢س^{٢} + ٣ عندما س = −١

- ق معرفاً عند س =−١ (كثير الحدود)
- نهـــا$_{س \to ﻡ}$ ق(س) = نهـــا$_{س \to ﻡ}$ (٢س^{٢}+٣)

= ٢(١)^{٢} + ٣ = ٥

- ق(١)= ٥

∴ ق متصل عند س = ١

ملاحظة:
يمكن القول بأن ق متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود وبدون بحث.

٢) ق(س) = $\frac{٣ س}{س + ٢}$

١] عندما س = ١

- ق معرف عند س =١ (ليس من أصفار المقام)
- نهـــا$_{س \to ١}$ ق(س) = $\frac{٣ \times ١}{١+ ٢}$ = $\frac{٣}{٢}$
- ق(١) = $\frac{٣}{٢}$

∴ ق متصل عند س = ١

٢] عندما س = − ٢

ق غ معرف عندما س =−٢ (أصفار مقامه)

∴ ق غ متصل عند س = −٢

٣] ق س = $\sqrt{٥ - س}$

١) عندما س = ٦

ق غ معرف عندما س =٦ (ق(٦) = $\sqrt{-١}$)

∴ ق غ متصل عند س = ٦

٢) عندما س = −٤

- ق معرف عند س =− ٤
- نهـــا$_{س \to -٤}$ ق(س) = $\sqrt{٥ - -٤}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣
- ق(−٤) = ٣

∴ ق متصل عند س = −٤

٤] ق (س) = ظا ٢س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

= $\frac{جا٢س}{جتا٢س}$

- ق معرف عند س = $\frac{\pi}{٢}$
- نهـــا$_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ ق(س) = $\frac{جا\ \pi}{جتا\ \pi}$ = $\frac{∴}{-١}$ = ∴
- ق ($\frac{\pi}{٢}$) = ∴
- ∴ ق متصل عند س= $\frac{\pi}{٢}$

٥] ق (س) = [$\frac{١}{٢}$ س − ١]

١) عندما س = −١

- ق معرف عند س = −١
- نهـــا$_{س \to -١}$ ق(س) =[$\frac{١}{٢}$ س − ١] = [−١,٥]= −٢

■ ق(−١) = −٢

∴ ق متصل عند س = −١

٢) عندما س = −٢

■ ق معرف عند س = −٢

■ نهـــا ق(س) غ ٠ م (س ← −٢)

نهـــا ق(س) (س ← −٢⁺) = نهـــا [$\frac{١}{٢}$ س − ١] = −٢

نهـــا ق(س) (س ← −٢⁻) = نهـــا [$\frac{١}{٢}$ س − ١] = −٣

∴ ق غ متصل عند س = −١

٦] ق (س) = { $٣س^{٢} + ١$ س ≠ ٢ ؛ ١٥ س = ٢ }

عندما س = ٢

■ ق معرفاً عند س = ٢ (لوجود المساواة)

■ نهـــا ق(س) (س ← ٢) = نهـــا ($٣س^{٢}$ + ١)

= ٣ $(٢)^{٢}$ + ١ = ١٣

■ ق(٢) = ١٥ ≠ نهـــا ق(س) (س ← ٢) = ١٣

∴ ق غ متصل عند س = ٢

٧] ق (س) = { $\frac{٣}{س - ١}$ س > ١ ؛ ٢س+١ س ≤ ١ }

عندما س = ١

■ ق معرفاً عند س = ١ (لوجود المساواة)

■ نهـــا ق(س) (س ← ١) تحول

نهـــا ق(س) (س ← ١⁺) = نهـــا $\frac{٣}{س - ١}$ = غ م

أما نهـــا ق(س) (س ← ١⁻) = نهـــا (٢س+١) = ٣

∴ نهـــا ق(س) (س ← ١) غ. م

∴ ق غ متصل عند س = −١

٨] ق (س) = { $\frac{٢س^{٢} - ٨}{س - ٢}$ س ≠ ٢ ؛ ٣س+٢ س = ٢ }

عندما س = ٢

■ ق معرف عند س = ٢

■ نهـــا ق(س) (س ← ٢) = نهـــا $\frac{٢س^{٢} - ٨}{س - ٢}$ = $\frac{٢\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{(س - ٢)}}$

