الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

11

إجابات الطالب

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

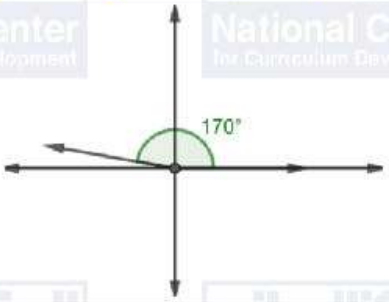
إجابات كتاب الطالب للصف الحادي عشر العلمي / الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة: الاقترانات المثلثية

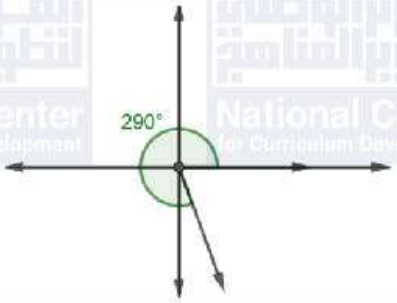
الدرس الأول: قياس الزاوية بالراديان

أتحقق من فهمي صفحة 9

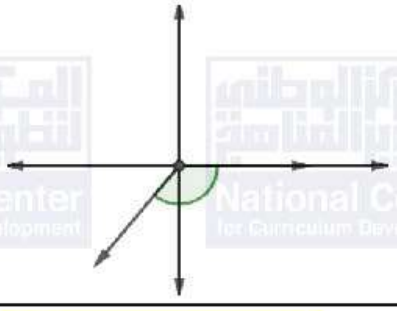
a



b



c



أتحقق من فهمي صفحة 10

a $165^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{12}$

b $\frac{5\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$

c $-80^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{4\pi}{9}$

d $-6 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -\frac{1080^\circ}{\pi}$

أتحقق من فهمي صفحة 12

a	$88° + 360°(1) = 448°$ $88° + 360°(-1) = -272°$
b	$-920° + 360°(2) = -200°$ $-920° + 360°(3) = 160°$
c	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi(1) = \frac{8\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi(-1) = -\frac{4\pi}{3}$
d	$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi(1) = \frac{5\pi}{4}$ $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi(-1) = -\frac{11\pi}{4}$

أتحقق من فهمي صفحة 14

$$\theta = 50° = 50°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{5\pi}{18}$$
$$l = r\theta = 9 \times \frac{5\pi}{18} = \frac{5\pi}{2} \approx 7.85\ cm$$
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{45\pi}{4} \approx 35.34\ cm^2$$

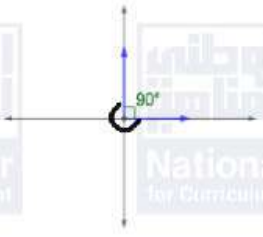
أتحقق من فهمي صفحة 16

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{\frac{10}{60}} = 12\pi$$

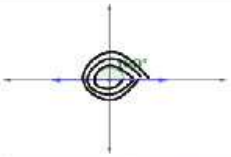
إذن السرعة الزاوية هي 12π راديان لكل دقيقة أي نحو 37.7 راديان لكل دقيقة

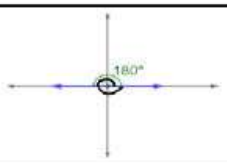
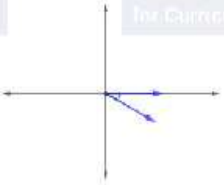
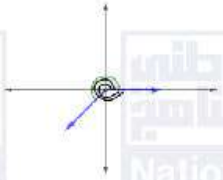
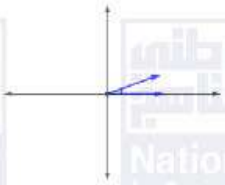
أتدرب وأحل المسائل صفحة 16

1



2



3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	$-225° \times \frac{\pi\, rad}{180°} = -\frac{5\pi}{4} rad$
10	$-135° \times \frac{\pi\, rad}{180°} = -\frac{3\pi}{4} rad$
11	$75° \times \frac{\pi\, rad}{180°} = \frac{5\pi}{12} rad$
12	$500° \times \frac{\pi\, rad}{180°} = \frac{25\pi}{9} rad$
13	$-\frac{\pi}{7} \times \frac{180°}{\pi\, rad} = -\frac{180°}{7}$

14	$\frac{5\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi\, rad} = 75^\circ$
15	$1.2 \times \frac{180^\circ}{\pi\, rad} = \frac{216^\circ}{\pi}$
16	$4 \times \frac{180^\circ}{\pi\, rad} = \frac{720^\circ}{\pi}$
17	$50^\circ + 360^\circ(1) = 410^\circ$ $50^\circ + 360^\circ(-1) = -310^\circ$
18	$135^\circ + 360^\circ(1) = 495^\circ$ $135^\circ + 360^\circ(-1) = -225^\circ$
19	$1290^\circ + 360^\circ(3) = 210^\circ$ $1290^\circ + 360^\circ(-4) = -150^\circ$
20	$-150^\circ + 360^\circ(1) = 210^\circ$ $-150^\circ + 360^\circ(-1) = -510^\circ$
21	$\frac{11\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{23\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{\pi}{6}$
22	$-\frac{\pi}{4} + 2\pi(1) = \frac{7\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4} + 2\pi(-1) = -\frac{9\pi}{4}$
23	$-\frac{\pi}{12} + 2\pi(1) = \frac{23\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{12} + 2\pi(-1) = -\frac{25\pi}{12}$

24	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{19\pi}{6}$ $\frac{7\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{5\pi}{6}$
25	$l = \theta r = 1.8 \times 15 = 27\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1.8)^2(15) = 202.5\ cm^2$
26	$l = \theta r = 24 \times 2.7 = 64.8\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(24)^2(2.7) = 777.6\ cm^2$
27	$l = \theta r = 6.5 \times 4 = 26\ cm$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(6.5)^2(4) = 84.5\ cm^2$
28	$A = \frac{1}{2}(15)^2(1.6) - \frac{1}{2}(10)^2(1.6) = 100\ cm^2$
29	$P = (10)(1.6) + (15)(1.6) + 2(15 - 10) = 50\ cm$
30	$\frac{1}{2}r^2\theta = 500\ ,\quad r\theta = 20$ $\rightarrow \frac{1}{2}r(r\theta) = 500 \rightarrow \frac{1}{2}r(20) = 500 \rightarrow r = 50\ cm \rightarrow \theta = 0.4\ rad$
31	$v(t) = \frac{r\theta}{t} = \frac{0.2(100 \times 2\pi)}{60} = 2.09\ m/s$
32	$\omega(t) = \frac{\theta}{t} = \frac{15(2\pi\ rad)}{10} = 3\pi\ rad/s$ $v(t) = \frac{r\theta}{t} = 3 \times 3\pi = 9\pi\ ft/s$

33	$r = \frac{7.5}{2} = 3.75\ in$ $\omega(t) = \frac{\theta}{t} = \frac{2400(2\pi\ rad)}{60} = 80\pi\ rad/s \approx 251.3\ rad/s$
34	$v(t) = \frac{r\theta}{t} = \frac{3.75 \times 2400(2\pi)}{60} = 300\pi\ in/s$
35	نفرض طول نصف القطر بالأمتار هو r $100r\theta = \frac{1}{2}r^2\theta \quad \rightarrow \quad r = 200\,m$
36	عدد لانهائي من الحلول ضمن الفترة $[0,2\pi]$
37	$\theta = (\pi - 1)rad$
38	ABE ربع دائرة فيها AB=BE لأنهما أنصاف أقطار المثلث قائم الزاوية EBC فيه زاوية $\frac{\pi}{4}$ إذن $BEC = \frac{\pi}{4}$ فهو متطابق الضلعين، فيكون BC=r نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية EBC : $(EC)^2 = r^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad EC = \sqrt{2}r$
39	$ACD = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
40	المحيط = $CD + BC + AB + EA + ED$ $10\sqrt{2} + 10 + 10 + \frac{\pi}{2}(10) + \frac{3\pi}{4}(10\sqrt{2}) \approx 48.4\ cm$ $A = ECD$ مساحة + EBC مساحة + EBC مساحة $= \frac{1}{2}(10)^2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(10\sqrt{2})^2 \times \frac{3\pi}{4} \approx 464.9\ cm^2$

الدرس الثاني: الاقترانات المثلثية

أتحقق من فهمي صفحة 20	
	$x = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24}$ $\sin\theta = \frac{5}{7}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{24}}{7}$, $\tan\theta = \frac{5}{\sqrt{24}}$, $\csc\theta = \frac{7}{5}$, $\sec\theta = \frac{7}{\sqrt{24}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{24}}{5}$
أتحقق من فهمي صفحة 21	
	$r = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ $\sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta = -3$, $\csc\theta = \frac{-\sqrt{10}}{3}$, $\sec\theta = \sqrt{10}$, $\cot\theta = \frac{-1}{3}$
أتحقق من فهمي صفحة 23	
a	$\sin 3\pi = \frac{0}{1} = 0$
b	$\tan 90° = \frac{1}{0}$ غير معرف
c	$\sec\frac{-3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ غير معرف
أتحقق من فهمي صفحة 26	
a	$\sin 210° = -\sin 30° = -0.5$
b	$\cos 510° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c	$\sec 5\pi = \sec\pi = -1$
d	$\tan -\frac{2\pi}{3} = -\tan\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$
أتحقق من فهمي صفحة 27	

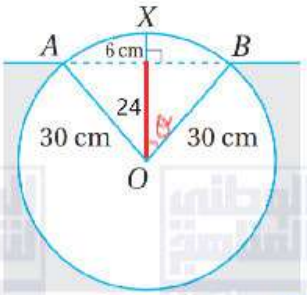
	$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
أتحقق من فهمي صفحة 27	
	$t = \frac{\sqrt{d\csc\theta}}{4} = \frac{\sqrt{3000\csc\frac{\pi}{4}}}{4} = \frac{\sqrt{3000\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4} = \frac{5\sqrt{15\sqrt{2}}}{2} \approx 11.51\ s$
أتحقق من فهمي صفحة 30	
a	$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$
B	$\cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$
c	$\tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$
أتحقق من فهمي صفحة 31	
	$A = \frac{1}{2}r^2\theta \rightarrow \frac{1}{2}(20)^2\theta = 164 \rightarrow \theta = \frac{41}{50}\ rad$ $\frac{1}{2}(20)^2\sin\frac{41}{50} \approx 146.3\ cm^2$ مساحة المثلث= نصف حاصل ضرب طولي ضلعين فيه بجيب الزاوية المحصورة بينهما
أتدرب وأحل المسائل صفحة 32	
1	$x = \sqrt{81-9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\csc\theta = 3$, $\sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $\cot\theta = 2\sqrt{2}$
2	$x = \sqrt{(18)^2-(9)^2} = 4\sqrt{14}$ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\cos\theta = \frac{5}{9}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{14}}{5}$ $\csc\theta = \frac{9}{2\sqrt{14}}$, $\sec\theta = \frac{9}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{14}}$

3	$x = \sqrt{(26)^2 - (14)^2} = 4\sqrt{30}$ $\sin\theta = \frac{2\sqrt{30}}{13}$, $\cos\theta = \frac{7}{13}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{30}}{7}$ $\csc\theta = \frac{13}{2\sqrt{30}}$, $\sec\theta = \frac{13}{7}$, $\cot\theta = \frac{7}{2\sqrt{30}}$
4	$r = \sqrt{144 + 25} = 13$ $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ $\csc\theta = \frac{13}{5}$, $\sec\theta = -\frac{13}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$
5	$r = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = -1$ $\csc\theta = -\sqrt{2}$, $\sec\theta = \sqrt{2}$, $\cot\theta = -1$
6	$r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ $\sin\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\tan\theta = \frac{5}{2}$ $\csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$, $\sec\theta = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\cot\theta = \frac{2}{5}$
7	$r = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$ $\sin\theta = \frac{7}{\sqrt{58}}$, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{58}}$, $\tan\theta = \frac{7}{3}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{58}}{7}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{58}}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{7}$
8	$\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$
9	$\tan -\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{3\pi}{4} = 1$
10	$\cot\frac{8\pi}{3} = \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
11	$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
12	$\sec\frac{15\pi}{4} = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$
13	$\csc -630° = \csc 90° = 1$

14	$\tan 7\pi = \tan \pi = 0$
15	$\sin -\frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
16	$r = \sqrt{144 - 49} = \sqrt{95}$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{95}}{12}$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{95}}{7}$ $\csc \theta = -\frac{12}{\sqrt{95}}$, $\sec \theta = -\frac{12}{7}$, $\cot \theta = \frac{7}{\sqrt{95}}$
17	$r = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$, $\tan \theta = -\sqrt{24}$ $\csc \theta = -\frac{5}{\sqrt{24}}$, $\cos \theta = \frac{1}{5}$, $\cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{24}}$
18	$r = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$ $\sin \theta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\tan \theta = 4$, $\csc \theta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sec \theta = -\sqrt{17}$
19	$r = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot \theta = \sqrt{3}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$
20	$y = 20 + \sin 10(2.5) = 20 + \sin 25 \approx 19.87\ cm$
21	$\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.966$
22	$\cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.966$
23	$\cos \frac{-\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} = 0.966$
24	$\cos \frac{23\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} = 0.966$
25	$\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin \frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
26	$\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \pi - \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$

27	نفرض θ زاوية القطاع $l = r\theta \rightarrow 2r = r\theta \rightarrow \theta = 2$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta \rightarrow 24 = \frac{1}{2}r^2(2) - \frac{1}{2}r^2 \sin 2$ $\rightarrow r = \sqrt{\frac{48}{2 - \sin 2}} \approx 6.6\ cm$
28	نفرض طول الضلع الثالث في المثلث الأبيض يساوي h نجد عن طريق قانون جيب التمام أو بإنزال عمود من رأس المثلث المتطابق الضلعين على القاعدة. فنجد $h = 2r \sin 1$ $P = 2r + h = 2r + 2r \sin 1 \approx 24.3\ cm$ محيط الشكل المظلل
29	$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
30	$\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$
31	$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
32	$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
33	$A = \frac{1}{2}(3x)^2(0.75) - \frac{1}{2}(2x)^2(0.75)$ $30 = \frac{27}{8}x^2 - \frac{3}{2}x^2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$
34	$\tan 210° + \tan 240° = \tan 30° + \tan 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
35	$\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

36



$\cos\theta = \frac{24}{30} \rightarrow \theta \approx 37° \rightarrow 37° \times 2 = 74° = \frac{37\pi}{90}$ زاوية القطاع AOB

مساحة القطعة العائمة = مساحة القطاع الدائري AOB – مساحة المثلث AOB

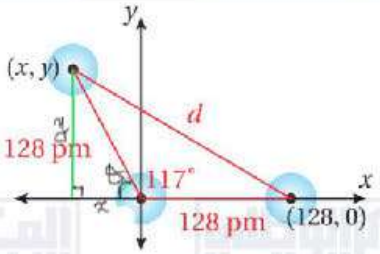
$$A = \frac{1}{2}(30)^2\left(\frac{37\pi}{90}\right) - \frac{1}{2}(30)(30)\sin\frac{37\pi}{90} \approx 149\ cm^2$$

مساحة الجزء الواقع تحت سطح الماء = مساحة المقطع العرضي – مساحة القطعة العائمة

$$A = \pi(30)^2 - 149 \approx 2678\ cm^2$$

النسبة المئوية للجزء الواقع تحت سطح الماء $\frac{2678}{900\pi} \times 100 \approx 94.7\%$

37



$\theta = 180° - 117° = 63°$

$\sin 63° = \frac{y}{128} \rightarrow y = 128\sin 63° \approx 114$

$\cos 63° = \frac{x}{128} \rightarrow x = 128\cos 63° \approx 58$

لأن النقطة في الربع الثاني فإن: $P(-58, 114)$

38

نطبق قانون المسافة بين النقطتين $(128, 0), (-58, 114)$

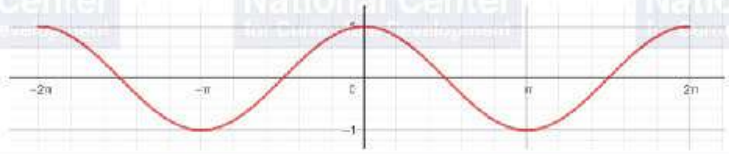
$$d = \sqrt{(128+58)^2 + (0-114)^2} \approx 218.16\ pm$$

الدرس الثالث: تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيا

أتحقق من فهمي صفحة 35

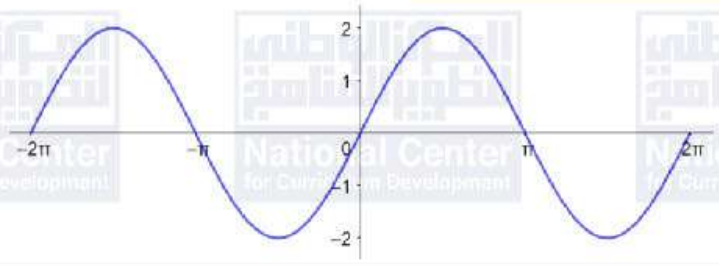
1

2

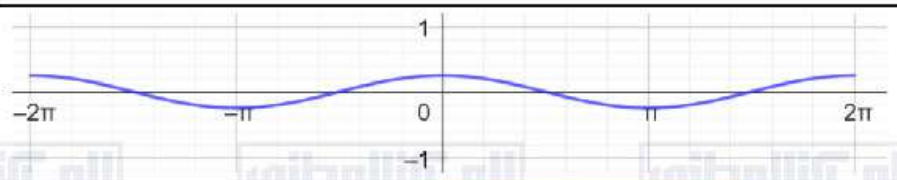


أتحقق من فهمي صفحة 39

a

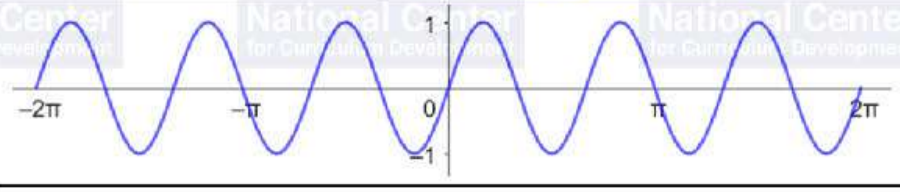


b

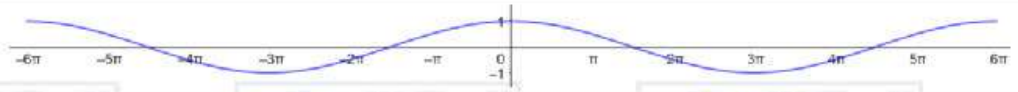


أتحقق من فهمي صفحة 41

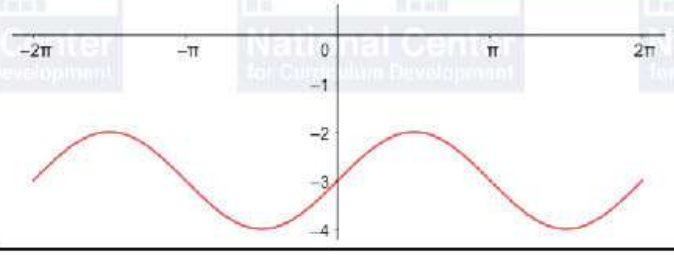
a



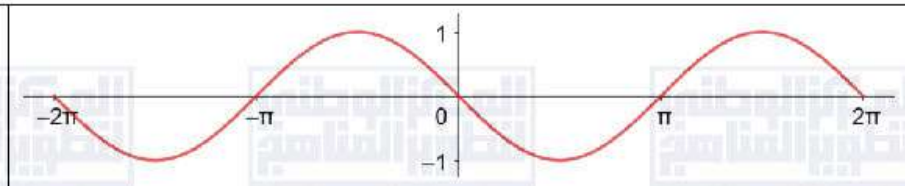
b



أتحقق من فهمي صفحة 42

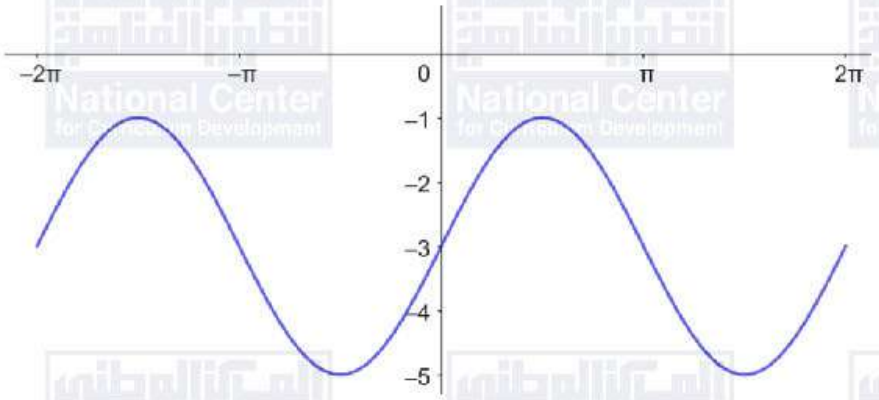


أتحقق من فهمي صفحة 42



أتحقق من فهمي صفحة 44

السعة = 2 ، طول الدورة = 2π ، معادلة خط الوسط: $y=-3$

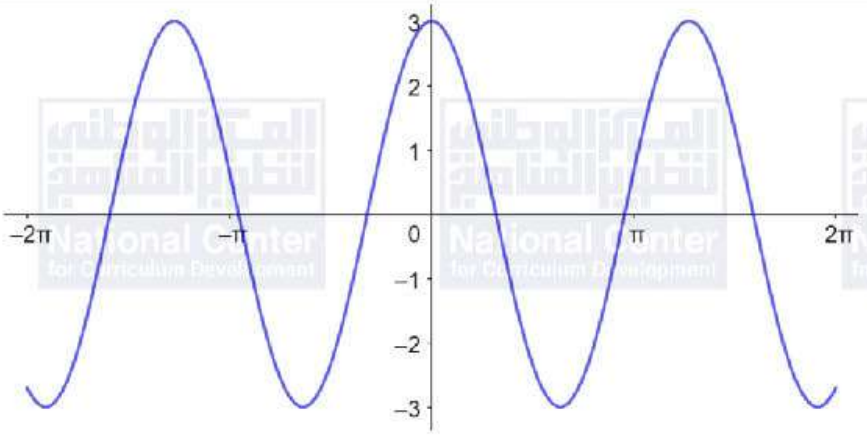


أتحقق من فهمي صفحة 45

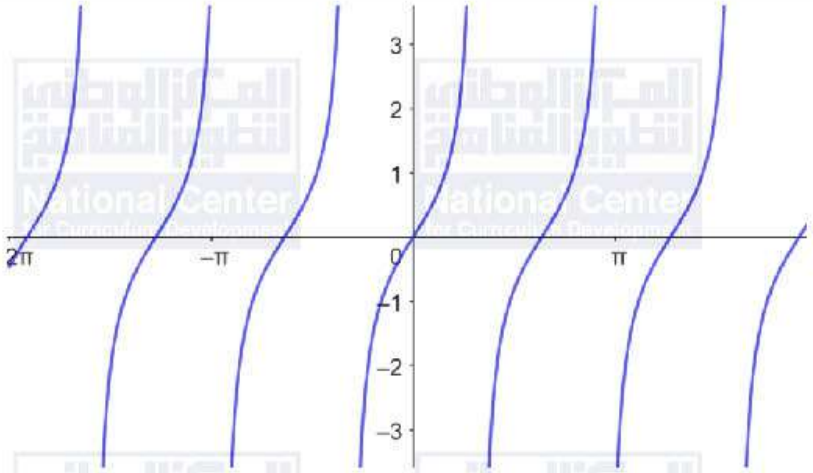
a

أقصى إزاحة = 3 ، طول الدورة = 4π ، التردد = $\frac{1}{4\pi}$

b



أتحقق من فهمي صفحة 46



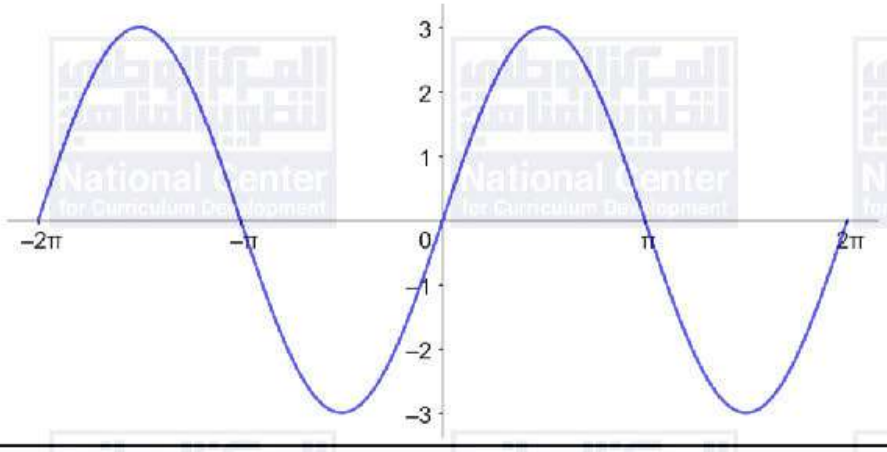
المجال: الأعداد الحقيقية جميعها ما عدا n حيث n عدد صحيح فردي

المدى: الأعداد الحقيقية جميعها

أتدرب وأحل المسائل صفحة 46

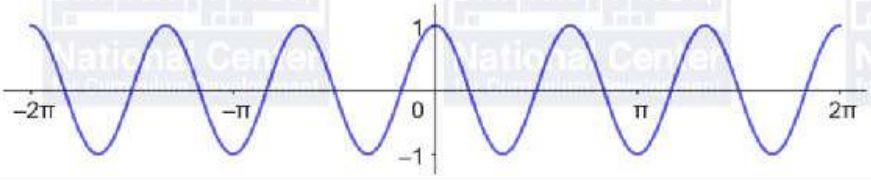
1

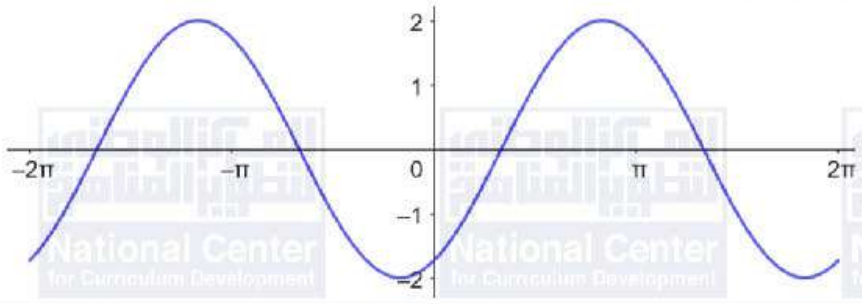
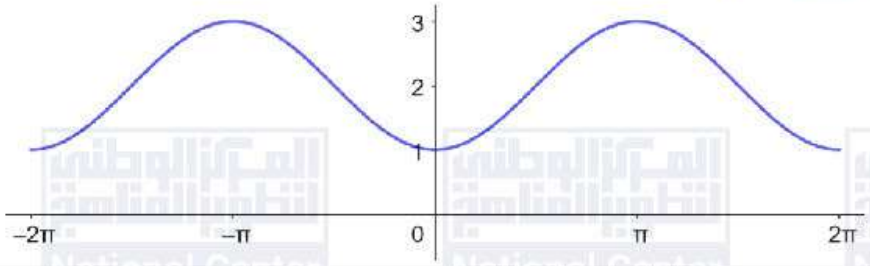
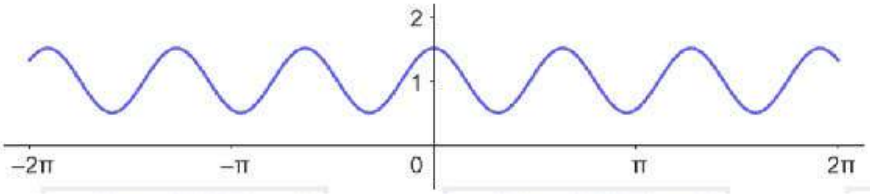
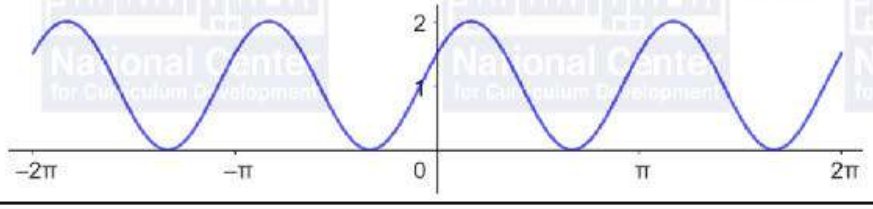
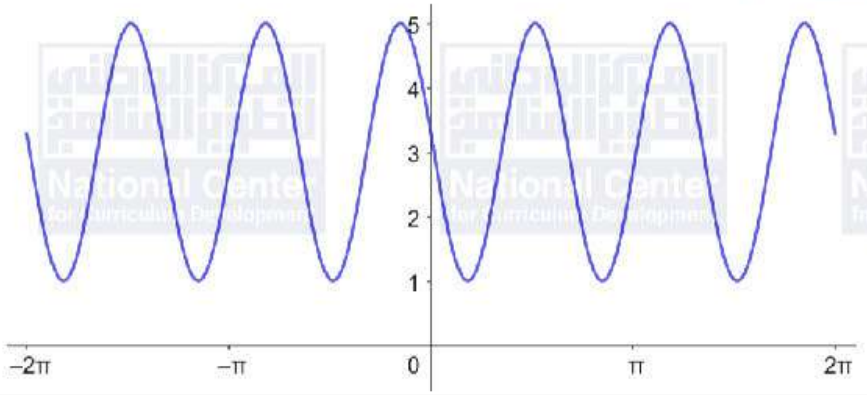
الدورة = 2π ، السعة = 3