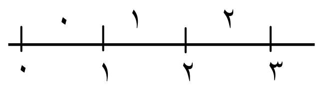
= ٢(٢ + ٢) = ٢(٤) = ٨

■ ق(٢) = ٣(٢) + ٢ = ٦ + ٢ = ٨

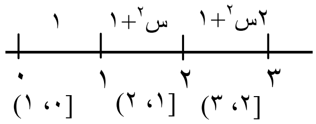
∴ ق متصل عند س = ٢

٩] ق (س) = $س^{٢}$.[س] +١ عندما س=٢

[س]



ق(س)



■ ق معرفاً عند س = ٢

■ نهـــا ق(س) (س ← ٢) تحول

نهـــا ق(س) (س ← ٢⁺) = نهـــا ($٢س^{٢}$ + ١) = ٨ +١ = ٩

نهـــا ق(س) (س ← ٢⁻) = نهـــا ($س^{٢}$ + ١) = ٤ +١ = ٥

∴ نهـــا ق(س) (س ← ٢) غ.م

∴ ق غ متصل عند س = ٢

١٠] ق (س) = $\frac{|س|}{[س]}$ **عندما س=** $\frac{١}{٢}$

■ ق غ معرف عند س = $\frac{١}{٢}$ (أصفار مقام)

∴ ق غ متصل عند س = $\frac{١}{٢}$

١١] ق (س) = { [س − ٢] س ≤ ١ ؛ |س − ٢| س > ١ }

عندما س = ١

■ ق معرف عند س = ١ (لوجود المساواة)

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

- نهـا$_{س\to ١}$ ق(س) تحول

نهـا$_{س\to ١^+}$ ق(س) = نهـا$_{س\to ١}$ |س - ٢|

نهـا$_{س\to ١}$(-س+٢)= -١ + ٢ = ١

نهـا$_{س\to ١^-}$ ق(س) = نهـا$_{س\to ١^-}$ [س - ٢] = -١-١ = -٢

∴ نهـا$_{س\to ١}$ ق(س) غ. م

⇦ ق غ متصل عند س = ١

١٢] ق (س)= $\begin{cases} \frac{جا^٣ ٢س}{٣ س^٣} & س \neq ٠ \\ \frac{٢}{٣} & س = ٠ \end{cases}$

عندما س = ٠

- ق معرف عند س = ٠
- نهـا$_{س\to ٠}$ ق(س) = نهـا$_{س\to ٠}$ $\frac{جا^٣ ٢س}{٣ س}$

= $\frac{١}{٣}$ (نهـا$_{س\to ٠}$ $\frac{جا٢س}{س}$)^٣ = $\frac{٨}{٣}$

- ق(٠) = $\frac{٢}{٣}$ ≠ نهـا$_{س\to ٠}$ ق(س) = $\frac{٨}{٣}$

∴ ق غ متصل عند س = ٠

مثال: حدد نقاط عدم الاتصال لكل من:

١) ق(س) = $\frac{س+٢}{س^٢ - ٩}$

عند أصفار المقام

س^٢ - ٩ = ٠

س^٢ = ٩ ⟸ $\boxed{س = \pm ٣}$

٢) ق(س) = $\frac{٧س}{س^٢ + س}$

عند أصفار المقام

س^٢ + س= ٠

س (س + ١) ⟸ س = ٠ ، -١

٣) ق(س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ٢س - ١}$

س^٢ - ٢س -١= ٠

المميز = ٤ - ٤×١×-١ =٨

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ}$

= $\frac{+٢ \pm \sqrt{٨}}{٢}$

= ١ ± $\sqrt{٢}$

٤) ق(س) = $\frac{١٥}{س^٢ + ٤}$

بما أن س^٢ + ٤ ≠ ∴ (لايوجد أصفار مقام)