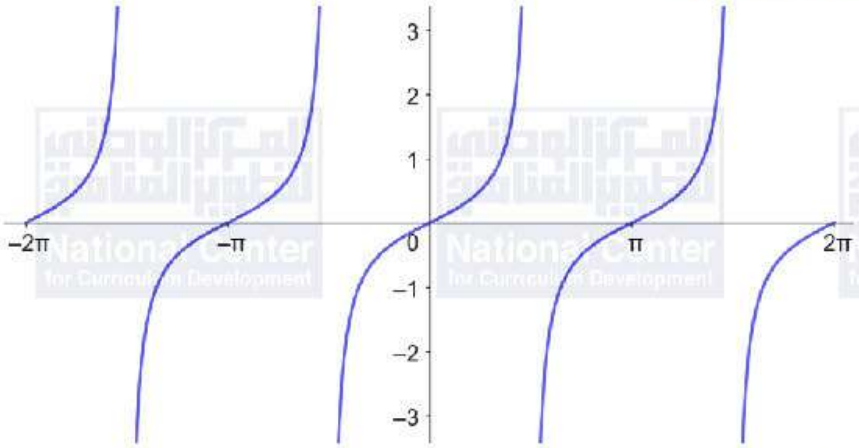
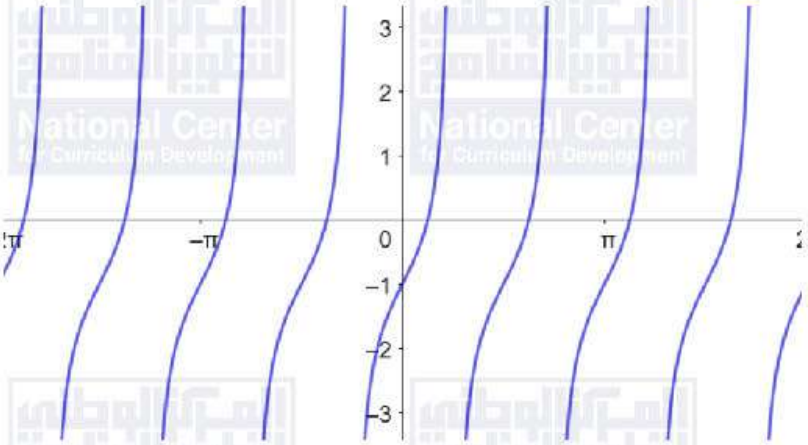


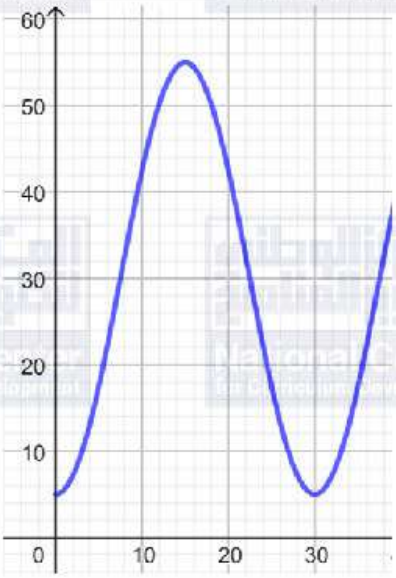
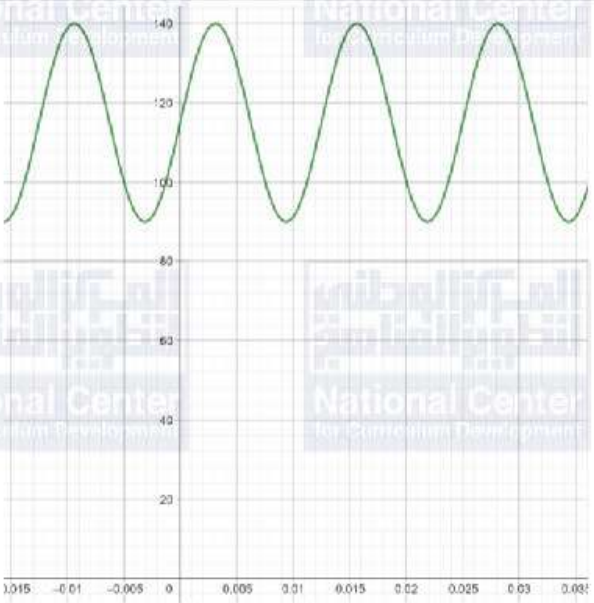
2

الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، السعة = 1



3	الدورة = 2π ، السعة = 2 
4	الدورة = 2π ، السعة = 1 
5	الدورة = 2 ، السعة = 0.5 
6	الدورة = π ، السعة = 1 
7	الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، السعة = 2 

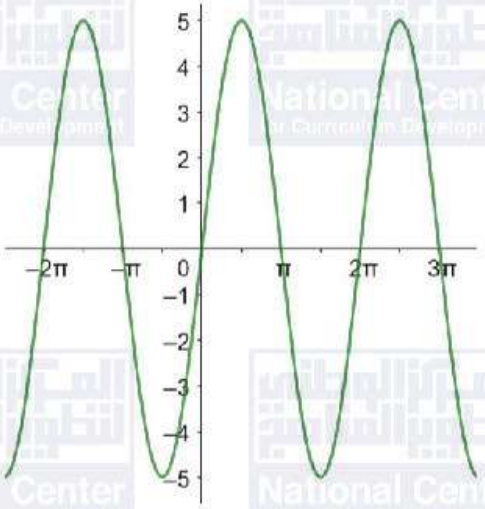
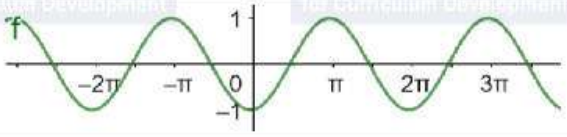
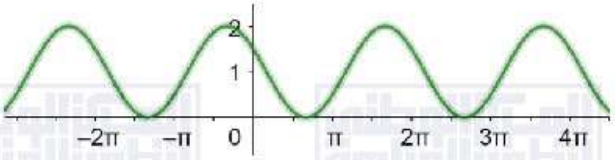
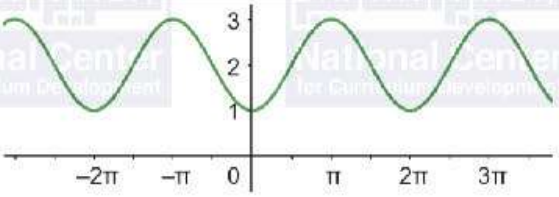
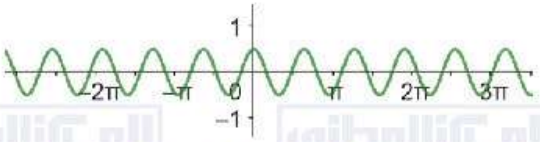
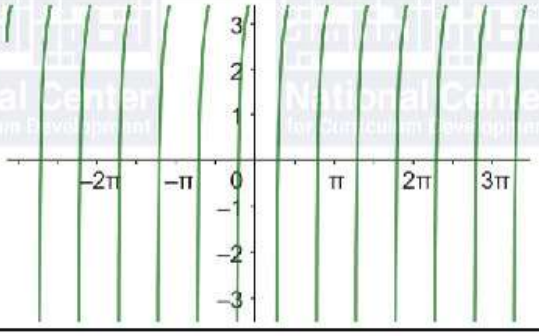
8	الدورة = π ، السعة غير معرفة 
9	الدورة = $\frac{\pi}{2}$ ، السعة غير معرفة 
10	f
11	b
12	e
13	a
14	c
15	d
16	إزاحة أفقية نحو اليمين مقدارها $\frac{\pi}{2}$ إزاحة رأسية للأعلى مقدارها 1
17	توسيع رأسي بمعامل مقداره 3 إزاحة رأسية للأسفل مقدارها 2

18	إزاحة أفقية نحو اليسار مقدارها 3π إزاحة رأسية للأسفل مقدارها 5
19	تضييق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{6}$ إزاحة أفقية نحو اليمين مقدارها π إزاحة رأسية للأعلى مقدارها 9
20	
21	أقصى ارتفاع 55 قدمًا، أدنى ارتفاع 5 أقدام.
22	السعة = 25، طول الدورة = $\frac{1}{80}$ ، التردد = 80
23	
24	يقل طول الدورة ويزيد التردد، لأنه مع ممارسة الرياضة فإن النبضات تصبح أسرع ويزداد ضغط الدم.

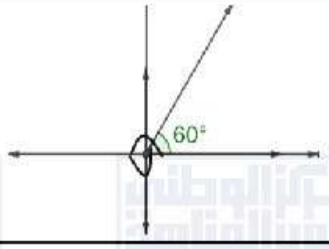
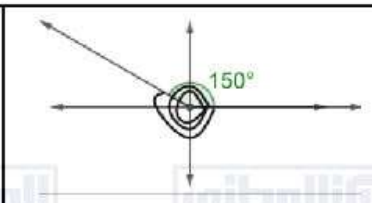
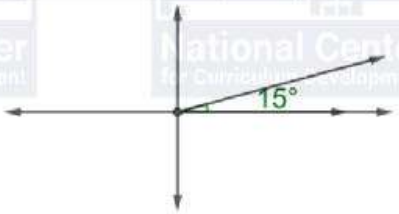
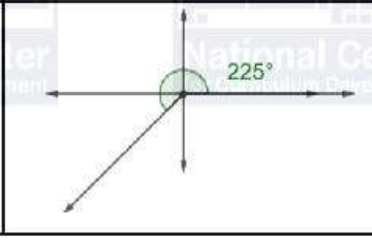
25	صحيحة، لأنه يمكن الحصول على منحنى اقتران الجيب بعمل إزاحة أفقية لمنحنى اقتران جيب التمام، والعكس صحيح.
26	غير صحيحة، لأن طول دورة الاقتران f يساوي $\frac{\pi}{4}$ بينما طول دورة الاقتران g يساوي π
27	$y = a\tan bx$ $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = 2 \rightarrow y = a\tan 2x$ $5 = a\tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) \rightarrow a = 5$ $y = 5\tan 2x$
28	$\cos(-2x + 6\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-2x + 6\pi)\right)$ $= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - 6\pi\right)$ $= \sin\left(2x - \frac{11\pi}{2}\right)$

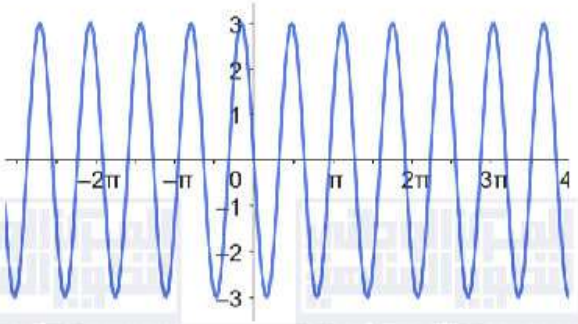
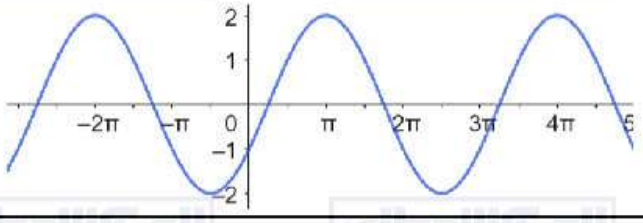
معمل برمجية جيوجبرا

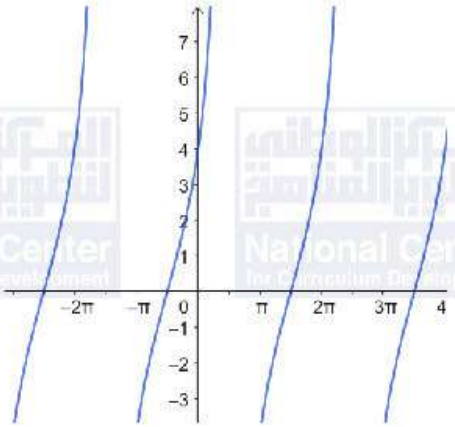
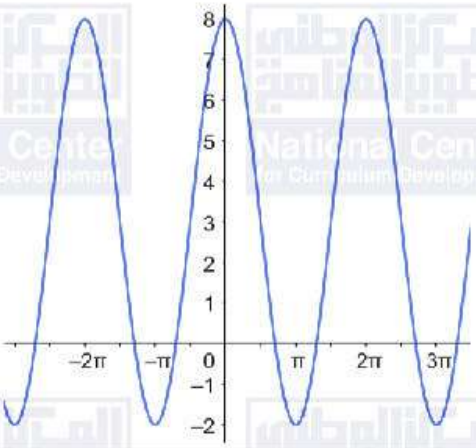
أتدرب صفحة 49

1	
2	
3	
4	
5	
6	

اختبار نهاية الوحدة السادسة

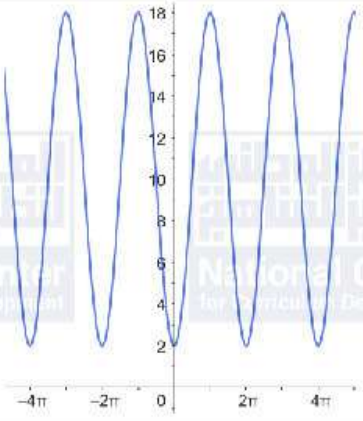
1	b				
2	$56° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{14\pi}{45}$	b			
3	$l = r\theta = 15 \times \frac{8\pi}{7} \approx 53.9\ cm$	c			
4	$y = 2\sin 2x$	c			
5	a		b		
	c		d		
6	a	$-720° \times \frac{\pi}{180°} = -4\pi$			
	b	$315° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{4}$			
	c	$\frac{13\pi}{8} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{585°}{2}$			
	d	$3.5\pi \times \frac{180°}{\pi} = 630°$			
7	a	$-115° + 360°(1) = 245°$ $-115° + 360°(-1) = -475°$			
	b	$780° + 360°(1) = 1140°$ $780° + 360°(-3) = -300°$			
	c	$-\frac{7\pi}{3} + 2\pi(1) = -\frac{\pi}{3}$ $-\frac{7\pi}{3} + 2\pi(2) = \frac{5\pi}{3}$			

	d $\frac{\pi}{9}+2\pi(1)=\frac{19\pi}{9}$ $\frac{\pi}{9}+2\pi(-1)=-\frac{17\pi}{9}$
8	$A=\frac{1}{2}r^2\theta \rightarrow 12=\frac{1}{2}r^2(0.7) \rightarrow r=\sqrt{\frac{240}{7}}\approx 5.86$
9	$A=\frac{1}{2}r^2\theta \rightarrow 12=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) \rightarrow r=\sqrt{\frac{144}{5\pi}}\approx 3.03$
10	$\sec 300^\circ=\sec 60^\circ=2$
11	$\tan 240^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$
12	$\cos\frac{14\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
13	$\sec -3\pi=\sec\pi=-1$
14	$\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$, $\sec\theta=\frac{5}{3}$, $\csc\theta=-\frac{5}{4}$, $\cot\theta=-\frac{3}{4}$
15	$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$, $\csc\theta=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
16	الدورة = 2 ، السعة = 3 
17	الدورة = 3π ، السعة = 2 

18	الدورة = 4π ، السعة غير معرفة 
19	الدورة = 2π ، السعة = 5 

20	b	21	c	22	a	23	d

24 $h = -8\cos\frac{\pi}{4} + 10 = -8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 10 \approx 4.34$

25 

26	$L = 11.5 + 6.5 \sin\frac{\pi}{5}(5) = 11.5$ $H = 27.5 + 17.5 \cos\frac{\pi}{5}(5) = 10$ $\frac{H}{L} = \frac{10}{11.5} \approx 87\%$
27	نلاحظ أن الوشق يعتمد في تغذيته على الأرانب، مما يؤدي إلى أن تقل أعداد الأرانب مع الزمن، وبالمقابل تزداد أعداد الوشق. ومع استمرار انخفاض أعداد الأرانب تبدأ أعداد الوشق بالانخفاض لعدم توفر غذاء كاف. ومع استمرار أعداد الوشق بالانخفاض تبدأ أعداد الأرانب بالتزايد من جديد.
28	a
29	a

الوحدة السادسة: المتطابقات والمعادلات المثلثية

الدرس الأول: المتطابقات المثلثية 1

أتحقق من فهمي صفحة 56

1 $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

أتحقق من فهمي صفحة 57

a

$$\sin x(\csc x - \sin x) = \sin x \csc x - sin^2 x$$
$$= \sin x\left(\frac{1}{\sin x}\right) - sin^2 x$$
$$= 1 - sin^2 x$$
$$= cos^2 x$$

b

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos x(1+\sin x) + \sin x(1+\sin x) + cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= \frac{\cos x(1+\sin x) + \sin x + sin^2 x + cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= \frac{\cos x(1+\sin x) + \sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= \frac{(\cos x + 1)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= 1 + \sec x$$

c

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sec x = \cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

أتحقق من فهمي صفحة 57

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{1-cos^2 x}$$
$$= \frac{1-\cos x}{sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}$$
$$= csc^2 x - \cot x \csc x$$

أتحقق من فهمي صفحة 60

a

$$\text{Cot}\, x \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \cos x$$
$$= \frac{cos^2 x}{\sin x}$$
$$= \frac{1-sin^2 x}{\sin x}$$
$$= \frac{1}{\sin x} - \sin x$$
$$= \csc x - \sin x$$

b

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$= \frac{1-cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$
$$= \frac{sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

c

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-cos^2 x}$$
$$= \frac{2}{1-cos^2 x}$$
$$= \frac{2}{sin^2 x}$$
$$= 2csc^2 x$$

أتحقق من فهمي صفحة 60

$$(\tan x + \cot x)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{sin^2x + cos^2x}{\cos x \sin x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos x \sin x}\right)^2 = \frac{1}{cos^2x sin^2x}$$

$$sec^2x + csc^2x = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x sin^2x}$$

$$= \frac{1}{cos^2x sin^2x}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.

أتحقق من فهمي صفحة 62

a

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°)$$

$$= cos45°cos30° - sin45°sin30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

b

$$\tan \frac{\pi}{12} = tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

c

$$\sin 80° \cos 20° - \cos 80° \sin 20° = \sin(80° - 20°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 63

a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

b

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

	أتدرب وأحل المسائل صفحة 63
1	$\cot\theta = \sqrt{8}$
2	$\sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$
3	$\tan\theta = \frac{3}{4}$
4	$\sin\theta = -\frac{\sqrt{65}}{9}$
5	$\cos x \tan x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x$
6	$\frac{\sec x - \cos x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
7	$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x} + cos^2 x = \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}} + cos^2 x = \sin^2 x + cos^2 x = 1$
8	$\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}$ $= \tan x + \cot x$
9	$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + cos^2 x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$ $= 2$
10	$\frac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1 - cos^2 x}{\sin x} = \frac{sin^2 x}{\sin x} = \sin x$

11	$\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x)=-\cot x\cos x-\sin x$ $=-\frac{\cos x}{\sin x}\times\cos x-\sin x$ $=\frac{-cos^2x-sin^2x}{\sin x}=\frac{-1}{\sin x}=-\csc x$
12	$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+cos^2x=1+2\sin x\cos x$
13	$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-cos^2x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}$ $=\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}\times\frac{(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)}=\frac{\sin^2 x-cos^2x}{(\sin x-\cos x)^2}$
14	$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$ $=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}=\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2=(\sec x-\tan x)^2$
15	$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x-\cos^2 x$
16	$\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1+\sin x-1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{2\sin x}{\cos^2 x}=2\tan x\sec x$
17	$\ln\lvert\tan x\rvert=\ln\left\lvert\frac{\sin x}{\cos x}\right\rvert=\ln\frac{\lvert\sin x\rvert}{\lvert\cos x\rvert}=\ln\lvert\sin x\rvert-\ln\lvert\cos x\rvert$
18	$\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+\ln\lvert\sec x-\tan x\rvert=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert\lvert\sec x-\tan x\rvert$ $=\ln\lvert(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)\rvert$ $=\ln\lvert\sec^2 x-\tan^2 x\rvert=\ln 1=0$
19	$\sin 165^\circ=\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
20	$\tan 195^\circ=\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

21	$sec\left(-\frac{\pi}{12}\right) = sec\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$ $= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}$ $= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$
22	$\sin\frac{17\pi}{12} = -\sin\frac{5\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
23	$\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18} = \sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}\right) = sin\frac{6\pi}{18} = sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
24	$\frac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1+\tan 40^\circ \tan 10^\circ} = \tan(40^\circ - 10^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
25	$\alpha^2+4=5 \rightarrow \alpha=-1$ لأن النقطة في الربع الثاني $\left(-\frac{1}{4}\right)^2+b^2=1 \rightarrow b=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ لأن النقطة في الربع الثالث $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos\alpha=-\frac{1}{4}, \sin\beta=2, \cos\beta=-1, \tan\alpha=\sqrt{15}, \tan\beta=-2$ $f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}-2}{4}$
26	$g(\alpha-\beta)=cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1-2\sqrt{15}}{4}$
27	$h(\alpha+\beta)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$

28

$$n=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{60^\circ}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+30^\circ\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}cos30^\circ+cos\frac{\theta}{2}sin30^\circ}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}cot\frac{\theta}{2}$$

29

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{cos(x+h)-cos(x)}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=\frac{\cos x\cos h-\cos x}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}$$

$$=-\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

30

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,b=\frac{1}{2}$$

31

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B=2\sin A\cos B$$

32

$$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)=\sin A+\cos A$$

33

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$$

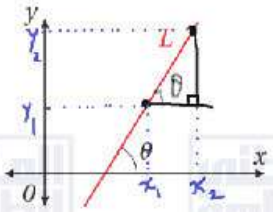
$$+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$$

$$\tan A-\tan B+\tan B-\tan C+\tan C-\tan A=0$$

34

$$\cos(x+y)\cos(x-y)$$
$$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y)$$
$$= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y$$
$$= \cos^2 x(1-\sin^2 y) - (1-cos^2 x)\sin^2 y$$
$$= \cos^2 x - \cos^2 x\sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x\sin^2 y$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 y$$

35



نفرض نقطتين على المستقيم إحداثياهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ كما هو موضح بالشكل،

ميل المستقيم يساوي: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

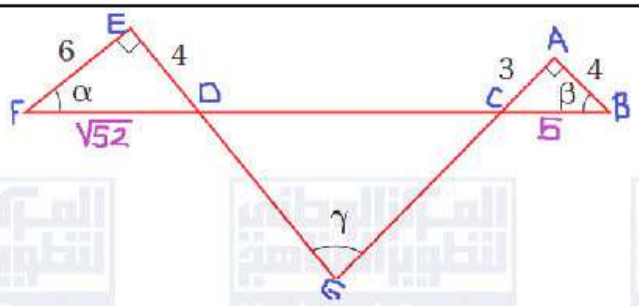
وظل الزاوية θ يساوي: $\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

إذن ميل المستقيم يساوي ظل زاوية الميل θ

36

$$\psi = \theta_2 - \theta_1$$
$$\tan\psi = \tan(\theta_2-\theta_1) = \frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1} = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

37



الزاوية ACB والزاوية DCG متقابلتان بالرأس، وكذلك الزاويتان EDF و CDG، إذن:

قياس الزاوية DCG يساوي $90° - \beta$ وقياس الزاوية CDG يساوي $90° - \alpha$

$$\gamma + 90° - \beta + 90° - \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad \gamma = \alpha + \beta$$

$$\tan\gamma = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{4}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{17}{6}$$

38

$$2\cot(\alpha-\beta) = \frac{2}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{2(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

$$= \frac{2\big(1 + (x+1)(x-1)\big)}{(x+1)-(x-1)}$$

$$= \frac{2(1+x^2-1)}{2}$$

$$= x^2$$

39

$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

40	الخطأ منذ بداية الحل، وذلك في تطبيق القانون. الحل الصحيح هو: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

الدرس الثاني: المتطابقات المثلثية 2

	أتحقق من فهمي صفحة 68
a	$\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$
b	$\cos 2\theta = -\frac{1}{9}$
c	$\tan 2\theta = 4\sqrt{5}$
	أتحقق من فهمي صفحة 68
	$\sin 3\theta = 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta$
	أتحقق من فهمي صفحة 69
	$sin^4x\ cos^2x = \frac{1}{16}(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x)$
	أتحقق من فهمي صفحة 70
	$\cos 112.5° = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 71
a	$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$
b	$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$
c	$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}}$
	أتحقق من فهمي صفحة 72

	$\sin 7x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 6x)$
أتحقق من فهمي صفحة 73	
	$\cos 3x + \cos 2x = 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$
أتحقق من فهمي صفحة 74	
a	$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \sin 2x$
b	$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y} = \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 74	
1	$\cos 2\theta = \frac{119}{169}$, $\sin 2\theta = \frac{120}{169}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$
2	$\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, $\sin 2\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$
3	$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$
4	$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$
5	$\cos 2\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$

6	$\cos 2\theta = -\frac{7}{9}$, $\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{8}}{9}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$
7	$\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$
8	$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x$
9	$\cos^4 x \ \sin^2 x = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$
10	$\cos 22.5° = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$
11	$\sin 195° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
12	$\tan\frac{7\pi}{8} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
13	$a = -1$, $b = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta = -2$ $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan\alpha = \sqrt{15}$ $g(2\theta) = \cos 2\theta = -\frac{3}{5}$
14	$g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$
15	$f(2\alpha) = \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$

16	$h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{5}{3}}$
17	$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$
18	$\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$
19	$3\cos 4x \cos 7x = \frac{3}{2}(\cos 11x + \cos 3x)$
20	$\sin x - \sin 4x = -2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$
21	$\cos 9x - \cos 2x = -2\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{7x}{2}$
22	$\sin 3x + \sin 4x = 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$
23	$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{2\times 10.8}{2\sin\theta\cos\theta}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{21.6}{\sin 2x}\times\sec x = \frac{21.6\sec x}{\sin 2x}$
24	$L = \frac{10.8}{\sin 30^\circ \cos^2 30^\circ} = 28.8\ cm$
25	$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos^2 5x - (1-\cos^2 5x) = 2\cos^2 5x - 1 = \cos 10x$
26	$\frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x) = \frac{1}{2}(2\sin^2 x\cos x + 2\cos^3 x)$ $= \frac{1}{2}\times 2\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x$
27	$\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1$ $= 2\cos^2 x + 2\cos x$ $= 2\cos x(\cos x + 1)$

28	$\sin 3x = sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$ $= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x$ $= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$ $= 2 \sin x (1 - 2\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$ $= 3 \sin x - 4\sin^3 x$
29	$\tan 3x = \tan(2x + x) = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$ $= \dfrac{\dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \tan x}$ $= \dfrac{2 \tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2 \tan^2 x}$ $= \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$
30	$\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 2 \left(2 \sin \dfrac{x}{4} \cos \dfrac{x}{4}\right) \cos \dfrac{x}{2} = 4 \sin \dfrac{x}{4} \cos \dfrac{x}{4} \cos \dfrac{x}{2}$
31	$\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = \dfrac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$
32	$\cos^2 2x = (\cos 2x)^2 = (2 \cos^2 x - 1)^2 = 4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1$
33	$\dfrac{2(\tan x \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \dfrac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)}$ $= \dfrac{2}{(\tan x + \cot x)} = \dfrac{2}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ $= \sin 2x$
34	$\tan^2 \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 - cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}{1 + cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

35	$\cot^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}}=\frac{\sec x+1}{\sec x-1}$
36	$\frac{1}{2}(ln\lvert1-\cos 2x\rvert-ln2)=\frac{1}{2}ln\frac{\lvert1-\cos 2x\rvert}{2}$ $=\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{1-\cos 2x}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}ln\lvert\sin^2 x\rvert=\frac{1}{2}ln\lvert\sin x\rvert$
37	$\sin\theta=\frac{x}{1}=x\ \ ,\cos\theta=\frac{y}{1}=y$ $A=2xy=2\sin\theta\cos\theta$
38	$A=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$
39	$\cos 4x=1-2\sin^2 2x=1-2(2\sin x\cos x)^2=1-8\sin^2 x\cos^2 x$
40	$\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+cos2x)^2$ $=\frac{1}{4}(1+2cos2x+\cos^2 x)$ $=\frac{1}{4}\left(1+2cos2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(1+2cos2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$ $=\frac{1}{8}(3+4cos2x+\cos 4x)$

الدرس الثالث: حل المعادلات المثلثية

أتحقق من فهمي صفحة 79	
a	$x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ ، $x=\frac{7\pi}{3}+2k\pi$ ، k عدد صحيح
b	$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، $x=\frac{7\pi}{3}+2k\pi$ ، k عدد صحيح
أتحقق من فهمي صفحة 80	
a	$x=0.23+2k\pi$ ، $x=2.91+2k\pi$ ، k عدد صحيح
b	$x=1.67+k\pi$ ، $x=4.81+k\pi$ ، k عدد صحيح
أتحقق من فهمي صفحة 82	
a	$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ، k عدد صحيح
b	$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ k عدد صحيح
أتحقق من فهمي صفحة 83	
a	$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ ، $x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ ، $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ k عدد صحيح
b	$x=2k\pi$ ، $x=\pi+2k\pi$ ، k عدد صحيح
أتحقق من فهمي صفحة 85	
a	$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ، $x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ ، k عدد صحيح
b	$x=2k\pi$ ، $x=\pi+2k\pi$ ، k عدد صحيح
أتحقق من فهمي صفحة 86	