لا يوجد نقاط عدم اتصال

ق متصل ع ح

٥) ق(س) = **ظاس**

= $\frac{جاس}{جتاس}$ عند أصفار المقام

جتاس = ٠

س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

أو س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π

∴ ق غ متصل لكل س∋ { $\frac{\pi}{٢}$ +٢نπ، $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π}

٦) ق(س) = **[س]** ⟸ غ متصل لكل س∋ ص

٧) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س - ١]

غ متصل لكل س: $\frac{١}{٢}$ س- ١ ∋ ص

$\frac{١}{٢}$ س∋ ص +١

$\frac{١}{٢}$ س∋ ص

س∋ ٢ص

⟸ ∴ ق غ متصل لكل عدد زوجي

٨) ق(س) = [$\frac{س+١}{٢}$]

غ متصل لكل س: $\frac{س+١}{٢}$ ∋ ص

س + ١∋ ٢ص

س∋ ٢ص - ١

∴ ق غ متصل لكل عدد فردي

أعداد الأستاذ : معـاذ الصعصـاع
الفرع العلمـي

٩) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+١}{[\frac{\text{س}}{٢}] - ١}$

كنسبي

عند أصفار المقام

$[\frac{\text{س}}{٢}] - ١ = ٠$

$[\frac{\text{س}}{٢}] = ١$

$١ \leq \frac{\text{س}}{٢} < ٢$

$٢ \leq$ س < ٤

س ∈ [٢، ٤)

كأكبر عدد صحيح

غ متصل لكل س: $\frac{\text{س}}{٢}$ ∈ ص

س ∈ ٢ص

∴ ق غ متصل لكل س ∈ ٢ص ∪ [٢، ٤)

أو س ∈ ٢ص ∪ [٢، ٤)

مثال:

١) إذا كان ق(س) =
- أس^{٢} +٣ب ، س < ١
- ٢أ ، س = ١
- ٦س – ٢ب ، س > ١

متصلاً عند س = ١ ، جد أ ، ب

بما أن ق متصلاً عند س =١ فإن:

نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}$ ق(س) = نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{-}}$ ق(س)= ق(١)

نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}$ ق(س) = ق(١)

نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}$ (أس^{٢}+٣ب) =٢أ

أ+٣ب =٢أ

– أ + ٣ب = ∴ ....(١)

نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{-}}$ ق(س) = ق(١)

نها$_{\text{س}\leftarrow ١^{-}}$ (٦س – ٢ب) =٢أ

٦- ٢ب = ٢أ

٦=٢أ + ٢ب .....(٢)

(١) ×٢ + (٢) ⟸ –٢أ + ٦ب = ٠

$\cancel{٢أ}$ + ٢ب = ٦

٨ب =٦

ب= $\frac{٣}{٤}$

– أ + $\frac{١٢}{٨}$ = ٠

أ = $\frac{٣}{٢}$

٢) إذا كان ق(س) =
- $\frac{\text{س}^{٣} - ٨}{٢\text{س} - ٤}$ ، س ≠ ٢
- أس ، س = ٢

متصلاً عند س = ٢ ، جد أ

نها$_{\text{س}\leftarrow ٢}$ ق(س) = ق(٢)

نها$_{\text{س}\leftarrow ٢}$ $\frac{\text{س}^{٣} - ٨}{٢\text{س} - ٤}$ = ٢أ

نها$_{\text{س}\leftarrow ٢}$ $\frac{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{٢}$ = ٢أ

⟸ ٦ = ٢أ

أ = ٣

٣) إذا كان ق(س) =
- $\frac{\text{أس}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١
- ب س ، س = ١

متصلاً عند س = ١، جد أ، ب

نها$_{\text{س}\leftarrow ١}$ ق(س) = ق(١)

نها$_{\text{س}\leftarrow ١}$ $\frac{\text{أس}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ = ب