	$x = 0 \ , \ x = \pi \ , \quad x = \frac{\pi}{2} \ , \quad x = \frac{3\pi}{2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 87
	$x = \frac{\pi}{6} \ , \quad x = \frac{5\pi}{6} \ , \quad x = \frac{7\pi}{6}$
	أتحقق من فهمي صفحة 88
	$x = \frac{2\pi}{3} \ , \quad x = \frac{10\pi}{3}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 88
1	$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ ,$ عدد صحيح k
2	$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ ,$ عدد صحيح k
3	$x = 3.45 + 2k\pi \ , \ x = 5.98 + 2k\pi \ ,$ عدد صحيح k
4	$x = 1.25 + 2k\pi \ , \ x = 5.04 + 2k\pi \ ,$ عدد صحيح k
5	$x = 1.73 + k\pi \ , \ x = 4.51 + k\pi \ ,$ عدد صحيح k
6	$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$ عدد صحيح k
7	$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ , \ x = \frac{7\pi}{4} + k\pi \ ,$ عدد صحيح k
8	$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ عدد صحيح k

9	$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, k عدد صحيح
10	$x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$
11	$x = 0.34$, $x = 2.8$
12	$x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
13	$x = 1.25$, $x = 1.89$, $x = 4.39$, $x = 5.03$ $x = 1.1$, $x = 2.03$, $x = 4.25$, $x = 5.18$
14	$x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
15	$x = 0$, $x = \pi$
16	$x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$
17	$x = \pi$, $x = 1.23$, $x = 5.05$
18	$x = 0.46$, $x = 3.61$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$
19	$x = 0.62$, $x = 3.77$
20	$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
21	$\theta = 0°$
22	$\theta = 60°$, $\theta = 300°$
23	$\theta = 180°$
24	$t = k$, $t = \frac{1}{2} + k$, k عدد صحيح

25	$x = 0\ ,\quad x = \pi\ ,\quad x = \frac{7\pi}{6}\ ,\quad x = \frac{11\pi}{6}$
26	$x = 0\ ,\quad x = \frac{\pi}{2}\ ,\quad x = \frac{3\pi}{2}\ ,\quad x = \frac{5\pi}{2}\ ,\quad x = \frac{7\pi}{2}$
27	$x = \frac{\pi}{6}\ ,\quad x = \frac{5\pi}{6}\ ,\quad x = \frac{7\pi}{6}\ ,\quad x = \frac{11\pi}{6}$
28	$x = \frac{2\pi}{3}\ ,\quad x = \frac{10\pi}{3}$
29	$x = \frac{\pi}{3}\ ,\quad x = \frac{4\pi}{3}$
30	$x = 0\ ,\quad x = \frac{2\pi}{3}\ ,\quad x = \frac{4\pi}{3}$
31	$\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$ $\tan^2 x + k = 2\tan x$ $\tan^2 x - 2\tan x + k = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4k$ $\Delta < 0 \ \rightarrow\ 4 - 4k < 0 \ \rightarrow\ k > 1$ إذا كان $k > 1$ فإن المميز يكون سالبًا، والمعادلة لا حل لها.
32	$\tan^2 x - 2\tan x - 8 = 0$ $(\tan x - 4)(\tan x + 2) = 0$ $\tan x = 4 \ \ or \ \ \tan x = -2$ $x = 1.33\ ,\quad x = -1.82\ ,\quad x = -1.11\ ,\quad x = 2.03$

33

$\sin(\cos x) = 0$

$\cos x = 0 \quad or \quad \cos x = \pi$

$\cos x = 0 \quad \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ ,$ k عدد صحيح

لا يوجد حل للمعادلة $\cos x = \pi$ لأن القيمة العظمى لـ $\cos x$ هي 1

34

$\tan x + \cot x = 5$

$\tan x + \frac{1}{\tan x} - 5 = 0$

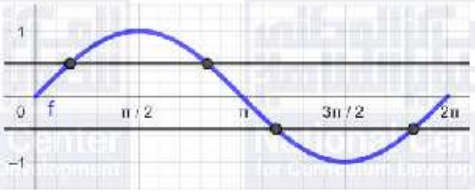
$\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$

$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$x = 1.37 \ , \quad x = 4.51 \ , \quad x = 0.21 \ , \quad x = 3.35$

35

$|\sin x| < \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$



$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

اختبار نهاية الوحدة السادسة

1	b
2	b
3	d
4	a
5	d
6	b
7	$3cos37.5° \sin 37.5° = \frac{3}{2}\sin 75° = \frac{3\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}}$
8	$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} = 2cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
9	$\cos 255° - \cos 195° = -2\sin 225° \sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
10	$A = (20\cos x)(20\sin x) = 200(2\cos x \sin x) = 200\sin 2x$
11	$\frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{2\cos x \sin y}{2\cos x \cos y} = \tan y$

12	$4(\sin^6 x+\cos^6 x)=4(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$ $=4(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$ $=4((\sin^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x+(\cos^2 x)^2)$ $=4\left(\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\right)$ $=4\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2x\right)$ $=4\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(1-\sin^2 2x)\right)$ $=4-3\sin^2 2x$
13	$\frac{1}{2}(\ln\lvert 1+\cos 2x\rvert-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{\lvert 1+\cos 2x\rvert}{2}$ $=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+\cos 2x}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}\ln\lvert\cos^2 x\rvert=\ln\lvert\cos x\rvert$
14	$\sec 2x=\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1}{2\cos^2 x-1}=\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x}$
15	$\csc x-\cot x=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ $=tan\frac{x}{2}$
16	$\cos x=\frac{4}{5}\ \rightarrow\ \sin x=\frac{3}{5}$ $cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

17	$\frac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{\frac{1}{\cos x}} = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
18	$(\sin x + \cos x)^4 = ((\sin x + \cos x)^2)^2$ $= (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)^2 = (1 + \sin 2x)^2$
19	$\frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\tan y} - 1}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = cot(x + y)$
20	$\frac{\sin x \sec x}{\tan x} = \frac{\sin x \times \frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x}{\sin x} = 1$
21	$\ln\lvert\sec x\rvert = \ln\left\lvert\frac{1}{\cos x}\right\rvert = \ln\frac{1}{\lvert\cos x\rvert} = \ln 1 - \ln\lvert\cos x\rvert = -\ln\lvert\cos x\rvert$
22	$\tan(-15°) = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = -2 + \sqrt{3}$
23	$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
24	$\frac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°} = \tan(20° + 25°) = \tan 45° = 1$
25	$\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12} = cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\pi = -1$
26	$x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$
27	$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$
28	$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$

29	$\sqrt{\frac{1-\cos 8x}{2}} = \sin 4x$
30	$x = 0.84$, $x = 2.29$
31	$x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
32	$x = 0$, $x = \pi$
33	$x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$
34	$x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$
35	$x = 0.42$
36	$x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$
37	d
38	b
39	b
40	d

الوحدة السابعة: التكامل

الدرس الأول: التكامل غير المحدود

أتحقق من فهمي صفحة 95	
a	$F(x) = x^{10} + C$
b	$F(x) = x^{-11} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 97	
a	$\int 9\,dx = 9x + C$
b	$\int x^{-4}dx - \frac{1}{3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$
c	$\int \sqrt[6]{x}\,dx = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 98	
a	$\int (2x^4 + 3x^3 - 7x^2)dx = \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + C$
b	$\int \left(5x^{\frac{3}{2}} + 3x^2\right)dx == 2x^{\frac{5}{2}} + x^3 + C = 2\sqrt{x^5} + x^3 + C$
أتحقق من فهمي صفحة 99	
a	$\int \frac{2x^2+4}{x^2}dx = \int (2 + 4x^{-2})dx = 2x - 4x^{-1} + C = 2x - \frac{4}{x} + C$
b	$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} + C$
c	$\int (2x+3)(x-1)dx = \int (2x^2 + 2x - 3)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$
أتحقق من فهمي صفحة 100	
a	$\int (3x-4)^6 dx = \frac{1}{21}(3x-4)^7 + C$
b	$\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$
أتحقق من فهمي صفحة 101	
	$f(x) = \int (4x-2)dx = 2x^2 - 2x + C$ $f(0) = 3 \Rightarrow 0 - 0 + C = 3 \Rightarrow C = 3$ $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$
أتحقق من فهمي صفحة 103	

a	$v(t) = \int (4t-4)dt = 2t^2 - 4t + C$ $v(t) = 5 \Rightarrow 0 - 0 + C = 5 \Rightarrow C = 5$ $v(t) = 2t^2 - 4t + 5\ m/s$
b	$s(t) = \int (2t^2 - 4t + 5)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C$ $s(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t\ m$
c	$v(1) = 3\ m/s$ $a(1) = 0\ m/s^2$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 104	
1	$F(x) = x^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{x^3} + C$
2	$F(x) = x^{-1} + C = \frac{1}{x} + C$
3	$F(x) = -5x + C$
4	$F(x) = x^6 + C$
5	$\int 6x dx = 3x^2 + C$
6	$\int (4x + 2)dx = 2x^2 + 2x + C$
7	$\int 2x^4 dx = \frac{2}{5}x^5 + C$
8	$\int \frac{5}{x^3} dx = \int 5x^{-3}\, dx = -\frac{5}{2}x^{-2} + C = -\frac{5}{2x^2} + C$
9	$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
10	$\int 2x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$
11	$\int \frac{10}{\sqrt{x}} dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}} dx = 20\sqrt{x} + C$
12	$\int (6x^2 - 4x)dx = 2x^3 - 2x^2 + C$
13	$\int (2x^4 - 5x + 10)dx = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$
14	$\int x^2(x - 8)dx = \int (x^3 - 8x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + C$

15	$\int \left(x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx = \int \left(x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$
16	$\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} dx = \int (4 - 2x^{-3}) dx = 4x + x^{-2} + C = 4x + \frac{1}{x^2} + C$
17	$\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}} dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 16\sqrt{x} + C$
18	$\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx = \int (x + 1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$
19	$\int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^2 dx = \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4} dx = \int (1 + 2x^{-2} + x^{-4}) dx$ $= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C$ $= x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$
20	$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
21	$\int \left(\frac{x^2 + 2x}{x}\right)^3 dx = \int (x + 2)^3 dx = \frac{1}{4}(x + 2)^4 + C$ الطريقة الثانية للحل: $\int \left(\frac{x^2 + 2x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3}{x^3} dx$ $= \int (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$
22	$\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

23	$\int (x-1)(x-3)(x+1)dx = \int (x^3-3x^2-x+3)dx$ $= \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$
24	$\int (x+7)^4 dx = \frac{1}{5}(x+7)^5 + C$
25	$\int \frac{3}{(10x+1)^2}dx = \int 3(10x+1)^{-2}dx = -\frac{3}{10}(10x+1)^{-1} + C$ $= -\frac{3}{10(10x+1)} + C$
26	$\int 3\sqrt{4x-2}dx = \int 3(4x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{3}{2}} + C$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(4x-2)^3} + C$
27	$\int \frac{1}{\sqrt{10x+5}}dx = \int (10x+5)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{5}(10x+5)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{1}{5}\sqrt{10x+5} + C$
28	$\int y^2\,dx = \int \left(\sqrt[3]{2x+5}\right)^2 dx = \int (2x+5)^{\frac{2}{3}}dx$ $= \frac{3}{10}(2x+5)^{\frac{5}{3}} + C$
29	$\int y\,dx = \int \sqrt[3]{2x+5}\,dx = \int (2x+5)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{8}(2x+5)^{\frac{4}{3}} + C$ $= \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{2x+5}\right)^4 + C$ $= \frac{3}{8}y^4 + C$
30	$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 7$
31	$y = -\frac{2}{x} + 5$
32	$f(x) = x - \frac{10}{x} - 1$

33	$y(0) = 100$ $v(t) = 0.03t^2(t-10)^2$ $= 0.03t^2(t^2 - 20t + 100)$ $= 0.03t^4 - 0.6t^3 + 3t^2$ $y(t) = \int v(t)dt$ $= 0.006t^5 - 0.15t^4 + t^3 + C$ $y(0) = 100 \rightarrow C = 100$ $y(t) = 0.006t^5 - 0.15t^4 + t^3 + 100$
34	$y(10) = 0.006(10)^5 - 0.15(10)^4 + (10)^3 + 100$ $= 200\ m$
35	$s(0) = 4\ ,\quad v(1) = 1$ $v(t) = \int a(t)dt = \int 6t\ dt = 3t^2 + C_1$ $v(1) = 1 \rightarrow C_1 = -2$ $v(t) = 3t^2 - 2$ $s(t) = \int v(t)dt = t^3 - 2t + C_2$ $s(0) = 4 \rightarrow C_2 = 4$ $s(t) = t^3 - 2t + 4$ $s(2) = 8 - 4 + 4 = 8\ m$
36	$y(t) = \int \frac{dy}{dt}dt = \int 4t^{-\frac{2}{3}}dt = 12t^{\frac{1}{3}} + C$ $y(8) = 30 \rightarrow C = 6$ $y(t) = 12t^{\frac{1}{3}} + 6 = 12\sqrt[3]{t} + 6\ \ cm$
37	$y(20) = 12\sqrt[3]{20} + 6 \approx 38.6\ cm$

38	$f'(x) = ax^2 + bx$ $f'(2) = -0.8 \rightarrow 4a + 2b = -0.8$ $f'(5) = 2.5 \rightarrow 25a + 5b = 2.5$ $a = 0.3 \ , \quad b = -1$ $f'(x) = 0.3\,x^2 - x$
39	$f(x) = \int f'(x)dx = 0.1\ x^3 - 0.5x^2 + C$ $f(2) = 4 \rightarrow 0.8 - 2 + C = 4 \rightarrow C = 5.2$ $f(x) = 0.1\,x^3 - 0.5x^2 + 5.2$
40	$\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \int (x - x^{-2})dx = \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C \quad (b)$
41	الخطأ هو أن تكامل ضرب اقترانين لا يساوي ضرب تكامليهما. الحل الصحيح هو: $\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x^2 - x - 1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$
42	نعلم أن: $(x+2)^6 = (x+2)^5(x+2)$ $= (x+2)^5 x + 2(x+2)^5$ ومنه فإن: $x(x+2)^5 = (x+2)^6 - 2(x+2)^5$ إذن: $\int x(x+2)^5 dx = \int ((x+2)^6 - 2(x+2)^5)\,dx$ $= \int (x+2)^6 dx - \int 2(x+2)^5 dx$ $= \frac{1}{7}(x+2)^7 - \frac{1}{3}(x+2)^6 + C$

43	$\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$ $x=A(x+1)^2+B(x+1)+C$ $x=-1 \rightarrow C=-1$ $x=0 \rightarrow A+B-1=0$ $x=-2 \rightarrow A-B-1=-2$ $A=0\ ,\quad B=1$ $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{0}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-1}{(x+1)^3}$ $\int \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int \frac{1}{(x+1)^2}dx+\int \frac{-1}{(x+1)^3}dx$ $=\int (x+1)^{-2}dx+\int -(x+1)^{-3}dx$ $=-(x+1)^{-1}+\frac{1}{2}(x+1)^{-2}+C$ $=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$
44	$f'(x)=4-\frac{100}{x^2}\ ,\quad f'(a)=0\ ,\quad f(a)=10\ ,a>0$ $f'(a)=0 \rightarrow 4-\frac{100}{a^2}=0 \rightarrow a=5$ $f(x)=\int 4-\frac{100}{x^2}dx$ $=4x+\frac{100}{x}+C$ $f(5)=10 \rightarrow 20+\frac{100}{5}+C=10 \rightarrow C=-30$ $f(x)=4x+\frac{100}{x}-30$

45	$f'(x) = ax + b \rightarrow f(x) = \int (ax + b)dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + C$ $f(0) = 18 \rightarrow \frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18 \rightarrow C = 18$ $f(-2) = 8 \rightarrow 2a - 2b + 18 = 8$ $f'(-2) = 7 \rightarrow -2a + b = 7$ $b = 3\ , a = -2$ $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

الدرس الثاني: التكامل المحدود

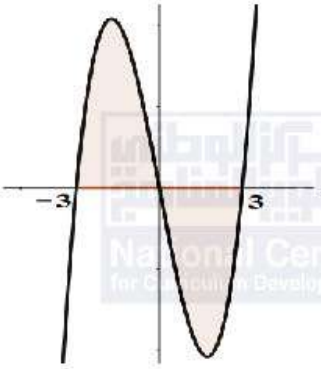
أتحقق من فهمي صفحة 108	
a	$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big\|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$
b	$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = x^3 - 2x^2 + x\Big\|_{-2}^{3}$ $= (27 - 18 + 3) - (-8 - 8 - 2) = 30$
أتحقق من فهمي صفحة 110	
a	$\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx$ $= 5 + 3(7) = 26$
b	$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$ $= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{4} f(x)dx$ $= 5 - 2 = 3$
أتحقق من فهمي صفحة 113	
a	$A = \int_{1}^{4} 2\sqrt{x}dx = \int_{1}^{4} 2x^{\frac{1}{2}}dx$ $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_{1}^{4}$ $= \frac{4}{3}\sqrt{4^3} - \frac{4}{3}\sqrt{1^3} = \frac{28}{3}$ إذن المساحة هي $\frac{28}{3}$ وحدة مربعة.
b	$-7 + 2x - x^2 \neq 0$ (لأن مميزها سالب) $A = -\int_{-2}^{1} (-7 + 2x - x^2)dx = \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 7)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x\right)\Big\|_{-2}^{1}$ $= \left(\frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 + 7(-2)\right) = 27$ إذن المساحة هي 27 وحدة مربعة
أتحقق من فهمي صفحة 114	

$$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx$$
$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2)\right)\right) = \frac{32}{3}$$

إذن المساحة هي $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 116

$$f(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$$



$$b)\ A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x) - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3}$$
$$= \left((0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) - (0)\right)$$
$$= \frac{81}{2}$$

إذن المساحة هي $\frac{81}{2}$ وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي صفحة 118

$$V = \int_{-1}^{1} \pi y^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \pi(x^2 - 1)^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \pi(x^4 - 2x^2 + 1)dx$$
$$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \pi\left(\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{16}{15}\pi$$

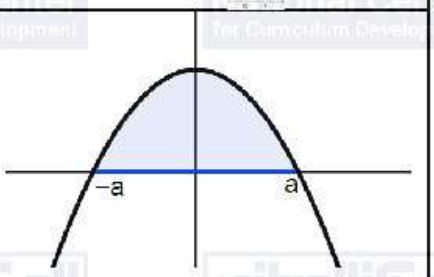
إذن حجم المجسم الناتج من الدوران هو $\frac{16}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 118

1	$\int_{-1}^{3} 3x^2 dx = x^3\Big\|_{-1}^{3} = (27) - (-1) = 28$
2	$\int_{1}^{5} 10x^{-2} dx = \frac{-10}{x}\Big\|_{1}^{5} = \left(\frac{-10}{5}\right) - (-10) = 8$
3	$\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3) dx = (x^3 + 2x^2 + 3x)\Big\|_{0}^{2}$ $= (8 + 8 + 6) - (0) = 22$
4	$\int_{2}^{5} 3x(x+2) dx = \int_{2}^{5} (3x^2 + 6x) dx = (x^3 + 3x^2)\Big\|_{2}^{5}$ $= (200) - (20) = 180$
5	$\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x} dx = \int_{1}^{8} 8x^{\frac{1}{3}} dx = 6x^{\frac{4}{3}}\Big\|_{1}^{8} = (96) - (6) = 90$
6	$\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_{1}^{9} \left(x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$ $= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}}\right)\Big\|_{1}^{9}$ $= (18 - 24) - \left(\frac{2}{3} - 8\right) = \frac{4}{3}$
7	$\int_{1}^{2} (2x-4)^4 dx = \frac{1}{10}(2x-4)^5\Big\|_{1}^{2}$ $= (0) - \left(-\frac{32}{10}\right) = 3.2$
8	$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{6x+1}} dx = \int_{0}^{4} (6x+1)^{-\frac{1}{2}} dx$ $= \frac{1}{3}(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{0}^{4}$ $= \left(\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$
9	$\int_{1}^{3} (x-2)(x+2) dx = \int_{1}^{3} (x^2 - 4) dx$ $= \frac{1}{3}x^3 - 4x\Big\|_{1}^{3}$ $= (-3) - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{2}{3}$

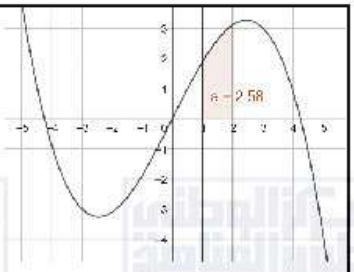
10	$\int_2^2 g(x)dx = 0$
11	$\int_5^1 g(x)dx = -\int_1^5 g(x)dx = -8$
12	$\int_1^2 (3f(x) - 2x + 3)dx = 3\int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 (3 - 2x)dx$ $= 3(-4) + (3x - x^2)\Big\|_1^2$ $= -12 + (2) - (2) = -12$
13	$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$ $= -\int_1^2 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = --4 + 6 = 10$
14	$\int_1^5 (f(x) - g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^5 g(x)dx$ $= 6 - 8 = -2$
15	$\int_1^5 (4f(x) + g(x))dx = 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$ $= 4(6) + 8 = 32$
16	$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$
17	$\int_0^1 x^n(1 - x)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$ $= \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$ $= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$ $= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

18	$\int_0^1 x^n(1-x^2)dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+2})dx$ $= \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+3}x^{n+3}\Big\|_0^1$ $= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) - (0)$ $= \frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)}$ $= \frac{2}{(n+1)(n+3)}$
19	$A = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_0^2$ $= -\left(\left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0)\right) = \frac{4}{3}$ إذن مساحة المنطقة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
20	$A = \int_2^3 f(x)dx =$ $= \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_2^3$ $= \left((9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right) = \frac{4}{3}$ إذن مساحة المنطقة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة
21	$A = \int_{-1}^0 f(x)dx$ $= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)dx$ $= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big\|_{-1}^0$ $= (0) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$ إذن مساحة المنطقة هي $\frac{4}{3}$ وحدة مربعة

22	$A = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)dx = x^3 - x^2 + 2x\Big|_0^2 = 8$ إذن مساحة المنطقة هي 8 وحدات مربعة
23	$A = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx$ $= a^2x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-a}^{a}$ $= \left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) - \left(-a^3 + \frac{1}{3}a^3\right)$ $= \frac{4}{3}a^3$  إذن مساحة المنطقة هي $\frac{4}{3}a^3$ وحدة مربعة
24	الجذر الرابع ناتجهُ لا يكون عددًا سالبًا أبدا، فمنحنى هذا الاقتران لا يقع تحت محور x $y = (2x + 16)^{\frac{3}{4}} \rightarrow (2x + 16)^{\frac{3}{4}} = 0 \rightarrow x = -8$ $A = \int_{-8}^{0} (2x + 16)^{\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{7}(2x + 16)^{\frac{7}{4}}\Big|_{-8}^{0}$ $= \left(\frac{256}{7}\right) - (0) = \frac{256}{7}$ إذن مساحة المنطقة هي $\frac{256}{7}$ وحدة مربعة
25	$y = kx(4 - x) \rightarrow kx(4 - x) = 0 \rightarrow x = 0 \ or \ x = 4$ $A = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx = 2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\Big|_0^4 = \frac{32}{3}k$ $\frac{32}{3}k = 32 \rightarrow k = 3$
26	$V = \int_2^5 \pi y^2 dx = \int_2^5 \pi(0.3x)^2 dx = \int_2^5 0.09\pi x^2 dx$ $= 0.03\pi x^3\Big|_2^5 = 3.75\pi - 0.24\pi = 3.51\pi$ إذن الحجم هو 3.51π وحدة مكعبة

27	$V = \int_{-1}^{1} \pi y^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi(x^2+3)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi(x^4+6x^2+9)dx$ $= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x\right)\Big\|_{-1}^{1} = \left(\frac{56}{5}\pi\right) - \left(-\frac{56}{5}\pi\right) = \frac{112}{5}\pi$ إذن الحجم هو $\frac{112}{5}\pi$ وحدة مكعبة
28	$V = \int_{-15}^{15} \pi y^2 dx = \int_{-15}^{15} \pi\left(100 - \frac{4}{9}x^2\right)dx = 100\pi x - \frac{4}{27}\pi x^3\Big\|_{-15}^{15}$ $= (1000\pi) - (-1000\pi) = 2000\pi$ إذن الحجم هو 6283.185 وحدة مكعبة تقريبا
29	$A(R_1) = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$ (لأن المنحنى تحت المحور x) $A(R_2) = 3 \Rightarrow \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$ (لأن المنحنى تحت المحور x) $\int_{0}^{4} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$ $\Rightarrow 10 = \int_{0}^{3} f(x)dx - 3 \Rightarrow \int_{0}^{3} f(x)dx = 13$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = -2 + 13 = 9$
30	$x\sqrt{9-x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, x = \pm 3$ $V = \int_{0}^{3} \pi y^2 dx$ $= \int_{0}^{3} \pi x(9-x^2)dx = \int_{0}^{3} \pi(9x - x^3)dx = \pi\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big\|_{0}^{3}$ $= \pi\left(\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) - (0)\right) = \frac{81}{4}\pi$ إذن الحجم هو $\frac{81}{4}\pi$ وحدة مكعبة.

31



$m = \dfrac{3}{x^2 - 6}$ ميل العمودي

$\rightarrow f'(x) = \dfrac{6 - x^2}{3}$ ميل المماس

$f(x) = \int \left(2 - \dfrac{1}{3}x^2\right) dx = 2x - \dfrac{1}{9}x^3 + C$

$f(0) = 0 \rightarrow f(x) = 2x - \dfrac{1}{9}x^3$

$f(x) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{1}{9}x^3 = 0$

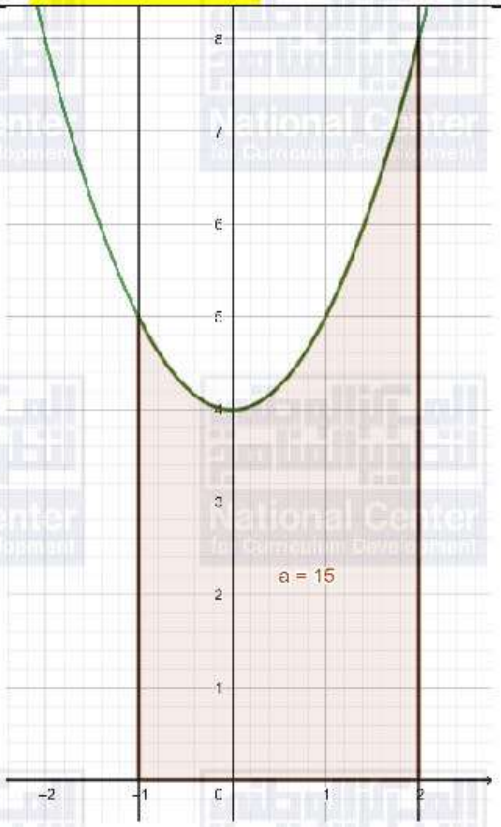
$\rightarrow x\left(2 - \dfrac{1}{9}x^2\right) = 0 \rightarrow x = 0 \ or \ x = \pm 3\sqrt{2}$

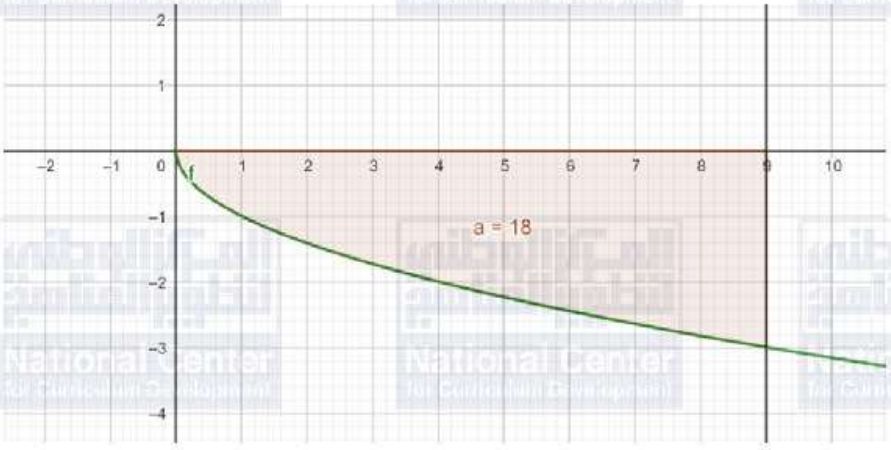
$A = \int_1^2 \left(2x - \dfrac{1}{9}x^3\right) dx = x^2 - \dfrac{1}{36}x^4 \Big|_1^2 = \dfrac{31}{12}$

إذن مساحة المنطقة هي $\frac{31}{12}$ وحدة مربعة

معمل برمجية جيوجبرا

أتدرب صفحة 121





اختبار نهاية الوحدة صفحة 122

1	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big\|_1^4 = (4) - (2) = 2$	d
2	$\int x\sqrt{3x}dx = \int \sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2\sqrt{3}}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$	a
3	$f(x) = 4x - x^2$ $4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4-x) = 0 \rightarrow x = 0 \ \ or \ \ x = 4$ $A = \int_0^4 (4x - x^2)dx$	b
4	$\int_2^4 10x^3 dx = \frac{5}{2}x^4\Big\|_2^4 = \frac{5}{2}(256) - \frac{5}{2}(16) = 600$	
5	$\int_1^4 2\sqrt{x}dx = \int_1^4 2x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_1^4 = \left(\frac{32}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3}$	
6	$\int_9^{16} \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_9^{16} 20x^{-\frac{1}{2}}dx = 40x^{\frac{1}{2}}\Big\|_9^{16} = 40(4) - 40(3) = 40$	
7	$\int_3^4 (6x^2 - 4x)dx = 2x^3 - 2x^2\Big\|_3^4 = (96) - (36) = 60$	
8	$\int_0^1 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\Big\|_0^1 = \left(-\frac{1}{4}\right) - (0) = -\frac{1}{4}$	
9	$\int_{-3}^{-1} \frac{x+1}{x^3}dx = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int_{-3}^{-1} (x^{-2} + x^{-3})dx$ $= -x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}\Big\|_{-3}^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{18}\right) = \frac{2}{9}$	
10	$V = \int_0^4 \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi x dx = \frac{\pi}{2}x^2\Big\|_0^4 = 8\pi$	
11	$\int (8x - 10x^2)dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$	
12	$\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x} + C$	