البسط (١) = ٠

أ (١)^{٢} + ٢(١) + ١= ٠

أ + ٢ + ١ = ٠

أ = -٣

التعويض بعد الاختصار= ب

نها$_{\text{س}\leftarrow ١}$ $\frac{-٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ = ب

نها$_{\text{س}\leftarrow ١}$ $\frac{\cancel{(\text{س}-١)}(-٣\text{س}-١)}{\cancel{(\text{س} - ١)}}$ = ب

- ٣ – ١ = ب

- ٤ = ب

٤) إذا كان ق(س) =
- ٣ – ٢ [س] ، س ≥ أ
- ٥ – [س] ، س < أ

متصلاً عند س = أ ، جد قيمة أ ∉ ص

نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{+}}$ ق(س) = نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{-}}$ ق(س)

نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{+}}$ ق(س) = نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{-}}$ ق(س)

نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{+}}$ (٣ – ٢[س]) = نها$_{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{-}}$ (٥ – [س])

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

الفرع العلمـــــي

٣ − ٢[أ] = ٥ − [أ]

٣ − ٥ = ٢[أ] − [أ]

− ٢ = [أ]

−٢ ≤ أ < −١

أ ∈ [−٢، −١)

لكن أ ∉ ص

أ ∈ (−٢، −١)

٥) إذا كان ق(س)= $\frac{٥}{س^٢ + أ س + ٩}$ متصلاً على ح
فما قيمة (أ)

بما أن ق نسبي ومتصلاً على ح

⟸ لا يوجد أصفار مقام

$س^٢$+أس+٩ ≠ ∴ لكن س ∈ ح

⟸ المميز < ∴

$(أ)^٢$ −٤×١×٩ <٠

$(أ)^٢$ − ٣٦ < ٠

$(أ)^٢$< ٣٦

| أ | <٦

−٦ < أ <٦

أ∈ (−٦، ٦)

خواص الإقترانات المتصلة:

١) إذا كان ق(س) و هـ(س) اقترانين متصلين عند س= أ

فإنّ:

(ق(س) $\pm$ $\times$ هـ (س)) متصل عند س=أ

أما $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل عند س= أ بشرط هـ (أ) ≠ صفر

٢) إذا كان احد الاقترانين أو كلاهما غير متصل

فالحل:

نجد الاقتران الناتج عند العملية الحسابية المطلوبة ثم نبحث في اتصاله.

مثال:

اذا كان ق(س) =٣$س^٢$ +١

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢+٥ & س \leqslant ٢ \\ ٤س + ١ & س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال (ق+ هـ)(س) عندما س =٢

✓ الحل

١) ق(س)= ٣$س^٢$+١ متصل عندما س=٢ لأنه كثير حدود

٢) هـ (س): نهـــا$_{س \leftarrow ٢^+}$هـ(س)= نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$($س^٢$+٥) =٩

نهـــا$_{س \leftarrow ٢^-}$هـ(س)= نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$(٤س+١) =٩

هـ (٢)=٩

∴ هـ (س) متصل عند س =٢

⟸ ق(س)+ هـ(س) متصل عند س=٢

مثال:

اذا كان ق(س)= [$\frac{١}{٢}$س+١] ، هـ(س) =($س^٢$ −٢س)

ابحث في اتصال (ق × هـ)(س) عند س=٢

ق(س) غ متصل عند س = ٢، لأن نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غ.م

ق(س) = ١ على [٠، ٢) ، ٢ على [٢، ٤)

(ق × هـ)(س) = ل(س)= $س^٢$ −٢س على [٠، ٢) ، ٢$س^٢$ −٤س على [٢، ٤)

[٠، ٢) [٢، ٤)

١) ل(س) معرفاً عند س=٢

٢) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ل(س) ⟸ تحول

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــي

نهـا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ل(س)= نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ (٢س^{٢}− ٤س) ⟸ = ٨ − ٨= ٠

نهـا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ل(س)= نهـا$_{س \leftarrow ٢}$(س^{٢}−٢س) ⟸ = ٤ − ٤=٠