13	$\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \left(4x^{-2}+2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = -4x^{-1}-4x^{-\frac{1}{2}}+C$ $= -\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+C$
14	$\int \frac{4-x^2}{2+x}dx = \int \frac{(2-x)(2+x)}{2+x}dx = \int (2-x)dx = 2x-\frac{1}{2}x^2+C$
15	$\int (2x-3)^5 dx = \frac{1}{12}(2x-3)^6+C$
16	$\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$
17	$\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}+C$
18	$\int (x^3-2x^2)\left(\frac{1}{x-2}\right)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3+C$
19	$\int \left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\sqrt{2}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}x+C$ $= \frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{2}x+C$
20	$(a)(a^2) = a^3$= مساحة المستطيل = الطول × العرض $A = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big\|_0^a = \frac{1}{3}a^3$ $A = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}(a^3) = \frac{1}{3}\times$ (مساحة المستطيل)
21	$f''(x) = (ax+b)^3 \rightarrow f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{1}{4a}(ax+b)^4+C$ $f(x) = \int f'(x)dx = \frac{1}{20a^2}(ax+b)^5+Cx+K$
22	$v(t) = 8+4t$ $s(t) = \int (8+4t)dt = 8t+2t^2+C$ $s(0) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow s(t) = 8t+2t^2$

23	$s(2) = 8(2) + 2(2)^2 = 24\ m$
24	$A = \int_{-2}^{2} (2 + 0.1x^4)dx = 2x + \frac{0.1}{5}x^5\Big\|_{-2}^{2} = 9.28$ إذن مساحة المنطقة هي 9.28 وحدة مربعة
25	$f'(x) = 2x + 6$ $f(x) = \int (2x + 6)dx = x^2 + 6x + C$ $f'(x) = 0 \to 2x + 6 = 0 \to x = -3$ $f''(x) = 2 \quad \to f''(-3) = 2 > 0 \quad \to f(-3)$ قيمة صغرى $f(-3) = 0 \to 9 - 18 + C = 0 \to C = 9$ $f(x) = x^2 + 6x + 9$
26	$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow f(x) = \int (4 - 2x)dx = 4x - x^2 + C$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ $f(2) = 12 \Rightarrow 8 - 4 + C = 12 \Rightarrow C = 8$ $f(x) = 4x - x^2 + 8$ b
27	$\int_0^2 kxdx = 6 \quad \to \frac{k}{2}x^2\Big\|_0^2 = 6 \quad \to 2k = 6 \quad \to k = 3$ c
28	$\int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big\|_0^3 = 4\frac{1}{2}$ c

الوحدة الثامنة: الاحتمالات

الدرس الأول: التوافيق والتباديل

أتحقق من فهمي صفحة 127	
	$2 \times 3 \times 4 \times 3 = 54$
أتحقق من فهمي صفحة 128	
a	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
b	$5 \times 4 \times 3 = 60$
أتحقق من فهمي صفحة 130	
a	${}_{10}P_3 = 720$
b	${}_4P_4 = 24$
أتحقق من فهمي صفحة 132	
a	$\frac{9!}{2!} = 181440$
b	$5! = 120$
أتحقق من فهمي صفحة 133	
	${}_8C_5 = 56$
أتحقق من فهمي صفحة 135	
a	$P(A) = \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{7!} = \frac{5}{21}$
b	$P(A) = \frac{\frac{8!}{2!\,6!}}{\frac{16!}{2!\,14!}} = \frac{7}{30}$
أتحقق من فهمي صفحة 137	

a	$P(A) = \frac{\frac{9!}{4!\,5!} \times \frac{5!}{3!\,2!}}{\frac{14!}{7!\,7!}} \approx 0.37$
b	$P(A) = \frac{9P2 \times 7C1 \times 5C4}{14C7} \approx 0.73$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 138

1	$8! = 40320$
2	$9! - 2 \times 7! = 352800$
3	$\frac{6!}{2!\,3!} = 60$
4	$\frac{960}{60} = 16$
5	25872
6	47
7	$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
8	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
9	$\frac{6!}{2!} = 360$
10	$\frac{5!}{2!} = 60$
11	$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$
12	$2 \times 4 \times 4! = 192$
13	28
14	36

15	${}_{10}C_4=210$
16	${}_6C_1\times{}_4C_3+{}_6C_2\times{}_4C_2+{}_6C_3\times{}_4C_1=194$
17	6
18	$\frac{n!}{(n-2)!}=42 \rightarrow n(n-1)=42 \rightarrow n=7$
19	$\frac{n!}{(n-3)!}=10\times\frac{n!}{(n-2)!} \rightarrow n(n-1)(n-2)=10n(n-1) \rightarrow n=12$
20	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!}=26n \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6}=26n \rightarrow n=14$
21	$\frac{n!}{(n-5)!\,5!}=\frac{n!}{(n-7)!\,7!} \rightarrow (n-5)(n-6)=42 \rightarrow n=12$
22	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!}-\frac{(n-2)!}{(n-5)!\,3!}=64 \rightarrow n=10$
23	$5!=120$
24	${}_{24}P_2\times{}_{22}C_2=127512$ ${}_{14}P_1\times{}_{10}P_1\times{}_{13}P_2=21840$ $P(A)=\frac{21840}{127512}\approx 0.17$
25	${}_7C_2=21 \rightarrow P(A)=\frac{1}{21}$
26	${}_6C_2\times{}_3C_2=45,\ {}_9C_4=126, \rightarrow P(A)=\frac{45}{126}\approx 0.36$
27	${}_6P_2\times{}_3C_2=90, \rightarrow P(A)=\frac{90}{126}\approx 0.7$
28	$P(A)=\frac{1}{10^5-1}$
29	${}_8C_3=56 \rightarrow P(A)=\frac{4}{56}$

30	${}_{12}P_{10}=239500800$ $8\times7\times{}_{10}P_8=101606400$ $P(A)=\frac{101606400}{239500800}\approx 0.42$
31	${}_{12}P_{10}=239500800$ $4\times 2\times 2\times {}_{10}P_8 = 29030400$ $P(A)=\frac{29030400}{239500800}\approx 0.12$
32	$\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow r!=1 \rightarrow r=0 \ \ or \ \ r=1$
33	إجابة محتملة: يراد اختيار لجنة ثلاثية من بين 10 موظفين في شركة منهم سعيد وأمين وصادق، ما احتمال أن تتكون اللجنة من هؤلاء الزملاء الثلاثة؟ الإجابة: $\frac{1}{10C3}$
34	$\frac{mC2\times nC2}{(m+n)C4}=0.9\times\frac{mC1\times nC3}{(m+n)C4} \rightarrow (m-1)=\frac{3}{5}(n-2)$ $\rightarrow 5(m-1)=3(n-2)$ إذن أقل قيمة لـ m وn على الترتيب هي: 4 و7

الدرس الثاني: المتغيرات العشوائية

أتحقق من فهمي صفحة 141

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

أتحقق من فهمي صفحة 143

$X = \{1, 3, 4, 6\}$

X	1	3	4	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

أتحقق من فهمي صفحة 144

a) g=0.1

b) 0.25+0.1=0.35

c) 0.25+0.1+0.35=0.7

d) 3

أتحقق من فهمي صفحة 146

a)

X	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{7}{50}$	$\frac{22}{50}$	$\frac{18}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$

b) $E(X) = \frac{119}{50} = 2.38$

أتحقق من فهمي صفحة 147

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{2}{15}$

$E(X) = 0.8$

أتحقق من فهمي صفحة 149

a	$E(X) = 1.4$
b	$Var(X) = 0.14$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 149

1	$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2	$X = \{2, 3\}$
3	$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4	$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$
5	

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

6

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \frac{8}{27}$$
$$= \frac{19}{27}$$

7

X	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

8	7
9	$3b + 0.2 + 0.15 + 0.29 = 1 \rightarrow b = 0.12$
10	$P(2 < X \leq 8) = 0.15 + 0.29 + 0.24 = 0.68$
11	$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.2 = 0.8$

12

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{6}{115}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{21}{46}$	$\frac{91}{460}$

13

$$E(X) = -2 \times 0.13 - 1 \times 0.27 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.18 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.1$$
$$= 0.39$$

14

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{5}{12} + 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{6} \approx 5.17$$

15

$$E(X) = 1 \times \frac{7}{500} + 2 \times \frac{30}{500} + 3 \times \frac{58}{500} + 4 \times \frac{135}{500} + 5 \times \frac{150}{500} + 6 \times \frac{70}{500} + 7 \times \frac{40}{500} + 8 \times \frac{10}{500}$$
$$\approx 4.62$$

16

$$-1 \times a + 0 \times 4b + 1 \times 2b + 2a = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad a + 2b = \frac{5}{12}$$
$$a + 4b + 2b + a = 1 \quad \rightarrow \quad 2a + 6b = 1$$
$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{1}{12}$$

17

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{3}{253}$	$\frac{30}{253}$	$\frac{90}{253}$	$\frac{195}{506}$	$\frac{65}{506}$

$$E(X) = 2.5$$

18

$$-2a + 3(1 - a) = 2 \quad \rightarrow a = -0.2$$
$$Var(Y) = 4 \times -0.2 + 9 \times 1.2 - 4 = 6$$

19

1

20

السحب دون إرجاع،

لأنه لو كان مع الإرجاع لظهرت النواتج $(2,2), (5,5)$ التي تُعطي المجاميع 4 و10

21

X	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

22

$(3,H,H,H),(5,H,H,H,T,T),(5,H,H,T,H,T),(5,H,H,T,T,H),$
$(5,H,T,H,H,T),(5,H,T,H,T,H),(5,H,T,T,H,H),(5,T,H,H,H,T),$
$(5,T,H,H,T,H),(5,T,H,H,H,T),(5,T,H,T,H,H),(5,T,T,H,H,H)$

$$P(X)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{32}=\frac{1}{6}$$

23

إجابة محتملة:

X	1	3	5
P(X)	0.1	0.3	0.6

اختبار نهاية الوحدة الثامنة

1	b
2	d
3	c
4	a
5	c
6	b
7	$5! \times 4! \times 2 = 5760$
8	$4! \times 6! = 17280$
9	$5! \times 4! = 2880$
10	$\frac{4!}{3!} = 4$
11	${}_6P_3 \times {}_6P_5 = 86400$
12	${}_6P_1 \times {}_6P_6 \times {}_5P_1 = 21600$
13	${}_6P_4 \times {}_8P_4 \times 5 = 3024000$
14	$\frac{1}{14}$
15	$\frac{1}{28}$
16	0.4
17	$P(A) = \frac{2! \times 2!}{4!} = \frac{1}{6}$
18	<table><tr><td>X</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{1}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td><td>$\frac{2}{14}$</td><td>$\frac{5}{14}$</td><td>$\frac{3}{14}$</td></tr></table>
19	$E(X) = \frac{3}{14} + \frac{24}{14} + \frac{20}{14} + \frac{70}{14} + \frac{45}{14} \approx 11.6$
20	$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

21	$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$
22	$0.25 + k + 0.33 + 2k = 1 \quad \rightarrow \quad k = 0.81$
23	$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.25 = 0.75$
24	$E(X) = 1 \times 0.25 + 2 \times 0.81 + 3 \times 0.33 + 4 \times 1.62 = 9.34$ $V(X) = (1)^2 \times 0.25 + (2)^2 \times 0.81 + (3)^2 \times 0.33 + (4)^2 \times 1.62 - (9.34)^2$ $= 23.04$
25	$\frac{n!}{(n-4)!\,4!} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \quad \rightarrow (n-4)!\,4! = (n-3)!\,3!$ $\rightarrow \quad n - 3 = 4 \quad \rightarrow \quad n = 7$
26	$a = \frac{1}{5}$ و $b = \frac{1}{10}$ $a = \frac{1}{4}$ و $b = \frac{1}{16}$
27	G: 1, 2, 3, 4, 5, 6 P(G): $\frac{1}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{36}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{11}{36}$
28	$P(2 < G \leq 5) = \frac{5+7+9}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$
29	$E(G) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472$

الوحدة التاسعة: المتتاليات والمتسلسلات

الدرس الأول: المتتاليات والمتسلسلات

أتحقق من فهمي صفحة 158	
a	$a_1 = 1\ ,\quad a_2 = \frac{2}{3}\ ,\quad a_3 = \frac{3}{5}\ ,\quad a_4 = \frac{4}{7}$
b	$a_1 = -2\ ,\quad a_2 = 16\ ,\quad a_3 = -216\ ,\quad a_4 = 4096$
c	$a_1 = 1\ ,\quad a_2 = 4\ ,\quad a_3 = 9\ ,\quad a_4 = 8$
أتحقق من فهمي صفحة 158	
a	$a_n = \frac{2n-1}{2n}$
b	$a_n = (-3)^n$
أتحقق من فهمي صفحة 159	
a	$7 + 10 + 13 + 16 + \cdots + 25 = \sum_{k=1}^{7} (3k + 4)$
b	$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1}$
أتحقق من فهمي صفحة 160	
a	$\sum_{k=1}^{7} \frac{5k-2}{2} = 63$
b	$\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2 = 90$
أتحقق من فهمي صفحة 161	

	$5+8+11=\sum_{k=1}^{3}(3k+2)=24$
أتحقق من فهمي صفحة 163	
a	$\sum_{k=1}^{10}3k^2=1155$
b	$\sum_{k=1}^{20}(7k-2)=1430$
c	$\sum_{k=1}^{5}-4k^3=-900$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 164	
1	$a_1=0\ ,\quad a_2=6\ ,\quad a_3=24\ ,\quad a_4=60$
2	$a_1=6\ ,\quad a_2=0\ ,\quad a_3=-18\ ,\quad a_4=-27$
3	$a_1=\frac{1}{2}\ ,\quad a_2=\frac{2}{5}\ ,\quad a_3=\frac{2}{7}\ ,\quad a_4=\frac{8}{41}$
4	$a_1=\frac{1}{e}\ ,\quad a_2=\frac{2}{e^2}\ ,\quad a_3=\frac{3}{e^3}\ ,\quad a_4=\frac{4}{e^4}$
5	$a_1=0\ ,\quad a_2=\frac{1}{6}\ ,\quad a_3=\frac{1}{6}\ ,\quad a_4=\frac{3}{20}$
6	$a_1=1\ ,\quad a_2=-\frac{2}{3}\ ,\quad a_3=\frac{3}{5}\ ,\quad a_4=-\frac{4}{7}$
7	$a_n=(-1)^n\frac{1}{n+2}$
8	$a_n=\frac{3^n}{n^2}$
9	$a_n=\begin{cases}n, & n \text{ فردي} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ زوجي}\end{cases}$