ل (٢) = ق(٢) × هـ(٢) ⟸ = ٢ × ٠= ٠

∴ ل(س) متصل عند س= ٢

مثال:

إذا كان ق(س)= { **س^{٢}+٢**   **س ⩽ ١** ؛ **٣س + ١**   **س > ١** }

هـ(س) = { **س+١**   **س< ١** ؛ **٢س^{٢}-١**   **س ≥ ١** }

ابحث في اتصال (ق+ هـ)(س) عند س=١

ق : س^{٢} + ٢ | ٣س + ١ ، عند ١ (٣)

هـ : س + ١ | ٢س^{٢} - ١ ، عند ١ (١)

(ق+هـ) م(س) : س^{٢} +س+٣ | ٢س^{٢} + ٣س ، عند ١ (٤)

١) م(س) معرفا عند س=١ (لأن ق وهـ معرفتين عند س=١)

٢) نهـا$_{س \leftarrow ١^{+}}$ م(س) = نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (س^{٢}+ س+٣) =١+١+٣=٥

نهـا$_{س \leftarrow ١^{-}}$ م(س) = نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (٢س^{٢}+٣س) =٥

٣) م(١) =٤ ≠ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ م(س)

∴ م(س) غ متصل عند س=١

مثال:

إذا كان ق(س) = ٢س+١ ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$

ابحث في اتصال ($\frac{ق}{هـ}$)(س)، عند س=٣

✓ الحل

ق(س) =٢س+١ (متصل لأنه كثير الحدود)

أما هـ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ (غ متصل عند س =٣) ؟!

نجد ⟸ $\frac{ق}{هـ}$(س) $= \frac{٢س+١}{\frac{١}{س-٣}}$ = (٢س+١) (س−٣)

⟸ ل(س)= ٢س^{٢}− ٥س−٣ (غير معرف عند س=٣؟!)

∴ ل(س) غ متصل عند س =٣

ملاحظة:

مجال (ق $\mp_{\times}$ هـ)= مجال ق∩ مجال هـ

مجال ($\frac{ق}{هـ}$)= مجال ق∩ مجال هـ – أصفار المقام

مثال:

إذا كان ق(س) متصل عند س = ٢ ، ابحث في اتصال

هـ (س) = س^{٢}. ق(س) +٣ عند س =٢

✓ الحل

س^{٢} متصل عند س = ٢ (لأنه كثير الحدود)

ق(س) متصل عند س =٢ (من المعطيات)

س^{٢}. ق(س) متصل عند س = ٢ (ضرب متصلين)

٣: متصل عند س =٢ (لأنه كثير الحدود)

(س^{٢}. ق(س) +٣) متصل عند س=٢ (لأنه جمع متصلين)

∴ هـ (س) متصل عند س= ٢

مثال:

ق(س) = { **س^{٢}+٢**   **س≤١** ؛ **٤س**   **س > ١** }

ابحث في اتصال هـ (س) = [س+٣] . ق(س) − ٥

عند س = ١

ق : س^{٢} + ٢ | ٤س ، عند ١ (٣) غ متصل عند س =١

[س+٣] : ٠ ، ٣ ، ١ ، ٤ ، ٢

[٠،١)   [٠،٢)

هـ : [س+٣] . ق(س) − ٥ : ٠ ، ١٢س−٥ ، ١ ، ٤س^{٢} +٣ ، ٢

(٠،١]   (٠،٢]

نهـا$_{س \leftarrow ١^{+}}$ هـ (س) = نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (٤س^{٢}+٣)= ٧

نهـا$_{س \leftarrow ١^{-}}$ هـ (س) = نهـا$_{س \leftarrow ١}$ (١٢س− ٥)=٧

هـ(١)= ٧

⟸ هـ(س) متصل عند س = ١

تمت

بحمد الله ورعايته

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمــــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمـــــــي

أعداد الأستاذ : معـــاذ الصعصـــاع
الفرع العلمــــــــــي