10	$a_n = (-1)^{n-1}(5)^n$
11	$a_n = (-1)^{n-1}$
12	$a_n = \frac{2n+1}{10n}$
13	$a_n = 2n + 2$
14	162 عمودًا
15	$\sum_{k=1}^{10} k^2$
16	$\sum_{k=1}^{10} 2k$
17	$\sum_{k=1}^{13} \frac{k}{k+1}$
18	$\sum_{k=1}^{6} \left(\frac{-2}{3}\right)^k$
19	$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\ln(k+1)}$
20	$\sum_{n=1}^{6} (-2)^n = 42$
21	$\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2+1}{n+1} = \frac{257}{30}$
22	$\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3^n+1} = \frac{7}{20}$

23	$\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{2} = \frac{91}{2}$
24	$\sum_{k=1}^{9} (12k - 24) = 324$
25	$\sum_{k=1}^{20} (k^3 - 1) = 44080$
26	100 ضغطة
27	عدد الصفوف 5
28	19
29	لهما المجموع نفسه لأن الجمع عملية تبديلية. أما عند كتابتهما بصيغة المجموع فيكتبان بطريقتين مختلفتين لأنه يجب مراعاة ترتيب الحدود. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5} (2k - 1)$ $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = \sum_{k=1}^{5} (11 - 2k)$
30	$a_n = 1 + 3^{n-1}$
31	$2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2^{\frac{7}{8}}, 2^{\frac{15}{16}}, \ldots$ $a_n = 2^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$

الدرس الثاني: المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

أتحقق من فهمي صفحة 168	
a	حسابية أساسها -3
b	ليست حسابية
أتحقق من فهمي صفحة 170	
a	$a_n = -3n + 4$ $a_{15} = -41$
b	$a_n = 2n - 31$ $a_{15} = -1$
أتحقق من فهمي صفحة 171	
	$26 = a_1 + 15d \ , \ 71 = a_1 + 6d$ $a_1 = 101 , d = -5$ $a_n = -5n + 106$
أتحقق من فهمي صفحة 172	
	$70, 85, 100$
أتحقق من فهمي صفحة 174	
a	$159 = 7 + 8(n-1) \quad \rightarrow \quad n = 20$ $S_{20} = \frac{20}{2}(7 + 159) = 1660$
b	$d = 5 - 8 = -3$ $S_{17} = \frac{17}{2}(2(8) + 16 \times -3) = -272$
أتحقق من فهمي صفحة 175	
a	بما أن الزيادة السنوية ثابتة وتساوي 400، فإن إنفاق الجمعية السنوي يشكل متتالية حسابية أساسها 400
b	$a_n = 400n - 100$

c	$a_{10} = 3900$
d	$S_{10} = \frac{10}{2}(300 + 3900) = 21000$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 175
1	ليست حسابية
2	حسابية أساسها 6-
3	ليست حسابية
4	$a_n = 33n - 8$ $a_{30} = 982$
5	$a_n = 6.4n + 42.3$ $a_{30} = 234.3$
6	$a_n = 12n + 33$ $a_{30} = 393$
7	$a_n = \frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$ $a_{30} = \frac{55}{3}$
8	$a_n = -0.7n + 31.1$ $a_{30} = 10.1$
9	$a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$ $a_{30} = -\frac{23}{2}$
10	$16, 23, 30$
11	$20, 37, 54, 71$
12	$-53, -44, -35, -26, -17$
13	$a_n = -3n + 12$
14	$401 = 1 + 4(n-1) \rightarrow n = 101$, $S_{101} = \frac{101}{2}(1 + 401) = 20301$

15	$56.7 = 0.7 + 2(n-1) \rightarrow n = 29 , \quad S_{29} = \frac{29}{2}(0.7 + 56.7) = 832.3$
16	$a_1 = 0 , a_{80} = 158 , S_{80} = \frac{80}{2}(0 + 158) = 6320$
17	$S_{10} = \frac{10}{2}(2(20) + (10-1) \times 5) = 425$
18	$S_{15} = \frac{15}{2}(2(9) + (15-1) \times 2.5) = 397.5$
19	$S_{10} = \frac{10}{2}(6 + 60) = 330$
20	$S_{100} = \frac{100}{2}(2(1) + (100-1) \times 2) = 10000$
21	$1, 5, 9$ ألاحظ أنّ الفرق بين كل حدين متتابعين ثابت، وأنه يساوي 4 ؛ أيْ إن المتتالية حسابية أساسها 4
22	$a_n = 4n - 3$
23	$397 = 4n - 3 \rightarrow n = 100$ بما أن n عدد صحيح موجب، إذن يوجد نموذج يحوي 397 نقطة.
24	$51 = a_1 + 2d$ $187 = a_1 + 10d$ بحل النظام نجد $a_1 = 17$ ، $d = 17$ $a_n = 17n$
25	$1000 \div 17 \approx 58.8$ $S_{58} = \frac{58}{2}(17 + 17 \times 58) = 29087$
26	$2, 6, 10, \ldots$ $S_{20} = \frac{20}{2}(2(2) + (20-1) \times 4) = 800$

27	$792 = \frac{n}{2}(2(10) + (n-1) \times 4) \rightarrow n^2 + 4n - 396 = 0$ $\rightarrow (n-18)(n+22) = 0$ $n = 18$
28	$S_n = n^2 + 4n$ $S_1 = 5 \rightarrow a_1 = 5$ $S_2 = 12 \rightarrow a_2 = 12 - 5 = 7$ $d = 7 - 5 = 2$ $a_n = 2n + 3$ $a_{100} = 203$
29	$15, 21, 27, \ldots$ ألاحظ أنّ الفرق بين كل حدين متتابعين ثابت، وأنه يساوي 6؛ أيْ إن المتتالية حسابية أساسها 6
30	$a_6 = 55$
31	$S_7 = 231$
32	$S_{30} = 2S_{20} \rightarrow \frac{30}{2}(2a + 29d) = 2 \times \frac{20}{2}(2a + 19d) \rightarrow a = \frac{11}{2}d$
33	$400 = \frac{30}{2}\left(2a + 29 \times \frac{2}{11}a\right) \rightarrow a = \frac{11}{3},\ d = \frac{2}{3}$
34	$a_{10} = 2a_4 \rightarrow a_1 + 9d = 2(a_1 + 3d) \rightarrow a_1 = 3d$ $a_{18} = 50 \rightarrow a_1 + 17d = 50 \rightarrow 3d + 17d = 50 \rightarrow d = 2.5 \rightarrow a_1 = 7.5$
35	$S_n = 6n^2 + 8n$ $a_n = S_n - S_{n-1} = (6n^2 + 8n) - \left(6(n-1)^2 + 8(n-1)\right) = 12n + 2$ ألاحظ أن الحد العام لهذه المتتالية هو على صورة الحد العام للمتتالية الحسابية، إذن هذه المتتالية حسابية.

36	$3, a-b, 3a-4b, 2a+2b$ $(a-b)-3 = 3a-4b-(a-b) \rightarrow a-2b=-3$ $(2a+2b)-(3a-4b) = (3a-4b)-(a-b) \rightarrow 3a-9b=0 \rightarrow a=3b$ $b=-3\ , a=-9$ $3, -6, -15, -24$ $a_1 = 3, d=-9$ $S_{25} = \frac{25}{2}(2(3)-(24)\times -9) = -2625$
37	$\dots, x, y, \dots$ $d = y-x$ $a = y+(y-x) = 2y-x$
38	$a_8 = a_1 + 7d = a_1 + 7(y-x)$ $x = a_1 + 7(y-x) \rightarrow a_1 = 8x-7y$

الدرس الثالث: المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

أتحقق من فهمي صفحة 180	
a	المتتالية هندسية أساسها 4
b	المتتالية هندسية أساسها -1
أتحقق من فهمي صفحة 182	
a	$a_n = 5(3)^{n-1}$ ، $a_{10} = 98415$
b	$a_n = 3(-2)^{n-1}$ ، $a_{10} = -1536$
أتحقق من فهمي صفحة 183	
	$a_n = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ أو $a_n = -24\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
أتحقق من فهمي صفحة 184	
	$18, 36, 72, 144$
أتحقق من فهمي صفحة 185	
a	129
b	1275
أتحقق من فهمي صفحة 188	
a	$S_\infty = \frac{100}{9}$
b	المتسلسلة متباعدة، ولا يمكن إيجاد مجموع حدودها
c	$S_\infty = \frac{45}{4}$

	أتحقق من فهمي صفحة 189
	$0.\overline{57} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$
	أتحقق من فهمي صفحة 190
	$S_\infty = 113.33\ m$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 190
1	المتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
2	المتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$
3	المتتالية هندسية أساسها -5
4	$a_n = 0.04(5)^{n-1}$, $a_8 = 3125$
5	$a_n = 20\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$, $a_8 \approx 71.7$
6	$a_n = 0.005(2)^{n-1}$, $a_8 = 0.64$
7	$a_n = 3(-2)^{n-1}$, $a_8 = -384$
8	$a_n = e^2(e^2)^{n-1}$, $a_8 = e^{16}$
9	$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$, $a_8 = 8\sqrt{2}$
10	$a_n = -3(-4)^{n-1}$
11	$a_n = \frac{7}{15}(15)^{n-1}$ $a_n = -\frac{7}{15}(-15)^{n-1}$

12	$a_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
13	$7\sqrt[4]{27}, \quad 21\sqrt{3}, \quad 63\sqrt[4]{3}$ $-7\sqrt[4]{27}, \quad 21\sqrt{3}, \quad -63\sqrt[4]{3}$
14	$16, 8, 4, 2$
15	$S_{12} = -5460$
16	$S_{20} = -254.56$
17	$\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{422}{243}$
18	$\sum_{k=0}^{10} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{6141}{1024}$
19	$\sum_{k=1}^{8}(3)^{k-1} = 3280$
20	$S_\infty = 3$
21	$S_\infty = \frac{18}{5}$
22	المتسلسلة متباعدة، ولا يمكن إيجاد مجموع حدودها
23	$0.\overline{25} = \frac{25}{99}$
24	$0.\overline{625} = \frac{625}{999}$
25	$32.\overline{32} = 32 + \frac{32}{99} = \frac{3200}{99}$
26	$a_n = 7000\left(\frac{7}{5}\right)^{n-1}$

27	$a_4 = 19208$ $a_5 = 26891$
28	$a_3 = 2000\left(\frac{5}{4}\right)^2 = 3125$
29	$2000\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} > 50000 \rightarrow (1.25)^{n-1} > 25 \rightarrow n > 1 + \log_{1.25} 25 \approx 15.4$ أي بعد 16 سنة
30	$a_n = 3(4)^{n-1}$
31	$a_7 = 3(4)^6 = 12288$
32	$200 = \frac{80}{1-r} \rightarrow r = \frac{3}{5}$ $\frac{80\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{1-\frac{3}{5}} > 199 \rightarrow n > 10.4$ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو 11
33	$\frac{4p+4}{6p+2} = \frac{3p+3}{4p+4} \rightarrow p = 5$
34	$32, 24, 18 \rightarrow r = \frac{3}{4}$ إذن المتتالية هندسية لامنتهية متقاربة , $S_\infty = 128$
35	$r = 2\,, a_1 = 7$
36	$n = 8$
37	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + k(2)^k}{2^k}$
38	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$
39	$20 + 10 + 5 + \cdots = \frac{20}{1-0.5} = 40$

40	الإحداثيات x هي: $20-5+1.25-\ldots$ وهي تشكل متتالية هندسية حدها الأول 20 وأساسها -0.25 ، فيكون مجموعها هو $S_\infty = \frac{20}{1+0.25} = 16$ الإحداثيات y هي: $10-2.5+0.625-\ldots$ وهي تشكل متتالية هندسية حدها الأول 10 وأساسها -0.25 ، فيكون مجموعها هو $S_\infty = \frac{10}{1+0.25} = 8$ نقطة نهاية النمط الحلزوني $(16,8)$
41	<table><tr><td>رقم الشكل</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>عدد المثلثات البيضاء</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td></tr><tr><td>عدد المثلثات الزرقاء</td><td>1</td><td>4</td><td>13</td><td>40</td></tr></table>
42	$a_n = 3^n$
43	$a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

اختبار نهاية الوحدة التاسعة

1	d
2	c
3	c
4	c
5	97
6	$\frac{195}{16}$
7	$\frac{73}{85}$
8	15550
9	$a_n = -9n + 209 \ , \ a_{20} = 29$
10	$a_n = -23n + 238 \ , \ a_{20} = -222$
11	$a_n = 11n - 14 \ , \ a_{20} = 206$
12	$a_n = -2n + 27 \ , \ a_{20} = -13$
13	$-299 = 7 - 6(n-1) \ \rightarrow \ n = 52$ $S_{52} = \frac{52}{2}(7 - 299) = -7592$
14	$-0.1 = -10 + 0.1(n-1) \ \rightarrow \ n = 100$ $S_{100} = \frac{100}{2}(-10 - 0.1) = -505$
15	1130
16	$S_{12} = 846$
17	$a_1 = 20 \, , a_2 = 24 \ \rightarrow \ d = 4$ $504 = \frac{k}{2}\big(2(20) + 4(k-1)\big) \ \rightarrow \ k = 12$
18	$4 = ar^3 \ \rightarrow \ r = \sqrt[3]{\frac{4}{a}} \ \rightarrow \ S_\infty = \frac{a}{1 - \sqrt[3]{\frac{4}{a}}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{4}}$
19	$S_{24} = 2580$

20	$a_n = 144\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$, $a_8 = -\frac{1}{248832}$
21	$a_n = -8\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $a_8 = -\frac{1}{2048}$
22	$a_n = 0.3(-0.3)^{n-1}$, $a_8 = 0.00006561$
23	$\frac{15}{\sqrt[3]{5}}, \frac{45}{\sqrt[3]{25}}$
24	$S_{10} = \frac{2(1-3^{10})}{1-3} = 59048$
25	$S_8 = \frac{100(1-0.9^8)}{1-0.9} = 569.53279$
26	$243 = a_1(-3)^5 \rightarrow a_1 = -1$ $a_n = -(-3)^{n-1}$
27	$a_{10} = 4(4)^9 = 1048576$
28	$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$
29	$1.\overline{7} = 1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$
30	$S_{15} = \frac{5(1-2^{15})}{1-2} = 163835$
31	$S_\infty = 4a_2 \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 4a_1 r \rightarrow r = 0.5$
32	$a_1 r^3 = 40,\ a_1 r^6 = -320 \rightarrow r = -2,\ a_1 = -5$ $S_{12} = \frac{-5(1-(-2)^{12})}{1--2} = 6825$
33	c
34	c
35	a